

Faculté Polytechnique



Topographie

Edouard RIVIÈRE-LORPHÈVRE
Service de Génie Mécanique



Ces notes de cours sont exclusivement destinées aux étudiants de la Faculté Polytechnique de Mons. Elles ne peuvent donc être ni reproduites, ni diffusées, sous quelque forme que ce soit, en dehors de ce cercle restreint.

Dernière mise à jour: mai 2019

Table des matières

1	Topographie	1
1.1	Buts et objectifs du cours	1
1.2	Contenu du cours	2
1.3	Vocabulaire de la mesure	2
1.3.1	Grandeur et unité	2
1.3.2	Mesurages	2
1.3.3	Résultats de mesure	2
1.3.4	Etalons	3
1.3.5	Caractéristiques des instruments de mesure	3
1.4	Généralités concernant les mesures	4
1.4.1	Incertitude de mesure	4
1.4.2	Incertitude liée aux instruments de mesure	6
1.5	Lexique	7
	Références	7
2	Notions fondamentales - projections cartographiques	8
2.1	Historique	8
2.2	Modélisation de la surface terrestre	11
2.2.1	Vocabulaire de base	11
2.3	Ellipsoïde de référence	11
2.4	Projection cartographique	13
2.5	Lexique	16
	Références	16
3	Nivellement	17
3.1	Introduction	17
3.2	Nivellement direct	17
3.3	Matériel employé pour le nivellement direct	18
3.4	Nivellement par cheminement	19
3.4.1	Erreurs de mesure	21

3.4.2	Exemple d'application	21
3.5	Nivellement indirect	23
3.6	Lexique	24
	Références	24
4	Mesures et matériel employés en planimétrie	25
4.1	Introduction	25
4.2	Mesure des angles	26
4.2.1	Mise en station	28
4.3	Lecture d'angle	29
4.3.1	Erreurs de mesure	30
4.4	Mesures de distances	31
4.4.1	Mesures à plat	31
4.4.2	Mesurage optique	32
4.4.2.1	Mesure parallactique	32
4.4.2.2	Mesure stadimétrique	33
4.4.3	Mesurage électronique	33
4.4.4	Réduction des distances	36
	Références	36
5	Etablissement d'un canevas planimétrique	37
5.1	Introduction	37
5.2	Notion de gisement	38
5.2.1	Calcul du gisement	38
5.2.2	Détermination de la constante d'orientation	40
5.3	Etablissement d'un canevas d'ensemble	41
5.3.1	Réalisation d'une polygonale	41
5.4	Ajout de points dans un canevas	42
5.5	Méthode par intersections des rayons de visée	44
5.5.1	Introduction	44
5.5.2	Résolution pour deux stations	44
5.5.3	Prise en compte de mesures excédentaires	46
5.5.3.1	Principe de la méthode des moindres carrés	46
5.5.3.2	Calcul de variation	47
5.5.3.3	Forme matricielle	48
5.5.3.4	Unités d'emploi pratique	49
5.5.3.5	Exemple d'application	49
5.6	Méthode par relèvement	52

5.6.1	Introduction	52
5.6.2	Etablissement d'un croquis	52
5.6.3	Calcul de la position du point approché	53
5.6.3.1	Calcul des gisements des rayons de visée	53
5.6.3.2	Méthode de Ponthenod (méthode de Gauss)	55
5.6.4	Recherche du point définitif par la méthode des moindres carrés	56
5.6.5	Exemple d'application	58
5.6.5.1	Introduction	58
5.6.5.2	Recherche des coordonnées du point M approché	58
5.6.5.2.1	Calcul des gisements	58
5.6.5.2.2	Méthode de Ponthenod	59
5.6.5.3	Recherche de la position définitive du point M	60
5.7	Méthode par multilatération	62
5.7.1	Coordonnées du point approché	63
5.7.2	Calcul du point définitif	64
5.7.2.1	Variation selon X	64
5.7.2.2	Variation selon Y	64
5.7.2.3	Moindres carrés	64
5.7.3	Exemple d'application	65
5.8	Lexique	67
	Références	67

6 Implantation 68

6.1	Introduction	68
6.2	Implantation d'alignements	68
6.2.1	Jalonnement	68
6.2.1.1	Jalonnement sans obstacles	69
6.2.1.2	Franchissement d'une butte	70
6.2.2	Intersection d'alignements	70
6.2.3	Perpendiculaire à un alignement	71
6.2.3.1	Perpendiculaire au ruban	71
6.2.3.2	Perpendiculaire à l'équerre optique	72
6.2.3.3	Perpendiculaire au théodolite	73
6.2.4	Parallèle à un alignement	73
6.2.5	Prolongement d'alignements	74
6.2.5.1	Prolongement sans obstacles	75
6.2.5.2	Prolongement avec obstacle	75

6.2.5.2.1	Au ruban	75
6.2.5.2.2	Au théodolite	75
6.2.6	Contournement d'obstacle	76
6.2.6.1	Contournement au ruban	76
6.2.6.2	Contournement au théodolite	77
6.2.7	Alignement faisant un angle donné avec un autre alignement	78
6.2.7.1	Au théodolite, intersection accessible	78
6.2.7.2	Au théodolite, intersection inaccessible	79
6.2.7.3	Au ruban	79
6.2.8	Pan coupé régulier	80
6.3	Implantation planimétrique	81
6.3.1	Exemple pratique	83
6.3.1.1	Présentation du problème	83
6.3.1.2	Implantation	84
6.3.1.3	Retour au repère global	86
6.3.1.4	Vérification de l'implantation	86
6.4	Implantation altimétrique	86
6.5	Piquetage de pentes	88
6.6	Lexique	89
	Références	89
7	Techniques modernes employées en topographie	90
7.1	Introduction	90
7.2	GPS	90
7.2.1	Principe général	91
7.2.1.1	Segment spatial	91
7.2.1.2	Segment de contrôle	92
7.2.1.3	Segment utilisateur	92
7.2.2	Techniques de positionnement	93
7.2.2.1	Types de positionnements basés sur les pseudo-distances	93
7.2.2.2	Types de positionnements basés sur la mesure de phase	94
7.3	Photogrammétrie	95
7.3.1	Principe de base	95
7.3.2	Photogrammétrie terrestre	96
7.3.3	Photogrammétrie numérique	97
7.3.4	Restitution de bâtiments	99
7.4	Lexique	100

Références	100
----------------------	-----

A Formulaire de topographie	101
------------------------------------	------------

Chapitre 1

Topographie

Demandez à un géomètre la mesure de la terre, mais ne lui demandez pas celle de son nez

- P. Masson, *Les Pensées d'un Yoghi*

1.1 Buts et objectifs du cours

La topographie est la science ayant pour objet la représentation sur un plan des formes du terrain avec les détails naturels et artificiels qu'il porte [1]. Le but à atteindre est l'établissement d'une minute de levé (établie sur papier ou sous forme numérique) qui reprend en détail l'ensemble de ces mesures. Trois techniques sont reliées aux études topographiques :

- la géodésie est l'étude de la forme de la terre et la mesure de ses dimensions, elle vise également l'établissement de la position de points de repère connus en altitude (repères de nivellement) ou en altitude et position (repères géodésiques) ;
- la topométrie est l'application de procédures géométriques permettant d'exploiter les mesures topographiques pour établir la position et l'altitude des points mesurés ;
- l'arpentage est la mesure de la superficie des terrains.

La détermination des coordonnées et de diverses caractéristiques de points dans l'espace occupe une place importante dans la plupart des études à buts environnementaux. L'objet de ce cours est de balayer l'ensemble des méthodes et techniques à la disposition des bureaux d'études pour acquérir des informations géométriques des objets tridimensionnels, qui composent nos paysages urbains et naturels. Il ne s'agit évidemment pas de former des topographes chevronnés, mais bien de donner une culture technique de base pour permettre d'une part un dialogue avec les professionnels et d'autre part, lorsque c'est nécessaire, la mise en oeuvre de protocoles de mesures élémentaires.

1.2 Contenu du cours

Le cours présentera tout d'abord l'établissement des cartes et des repères de base établis en topographie (chapitre 2). Les références prises sont celles de l'institut géographique national qui établit les règles et contrôle les canevas pour notre pays. Le principe du nivellement sera développé au chapitre 3. Une présentation du matériel et des méthodes classiques de relèvement topographique sera ensuite réalisée (figure 4). Quelques méthodes courantes de relevé planimétriques seront ensuite détaillées (chapitre 5). Les techniques d'implantation seront détaillées au chapitre 6. Le cours se conclura par le chapitre 7 qui évoquera quelques techniques avancées employées en topographie.

1.3 Vocabulaire de la mesure¹

1.3.1 Grandeur et unité

- Grandeur (mesurable) : attribut d'un phénomène, d'un corps ou d'une substance qui est susceptible d'être distingué qualitativement et déterminé quantitativement. La longueur est une grandeur générale ; la longueur d'une pièce donnée est une grandeur particulière.
- Unité (de mesure) : grandeur particulière, définie et adoptée par convention, à laquelle on compare les autres grandeurs de même nature pour les exprimer quantitativement par rapport à cette grandeur. Exemple : le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de $1/299\,792\,458^e$ de seconde.

1.3.2 Mesurages

- Mesurage : ensemble d'opérations ayant pour but de déterminer une valeur d'une grandeur.
- Mesurande : grandeur particulière soumise à mesurage.
- Grandeur d'influence : grandeur qui n'est pas le mesurande mais qui a un effet sur le résultat du mesurage.

1.3.3 Résultats de mesure

- Exactitude de mesure : étroitesse de l'accord entre le résultat d'un mesurage et une valeur vraie de mesurande.
- Répétabilité (des résultats de mesurage) : étroitesse de l'accord entre les résultats des mesurages successifs du même mesurande, mesurages effectués dans la totalité des mêmes conditions de mesure.
- Reproductibilité (des résultats de mesurage) : étroitesse de l'accord entre les résultats des mesurages successifs du même mesurande, mesurages effectués en faisant varier les conditions de mesure.
- Incertitude de mesure : paramètre, associé au résultat d'un mesurage, qui caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande.

1. La majeure partie de cette section est extraite de [2]

1.3.4 Etalons

- Etalon : mesure matérialisée, appareil de mesure, matériau de référence ou système de mesure destiné à définir, réaliser, conserver ou reproduire une unité ou une ou plusieurs valeurs d'une grandeur pour servir de référence.
- Etalonnage : ensemble des opérations établissant, dans des conditions spécifiées, la relation entre les valeurs de la grandeur indiquée par un appareil de mesure ou les valeurs représentées par une mesure matérialisée ou par un matériau de référence, et les valeurs correspondantes de la grandeur réalisée par des étalons.
- Traçabilité : propriété du résultat d'un mesurage ou d'un étalon tel qu'il puisse être relié à des références déterminées par l'intermédiaire d'une chaîne ininterrompue de comparaisons ayant toutes des incertitudes déterminées.

1.3.5 Caractéristiques des instruments de mesure

- Calibre (ou gamme de mesure) : étendue d'échelle que l'obtient pour une position donnée des commandes d'un instrument de mesure.
- Sensibilité : quotient de l'accroissement de la réponse d'un instrument de mesure par l'accroissement correspondant du signal d'entrée.
- Résolution (d'un dispositif afficheur) : la plus petite différence d'indication d'un dispositif afficheur qui peut être perçue de manière significative.
- Justesse : aptitude d'un instrument de mesure à donner des indications exemptes d'erreur systématique.
- Fidélité : aptitude d'un instrument de mesure à donner des indications très voisines lors de l'application répétée du même mesurande dans les mêmes conditions de mesure.
- Exactitude : aptitude d'un instrument à donner des réponses proches d'une valeur vraie.
- Hystérésis : propriété d'un instrument de mesure dont la réponse à un signal d'entrée donné dépend de la séquence des signaux d'entrées précédents.

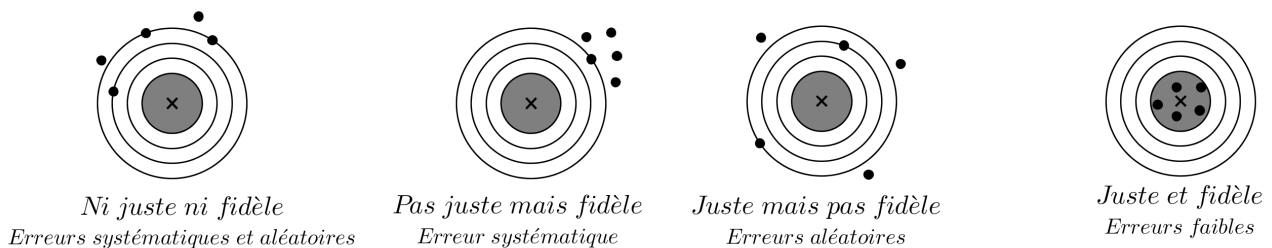


Figure 1.1 – Caractérisation d'un instrument de mesure ou d'une procédure.

1.4 Généralités concernant les mesures

La topographie est une forme particulière de métrologie à grande échelle. Les procédures à mettre en oeuvre pour une mesure efficace visent deux objectifs principaux contradictoires :

- la plus grande précision possible dans les mesures ;
- la minimisation du nombre de mesures pour minimiser le coût de la campagne.

Dans cette optique, il est nécessaire de préparer la campagne de mesure et de garder à l'esprit l'utilisation qui sera faite des mesures pour une disposition optimale des essais.

1.4.1 Incertitude de mesure

Toute mesure est inévitablement entachée d'erreur qu'il faut estimer pour pouvoir les compenser [2]. L'incertitude de mesure est l'étendue estimée des valeurs dans laquelle se situe la valeur vraie de la grandeur mesurée. Toute indication de résultat de mesurage doit être accompagnée de l'incertitude de mesurage. Les effets de faibles erreurs, amplifiées par les grandes distances mesurées peuvent être rapidement significatives. Par exemple, une erreur de 1 mgon² sur une visée effectuée à 100 m équivaudra à une erreur de $100 \cdot \tan \frac{2\pi}{400} \approx 1,6 \cdot 10^{-3} m$ pour une seule visée. Ces écarts seront encore amplifiés lorsque la mesure d'un point résultera d'un ensemble de mesures isolées. Le cas est encore plus problématique lorsqu'il s'agit d'un point résultant de l'intersection de deux visées pour lesquelles les rayons de visée se coupent selon des angles très aigus ou très obtus. Cette incertitude est la résultante de facteurs intrinsèques aux instruments utilisés, de facteurs intrinsèques aux méthodes utilisées et de facteurs d'influence extérieurs. Exemples de sources d'incertitude :

- environnement de la mesure (température, vibrations,...) ;
- matériel de mesure (guidage, règles,...) ;
- traitement des mesures (filtrage, échantillonnage, algorithmes,...) ;
- métrologue (expérience, connaissances,...) ;
- grandeur mesurée ;
- procédure de mesure ;
- constantes physiques et facteurs de conversion.

Une quantification des incertitudes liées aux mesures est nécessaire pour pouvoir s'auto-juger sur la qualité des mesures effectuées. Historiquement, on employait la notion de calcul d'erreur. La tendance est à l'évolution vers la notion statistique d'incertitude de mesure. Dans cette optique, on définit le résultat d'une mesure comme une variable aléatoire, avec deux causes produisant des écarts avec la valeur 'vraie' :

- les erreurs systématiques (écart constant avec la valeur vraie, pouvant être corrigé ou non) ;
- les erreurs aléatoires (effet non prévisible, de moyenne nulle et présentant une certaine dispersion).

L'hypothèse la plus courante sur la distribution des erreurs aléatoires est la distribution normale. Pour rappel, la fonction de densité d'une distribution normale de moyenne m et d'écart type σ est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \quad (1.1)$$

La portion comprise entre $-\sigma$ et σ englobe 68% de la distribution (95,5 % entre -2σ et 2σ , 99,7 % entre -3σ et 3σ).

2. L'unité de mesure d'angle en topographie est conventionnellement le grade noté gon, il correspond à l'angle interceptant $1/400^e$ de tour

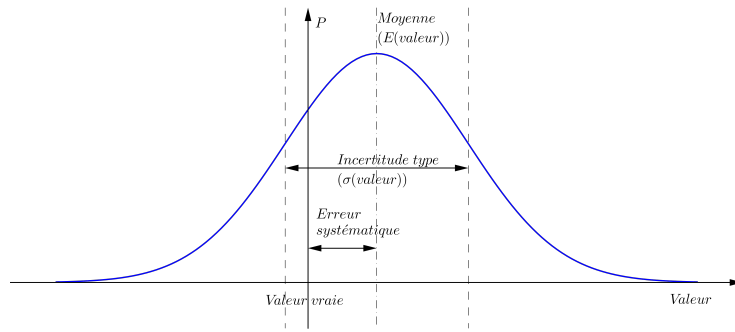


Figure 1.2 – Résultat de mesure comme variable aléatoire.

Pour rappel, si on effectue plusieurs mesures pour indiquer une grandeur, le résultat annoncé est l'espérance mathématique de l'ensemble des mesures (moyenne arithmétique) :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1.2)$$

L'écart type associé à la distribution est :

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_R)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_R)^2} \quad (1.3)$$

Avec \bar{x}_R qui est la moyenne de la distribution (inconnue, \bar{x} étant un indicateur de cette valeur). Un estimateur non biaisé de cet écart type est l'écart type expérimental :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2} \quad (1.4)$$

L'écart type annoncé sera l'écart type de la moyenne à savoir :

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (1.5)$$

Le résultat sera annoncé comme $\bar{x} \pm k\sigma_{\bar{x}}$ avec k le coefficient d'élargissement (k=1 pour indiquer que 68 % est dans l'intervalle, k=2 pour considérer 95 % dans l'intervalle,...). On prendra soin d'indiquer la mesure et l'incertitude dans les mêmes unités et en conservant le même nombre de chiffres significatifs pour les deux (typiquement un ou deux pour l'incertitude).

A titre d'exemple, si on compare les séries de dix mesures élémentaires (exemptes d'erreurs systématiques) de distance x et y reprises dans le tableau 1.1

n°	x (m)	n°	x (m)	n°	y (m)	n°	y (m)
1	100,123	6	100,023	1	100,002	6	100,003
2	100,225	7	100,544	2	100,005	7	100,004
3	99,876	8	99,975	3	99,997	8	99,995
4	99,456	9	99,889	4	99,999	9	99,996
5	99,777	10	100,112	5	99,997	10	100,002

TABLE 1.1 – Mesures expérimentales

Si à l'issue de ces mesures on n'annonce que la moyenne, on obtient des résultats équivalents à savoir 100 m, ce qui ne permet pas de remarquer que la dispersion des mesures est nettement plus importante pour la première série. Le calcul de l'incertitude donne lieu aux résultats suivants :

$$s_x = 0,288 \text{ m} \quad s_y = 0,036 \text{ m} \quad (1.6)$$

$$\sigma_{\bar{x}} = 0,096 \text{ m} \quad \sigma_{\bar{y}} = 0,001 \text{ m} \quad (1.7)$$

en choisissant un coefficient d'élargissement standard de 2, on peut donc annoncer les résultats suivants :

x=100,00 m \pm 0,19 m (k=2)

y=100,00 m \pm 0,002 m (k=2)

ce qui permet de juger immédiatement d'une dispersion près de cent fois plus importante sur les mesures x.

1.4.2 Incertitude liée aux instruments de mesure

Cette donnée est fournie dans la documentation technique de l'appareil de mesure sous forme d'une valeur fixe ou d'une constante plus une partie fonction de la grandeur mesurée. Deux commentaires peuvent être faits à ce sujet :

- les valeurs annoncées sont les valeurs en sortie d'usine (après calibration, suivant le constructeur, les périodes de validités sont différentes, il faut veiller de manière périodique à faire réétalonner l'appareil, typiquement tous les 6 à 24 mois) ;
- les valeurs annoncées sont valables pour un emploi correct du matériel ;
- les valeurs annoncées sont souvent une incertitude type multipliée par 2,7, on a donc 99% de chances d'être dans cet intervalle (ou 1 % d'être en-dehors !).

1.5 Lexique

Français	Anglais	Français	Anglais
arpentage	(land) surveying	justesse	accuracy
erreur aléatoire	random error	mesurage	measurement
erreur systématique	systematic error	mesurande	mesurand
étalon	standard	répétabilité	repeatability
étalonnage	calibration	reproductibilité	reproducibility
exactitude de mesure	accuracy of measurement	résolution	resolution
fidélité	reliability	sensibilité	sensitivity
gamme de mesure	effective (measuring) range	topographie	topography
géodésie	geodesy	topométrie	topometry
incertitude de mesure	uncertainty of measurement	traçabilité	traceability

TABLE 1.2 – Lexique du chapitre 1

Références

- [1] J-B Henry. *Cours de topographie et de topométrie générale*. Université Louis Pasteur Strasbourg, 2008.
- [2] E. Filippi. *Métrologie dimensionnelle*. Mutuelle d'édition FPMs, 2010.

Chapitre 2

Notions fondamentales - projections cartographiques

Since my youth geography has been for me the primary object of study. When I was engaged in it, having applied the considerations of the natural and geometric sciences, I liked, little by little, not only the description of the earth, but also the structure of the whole machinery of the world, whose numerous elements are not known by anyone to date

- G. Mercator, *Introduction to Ptolemy's Geography*

2.1 Historique

La géodésie est une science assez récente. L'établissement de cartes géographiques rigoureuses, en-dehors des cartes maritimes, a débuté en France à la fin du dix-septième siècle. L'évolution des techniques a permis l'établissement de relevés de plus en plus précis. Chaque pays s'est progressivement doté d'un réseau géodésique (ensemble de points uniformément répartis sur le territoire précisément mesurés et périodiquement vérifiés) sur lequel s'appuient les mesures secondaires. En Belgique, c'est l'Institut Géographique National (ING/NGI) qui est entre autre chargé de la mesure et de l'entretien de ce réseau primaire.



Figure 2.1 – Logo de l'ING belge.

Les premiers réseaux de nivellement de la Belgique ont été établis sous la responsabilité du Ministère de la Défense nationale [1] :

- Le Nivellement général exécuté de 1840 à 1879 comportait quelques 8500 points répartis sur toute l'étendue du pays. Il servit de base au tracé des courbes de niveau de l'ancienne carte topographique de base (dite d'état major). Ce réseau n'était pas repéré par des marques particulières, seul l'emplacement des points cotés était décrit. La surface de niveau Zéro était le Zéro du Dépôt de la Guerre ou Zéro D (celui-ci est défini comme étant le niveau de la marée basse moyenne à vive eau ordinaire à Ostende).

- Le Nivellement de Précision exécuté de 1889 à 1892 comportait quelques 2000 repères de nivellement jalonnant un polygone frontière et deux transversales, Anvers-Mons et Liège-Dinant. La surface de niveau Zéro était le niveau moyen de la mer à Ostende (il se situe à 2,012 mètres au-dessus du Zéro D).
- Différents réseaux locaux furent exécutés de 1892 à 1945, dans diverses parties du pays. Certains d'entre eux furent repérés. La surface d'origine de certains de ces réseaux semble douteuse.

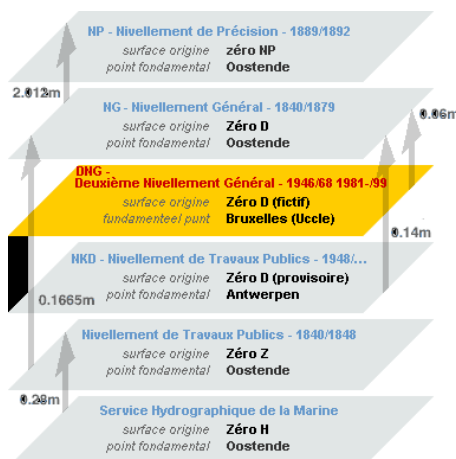


Figure 2.2 – Relation entre les surfaces de niveau zéro (doc IGN).

Le réseau actuel est le Deuxième Nivellement Général (DNG), exécuté de 1947 à 1968. Il comporte quelques 19000 repères, répartis sur tout le territoire. En 1950, une première compensation du réseau de triangulation a été exécutée. Très vite on constata que le réseau, dont la précision était suffisante pour une production cartographique à moyenne échelle, n'était pas assez précis pour d'autres applications. Entre 1955 et 1969, des observations supplémentaires ont été exécutées. Une compensation globale selon la méthode des moindres carrés a été réalisée en 1972 (établissement du Belgian datum 72 figure 2.3). Le renouvellement de ce réseau a été réalisé de 1981 à 2000. Entre 1988 et 2003, l'IGN a réactualisé et densifié le réseau des points au sol pour atteindre une densité moyenne de 1 point par 8 km².



Figure 2.3 – Belgian datum 72 (ref IGN). Figure 2.4 – Subdivision actuelle du réseau belge.

Le réseau est constitué de repères planimétriques (coordonnées et altitude connues) et altimétriques (altitude seule connue). Ces points peuvent être des points caractéristiques d'ouvrages existants (figure 2.5), des rivets dans le sol (figure 2.6) ou des bornes en fonte

(figure 2.7). La référence de l'ensemble de ces points est maintenant consultable librement sur le web.



Figure 2.5 – Exemple de repère planimétrique élevé : beffroi de Mons. Le pied de la girouette au sommet de la tour sert de référence planimétrique ; le centre de la boule sert de référence altimétrique.



Figure 2.6 – Exemple de repère planimétrique au sol : rivet en cuivre dans le béton, place de Flandre (document IGN).



Figure 2.7 – Reprère altimétrique en fonte sur la façade du bâtiment du Dolez, rue de l'Alchimiste (document IGN).

2.2 Modélisation de la surface terrestre

2.2.1 Vocabulaire de base

La seule référence absolue en tout point du globe est la direction du fil à plomb qui définit la direction de la pesanteur. Le champ de pesanteur est défini comme $\vec{g} = \vec{\nabla}W$. Les surfaces iso W correspondent aux courbes d'altitude constante.

La terre est un solide qui tourne autour de la ligne des pôles (ligne reliant le pôle nord au pôle sud). Son intersection avec un plan contenant la ligne des pôles (figure 2.8) définit un méridien. L'angle λ formé entre ce méridien et un méridien de référence (observatoire de Greenwich) définit la longitude du lieu (λ valeur de 0 à 180 degrés est ou ouest). L'intersection de la terre avec un plan perpendiculaire à la ligne des pôles définit un parallèle. Le parallèle à égale distance des deux pôles est appelé équateur. La latitude (ϕ) d'un lieu est l'angle entre la verticale locale et le plan de l'équateur.

Les pôles autour desquels la terre tourne sont appelés pôles géographiques. La mesure par l'intermédiaire d'un boussole donne la direction du nord magnétique. Le nord magnétique a une position variable au cours du temps (la terre a connu plusieurs inversions de pôles), on estime sa vitesse actuelle à 55 km par année, sa position en 2007 mesurée par L'institut polaire français est à une latitude de 83,95° nord et une longitude de 121.02° ouest, soit à une distance de 673 km du pôle nord géographique.

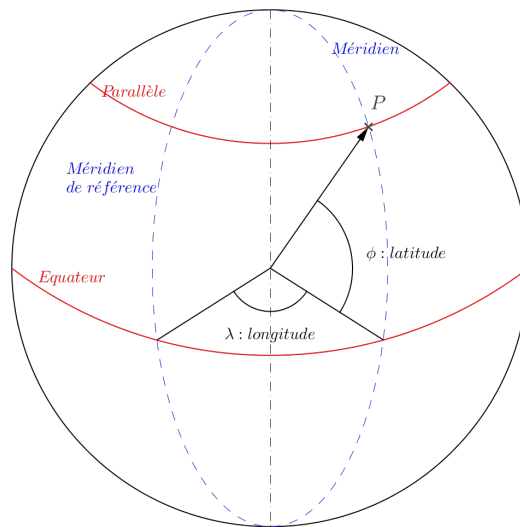


Figure 2.8 – Définition de la longitude et de la latitude d'un point P.

2.3 Ellipsoïde de référence

Dès le deuxième siècle avant Jésus-Christ, les grecs avaient déterminé une approximation du rayon terrestre (Eratostène avait estimé une circonférence de 39375 km en mesurant la différence d'inclinaison des rayons solaires entre Alexandrie et Assouan, cette valeur est étonnamment proche de la réalité). La mesure de la circonférence de la terre a un temps servi de référence pour le système métrique. Au début du dix-neuvième siècle, un important travail a été mené pour mesurer la portion de méridien de Barcelone à Dunkerque. Suite à ce relevé, le mètre a été défini comme la dix-millionième partie du quart de méridien terrestre. Cette définition a par la suite évolué, mais la topographie en a conservé son unité de mesure angulaire : le grade (ayant

pour symbole gon) qui est défini par l'angle interceptant $1/400^e$ de cercle (un angle d'un grade sur un méridien correspondait donc à 100 km).

En réalité, les équipotentielles de la surface terrestre ont une forme plus complexe appelée géoïde (figure 2.9).

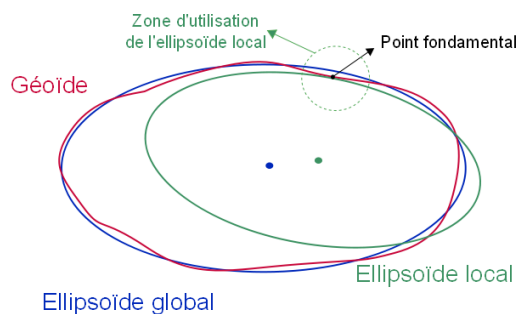


Figure 2.9 – Géoïde et ellipsoïde (Source : pôle ARD, adess, domaine public).

Les diverses observations ont permis d'observer que la terre se rapprochait de la forme d'une ellipsoïde de révolution dont les dimensions sont les suivantes :

- demi-grand axe a 6378388 m ;
- demi-petit axe b 6356912 m.

L'axe de révolution est le petit axe qui est dirigé selon la ligne des pôles géographiques. La variation est donc assez minime (22 km) et du même ordre de grandeur que les extrêmes variations d'altitudes sur le globe (20 km des fonds les plus profonds au sommet de l'Everest). Malgré cela, chaque pays a également la possibilité de définir sa propre ellipsoïde locale qui tend à approcher au mieux la géoïde localement sur son territoire (figure 2.9).

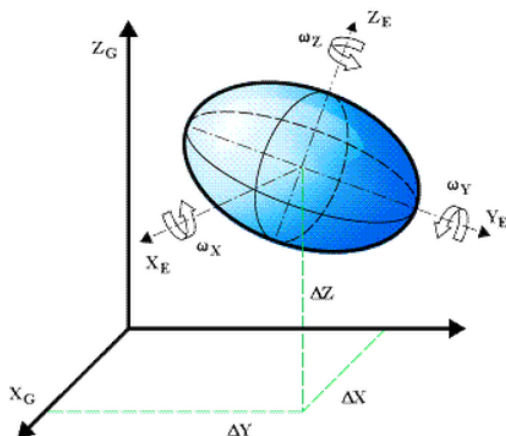


Figure 2.10 – Ellipsoïde.

2.4 Projection cartographique

L'objectif des projections cartographiques est de reproduire sur plan la surface non développable de la terre. La projection cartographique établit une application au sens mathématique du terme qui à tout couple de coordonnées géographiques (ϕ, λ) fait correspondre un point de coordonnée (x, y) sur un plan. Classiquement, la projection est établie sur un cylindre ou un cône tangent ou sécant à l'ellipsoïde (figure 2.11). La zone de tangence est naturellement celle qui est représentée avec le moins d'altérations.

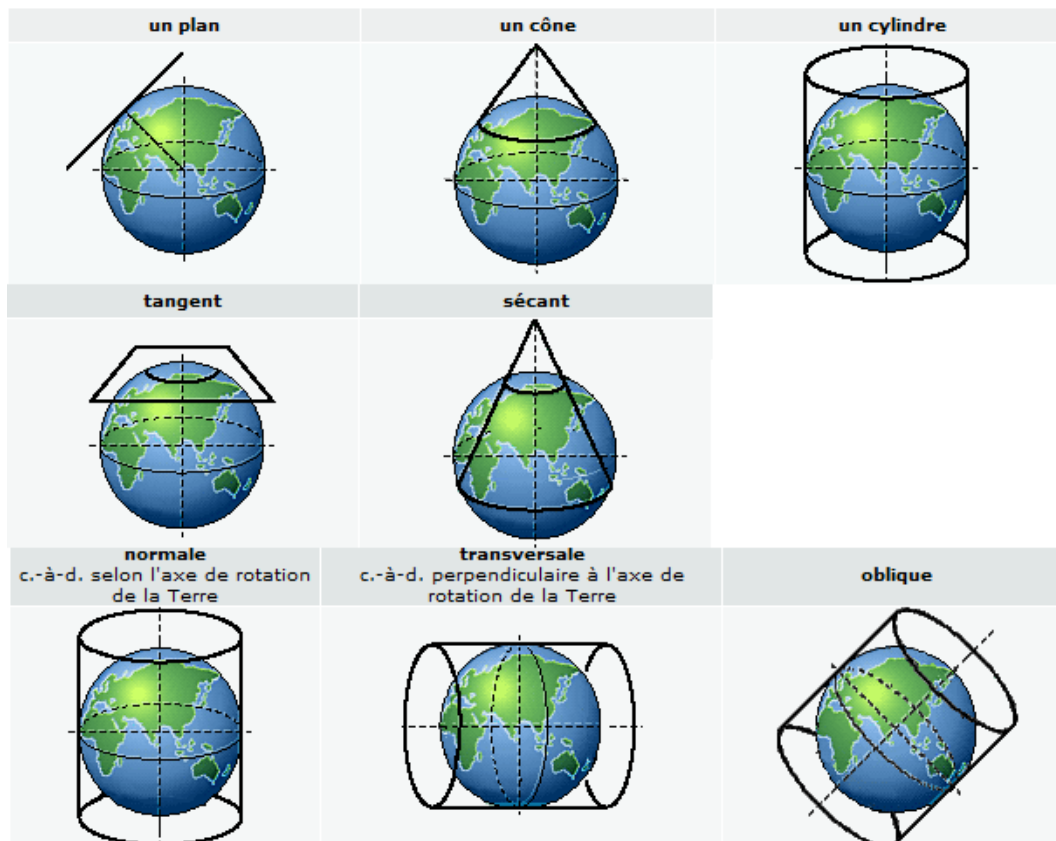


Figure 2.11 – Différents types de projections cartographiques [1].

Les projections peuvent être équivalentes (les surfaces se conservent) ou conformes (les proportions sont conservées). Pour évaluer les déformations engendrées par la projection, il est possible de superposer au plan l'image d'un cercle de rayon donné (indicateur de Tissot). Comme il n'existe pas de projection à la fois conforme et équivalente, divers systèmes ont coexisté au cours du temps. Il est clair que le passage d'une représentation spatiale à une représentation plan amène inmanquablement des distorsions. C'est pourquoi les mesures effectuées sur des plans doivent être corrigées pour tenir compte de cet effet. En pratique, les corrections étant faibles, elles ne seront appliquées que pour les mesures à grande échelle.

Les projections les plus fréquents sont les projections cylindriques de Mercator (figure 2.13) et la projection conique de Lambert (figure 2.14) qui est la référence en topographie.

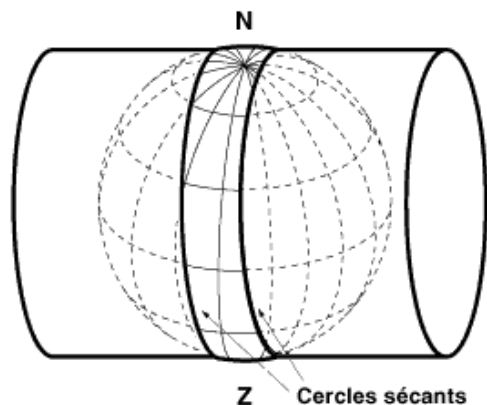


Figure 2.12 – Principe de la projection de Mercator.

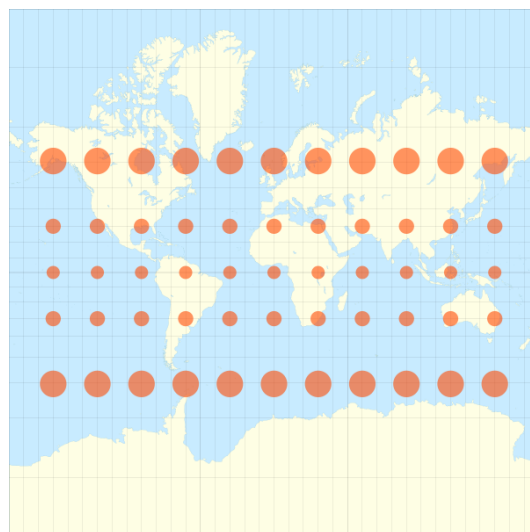


Figure 2.13 – Projection de Mercator avec indicatrice de Tissot.

En fonction de l'étendue du territoire considéré, il peut être nécessaire d'avoir recours à plusieurs projections Lambert pour un même pays (la France a défini quatre zones Lambert dites I, II, III et IV plus une projection pour la Corse). Pour la Belgique, deux références de projection

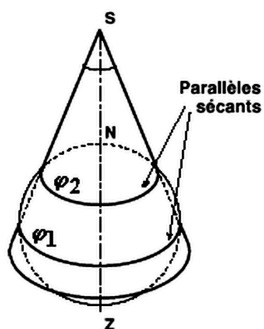


Figure 2.14 – Projection conique de Lambert.

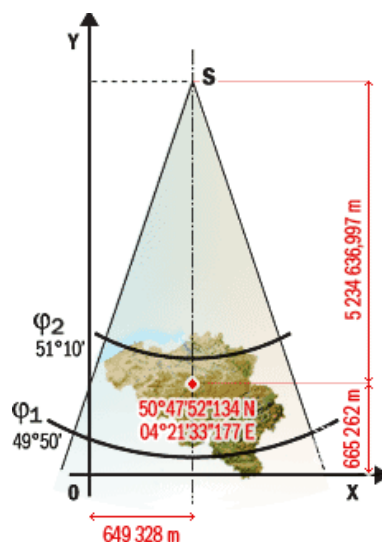
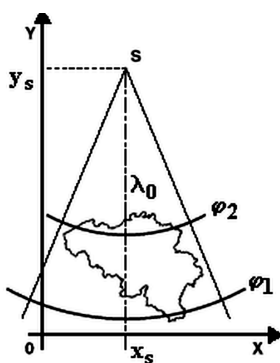


Figure 2.15 – Projection conique de Lambert pour la Belgique.

Lambert ont été employées : Lambert 1972 (se référant à l'ellipsoïde Hayfort datant de 1924) puis actuellement Lambert 2008 (se référant à GRS 80 datant de 1980). Les données principales sont reprise dans le tableau 2.1 ; le point central pour la Belgique est Uccle.

		Projection Lambert 1972	Projection Lambert 2008
Ellipsoïde	Identité	Hayford	GRS80
	Demi grande axe (a)	6378388,0 m	6378137,0 m
	Aplatissement (f)	1 / 297,0	1/298,257222101
	Parallèles standard ϕ_1 ϕ_2	49°50'00"00204 N 51°10' 00"00204	49°50' N N 51°10'N
Origine	Latitude origine	90°	50°47 min52"134 N
	Méridien central	4°22'02"952 E	4°21' 33"177 E
Coordonnées de l'origine	x0	150.000,013 m	649328,0 m
	y0	5400088,438 m	665262,0 m

TABLE 2.1 – Définition des projections cartographiques belges

Un algorithme simple permet la correspondance directe $(\phi, \lambda) \rightarrow (x, y)$ et inverse pour une projection Lambert donnée. On calcule les constantes :

$$m_1 = \frac{\cos \phi_1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi_1}} \quad m_2 = \frac{\cos \phi_2}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi_2}} \quad (2.1)$$

$$t_1 = \frac{\tan(\pi/4 - \phi_1/2)}{\left(\frac{1 - e \sin \phi_1}{1 + e \sin \phi_1}\right)^{e/2}} \quad t_2 = \frac{\tan(\pi/4 - \phi_2/2)}{\left(\frac{1 - e \sin \phi_2}{1 + e \sin \phi_2}\right)^{e/2}} \quad t_0 = \frac{\tan(\pi/4 - \phi_0/2)}{\left(\frac{1 - e \sin \phi_0}{1 + e \sin \phi_0}\right)^{e/2}} \quad (2.2)$$

$$n = \frac{\ln m_1 - \ln m_2}{\ln t_1 - \ln t_2} \quad g = \frac{m_1}{n t_1^n} \quad r_0 = a g t_0^n \quad (2.3)$$

La transformation directe suit le cheminement suivant :

$$t_0 = \frac{\tan(\pi/4 - \phi/2)}{\left(\frac{1 - e \sin \phi}{1 + e \sin \phi}\right)^{e/2}} \quad (2.4)$$

$$r = a g t^n \quad (2.5)$$

$$\theta = n(\lambda - \lambda_0) \quad (2.6)$$

$$x = x_0 + r \sin \theta \quad (2.7)$$

$$y = y_0 + r \cos \theta \quad (2.8)$$

La transformation inverse suit :

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + [r_0 - (y - y_0)]^2} \quad (2.9)$$

$$t = \left(\frac{r}{a g}\right)^{1/n} \quad (2.10)$$

$$\theta = \arctan \frac{x - x_0}{r_0 - (y - y_0)} \quad (2.11)$$

ϕ est calculé de manière itérative avec

$$\phi_0 = \pi/2 - 2 \arctan t \quad (2.12)$$

$$\phi_{i+1} = \pi/2 - 2 \arctan \left(t \left(\frac{1 - e \sin \phi_i}{1 + e \sin \phi_i} \right)^{e/2} \right) \quad (2.13)$$

Jusqu'à obtenir la convergence entre deux itérations avec un seuil déterminé.

2.5 Lexique

Français	Anglais	Français	Anglais
ellipsoïde	ellipsoid	projection conique	conic projection
géοïde	geoid	projection cylindrique	cylindrical projection
indicateur de Tissot	Tissot's indicatrix	projection équivalente	equal-area projection
méridien	meridian	projection normale	<i>normal projection</i>
parallèle	parallel	projection oblique	<i>oblique projection</i>
pôle géographique	geographic pole	projection plane	azimuthal projection
pôle magnétique	magnetic pole	projection sécante	<i>secant projection</i>
projection cartographique	map projection	projection tangente	<i>tangential projection</i>
projection conforme	conformal projection	projection transverse	<i>transverse projection</i>

TABLE 2.2 – Lexique du chapitre 2 (les valeurs en italique sont des traductions littérales)

Références

- [1] Site web de l'institut Géographique National. www.ngi.be.
- [2] P. Tournois. Topographie : géodésie, toponométrie, arpentage. *Techniques*, C300 :1–21, 1984.
- [3] S. Miles. *Topographie et toponométrie moderne*. Eyrolles, 1999.
- [4] M. Brabant. *Maîtriser la topographie - Des observations au plan*. Eyrolles, 2003.

Chapitre 3

Nivellement

That's the second biggest mountain I've ever seen

- G. Threepwood, *Monkey island*

3.1 Introduction

Le nivellement est l'opération qui consiste à relever les différences d'altitude entre différents points d'un canevas. Cette information est importante dans les projets d'implantation pour de nombreux aspects pratiques (écoulements, dévers, ...). Il existe différentes techniques qui se démarquent par les outils et les méthodes mis en oeuvre. On distingue notamment :

- le nivellement direct qui mesure via des lectures sur mire les différences d'altitudes entre points ;
- le nivellement indirect qui calcule les différences d'altitudes entre points à partir de mesures de distances et angulaires ;
- le nivellement barométrique qui exploite la variation de pression atmosphérique avec l'altitude ;
- le nivellement hydrostatique basé sur le principe des vases communicants.

Dans le cadre de ce cours, nous nous contenterons de présenter des techniques de nivellement direct et indirect ordinaires qui sont les plus fréquemment employées en pratique.

3.2 Nivellement direct

Le nivellement direct consiste à lire à l'aide d'une lunette les graduations portées par deux mires stationnées en des points judicieusement choisis. L'écart entre les lectures permet de déterminer la différence d'altitude entre deux points selon :

$$Z_{P_2} = Z_{P_1} + AR - AV \quad (3.1)$$

Z représente l'altitude d'un point, AR et AV les lectures arrière et avant (on oriente le travail de P_1 vers P_2). On distingue dans ce type de méthodes :

- le nivellement par rayonnement (les différences sont prises par rapport à un seul point de référence), cette méthode permet une vérification rapide d'un ensemble de points à partir d'un seul stationnement de l'appareil (sondage, points de berges,...) mais ne permet aucune détection d'erreurs de mesures ;

- le nivellement par cheminement (les différences sont mesurées de proche en proche), cette méthode permet d'employer des techniques de compensation des erreurs et de contrôle du résultat ;
- le nivellement par franchissement (cas pour lequel un obstacle empêche le cheminement) réalisé avec deux appareils en simultané) ;
- le nivellement d'auscultation (suivi dans le temps d'ouvrages) qui combine les caractéristiques des précédentes techniques.

La précision typique varie de 0,1 millimètre à quelques millimètres selon le matériel et les protocoles mis en oeuvre.

3.3 Matériel employé pour le nivellement direct

L'opération de nivellement est classiquement opérée en plaçant une mire (règle graduée, figure 3.1) verticalement sur le point dont on souhaite déterminer l'altitude et sur un point de référence et en effectuant une lecture à l'aide d'un niveau (instrument définissant un plan horizontal de visée, figure 3.2). Les mires (ou stadia) sont des règles graduées généralement en aluminium (parfois en invar) de section rectangulaire. Les mires sont graduées en centimètres (le millimètre est estimé à la lecture) ou portent un code barre (figure 3.3) pour des mesures automatisées. Comme les anciens niveaux optiques inversaient l'image, les anciennes mires portaient les chiffres à l'envers pour faciliter la lecture.



Figure 3.1 – Graduations portées par une mire.

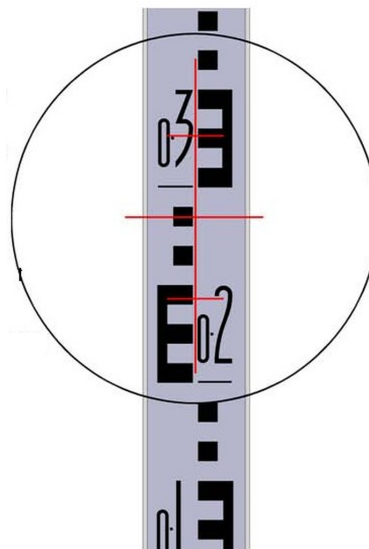


Figure 3.2 – Lecture sur une mire.



Figure 3.3 – Mire en invar à code barre.

Les niveaux peuvent être :

- manuels (nécessitent le réglage du plan horizontal lors de la mise en station) ;
- automatiques (l'axe se règle de manière automatique si l'écart à l'horizontale est dans une plage raisonnable, figure 3.4) ;
- numériques (lecture automatique sur mire à code barre).

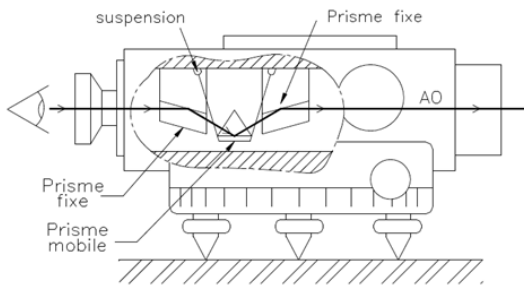


Figure 3.4 – Niveau automatique [1] .

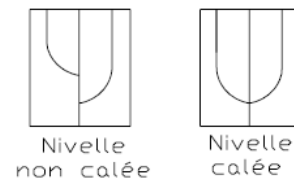


Figure 3.5 – Bulle coupée [2].

Le réglage des niveaux manuels nécessite de vérifier que l'axe optique est parfaitement horizontal. pour vérifier ce réglage, les niveaux sont munis de nivelles (fonctionnant sur le principe du niveau à bulle). Pour augmenter la sensibilité (et donc la précision), les niveaux sont typiquement munis de systèmes optiques visant les deux extrémités de la bulle (on parle de bulle coupée) ; le réglage est correct lorsque les deux ménisques sont en concordance (figure 3.5).

3.4 Nivellement par cheminement

Le nivellement par cheminement consiste en la réalisation systématique de deux mesures en maintenant fixe la lunette (on parlera de mesures 'en avant' et 'en arrière') pour déterminer de proche en proche l'altitude de points entre lesquels on stationne une lunette (figure 3.6).

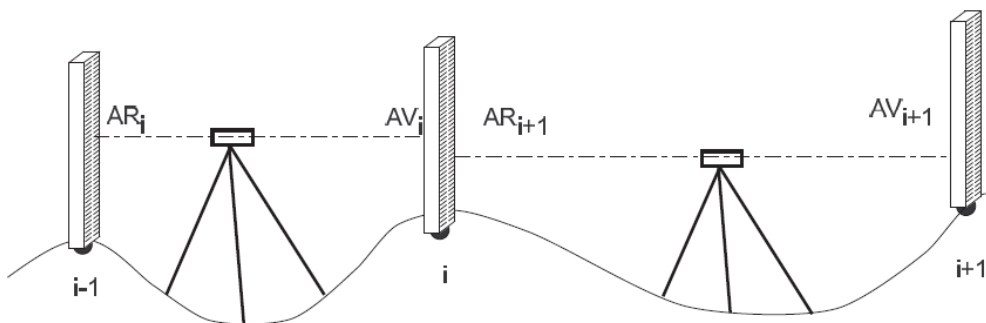


Figure 3.6 – Principe du nivellement par cheminement.

Les mesures sont effectuées de manière séquentielle, on déplace un élément à la fois (mire ou lunette) selon le canevas suivant :

- réglage de la lunette si celle-ci n'intègre pas de mise à l'horizontale automatique ;
- lecture sur la mire (maintenue verticale) en un point 'arrière' ;
- déplacement de la mire sur le point avant et lecture sur la mire dans la nouvelle position ;
- déplacement de la lunette pour recommencer le cycle.

L'altitude des différents points de station de la mire se calcule de manière cumulée par :

$$Z_{P_n} = Z_{P_0} + \sum_{i=1}^n AR_i - AV_i \quad (3.2)$$

Une première vérification des mesures peut être effectuée en réalisant un cheminement fermé (le dernier point de station correspond au point de départ) dans ce cas, on doit avoir :

$$Z_{P_N} = Z_{P_0} + \sum_{i=1}^N AR_i - AV_i = Z_{P_N} \Rightarrow e = \sum_{i=1}^N AR_i - AV_i = 0 \quad (3.3)$$

La quantité e est appelée écart de fermeture ; les erreurs de mesures font que cette valeur n'est pas exactement nulle (cette valeur peut servir de référence pour attester de la qualité d'une campagne de mesure). On peut corriger l'ensemble des mesures en retranchant l'erreur de fermeture pondérée par la portée des différentes mesures.

$$corr_i = -L_i \frac{\sum_{i=1}^N AR_i - AV_i}{\sum_{i=1}^N L_i} \quad (3.4)$$

Si les portées n'ont pas été relevées, la compensation se fera de manière uniforme sur l'ensemble des mesures.

Si la configuration du terrain empêche la mise en place de la lunette entre deux points (franchissement d'un cours d'eau par exemple), on doit opérer par des visées réciproques (placer l'instrument dans l'alignement de AB à quelques mètres de A en retrait puis à quelques mètres de B en avant). Le dénivelé peut se calculer comme la moyenne des deux résultats obtenus :

$$\Delta Z_{AB} = L_{A1} - L_{B1} = L_{A2} - L_{B2} \quad (3.5)$$

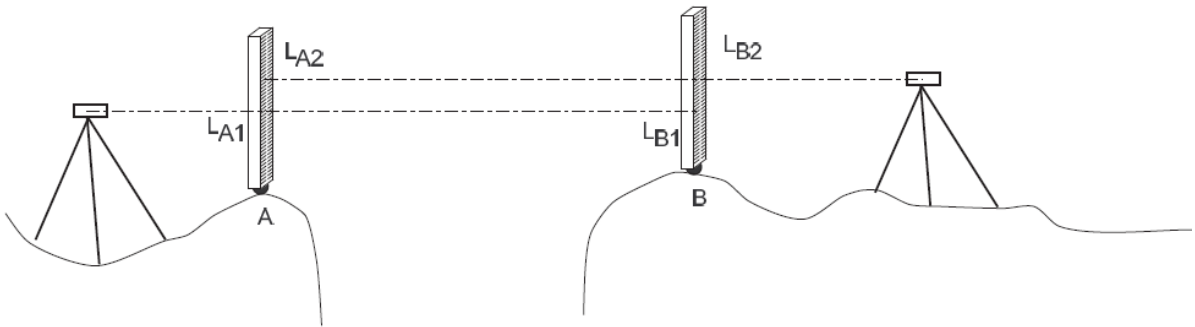


Figure 3.7 – Nivellement indirect.

Lors de mesures souterraines, il est parfois nécessaire de placer la mire 'au plafond' pour l'un ou l'autre des points mesurés (figure 3.8). Dans ce cas de figure, la relation générale 3.1 peut toujours être employée, en affectant d'un signe négatif les lectures effectuées au-dessus du plan de visée.

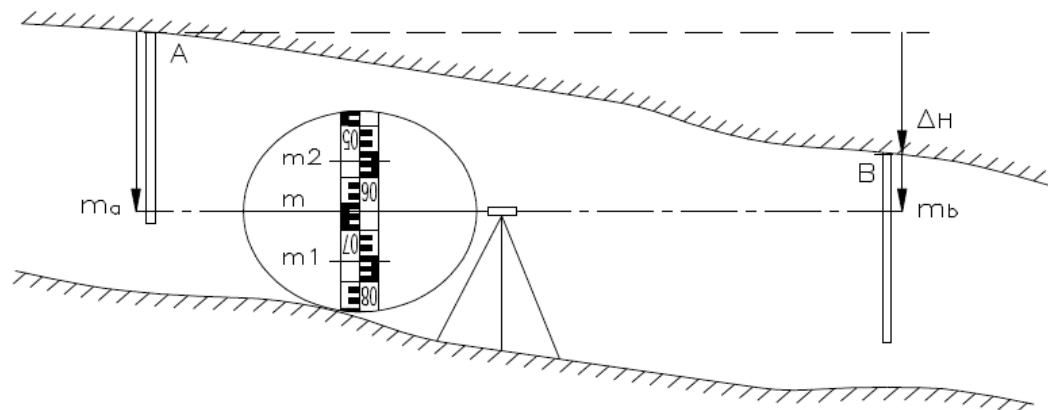


Figure 3.8 – Nivellement en tunnel [2].

3.4.1 Erreurs de mesure

Parmi l'ensemble des erreurs de mesure pouvant affecter le processus de nivellement, on peut noter :

- les erreurs parasites (défaut de calage, erreur de lecture ou de transposition) ;
- les erreurs systématiques (défaut d'étalonnage de la mire, défaut de verticalité de la mire, colimation,...) ;

La colimation représente l'inclinaison de l'axe optique par rapport à l'horizontale lorsque le calage est réalisé de manière correcte. Cette erreur peut être éliminée par l'égalité des portées lors du cheminement (l'erreur s'additionne aux deux lectures qui sont soustraites l'une de l'autre, son effet résultant est donc nul). C'est pourquoi il est recommandé de manière générale d'essayer de respecter l'égalité des portées lors de la réalisation de cheminement.

3.4.2 Exemple d'application

On réalise un cheminement fermé pour déterminer l'altitude de 6 points ; on considère que le point 1 définit la valeur $Z=0$. Les mesures sont reprises dans le tableau 3.1 (L est la portée de la mesure).

mesure	AV (cm)	AR (cm)	L (m)
1	113,4	144,8	40
2	132,7	156,2	35
3	145,7	142,3	50
4	123,5	113	45
5	142,7	121,7	40
6	137,4	117	40

TABLE 3.1 – Nivellement

On calcule l'écart de fermeture en sommant les différences de lectures. On obtient une valeur de -4 mm qui est tout à fait acceptable au vu de la précision des mesures (si un écart anormal apparaissait à ce stade, une nouvelle campagne de mesures devrait être entreprise). Cet écart sera réparti de manière proportionnelle aux portées L des visées :

$$corr_i = -L_i \frac{\sum_{i=1}^N AR_i - AV_i}{\sum_{i=1}^N L_i} \quad (3.6)$$

On obtient finalement les altitudes données dans le tableau 3.2 (les résultats sont arrondis au dixième de millimètre). Le profil est représenté en figure 3.9.

point	ΔZ mes (cm)	correction (cm)	ΔZ final (cm)	H (cm)
1	31,4	0,06	31,46	0,00
2	23,5	0,06	23,56	31,46
3	-3,4	0,08	-3,32	55,02
4	-10,5	0,07	-10,43	51,70
5	-21	0,06	-20,94	41,27
6	-20,4	0,06	-20,34	20,34

TABLE 3.2 – Calcul de l'altitude des points

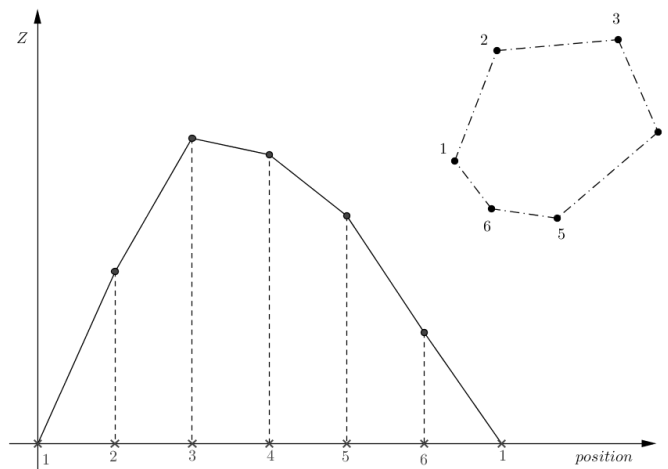


Figure 3.9 – Exemple de nivellement par cheminement.

3.5 Nivellement indirect

L'altitude d'un point peut être calculée à partir de la distance horizontale et de l'angle vertical mesuré dans une campagne d'ajustement planimétrique (figure 3.10).

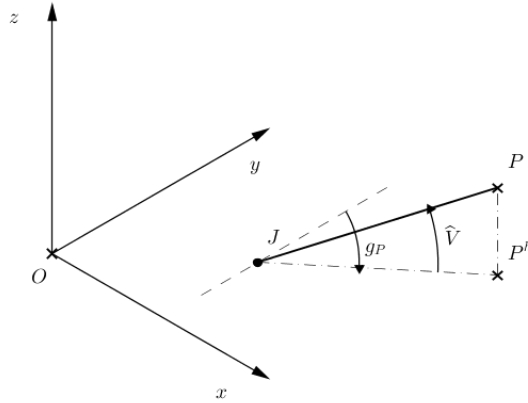


Figure 3.10 – Calcul de l'altitude du point P.

Pour la station J, on peut calculer :

$$d_{h,JP} = \sqrt{(X_J - X_P)^2 + (Y_J - Y_P)^2} \quad (3.7)$$

$$\Delta Z = d_{h,JP} \tan \widehat{V_{PJ}} \quad (3.8)$$

Cette relation peut être employée pour l'ensemble des mesures d'angle vertical ayant été réalisées. Le résultat annoncé sera la moyenne des déterminations. On peut vérifier la cohérence des mesures en constatant que les résultats sont bien identiques au premier ordre.

3.6 Lexique

Français	Anglais	Français	Anglais
altitude	height	- direct	direct levelling
erreur de fermeture	closing error	- hydrostatique	hydrostatic levelling
mesure 'arrière'	<i>backward measurement</i>	- indirect	indirect levelling
mesure 'avant'	<i>forward measurement</i>	- mixte	mixed levelling
mire	survey rod	- optique	spirit (optical) levelling
niveau	level	- par cheminement	pas d'équivalent (running a line of levels and heights)
nivelle	spirit (air, bubble) level	- par cheminement fermé	loop levelling
Nivellement	levelling	- par rayonnement	pas d'équivalent (throwing heights and levels from a known point)
- barométrique	barometric heighting		

TABLE 3.3 – Lexique du chapitre 3 (les valeurs en italique sont des traductions littérales)

Références

- [1] S. Miles. *Topographie et toponométrie moderne*. Eyrolles, 1999.
- [2] M. Brabant. *Maîtriser la topographie - Des observations au plan*. Eyrolles, 2003.

Chapitre 4

Mesures et matériel employés en planimétrie

L'ignorance coûte plus cher que les matériels

- A. Ribeau, *Revue EPI intersection*

4.1 Introduction

Un des problèmes historiques de la topographie était que la précision des mesures de distances était nettement moins performante que les mesures angulaires. Les appareils de mesures angulaires (théodolites figure 4.1) assuraient une précision de mesure qui, jusqu'à un passé récent, n'était pas accessible par des mesures de distances (mesures par report d'un étalon comme une chaîne d'arpenteur, figure 4.2). C'est ce qui justifie l'existence de nombreuses méthodes de mesure planimétriques basées sur des mesures angulaires. Ce chapitre présentera les moyens de mesure d'angles et de distances ainsi que les précautions associées pour des mesures de bonne qualité.



Figure 4.1 – Théodolite de 1737 (©National Maritime Museum, Greenwich, London).



Figure 4.2 – Chaîne d'arpenteur.

4.2 Mesure des angles

L'appareil de mesure des angles en topographie est appelé théodolite. Il est essentiellement constitué de trois axes concourants et de deux goniomètres permettant la mesure d'angles.



Figure 4.3 – Théodolite numérique (document Sokkia).



Figure 4.4 – Théodolite optique.

Il existe deux catégories d'instruments :

- les théodolites électroniques (figure 4.3) à lecture automatique (le processeur intégré permet de gérer la mesure, l'affichage et la sauvegarde des angles) ;
 - les théodolites optiques (figure 4.4) pour lesquels la lecture est effectuée par l'opérateur.
- Les instruments optiques sont en voie de disparition, supplantés par les versions électroniques.

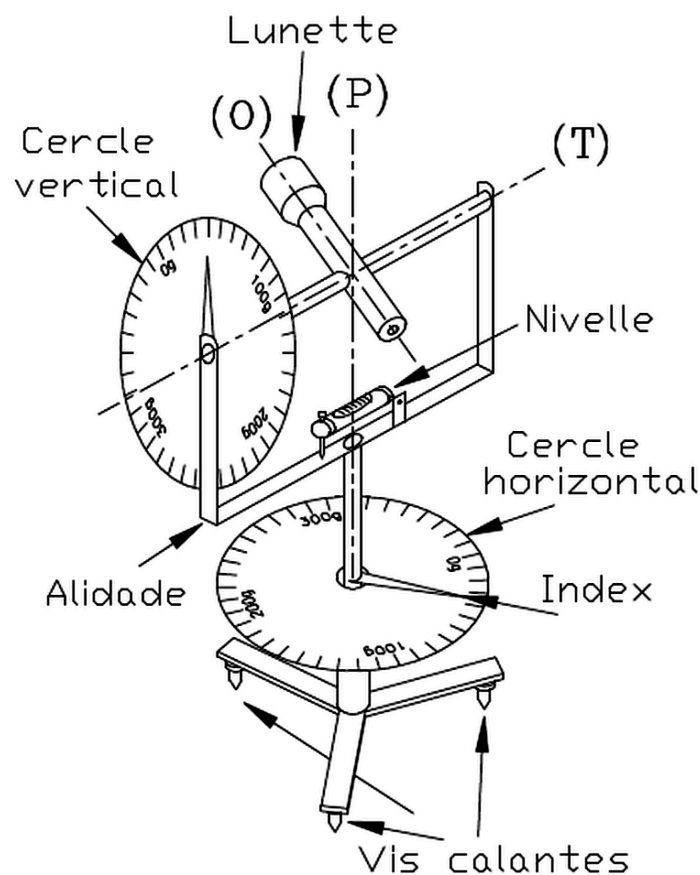


Figure 4.5 – Principe de base d'un théodolite.

On distingue (figure 4.5) :

- le pivot (P) (ou axe principal) il doit via réglage être calé et centré, c'est-à-dire confondu avec la verticale locale (on dit qu'il est alors mis en station) à l'aide des vis calantes ;
- l'axe des tourillons (T) (ou axe secondaire ou axe de basculement) perpendiculaire au précédent ;
- l'axe optique de la lunette ;
- le cercle horizontal centré sur le pivot qui permet la mesure de l'angle horizontal (constitué d'un limbe fixe et d'un alidade mobile) ;
- le cercle vertical centré sur l'axe de basculement qui permet la mesure de l'angle vertical.

La mesure sur des appareils numériques peut être incrémentale (comptage de graduations) ou absolue. Les appareils fonctionnant avec une mesure incrémentale nécessitent une réinitialisation (passage devant une graduation donnée) à la mise sous tension.

4.2.1 Mise en station

Avant utilisation, les théodolites doivent être installés de manière optimale afin de garantir des conditions d'utilisation correctes. Cette étape dite de mise en station vise à :

- placer l'appareil à la vertical d'un point de référence (matérialisé par l'intermédiaire d'un rivet par exemple) ;
- placer l'axe du pivot dans la direction de la verticale locale.

Le réglage de la position est contrôlé à l'aide d'un plomb qui peut être optique (oculaire coudé qui permet de visualiser le point au sol dans l'alignement du pivot) ou laser (pointeur laser matérialisant directement au sol le point à la verticale du pivot). Le réglage de la verticalité du pivot est contrôlé à l'aide de nivelles (qui permettent en réalité de vérifier l'horizontalité de la base de l'appareil) de deux types :

- une nivelle sphérique de faible précision qui est constituée d'un réservoir à sommet sphérique de grand diamètre dans lequel une bulle d'air est enfermée (figure 4.6) ;
- une nivelle torique de haute précision (appelée communément nivelle tubulaire figure 4.7) qui s'utilise comme un niveau à bulle traditionnel.

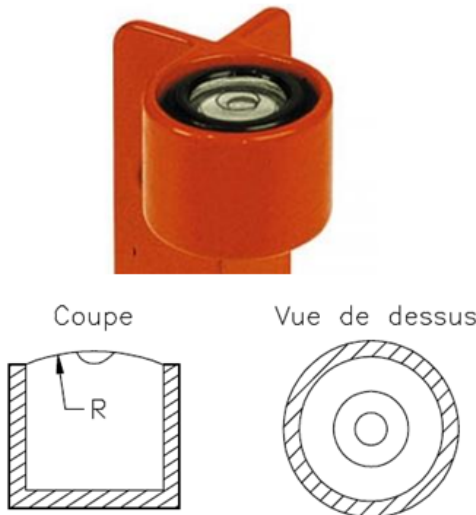


Figure 4.6 – Nivelle sphérique.

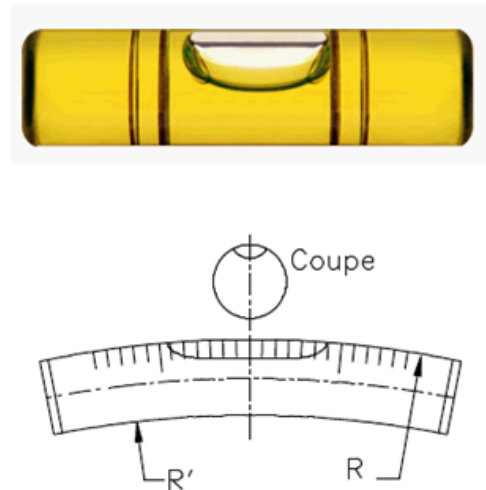


Figure 4.7 – Nivelle torique.

La mise en station peut par exemple s'effectuer de la sorte :

- installation du trépied au-dessus du point de référence et réglage grossier de l'horizontalité en jouant sur la longueur des jambes (attention à garantir la stabilité et à installer l'appareil à une hauteur de travail confortable en fonction de la taille de l'opérateur) ;
- installation du théodolite sur l'embase et réglage approximatif du plomb sur le point de référence et de la verticalité à l'aide de la nivelle sphérique (jouer sur la longueur des pieds) ;
- placement de la nivelle tubulaire entre deux vis calantes et réglage par l'intermédiaire de ces deux vis calantes ;
- rotation d'un quart de tour et réglage par l'intermédiaire de la troisième vis ;
- répétition de ces deux dernières étapes pour faire un tour complet ;
- vérification finale du point visé par le plomb et ajustement éventuel (en dévissant la vis de fixation sur l'embase et en repositionnant l'appareil par translation).

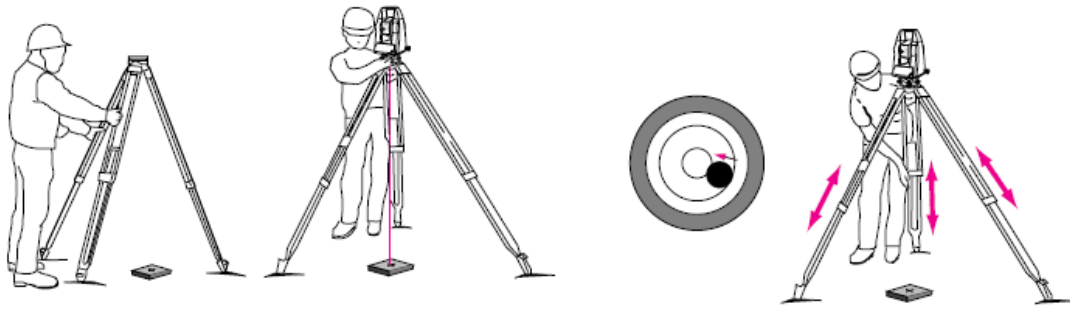


Figure 4.8 – Mise en station : réglage grossier [1].

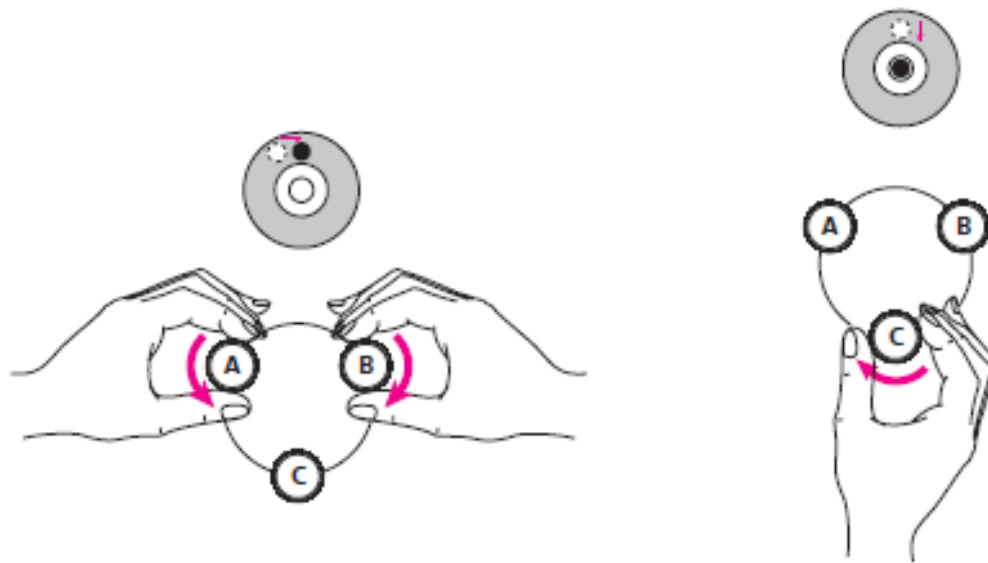


Figure 4.9 – Réglage des vis calantes [1].

4.3 Lecture d'angle

Les lectures d'angle s'effectuaient sur des goniomètres manuels (rapporteurs d'angle et vernier, figure 4.10). Les appareils modernes possèdent un affichage digital (figure 4.11) en plus d'une possibilité de sauvegarde automatique.

Idéalement, les lectures s'effectuent par séquences. On réalise $n+1$ lectures pour mesurer l'angle par rapport à n directions. Pour une plus grande précision, on calcule de l'erreur de fermeture pour vérifier le résultat (vérifier qu'après un tour, on a bien parcouru 400 gon). Pour la lecture de l'angle de visée sur un point par exemple, voici la séquence :

- lecture en visant A pour obtenir L_d (départ) ;
- lecture en visant B pour obtenir L_B ;
- continuer à tourner dans le même sens et pointer sur A pour lire L_f ;
- vérifier la cohérence entre L_f et L_d (Les normes en vigueur précisant les écarts maximum admissibles) ;
- retenir la valeur moyenne pour la lecture sur A ($L_A = (L_d + L_f)/2$).



Figure 4.10 – Goniomètre manuel.



Figure 4.11 – Affichage digital de la station totale du service de Génie Mécanique.

Pour augmenter la précision des mesures et se prémunir des erreurs grossières, il est conseillé de réaliser plusieurs séquences en alternant les sens, de procéder à des doubles retournements (tourner de 200 gon les deux axes) et/ou des changements de l'origine entre deux séquences. Le nombre de séquences dépend de la précision voulue (peut monter à 4 dans certains cas extrêmes).

4.3.1 Erreurs de mesure

Les erreurs liées aux mesures angulaires peuvent être de plusieurs ordres, la plus fréquemment rencontrée est l'erreur de verticalité. Si le pivot n'est pas calé de manière parfaite, il s'ensuit une erreur évoluant comme le sinus de l'écart entre l'axe du pivot et la verticale. Une mise en station correcte cherche à annuler cette erreur.

Les précisions typiques des théodolites peuvent valoir :

- 2 cgon pour des appareils de chantier ;
- 2 mgon pour des théodolites ordinaires ;
- 5 dmgon pour des théodolites de précision ;
- 0,5 à 1,5 dmgon pour des théodolites électroniques.

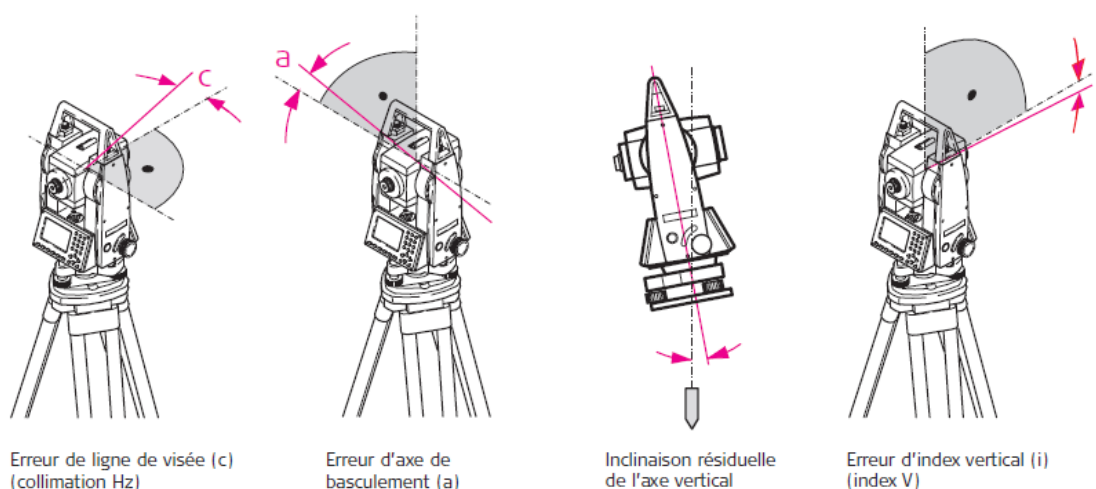


Figure 4.12 – Diverses cause d'erreurs comise avec un théodolite [1].

4.4 Mesures de distances

Historiquement, les premières mesures de distances étaient réalisées par l’intermédiaire d’étalons de longueur qui étaient directement reportés sur le terrain (chaînes d’arpenteur par exemple). Les dispositifs modernes de mesure de distances emploient préférentiellement des mesures sans contact lorsque la visibilité du terrain le permet. Au vu des progrès techniques, ces méthodes permettent d’atteindre des précisions suffisantes à des coûts abordables, et la quasi totalité des théodolites modernes incluent un moyen de mesure de distances. On parle alors de tachéomètre électronique (bien que le terme, impropre, de station totale est employé dans la pratique). Pour le repérage des positions sur le terrain, on peut employer des jalons (figure 4.13), tubes métalliques de plus ou moins 2 m de long pouvant être enfoncés dans le sol ou soutenus par un trépied (figure 4.14) pour marquer les différents points intermédiaires considérés. L’alignement des jalons peut se faire à l’oeil nu, au théodolite ou par l’intermédiaire d’un oculaire laser.



Figure 4.13 – Jalons.



Figure 4.14 – Trépied.



Figure 4.15 – Ruban.

4.4.1 Mesures à plat

On peut encore rencontrer de nos jours des mesures directes, par exemple au ruban (décamètre ou double décamètre en acier, gradué tous les centimètres, figure 4.15). Son emploi nécessite de compenser les effets de chaînette (sous l’effet de la gravité, le ruban prend l’allure d’une fonction cosinus hyperbolique), de dilatation et de tension notamment (plus de détails dans [2]). Il existe trois classes de précision notées de I à III (cf tableau 4.16).

	10 m	20 m	30 m	50 m	100 m
CLASSE I	$\pm 1,1$ mm	$\pm 2,1$ mm	$\pm 3,1$ mm	$\pm 5,1$ mm	
CLASSE II	$\pm 2,3$ mm	$\pm 4,3$ mm	$\pm 6,3$ mm	$\pm 10,3$ mm	$\pm 20,3$ mm
CLASSE III	$\pm 4,6$ mm	$\pm 8,6$ mm	$\pm 12,6$ mm	$\pm 20,6$ mm	

Figure 4.16 – Norme européenne pour la précision des rubans [2].

4.4.2 Mesurage optique

L'objectif de la mesure optique, tombant en désuétude, était de pouvoir mesurer des distances à partir de l'utilisation de théodolites ou de lunettes ordinaires. L'idée de base est de mesurer l'angle interceptant une distance connue ou inversement.

4.4.2.1 Mesure parallactique

On mesure avec un théodolite les extrémités d'une stadia horizontale en invar¹ (barre horizontale de longueur calibrée) placée perpendiculairement à l'axe de visée (figure 4.17). La distance est mesurée à partir de l'angle $\hat{\alpha}$ selon

$$Dh = \frac{L}{2} \cot \frac{\hat{\alpha}}{2} \quad (4.1)$$

L'erreur de mesure évolue comme le carré de la distance, ce qui implique une précision médiocre pour les grandes distances. Actuellement, les stadias ne sont pratiquement plus utilisées que pour des applications de métrologie à courte distance.

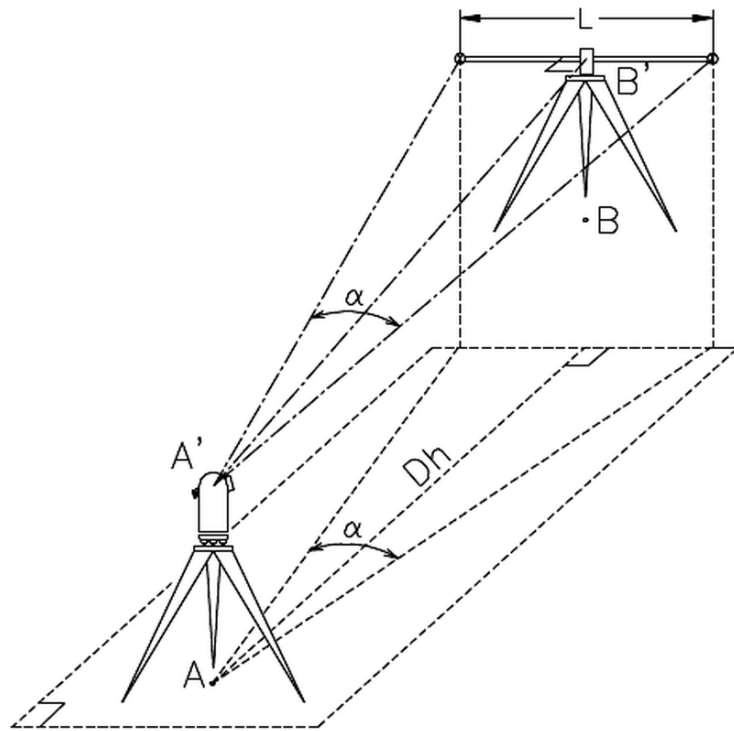


Figure 4.17 – Principe de la mesure parallactique [3].

1. L'invar est un alliage de fer et de nickel à faible coefficient de dilatation thermique

4.4.2.2 Mesure stadimétrique

Une lunette stadimétrique (figure 4.18) est une lunette dont le réticule porte deux traits stadimétriques symétriques par rapport à l'axe optique. Ces deux traits définissent deux lignes de visées pour lesquelles l'angle \hat{S} est connu comme une constante de l'appareil (figure 4.19). La lecture sur mire de la distance entre les deux traits $l_2 - l_1$ permet de déduire la distance horizontale selon :

$$Dh = \frac{l_2 - l_1}{2} \cot \frac{\hat{\alpha}}{2} \quad (4.2)$$

Pour des raisons de facilité, une grande majorité des lunettes présente un rapport stadimétrique $\cot \frac{\hat{\alpha}}{2}$ égal à 100.

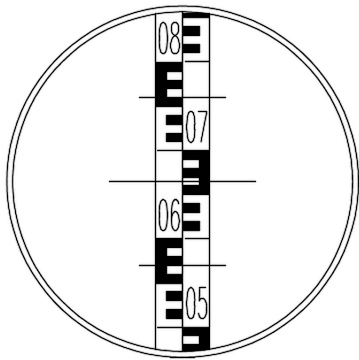


Figure 4.18 – Lecture sur mire par une lunette stadimétrique.

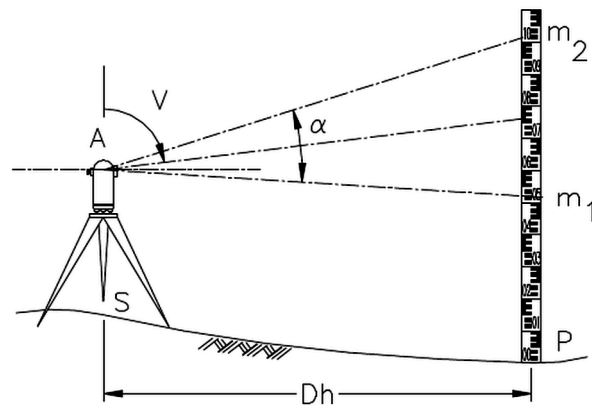


Figure 4.19 – Mesure stadimétrique [3].

4.4.3 Mesurage électronique

La mesure électronique d'une distance se fait à l'aide d'un IMEL (Instrument de Mesure Electronique) ou distancemètre qui fonctionne le plus souvent par émission d'une onde électromagnétique et mesure du déphasage de l'écho envoyé par un réflecteur (figure 4.20).

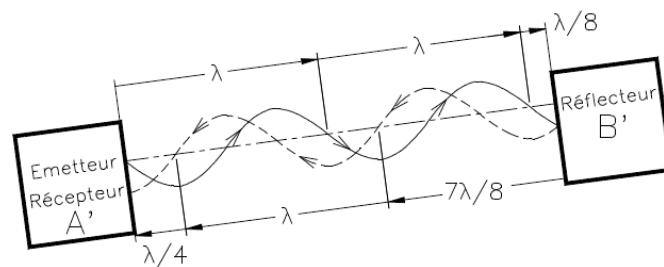


Figure 4.20 – Principe de la mesure avec un IMEL [3].

Ils peuvent être autonomes (figures 4.21 et 4.22) ou intégrés à un théodolite. Les plus employés sont les infrarouges (moins coûteux mais portée plus faible) et les lasers (meilleure portée mais plus coûteux et plus énergivores).

La précision de mesure est classiquement donnée sous la forme $\pm (cste + k \cdot ppm)$ avec une partie constante et une partie proportionnelle donnant l'ordre de grandeur de l'incertitude de mesure. La gamme classique d'instruments sur le marché a une précision typique allant de $\pm(5 \text{ mm} + 5 \text{ ppm})$ à $\pm(1 \text{ mm} + 1 \text{ ppm})$.



Figure 4.21 – Distancemètre laser (document Bosch).



Figure 4.22 – Distancemètre laser (document Leica).

Les mesures effectuées par ce type de dispositifs sont sujettes à un ensemble de phénomènes parasites qu'il faut contrôler ou corriger :

- les erreurs liées à la calibration du système (celle-ci doit être effectuée de manière régulière) ;
- les erreurs liées à la variation de densité de l'atmosphère (liées par exemple à la température et à la pression) qui peuvent être corrigées :
 - automatiquement si l'appareil intègre une mesure des effets parasites ;
 - semi-automatiquement via l'introduction de ces paramètres par l'utilisateur ;
 - manuellement par lecture d'un facteur de correction dans des abaques (figure 4.23).
- la limitation de la portée liée à l'absorption de l'atmosphère (les temps couverts ou brumeux limitent les portées).

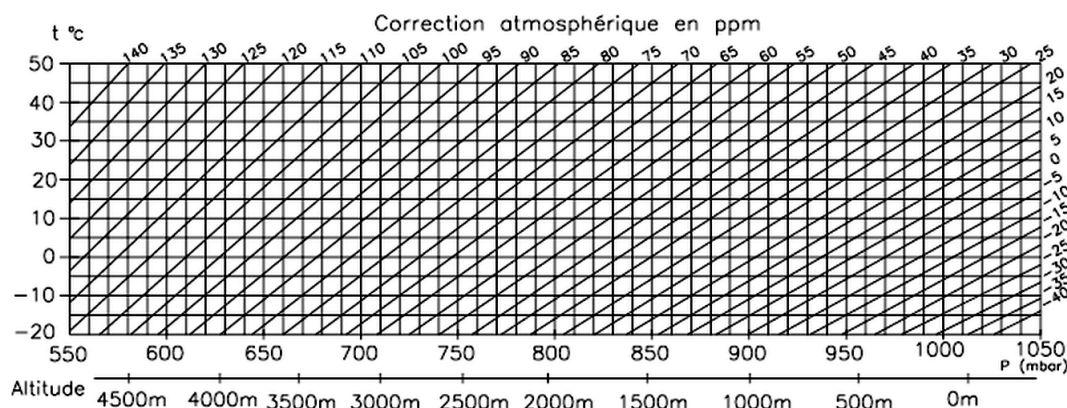


Figure 4.23 – Exemple de correction de lecture pour un distancemètre (document Wilde).

Si la puissance de l'émetteur est suffisante, une simple paroi réfléchissante (paroi lisse en béton, acier, verre,...) peut être suffisante pour effectuer la mesure (en particulier pour les appareils laser grâce à leur puissance d'émission). Pour éviter de réduire fortement l'autonomie des batteries lors de mesure sur le terrain, on cherche toutefois à employer l'énergie la plus faible possible (les documents techniques fournissent typiquement un ordre de grandeur de l'autonomie sous forme d'une durée de mesure avec une certaine cadence de mesures de distances). On utilise donc un réflecteur spécial qui est un prisme rhomboédrique (coin de cube tronqué pour limiter sa fragilité au niveau des coins, figure 4.24). Ce système (figure 4.25) est le plus utilisé en raison de sa simplicité de fabrication et de sa propriété de réfléchir tout rayon lumineux parallèlement à lui-même. Le rayon lumineux ne réalise pas un simple aller-retour, mais un trajet un peu plus long. Pour tenir compte de ce phénomène dans des mesures de haute précision, une constante de calibration (appelée constante d'addition) est ajoutée via le logiciel de l'appareil de mesure.

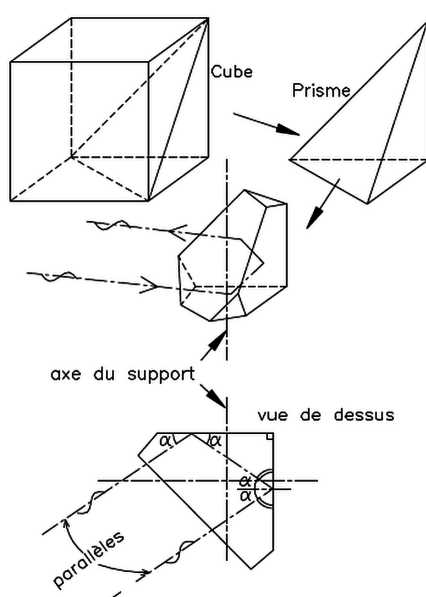


Figure 4.24 – Schéma de fonctionnement d'un prisme [3].



Figure 4.25 – Forme typique d'un prisme.

4.4.4 Réduction des distances

Pour entrer dans les calculs de coordonnées du système de projection, une distance mesurée de l'axe du théodolite A jusqu'au réflecteur B doit subir quatre réduction successives :

- la correction atmosphérique déjà évoquée précédemment ;
- la réduction à l'horizontale (si la mesure n'est pas effectuée entre deux points à la même altitude) ;
- la réduction à l'ellipsoïde (les mesures sont effectuées en ligne droite et pas à altitude constante) ;
- la réduction au système de projection (les écarts entre l'ellipsoïde et la géoïde peuvent être significatifs aux extrémités des zones).

Il est bien évident que ces corrections n'ont de sens que si elles peuvent avoir un impact sur le résultat final et pourront être négligées pour un chantier de dimensions réduites. La procédure complète est détaillée par exemple dans [2] au §3.3.7.

Français	Anglais	Français	Anglais
cercle horizontal	horizontal circle	nivelle torique	toric level
cercle vertical	vertical circle	pivot	vertical axis
chaîne d'arpenteur	Gunter's chain	plomb laser	<i>laser plummet</i>
constante d'addition	additive constant	plomb optique	optical plummet
distancemètre	distance measuring equipment	prisme	prism
double retournement	<i>double revert</i>	ruban	tape measure
IMEL (instrument de mesure électronique)	EDM (electronic distance measurement)	station totale	electronic tacheometer
jalón	pole	théodolite	theodolite
mesure à plat	<i>horizontal measurement</i>	tour d'horizon	round of horizontal angle
mesure parallactique	<i>parallactic measurement</i>	tourillon	sight axis
mesure stadimétrique	optical distance measurement	trépied	tripod
mise en station	exposure (setting up)	vis calante	foot screw

TABLE 4.1 – Lexique du chapitre 4 (les valeurs en italique sont des traductions littérales)

Références

- [1] K. Zeiske. *Mesurer en toute simplicité*. Leica, 2006.
- [2] M. Brabant. *Maîtriser la topographie - Des observations au plan*. Eyrolles, 2003.
- [3] S. Miles. *Topographie et toponométrie moderne*. Eyrolles, 1999.
- [4] Y. Durand. *Topographie Fascicule I : Méthodes classiques de levés topographiques : Généralités*. Mutuelle d'édition FPMs, 2010.
- [5] M. Gelman. Utilisation des théodolites en mécanique : Les systèmes de mesure par intersections (smi). *Techniques de l'ingénieur*, R1382 :1–15, 1985.

Chapitre 5

Etablissement d'un canevas planimétrique

Les citoyens Méchain et Delambre sont les commissaires chargés spécialement de la mesure des angles, des observations astronomiques et de la mesure des bases dépendantes de la méridienne

- base du système métrique décimal, ou mesure de l'arc méridien entre Dunkerque et Barcelone, *P. Méchain et J.B. Delambre*

5.1 Introduction

De manière générale, le canevas est un ensemble de points répartis de manière judicieuse sur la surface à lever. Selon l'ampleur des mesures à effectuer, on peut considérer trois niveaux de détail :

- le canevas d'ensemble qui reprend un ensemble de points connus sur lesquels les mesures s'appuieront (repères géodésiques ou points sur lesquels un instrument est mis en station) qui est étayé par des bornes ou des repères adéquats ;
- le raffinement de ce canevas par mesure de points (accessibles ou non) en se basant sur les points du canevas d'ensemble ;
- le lever de détail qui intègre les éléments artificiels (clôtures, bâtiments,...) ou naturels (cours d'eau, bois,...) nécessaires au projet.

Dans le cadre de ce cours, nous nous intéresserons plus particulièrement aux deux premiers aspects.

5.2 Notion de gisement

Le gisement d'une visée est l'angle horizontal que forme la projection horizontale du vecteur de visée (vecteur reliant le point de station au point visé) et l'axe Y (figure 5.1). Cet angle est compté positivement dans le sens horlogique à partir de l'axe Y. On y fait fréquemment référence dans les mesures topographiques.

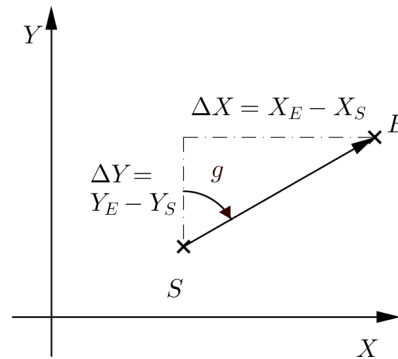


Figure 5.1 – Calcul du gisement d'un point.

5.2.1 Calcul du gisement

Si le point de station a des coordonnées (X_S, Y_S) et que le point visé a des coordonnées (X_E, Y_E) la résolution du triangle rectangle (figure 5.1) donne immédiatement

$$g = \arctan \frac{X_E - X_S}{Y_E - Y_S} + k\pi \quad (5.1)$$

Les programmes de calcul donnent systématiquement une valeur d'arctangente comprise entre $-\pi/2$ et $\pi/2$; afin d'obtenir la valeur correcte du gisement, la constante k doit être adaptée en fonction du signe de $(X_E - X_S)$ et de $(Y_E - Y_S)$ (figure 5.2) :

- $k=0$ si ΔX et ΔY sont positifs;
- $k=1$ si ΔY est négatif;
- $k=2$ si ΔX est négatif et ΔY est positif.

L'emploi de la fonction *atan2* des logiciels de calcul permet de résoudre en partie ce souci (la valeur retournée est toutefois comprise entre $-\pi$ et π). Dans tous les cas, la réalisation d'un croquis préalable permet de visualiser l'angle recherché et donc d'éviter les erreurs grossières dans cette évaluation.

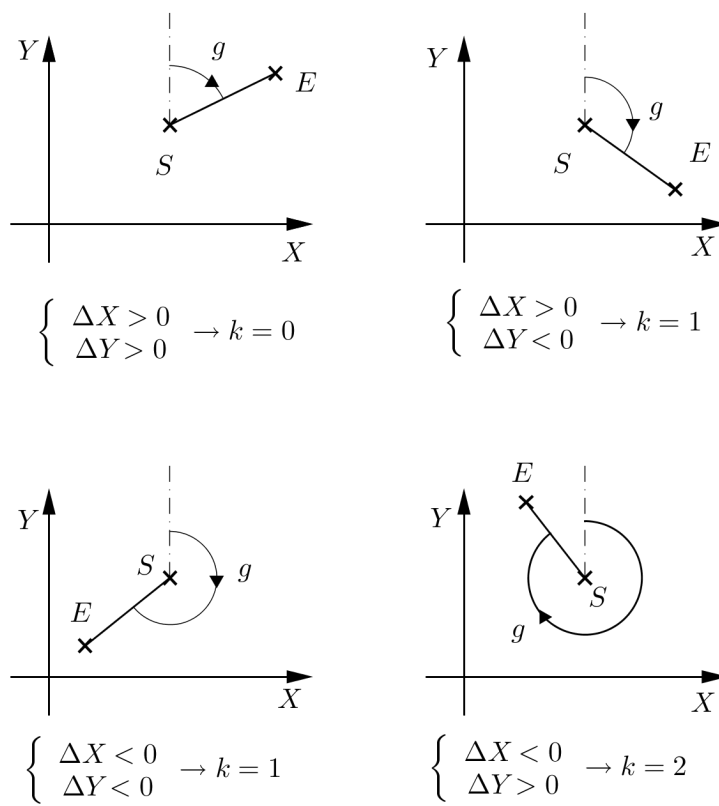


Figure 5.2 – Valeur de k en fonction de la position du point visé.

5.2.2 Détermination de la constante d'orientation

Comme indiqué précédemment, le gisement est une notion relative au repère employé. Lors de la mise en station d'un appareil, il faut déterminer la direction de l'axe Y par rapport à la position angulaire 'zéro' (quelconque) de l'appareil de mesure (on parle de constante d'orientation $G_{0,moyen}$ de station). Deux cas de figure se présentent :

- l'opérateur travaille dans un repère local ;
- l'opérateur travaille dans un repère global.

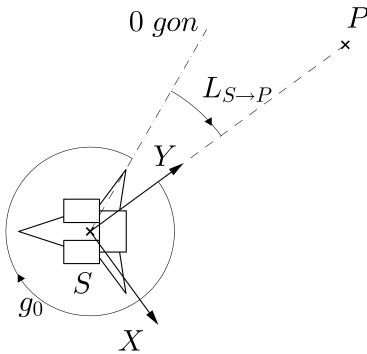


Figure 5.3 – g_0 , repère local.

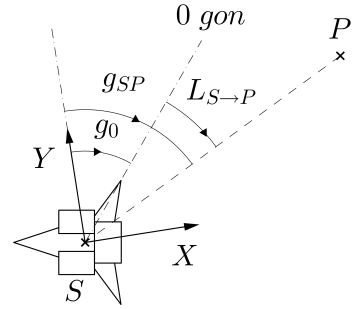


Figure 5.4 – g_0 , repère global.

Lors du travail en repère local, il est possible de choisir arbitrairement comme axe Y la droite joignant deux points du canevas S et P. Le $g_{0,moyen}$ est donc simplement l'opposé de la lecture faite en visant le point P en étant stationné en S (figure 5.3). Il est ensuite possible de repasser dans un repère global au moyen des matrices de changement de repère.

Lors du travail en repère global, on peut calculer le gisement de la visée et déterminer le g_0 en notant que (figure 5.4) :

$$g_{SP} = g_0 + L_{S \rightarrow P} \quad (5.2)$$

donc :

$$g_0 = g_{SP} - L_{S \rightarrow P} \quad (5.3)$$

Pour améliorer la précision, on peut effectuer la détermination de g_0 en effectuant des mesures sur plusieurs points connus ; dans ce cas, on prendra comme valeur de g_0 la moyenne pondérée par la distance entre les points de station des g_0 obtenus ; on parle alors de $g_{0,moyen}$:

$$g_{0,moyen} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i \cdot g_{0,i}}{\sum_{i=1}^n d_i} \quad (5.4)$$

5.3 Etablissement d'un canevas d'ensemble

Suivant l'ampleur du domaine étudié, le canevas d'ensemble peut être rattaché aux données géodésiques ou limité à un repère local, sans précision sur son orientation globale. Le canevas d'ensemble consiste en un ensemble de points dont les coordonnées ont été relevées avec une précision suffisante pour servir de référence lors de mesures suivantes (insertion de points dans le canevas principalement). Comme dans le cas du nivellement, les différents points de ce canevas peuvent être organisés de manières notablement différentes :

- on parle de cheminement ouvert lorsque les différents points forment une ligne brisée ouverte ;
- on parle de cheminement encadré lorsqu'on connaît en plus un gisement à l'extrémité du chemin ;
- on parle de cheminement fermé (ou polygonale) lorsque le point de départ correspond au point d'arrivée.

L'avantage de l'emploi d'un canevas polygonal est la possibilité de vérifier les mesures effectuées en s'assurant que les coordonnées du point initial sont bien obtenues lors de la fermeture. Il est également possible de compenser les diverses erreurs de mesures sur l'ensemble du canevas par une méthode analogue à celle rencontrée en nivellement par un cheminement fermé (§ 3.4).

5.3.1 Réalisation d'une polygonale

On suppose que l'appareil a été mis en station sur n sommets d'un polygone et que pour chacune des mesures, la distance au point suivant du canevas ainsi que les angles internes du polygone ont été mesurés (figure 5.5). La première étape de la démarche consiste à réaliser le calcul des gisements des différentes visées. Si on travaille dans un repère local, on prend un des côtés du polygone comme axe X de référence ; si on travaille dans un repère global, il faut établir la constante d'orientation comme expliqué au § 5.2.2.

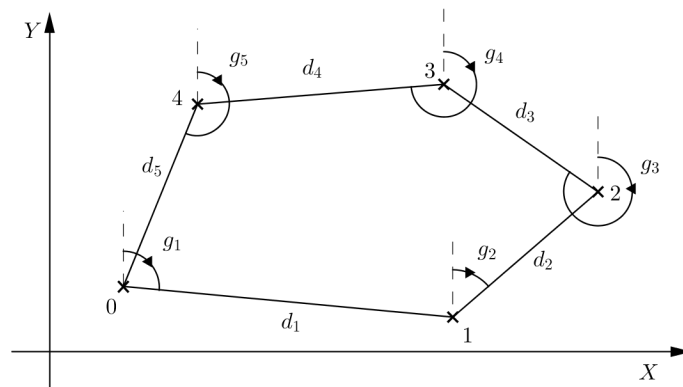


Figure 5.5 – Exemples de mesures relevées pour l'établissement d'un canevas polygonal.

Le calcul initial des coordonnées des sommets s'effectue par l'intermédiaire des formules suivantes :

$$\begin{cases} \Delta x_i = d_i \sin g_i \\ \Delta y_i = d_i \cos g_i \end{cases} \quad (5.5)$$

Il est donc possible d'obtenir une première approximation des coordonnées des points de proche en proche ($x_1 = x_0 + \Delta x_1$, $x_2 = x_1 + \Delta x_2, \dots$).

Une fois tous les calculs menés, on peut constater l'écart entre le calcul de la coordonnée du dernier point qui doit correspondre à celle du point initial :

$$\begin{cases} x_N = x_0 + \sum_{i=1}^N \Delta x_i \\ y_N = y_0 + \sum_{i=1}^N \Delta y_i \end{cases} \quad (5.6)$$

Théoriquement, on doit obtenir $x_N = x_0$ et $y_N = y_0$, mais l'accumulation d'erreurs expérimentales donne une valeur non nulle aux quantités suivantes :

$$\begin{cases} e_{x,tot} = \sum_{i=1}^N \Delta x_i \\ e_{y,tot} = \sum_{i=1}^N \Delta y_i \end{cases} \quad (5.7)$$

qui sont les erreurs totales de fermeture en x et y. Pour réaliser la fermeture du canevas, on va corriger l'ensemble des incréments en x et en y d'une correction proportionnelle aux distances mesurées :

$$\begin{cases} k_{xi} = \frac{d_i}{\sum d_i} e_{x,tot} \\ k_{yi} = \frac{d_i}{\sum d_i} e_{y,tot} \end{cases} \quad (5.8)$$

les corrections s'appliquant selon :

$$\begin{cases} \Delta x_{i,corr} = \Delta x_i - k_{xi} \\ \Delta y_{i,corr} = \Delta y_i - k_{yi} \end{cases} \quad (5.9)$$

Ces relations permettent de recalculer les positions finales des différents points et de vérifier qu'après correction, on se retrouve bien avec une erreur de fermeture nulle.

5.4 Ajout de points dans un canevas

A partir des mesures sur le terrain, on peut procéder de deux manières différentes pour raffiner un canevas existant :

- méthodes points par points (on ajoute de manière successive les points mesurés au canevas) ;
- méthodes par bloc.

Les méthodes par points offrent une simplicité et une précision suffisante pour des projets de mesures de dimensions raisonnables. Elles présentent toutefois le désavantage de ne pas permettre d'enrichir le canevas par les différentes mesures successives. Les méthodes par bloc ne seront pas évoquées dans ce cours, le lecteur intéressé est renvoyé au §5.3 de la référence [1]. Comme le matériel, les méthodes de mesure sont à classer selon deux grands types :

- les méthodes employant la mesure d'angles ;
- les méthodes employant la mesure de distances ;
- les méthode dite d'insertion permettant la combinaison des informations de distances et d'angles (ce type de méthode ne sera pas détaillée dans ce cours).

Deux méthodes employant la mesure d'angles seront étudiées : la méthode par intersection de visée et par relèvement. La méthode par intersection sera détaillée au § 5.5, le point de coordonnées inconnues P est visé par le théodolite successivement mis en station en différents points connus A, B, C, \dots (figure 5.6). Les angles horizontaux (ou plus précisément le gisement cf § 5.2) sont mesurés à partir de chaque station.

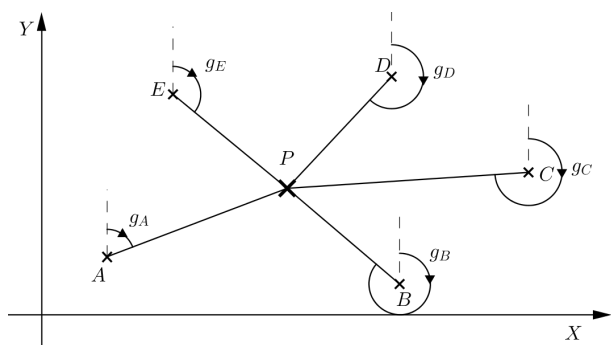


Figure 5.6 – Principe de la méthode par intersections des rayons de visée.

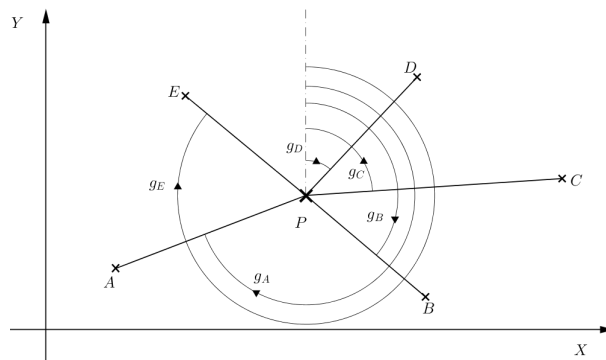


Figure 5.7 – Principe de la méthode par relèvement.

La méthode par relèvement sera détaillée au chapitre 5.6, le théodolite est stationné sur le point à mesurer, les gisements des visées vers un ensemble de points connus sont relevés (figure 5.7).

La méthode par multilatération (§ 5.7) utilise la mesure de distance horizontale à partir de points connus pour retrouver les coordonnées du point inconnu (figure 5.8).

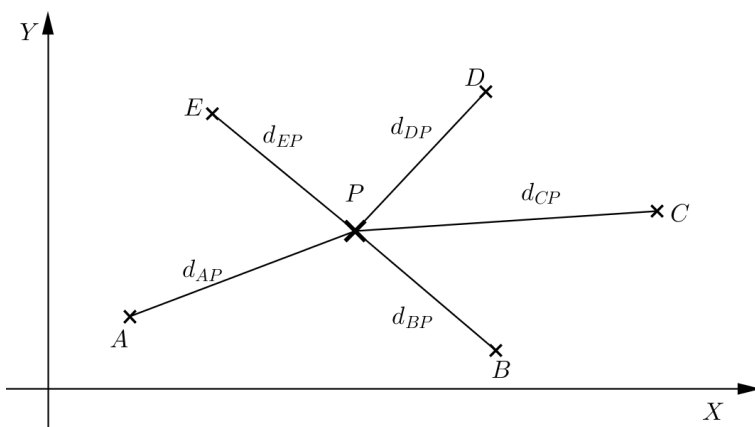


Figure 5.8 – Principe de la méthode par multilatération.

5.5 Méthode par intersections des rayons de visée

5.5.1 Introduction

On suppose disposer de N points connus en coordonnées et on cherche à déterminer la position d'un nouveau point P dans le canevas. La méthode par intersection consiste à mesurer uniquement le gisement du point inconnu vu des différents points connus (figure 5.9) pour la détermination des coordonnées X et Y du point.

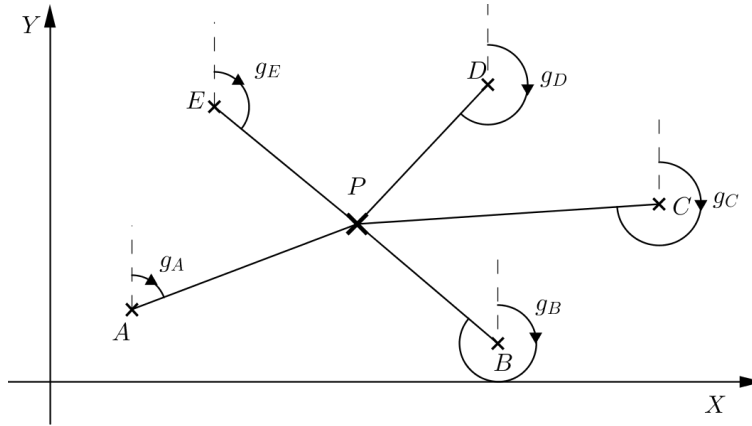


Figure 5.9 – Principe de la méthode par intersections des rayons de visée.

On parle de méthode d'intersection car le point recherché se situe au sommet d'un triangle dont la base relie deux points connus.

5.5.2 Résolution pour deux stations

Si on considère l'information juste suffisante pour trouver la position du point, il faut connaître les mesures à partir de deux points connus.

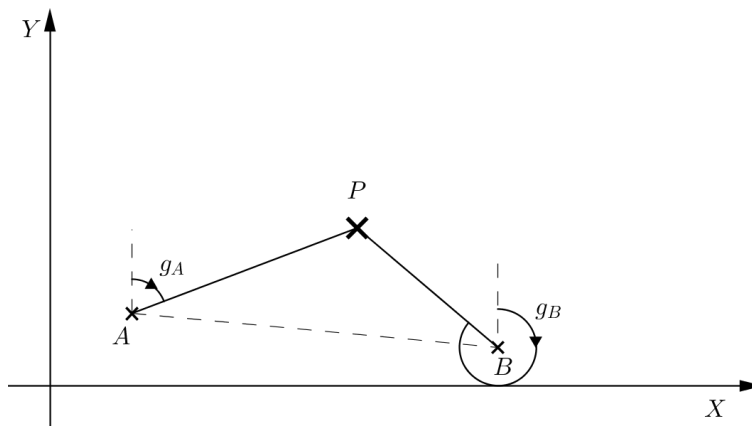


Figure 5.10 – Résolution du problème d'intersection pour deux stations.

Dans ce cas, on peut établir les formules suivantes :

$$\begin{cases} \tan g_A = \frac{X_P - X_A}{Y_P - Y_A} \\ \tan g_B = \frac{X_P - X_B}{Y_P - Y_B} \end{cases} \quad (5.10)$$

Avec (X_A, Y_A) et (X_B, Y_B) les coordonnées des points connus et g_A et g_B les gisements mesurés. La résolution pour obtenir les coordonnées (X_P, Y_P) donne successivement :

$$\begin{cases} (Y_P - Y_A) \tan g_A = X_P - X_A \\ (Y_P - Y_B) \tan g_B = X_P - X_B \end{cases} \Rightarrow X_B - X_A = (Y_P - Y_A) \tan g_A - (Y_P - Y_B) \tan g_B \quad (5.11)$$

$$X_B - X_A = Y_P (\tan g_A - \tan g_B) - Y_A \tan g_A + Y_B \tan g_B \quad (5.12)$$

ce qui donne finalement :

$$Y_P = \frac{(X_B - X_A) + Y_A \tan g_A - Y_B \tan g_B}{\tan g_A - \tan g_B} \quad (5.13)$$

$$Y_P = Y_A + \frac{(X_B - X_A) - (Y_B - Y_A) \tan g_B}{\tan g_A - \tan g_B} \quad (5.14)$$

X_P est obtenu en substituant cette valeur dans une des équations du système 5.10 :

$$X_P = X_A + (Y_P - Y_A) \tan g_A \quad (5.15)$$

Il faut noter que le choix préférentiel devrait être fait pour des stations donnant des rayons de visée orientés de manière privilégiée, c'est-à-dire le plus proche de l'angle droit.

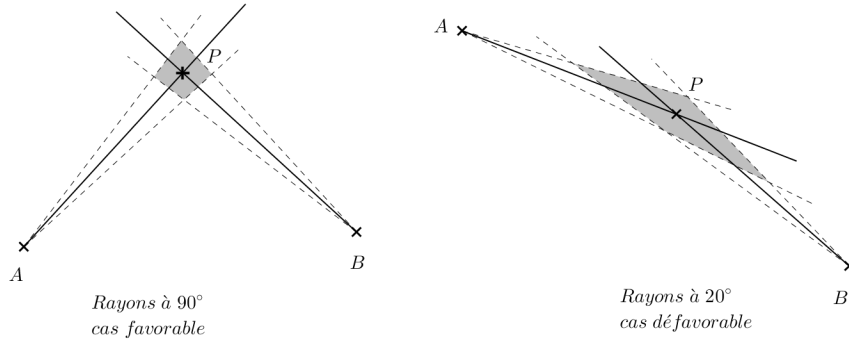


Figure 5.11 – Sensibilité de la position du point à un écart angulaire de 5° .

Si les rayons de visée sont presque parallèles, la position du point d'intersection est très sensible à un écart de gisement même faible. On peut observer cet effet en étudiant la sensibilité par rapport au gisement des expressions 5.14 ou 5.15 (pour rappel, la sensibilité d'un résultat par rapport à une variable est sa dérivée partielle par rapport à cette variable). En prenant la sensibilité de Y_P par rapport à g_A , on obtient :

$$\frac{\partial Y_P}{\partial g_A} = ((X_B - X_A) - (Y_B - Y_A) \tan g_B) \cdot - \frac{\frac{\partial \tan g_A}{\partial g_A}}{(\tan g_A - \tan g_B)^2} \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial Y_P}{\partial g_A} = \frac{(X_B - X_A) - (Y_B - Y_A) \tan g_B}{\cos^2 g_A (\tan g_A - \tan g_B)^2} \quad (5.17)$$

qui prend des valeurs élevées si :

- g_A est proche de $\pm\pi/2$ (Y_P proche de Y_A , la tangente tend vers l'infini) ;
- g_A est proche g_B (les rayons tendent à devenir parallèles).

Les mêmes conclusions pourraient être tirées en étudiant les sensibilités de X_P .

5.5.3 Prise en compte de mesures excédentaires

Comme indiqué précédemment, pour permettre une minimisation des effets des erreurs de mesure, le nombre de points connus du canevas est supérieur à deux. Si on effectue le calcul de position du point P à partir de deux autres stations, les coordonnées du point P obtenues avec les relations 5.14 et 5.15, bien que fort proches, seront différentes du résultat obtenu avec les stations A et B. L'ensemble de ces résultats se concentrera sur une zone réduite du plan (figure 5.12), et il faudra choisir une méthode pour déterminer la coordonnée du point P dans cette zone.

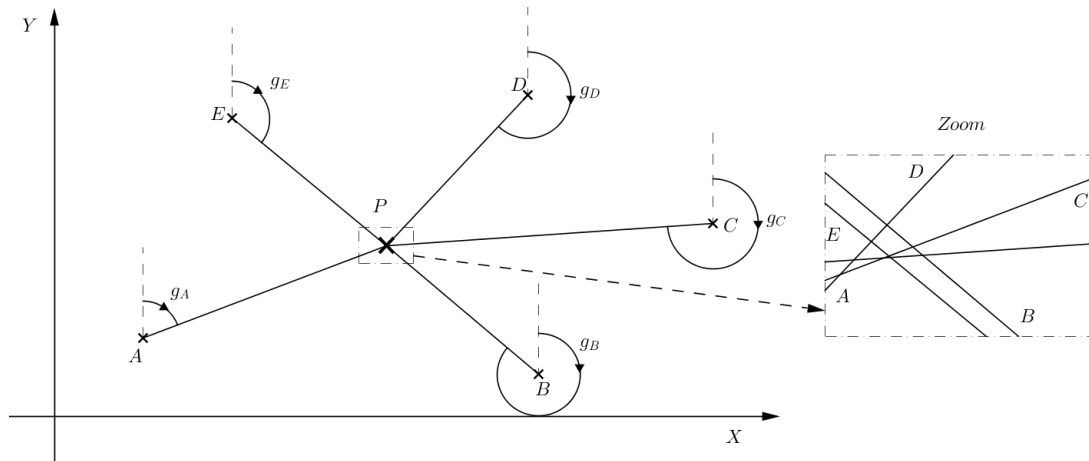


Figure 5.12 – Zoom autour du point 'théorique'.

Plusieurs méthodes sont possibles, on peut citer :

- la méthode du point approché ;
- la méthode des moindres carrés.

La méthode du point approché consiste à prendre en compte le recouvrement des plages d'incertitude des différentes visées pour rechercher un point qui se situe dans les zones d'incertitude des différents capteurs. Cette méthode permet une visualisation graphique directe du point déterminé. Son automatisation est toutefois plus délicate (plus de détails dans [2] et [1]).

5.5.3.1 Principe de la méthode des moindres carrés

Nous allons développer la méthode des moindres carrés qui vise à rechercher le meilleur point au sens statistique du terme résultant de l'ensemble des mesures. Elle se base sur l'étude des variations du point autour d'une position calculée. Pour chacune des mesures effectuées aux point J, le point recherché P est vu selon un gisement g_{aJ} (l'indice 'a' indique qu'à ce stade, la valeur est approchée, aux erreurs de mesure près).

Les coordonnées (X_{P_a}, Y_{P_a}) ne sont pas encore définitives. Si la valeur finale pour le point P était connue, il faudrait imposer une correction d_{g_J} pour arriver à la valeur finale g_{f_J} (figure 5.13) :

$$g_{f_J} = g_{a_J} + d_{g_J} \quad (5.18)$$

La correction est appelée compensation. En l'absence d'erreurs grossières, les compensations sont faibles et peuvent être assimilées à des variations au sens de l'analyse mathématique. g_{a_J} est une valeur approchée, qui n'est pas équivalente à la valeur mesurée g_{m_J} (sauf si la station

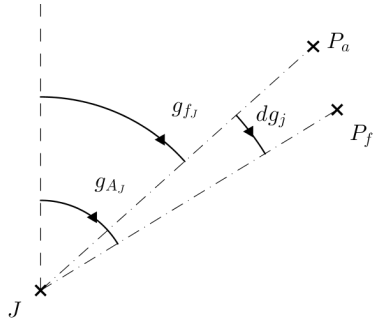


Figure 5.13 – Compensation de gisement.

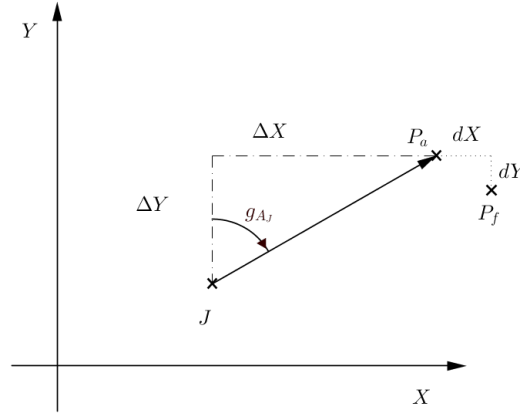


Figure 5.14 – Variation de gisement.

J a été employée pour déterminer le point approché). Par analogie avec la relation précédente, on peut écrire :

$$g_{fJ} = g_{mJ} + r_J \quad (5.19)$$

r_J est appelé résidu de l'écart. Des relations 5.18 et 5.19, on peut tirer :

$$g_{aJ} + d_{gJ} = g_{mJ} + r_J \quad (5.20)$$

5.5.3.2 Calcul de variation

On a vu précédemment l'expression reliant les coordonnées du point au gisement de la forme :

$$\tan g_{aJ} = \frac{X_{Pa} - X_J}{Y_{Pa} - Y_J} \quad (5.21)$$

en différenciant selon X_{Pa} et Y_{Pa} et en remarquant que X_J et Y_J sont des constantes, on obtient :

$$\frac{dg}{\cos^2 g} = \frac{dX}{\Delta Y} - \frac{dY \Delta X}{(\Delta Y)^2} \quad (5.22)$$

$\Delta X = X_{Pa} - X_J$, $\Delta Y = Y_{Pa} - Y_J$. Si on pose D comme la distance calculée entre J et P_a , on peut écrire que :

$$\Delta Y = D \cos g \Rightarrow \cos^2 g = \frac{(\Delta Y)^2}{D^2} \quad (5.23)$$

On peut donc réécrire l'expression 5.22 comme :

$$dg = \frac{dX}{\Delta Y} \frac{(\Delta Y)^2}{D^2} - \frac{dY \Delta X}{(\Delta Y)^2} \frac{(\Delta Y)^2}{D^2} \quad (5.24)$$

Ou encore :

$$dg = \frac{dX \Delta Y}{D^2} - \frac{dY \Delta X}{D^2} \quad (5.25)$$

En injectant cette relation dans 5.20, on obtient la forme suivante :

$$r_J = \frac{dX \Delta Y}{D^2} - \frac{dY \Delta X}{D^2} + g_{aJ} - g_{mJ} \quad (5.26)$$

5.5.3.3 Forme matricielle

La résolution du problème va être de rechercher le meilleur point tel que la somme des carrés des résidus soit minimale. On posera :

$$a_J = \frac{\Delta Y}{D^2} \quad (5.27)$$

$$b_J = -\frac{\Delta X}{D^2} \quad (5.28)$$

$$c_J = g_{a_J} - g_{m_J} \quad (5.29)$$

Avec cette notation, les N relations pour les stations $1, 2, \dots, N$ peuvent se synthétiser sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} a_1 dX + b_1 dY + c_1 = r_1 \\ a_2 dX + b_2 dY + c_2 = r_2 \\ \vdots \\ a_N dX + b_N dY + c_N = r_N \end{cases} \quad (5.30)$$

Il s'agit d'un système de N équations à 2 inconnues dX et dY surdéterminé (sauf si on prend exactement deux stations). La minimisation de la somme des carrés des résidus passe par l'annulation de la dérivée de la somme des carrés des résidus par rapport à dX et dY :

$$\begin{cases} \frac{\partial (\sum r_i^2)}{\partial dX} = 0 \\ \frac{\partial (\sum r_i^2)}{\partial dY} = 0 \end{cases} \quad (5.31)$$

La somme des carrés des résidus s'écrit :

$$\sum_{i=1}^N r_i^2 = \sum_{i=1}^N (a_i dX + b_i dY + c_i)^2 \quad (5.32)$$

Ce qui permet de calculer les dérivées :

$$\frac{\partial (\sum r_i^2)}{\partial dX} = \sum_{i=1}^N 2(a_i dX + b_i dY + c_i) a_i = 0 \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial (\sum r_i^2)}{\partial dY} = \sum_{i=1}^N 2(a_i dX + b_i dY + c_i) b_i = 0 \quad (5.34)$$

Ces deux relations peuvent s'écrire de manière synthétique :

$$\begin{cases} (\sum a_i^2) dX + (\sum a_i b_i) dY + (\sum a_i c_i) = 0 \\ (\sum a_i b_i) dX + (\sum b_i^2) dY + (\sum b_i c_i) = 0 \end{cases} \quad (5.35)$$

Le système peut donc s'écrire :

$$\begin{bmatrix} \sum a_i^2 & \sum a_i b_i \\ \sum a_i b_i & \sum b_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} dX \\ dY \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \sum a_i c_i \\ \sum b_i c_i \end{Bmatrix} \quad (5.36)$$

Par inversion matricielle, on obtient les valeurs de dX et dY qui permettent de trouver la meilleure position de P au sens des moindres carrés. Ce raisonnement considère que l'ensemble des mesures sont de qualité équivalente (réalisées avec le même appareil ou des appareils semblables). Dans le cas contraire, il faudrait pondérer les différents termes d'observation par un poids inversement proportionnel à l'écart type de la mesure pour compenser cet effet.

5.5.3.4 Unités d'emploi pratique

Les termes des relations d'observation sont adimensionnels, les angles doivent être exprimés en radians. Comme les distances ΔX , ΔY et D sont de l'ordre de la centaine de mètres voire plus et les corrections de l'ordre du centimètre approximativement, les coefficients des inconnues auront un ordre de grandeur tributaire des unités choisies. D'un point de vue pratique, il peut être intéressant pour l'affichage de choisir des unités qui permettraient une lecture facilitée (le km pour les distances et le centimètre pour les variations par exemple). Pour les calculs informatiques, le choix de représentation de nombres en virgule flottante permet d'exprimer les longueurs dans les unités du système international (le mètre en l'occurrence) comme cela est toujours recommandé en pratique.

5.5.3.5 Exemple d'application

On observe un point P à partir de quatre points connus en coordonnées dans un repère donné (A(119579, 39 m; 114978, 08 m), B(119550, 92 m; 109329, 19 m), C(111317, 74 m; 106378, 76 m), D(111306, 82 m; 112962, 00 m)).

La constante d'orientation et le résultat des visées sur P permettent de déduire le g mesuré pour P par rapport aux quatre stations (table 5.1)¹.

	g_0 (gon)	g_0 (rad)	α (gon)	α (rad)	g_m (gon)	g_m (rad)
A	330,6632	5,1940454	285,923	4,491267981	216,5862	3,402128074
B	365,1931	5,736439801	18,6413	0,292816856	383,8344	6,029256656
C	289,7528	4,551426339	168,5779	2,648015461	58,3307	0,916256493
D	38,1149	0,598707449	68,8417	1,081362895	106,9566	1,680070344

TABLE 5.1 – Mesures angulaires

Il faut ensuite faire le choix d'un point approché, par exemple celui obtenu en ne considérant que les mesures effectuées en B et en D. Les formules 5.14 et 5.15 (page 45) donnent :

$$Y_P = Y_B + \frac{(X_D - X_B) - (Y_D - Y_B) \tan g_{mD}}{\tan g_{mB} - \tan g_{mD}} = 112137,4931 \text{ m} \quad (5.37)$$

$$X_P = X_B + (Y_P - Y_B) \tan g_{mB} = 118822,0784 \text{ m} \quad (5.38)$$

A ce stade, un croquis à petite échelle peut être réalisé pour situer les points les uns par rapport aux autres (figure 5.15).

Les gisements approchés peuvent maintenant être calculés pour les stations A et C (g_{aB} et g_{aD} sont bien évidemment nuls. On obtient (en faisant attention au signe des écarts pour l'arctangente) :

$$g_{aA} = \arctan \frac{X_{P_a} - X_A}{Y_{P_a} - Y_A} = 3,402136454 \text{ rad} = 216,5867335 \text{ gon} \quad (5.39)$$

$$g_{aC} = \arctan \frac{X_{P_a} - X_C}{Y_{P_a} - Y_C} = 0,91625997 \text{ rad} = 58,33092138 \text{ gon} \quad (5.40)$$

Ces valeurs permettent de calculer les différents coefficients repris dans les tableaux 5.2 et 5.3

1. Il est clair qu'il est recommandé de conserver l'ensemble des décimales pour la réalisation des calculs, mais que pour l'affichage, il ne faut conserver qu'un nombre raisonnable de décimales

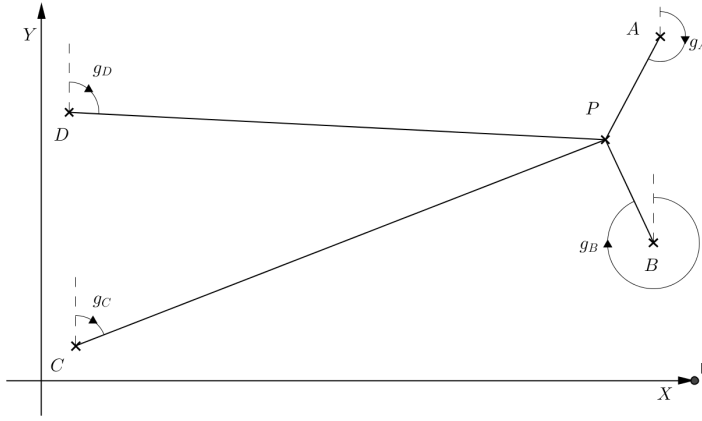


Figure 5.15 – Croquis d'ensemble.

Points	$\Delta X = X_{P_a} - X_J(\text{m})$	$\Delta Y = Y_{P_a} - X_J(\text{m})$	$D^2 = \Delta X^2 + \Delta Y^2 (\text{m}^2)$
A	-757,3115605	-2840,586856	8642454,487
B	-728,8415605	2808,303144	8417776,569
C	7504,338439	5758,733144	89478102,84
D	7515,258439	-824,5068561	57158920,97

TABLE 5.2 – Calculs intermédiaires pour les coefficients

Points	$a_J = \Delta Y/D^2(\text{m}^{-1})$	$b_J = -\Delta X/D^2(\text{m}^{-1})$	$c_J = g_{a_J} - g_{m_J} (\text{rad})$
A	$-32,8678 \cdot 10^{-5}$	$8,76269 \cdot 10^{-5}$	$0,837957 \cdot 10^{-5}$
B	$33,3616 \cdot 10^{-5}$	$8,65836 \cdot 10^{-5}$	0
C	$6,43591 \cdot 10^{-5}$	$-8,38679 \cdot 10^{-5}$	$0,347737 \cdot 10^{-5}$
D	$-1,44248 \cdot 10^{-5}$	$-13,148 \cdot 10^{-5}$	0

TABLE 5.3 – Coefficients de la matrice

A partir des calculs présentés au tableau 5.3, il est possible de calculer les différents coefficients servant à exprimer la relation matricielle de base :

$$\sum_{i=1}^4 a_i^2 = 2,23679 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-2} \quad (5.41)$$

$$\sum_{i=1}^4 b_i^2 = 3,9496 \cdot 10^{-8} \text{ m}^{-2} \quad (5.42)$$

$$\sum_{i=1}^4 a_i b_i = -3,41649 \cdot 10^{-9} \text{ m}^{-2} \quad (5.43)$$

$$\sum_{i=1}^4 a_i c_i = -2,53038 \cdot 10^{-9} \text{ rad/m} \quad (5.44)$$

$$\sum_{i=1}^4 b_i c_i = 4,42637 \cdot 10^{-10} \text{ rad/m} \quad (5.45)$$

La relation matricielle 5.36 peut donc s'écrire :

$$\begin{bmatrix} 2,23679 \cdot 10^{-7} & -3,41649 \cdot 10^{-9} \\ -3,41649 \cdot 10^{-9} & 3,9496 \cdot 10^{-8} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} dX \\ dY \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} -2,53038 \cdot 10^{-9} \\ 4,42637 \cdot 10^{-10} \end{Bmatrix} \quad (5.46)$$

Ce qui donne après inversion matricielle :

$$\begin{cases} dX = 0,011156123 \text{ m} \\ dY = -0,010242096 \text{ m} \end{cases} \quad (5.47)$$

Soit, comme attendu, des corrections de l'ordre du centimètre. Au final, la position finale du point P est donc :

$$\begin{cases} X_P = 118822,09 \text{ m} \\ Y_P = 112137,48 \text{ m} \end{cases} \quad (5.48)$$

En vue de mesurer la qualité des mesures, il est intéressant de calculer la valeur des résidus. Ceci peut être fait de deux manières différentes (donnant le même résultat) :

- soit en injectant les valeurs de dX et dY dans les équations 5.30 ;
- soit en recalculant le gisement vers le point P final.

Point	r (rad)	r (mgon)
A	$3,8 \cdot 10^{-6}$	0,24
B	$2,8 \cdot 10^{-6}$	0,18
C	$5,0 \cdot 10^{-6}$	0,32
D	$1,2 \cdot 10^{-6}$	0,08

TABLE 5.4 – Résidus calculés

On remarque que les valeurs des résidus sont faibles (de l'ordre du dmgon) et que les valeurs ne sont pas égales pour les quatre stations car la méthode des moindres carrés vise à minimiser l'écart global, pas à rechercher des écarts équivalents (c'est plutôt l'optique de la méthode du point approché).

5.6 Méthode par relèvement

5.6.1 Introduction

La méthode de relèvement (figure 5.16) consiste à obtenir la coordonnée d'un point sur lequel le théodolite est mis en station par l'intermédiaire de visées effectuées sur un ensemble de points (éventuellement inaccessibles) dont les coordonnées sont connues (par exemple, les points de repère cartographiés).

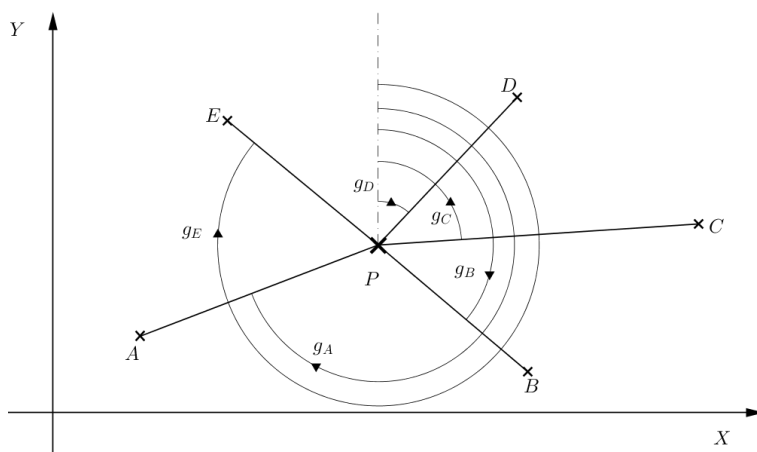


Figure 5.16 – Principe de la méthode par relèvement.

On effectuera un tour d'horizon qui permette de mesurer les angles entre les rayons de visée visant deux points successifs. Cette information sera ensuite traitée pour obtenir les coordonnées du point de station. Comme dans la méthode précédente, il faut noter qu'un nombre surabondant de mesures sera effectué et qu'il faudra donc à nouveau effectuer un calcul permettant de rechercher le 'meilleur' point parmi l'ensemble des mesures effectuées. Pour résumer la démarche, le principe général est le suivant :

- réalisation d'un croquis à petite échelle de la situation ;
- recherche de la constante de station pour obtenir le gisement des différentes stations ;
- recherche d'une première approximation des coordonnées du point à partir de mesures juste suffisantes pour le déterminer ;
- recherche des corrections à apporter pour obtenir le point minimisant les écarts par rapport à l'ensemble des mesures (de nouveau, nous ne présenterons que la méthode des moindres carrés, une méthode graphique est présentée dans [3]).

5.6.2 Etablissement d'un croquis

Après positionnement des points sur un croquis, une première approximation graphique de la position d'un point peut être effectuée par l'intermédiaire de l'intersection de cercles. En effet, si un tour d'horizon a été effectué, on connaît l'angle qui intercepte un ensemble de segments de droites. Il est possible d'en déduire le tracé du cercle passant par les extrémités du segment et le point de station par la méthode suivante (figure 5.17) :

- le centre du cercle est sur la médiatrice du segment ;
- le centre du cercle est sur le segment faisant un angle $\pi/2 - \alpha$ avec le segment AB passant par A ou B (le triangle ABO est isocèle, l'angle au centre vaut deux fois l'angle inscrit).

Il faut donc connaître l'angle interceptant deux segments, soit faire les mesures sur trois ou quatre points (figure 5.18) qui nécessitent chacune la connaissance de deux angles. De manière

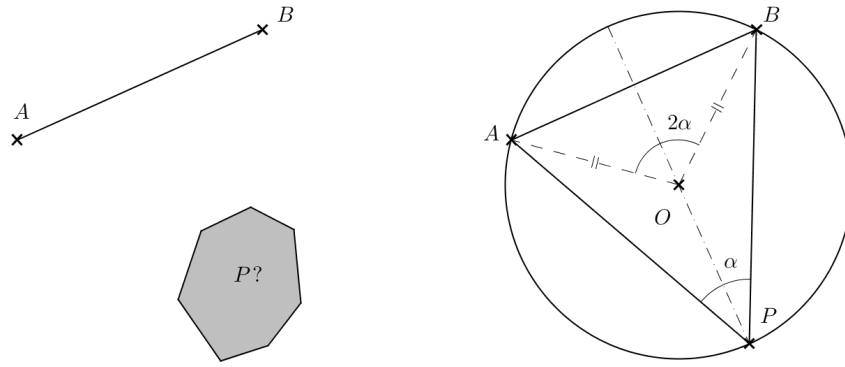


Figure 5.17 – Recherche du cercle pour lequel P voit le segment AB selon un angle α .

générale, on privilégiera parmi l'ensemble (surabondant) de mesures celles qui conduisent à des cercles dont les arcs se coupent avec un angle le plus proche de l'angle droit (constatations identiques à celles effectuées en figure 5.11 pour l'intersection de segments).

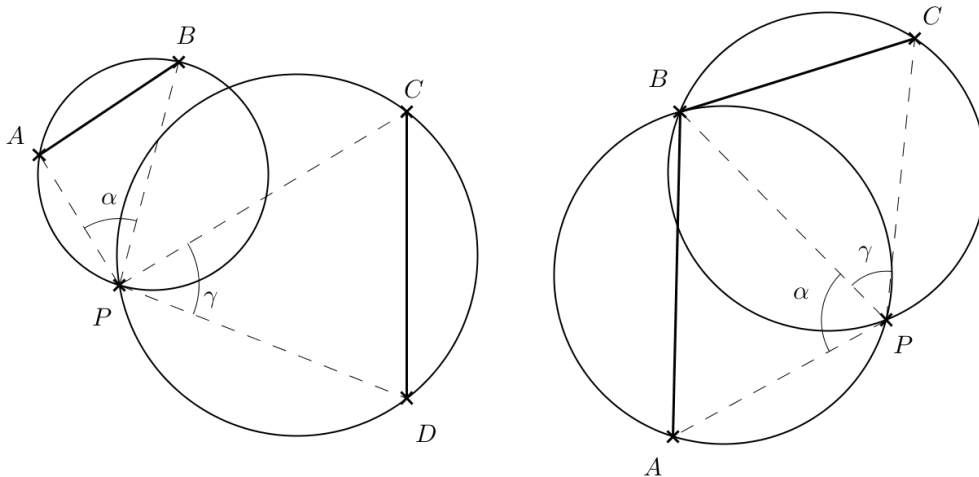


Figure 5.18 – Recherche d'une première approximation du point P.

5.6.3 Calcul de la position du point approché

Deux méthodes sont proposées pour mener cette démarche : la première se ramène à la notion de gisement, la seconde passe par la résolution de triangles.

5.6.3.1 Calcul des gisements des rayons de visée

On a démontré précédemment que :

$$Y_{Ma} - Y_{P_j} = \frac{(X_{P_i} - X_{P_j}) - (Y_{P_i} - Y_{P_j}) \tan g_{P_i}}{\tan g_{P_j} - \tan g_{P_i}} \quad (5.49)$$

cette relation est valable $\forall i \neq j$. On peut écrire en particulier :

$$\frac{(X_A - X_B) - (Y_A - Y_B) \tan g_B}{\tan g_B - \tan g_A} = \frac{(X_A - X_C) - (Y_A - Y_C) \tan g_C}{\tan g_C - \tan g_A} \quad (5.50)$$

Les angles connus ne sont pas les gisements, mais bien les angles α, β entre les points A, B et C . Nous allons tenter la réduction des expressions précédentes pour calculer le gisement en un point à partir des valeurs connues. Une fois cette valeur connue, les autres gisements se déduisent de manière évidente par :

$$g_B = g_A + \alpha \quad (5.51)$$

en prenant le soin de respecter la valeur algébrique des angles. Le numérateur des expressions 5.50 peut être exprimé par :

$$\tan g_B - \tan g_A = \frac{\sin g_B}{\cos g_B} - \frac{\sin g_A}{\cos g_A} \quad (5.52)$$

$$= \frac{\sin g_B \cos g_A - \sin g_A \cos g_B}{\cos g_A \cos g_B} \quad (5.53)$$

$$= \frac{\sin (g_B - g_A)}{\cos g_A \cos g_B} \quad (5.54)$$

En combinant 5.54 et 5.50, on obtient :

$$\begin{aligned} \cos g_A \cos g_B \frac{(X_A - X_B) - (Y_A - Y_B) \tan g_B}{\sin \alpha} &= \dots \\ \cos g_A \cos g_C \frac{(X_A - X_C) - (Y_A - Y_C) \tan g_C}{\sin \beta} & \end{aligned} \quad (5.55)$$

qui se simplifie en :

$$\frac{(X_A - X_B) \cos g_B - (Y_A - Y_B) \sin g_B}{\sin \alpha} = \frac{(X_A - X_C) \cos g_C - (Y_A - Y_C) \sin g_C}{\sin \beta} \quad (5.56)$$

en introduisant 5.51 dans cette expression, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{(X_A - X_B) \cos (g_A + \alpha) - (Y_A - Y_B) \sin (g_A + \alpha)}{\sin \alpha} &= \dots \\ \frac{(X_A - X_C) \cos (g_A + \beta) - (Y_A - Y_C) \sin (g_A + \beta)}{\sin \beta} & \end{aligned} \quad (5.57)$$

Le développement des sinus et cosinus de sommes d'angles donne :

$$\begin{aligned} \frac{(X_A - X_B) \cos g_A \cos \alpha - (X_A - X_B) \sin g_A \sin \alpha}{\sin \alpha} &= \dots \\ \frac{(Y_A - Y_B) \cos g_A \sin \alpha + (Y_A - Y_B) \sin g_A \cos \alpha}{\sin \alpha} &= \dots \\ \frac{(X_A - X_C) \cos g_A \cos \beta - (X_A - X_C) \sin g_A \sin \beta}{\sin \beta} &= \dots \\ \frac{(Y_A - Y_C) \cos g_A \sin \beta + (Y_A - Y_C) \sin g_A \cos \beta}{\sin \beta} & \end{aligned} \quad (5.58)$$

qui peut également s'écrire selon :

$$\begin{aligned} (X_A - X_B) \cos g_A \cot \alpha - (X_A - X_B) \sin g_A &= \dots \\ (Y_A - Y_B) \cos g_A + (Y_A - Y_B) \sin g_A \cot \alpha &= \dots \\ (X_A - X_C) \cos g_A \cot \beta - (X_A - X_C) \sin g_A &= \dots \\ (Y_A - Y_C) \cos g_A + (Y_A - Y_C) \sin g_A \cot \beta & \end{aligned} \quad (5.59)$$

En divisant finalement les deux membres par $\cos g_A$, on obtient l'expression

$$\begin{aligned} (X_A - X_B) \cot \alpha - (X_A - X_B) \tan g_A - \dots & \quad (5.60) \\ (Y_A - Y_B) + (Y_A - Y_B) \tan g_A \cot \alpha = \dots \\ (X_A - X_C) \cot \beta - (X_A - X_C) \tan g_A - \dots \\ (Y_A - Y_C) + (Y_A - Y_C) \tan g_A \cot \beta \end{aligned}$$

dans laquelle il est possible de mettre les termes en $\tan g_A$ en évidence pour obtenir finalement :

$$\tan g_A = - \frac{(Y_C - Y_B) - (X_A - X_B) \cot \alpha + (X_A - X_C) \cot \beta}{(X_C - X_B) - (Y_A - Y_B) \cot \alpha + (Y_A - Y_C) \cot \beta} \quad (5.61)$$

qui permet de calculer le gisement en A à partir des éléments connus à savoir :

- les coordonnées des points P ;
- les angles horizontaux relevés entre les points.

A partir de cette information, les gisements des différents points sont obtenus par 5.51. Enfin, la position estimée du point mesuré peut être obtenue par les relations 5.14 et 5.15 rappelées ici :

$$Y_M = Y_A + \frac{(X_B - X_A) - (Y_B - Y_A) \tan g_B}{\tan g_A - \tan g_B} \quad (5.62)$$

$$X_M = X_A + (Y_P - Y_A) \tan g_A \quad (5.63)$$

5.6.3.2 Méthode de Ponthenod (méthode de Gauss)

Une deuxième méthode est applicable pour l'établissement de la position initiale du point M . Cette méthode consiste à simuler un levé du point par rayonnement. On va rechercher à résoudre les triangles ABM_a et BCM_a à partir des mesures, à savoir les angles α et β (figure 5.19). La

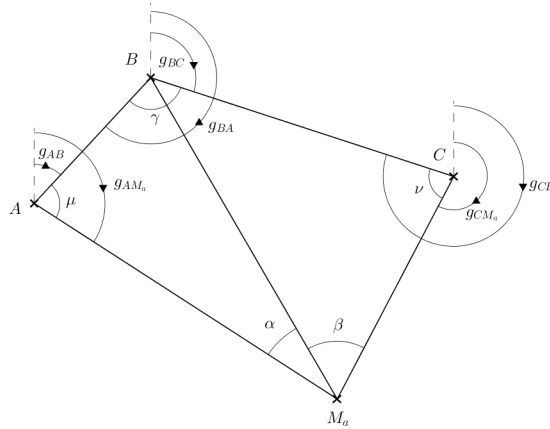


Figure 5.19 – Principe de la méthode de Ponthenod.

somme des angles intérieurs d'un quadrilatère vaut 400 gon , on a donc :

$$\mu + \nu = 400\text{gon} - (\alpha + \beta + \gamma) = m \quad (5.64)$$

L'angle γ est calculable à partir des données du problème par :

$$\gamma = g_{BA} - g_{BC} = \arctan \frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A} - \arctan \frac{X_C - X_B}{Y_C - Y_B} \quad (5.65)$$

ce qui implique que m peut être directement calculé à partir des mesures et des données du problème.

La relation des sinus appliquée aux triangles ABM_a et BCM_a fournit :

$$|BM_a| = |BA| \frac{\sin \mu}{\sin \alpha} = |BC| \frac{\sin \nu}{\sin \beta} \quad (5.66)$$

Cette relation peut également s'écrire :

$$\frac{\sin \mu}{\sin \nu} = \frac{|BC| \sin \alpha}{|BA| \sin \beta} = k \quad (5.67)$$

k est entièrement calculable à partir des données. On examine ensuite l'expression :

$$\frac{\sin \mu - \sin \nu}{\sin \mu + \sin \nu} \quad (5.68)$$

Cette expression peut se décomposer de deux manières différentes :

- En divisant le numérateur et le dénominateur par $\sin \nu$ (relation 5.69) ;
- en employant les identités trigonométriques (relation 5.70) ;

$$\frac{\sin \mu - \sin \nu}{\sin \mu + \sin \nu} = \frac{\frac{\sin \mu}{\sin \nu} - 1}{\frac{\sin \mu}{\sin \nu} + 1} = \frac{k - 1}{k + 1} \quad (5.69)$$

$$\frac{\sin \mu - \sin \nu}{\sin \mu + \sin \nu} = \frac{\sin \frac{\mu - \nu}{2} \cdot \cos \frac{\mu + \nu}{2}}{\sin \frac{\mu + \nu}{2} \cdot \cos \frac{\mu - \nu}{2}} = \tan \frac{\mu - \nu}{2} \cot \frac{\mu + \nu}{2} \quad (5.70)$$

En combinant 5.69, 5.70 et 5.64, on peut tirer :

$$\tan \frac{\mu - \nu}{2} = \frac{k - 1}{k + 1} \tan \frac{\mu + \nu}{2} \quad (5.71)$$

qui peut également s'écrire selon :

$$\mu - \nu = 2 \arctan \left(\frac{k - 1}{k + 1} \tan \frac{m}{2} \right) = n \quad (5.72)$$

n étant entièrement calculable à partir des données. Finalement, les angles sont calculés par :

$$\begin{cases} \mu = \frac{m+n}{2} \\ \nu = \frac{m-n}{2} \end{cases} \quad (5.73)$$

A partir de ces valeurs, il est possible de retrouver les coordonnées approchées du point M par application de la règle des sinus dans le triangle ABM_a :

$$|AM_a| = |AB| \frac{\sin \pi - (\alpha + \mu)}{\sin \alpha} = |AB| \frac{\sin \alpha + \mu}{\sin \alpha} \Rightarrow \begin{cases} X_{M_a} = X_A + |AM_a| \sin g_{AM_a} \\ Y_{M_a} = Y_A + |AM_a| \cos g_{AM_a} \end{cases} \quad (5.74)$$

Le gisement se calcule par $g_{AM_a} = g_{AB} + \mu$.

5.6.4 Recherche du point définitif par la méthode des moindres carrés

A ce stade du calcul, nous disposons des éléments suivants :

- les coordonnées des points repères A, B, C, ... ;
- les coordonnées approchées du point mesuré ;
- des mesures angulaires effectuées à partir du point inconnu sur les points repères.

Il faut à partir de ces éléments déterminer le point finalement retenu en compensant au mieux les résidus. Le principe général est similaire aux calculs effectués pour la méthode des intersections, à une différence fondamentale près : dans la méthode des intersections, le gisement initial des stations était calculé par l'intermédiaire de mesures angulaires sur les points de station uniquement. Il s'agissait donc d'une constante dans les calculs et sa différentiation donnait une valeur nulle. Dans le cas du relèvement, le gisement initial pour les mesures angulaires dépend de la position du point mesuré, il ne peut donc plus être considéré comme une constante dans la minimisation de la somme des carrés des résidus. Il faudra donc introduire une troisième variable dans la différentiation : en plus de dX et dY , interviendra un terme dg_0 qui tiendra compte de cet effet. Dans le calcul du gisement, on considèrera donc des expressions de la forme :

$$g_{mf_J} = g_{0f} + L_J = g_{0a} + dg_0 + L_J \quad (5.75)$$

avec g_{mf_J} le gisement mesuré retenu, g_{0f} la constante d'orientation retenue, g_{0a} la constante d'orientation approchée, dg_0 le résidu sur la constante d'orientation et L_J la lecture effectuée. La constante d'orientation approchée peut se calculer de manière simple en considérant les coordonnées des points de station connus et du point M_a qui vient d'être calculé. On effectue une moyenne sur l'ensemble des constantes mesurées :

$$g_{0a} = \frac{1}{n} \sum_J (g_{aJ} - L_J) \quad (5.76)$$

Pour rappel, le gisement se calcule par :

$$\tan g_{aJ} = \frac{X_J - X_{M_a}}{Y_J - Y_{M_a}} = \frac{\Delta X_J}{\Delta Y_J} \quad (5.77)$$

sa différentiation donne :

$$dg_J = -dx \frac{\Delta Y_J}{D_J^2} + dy \frac{\Delta X_J}{D_J^2} \quad (5.78)$$

C'est-à-dire une relation similaire à ce qui avait été obtenu dans la méthode des intersections, au signe près (en effet, dans le cas du relèvement, c'est le point origine qui est variable, pas le point visé). En combinant cette relation avec 5.75, on obtient l'expression du résidu :

$$r_J = -dX \frac{\Delta Y_J}{D_J^2} + dY \frac{\Delta X_J}{D_J^2} - dg_0 + (g_{aJ} - g_{0a} - L_J) \quad (5.79)$$

ou en posant :

$$a_J = -\frac{\Delta Y_J}{D_J^2} \quad b_J = \frac{\Delta X_J}{D_J^2} \quad c_J = g_{aJ} - g_{0a} - L_J \quad (5.80)$$

$$r_J = a_J \cdot dX + b_J \cdot dY - dg_0 + c_J \quad (5.81)$$

La somme des carrés des résidus vaut donc :

$$\sum_{i=1}^N r_i^2 = \sum_{i=1}^N (a_i \cdot dX + b_i \cdot dY - dg_0 + c_i)^2 \quad (5.82)$$

pour minimiser cette expression, il faut annuler ses dérivées par rapport à dX , dY et dg_0 :

$$\frac{\partial \left(\sum_{i=1}^N r_i^2 \right)}{\partial dX} = \sum_{i=1}^N 2a_i (a_i \cdot dX + b_i \cdot dY - dg_0 + c_i) = 0 \quad (5.83)$$

$$\frac{\partial \left(\sum_{i=1}^N r_i^2 \right)}{\partial dY} = \sum_{i=1}^N 2b_i (a_i \cdot dX + b_i \cdot dY - dg_0 + c_i) = 0 \quad (5.84)$$

$$\frac{\partial \left(\sum_{i=1}^N r_i^2 \right)}{\partial dg_0} = \sum_{i=1}^N -(a_i \cdot dX + b_i \cdot dY - dg_0 + c_i) = 0 \quad (5.85)$$

Ces trois expressions peuvent être regroupées sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N a_i^2 & \sum_{i=1}^N a_i b_i & -\sum_{i=1}^N a_i \\ \sum_{i=1}^N a_i b_i & \sum_{i=1}^N b_i^2 & -\sum_{i=1}^N b_i \\ \sum_{i=1}^N a_i & \sum_{i=1}^N b_i & -N \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} dX \\ dY \\ dg_0 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^N a_i c_i \\ \sum_{i=1}^N b_i c_i \\ \sum_{i=1}^N c_i \end{Bmatrix} \quad (5.86)$$

La résolution de ce système permet d'obtenir les corrections sur X, Y et g_0 du point approché pour trouver le point final.

5.6.5 Exemple d'application

5.6.5.1 Introduction

On dispose de quatre points connus A, B, C et D et on mesure les angles entre une référence arbitraire et ces stations à partir d'un point M inconnu. Les données sont accessibles dans le tableau 5.5.

	X	Y	L_J (gon)	L_J (rad)
A	9263601	10644321	148,4931	2,33252416
B	9476808	11097271	191,3829	3,00623556
C	10134285	10500274	303,3138	4,76444203
D	10037792	10051202	0,0002	$3,1416 \cdot 10^{-6}$

TABLE 5.5 – Données pour le problème de relèvement

Le croquis d'ensemble est proposé en figure 5.20.

5.6.5.2 Recherche des coordonnées du point M approché

Nous allons employer les deux méthodes proposées dans la partie théorique pour retrouver ces coordonnées, ce qui nous permettra de vérifier l'équivalence entre les deux approches.

5.6.5.2.1 Calcul des gisements Nous allons employer les visées interceptant les segments AC et CD. Le croquis d'ensemble est complété par les mesures angulaires sur la figure 5.21.

On calcule dans un premier temps les angles tirés de données, à savoir :

$$\begin{cases} \alpha = L_C - L_A = 154,8207 \text{ gon} = 2,431917869 \text{ rad} \\ \delta = L_D - L_A = 251,5071 \text{ gon} = 3,950664288 \text{ rad} \end{cases} \quad (5.87)$$

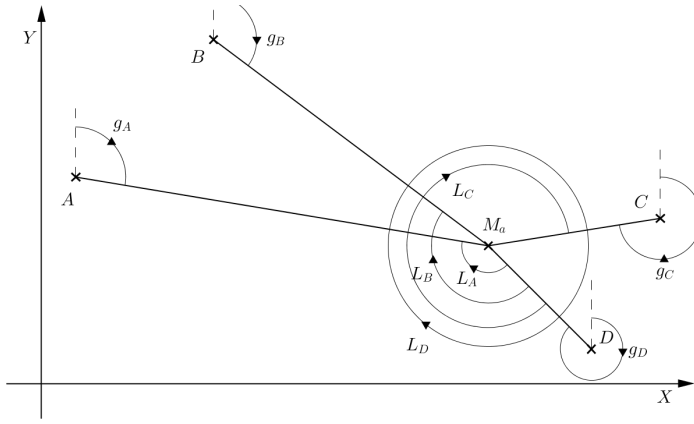


Figure 5.20 – Croquis d'ensemble pour la méthode de relèvement.

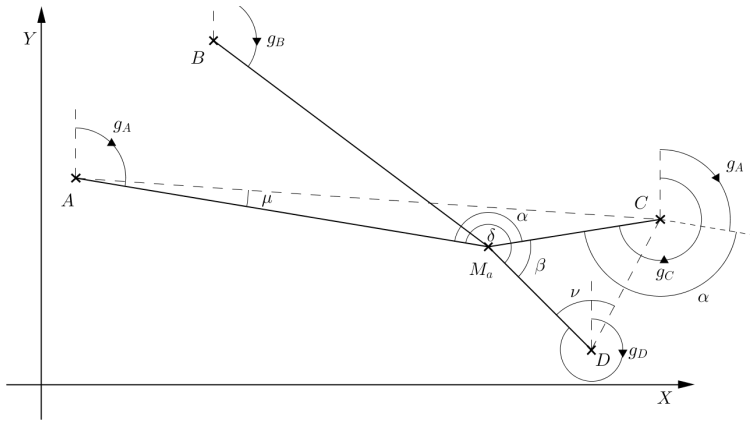


Figure 5.21 – Croquis d'ensemble pour la méthode de relèvement.

La formule 5.61

$$\begin{aligned} \tan g_A &= -\frac{(Y_D - Y_C) - (X_A - X_C) \cot \alpha + (X_A - X_D) \cot \delta}{(X_C - X_D) - (Y_A - Y_C) \cot \alpha + (Y_A - Y_D) \cot \delta} \\ &= 122,9531324 \text{ gon} = 1,931343288 \text{ rad} \end{aligned} \quad (5.88)$$

On en déduit la valeur du gisement en C par :

$$g_C = g_A + \alpha = 277,7738324 \text{ gon} = 4,363261157 \text{ rad} \quad (5.89)$$

Ce qui permet finalement le calcul des coordonnées de M_a par les formules classiques :

$$\begin{cases} Y_{M_a} = Y_A + \frac{(X_A - X_C) - (Y_A - Y_C) \tan g_C}{\tan g_C - \tan g_A} = 10409775,87 \text{ cm} \\ X_{M_a} = X_A + (Y_{M_a} - Y_A) \tan g_A = 9885691,36 \text{ cm} \end{cases} \quad (5.90)$$

5.6.5.2.2 Méthode de Ponthenod Dans cette méthode, nous avons besoin des gisements relatifs entre A et C et entre C et D ainsi que l'angle γ :

$$\begin{cases} \tan g_{CA} = \frac{X_A - X_C}{Y_A - Y_C} \Rightarrow g_{CA} = 4,876345069 \text{ rad} = 310,4377688 \text{ gon} \\ \tan g_{CD} = \frac{X_D - X_C}{Y_D - Y_C} \Rightarrow g_{CD} = 3,353246468 \text{ rad} = 213,4743003 \text{ gon} \\ \gamma = \tan g_{CA} - \tan g_{CD} = 1,523098601 \text{ rad} = 96,96346844 \text{ gon} \end{cases} \quad (5.91)$$

Par la formule 5.64, on obtient :

$$m = \mu + \nu = 400 \text{ gon} - (\alpha + \beta + \gamma) = 51,52943156 \text{ gon} = 0,809422418 \text{ rad} \quad (5.92)$$

On calcule ensuite la constante k par la relation 5.67 :

$$k = \frac{|CD| \sin \alpha}{|CA| \sin \beta} = 0,339589282 \quad (5.93)$$

On peut ensuite calculer la constante n par la relation 5.72 :

$$n = \mu - \nu = 2 \arctan \left(\frac{k-1}{k+1} \tan \frac{m}{2} \right) = -0,416240673 \text{ rad} = -26,49870422 \text{ gon} \quad (5.94)$$

Les angles μ et ν sont finalement calculés par :

$$\begin{cases} \mu = \frac{m+n}{2} = 0,196590873 \text{ rad} = 12,51536367 \text{ gon} \\ \nu = \frac{m-n}{2} = 0,612831545 \text{ rad} = 39,01406789 \text{ gon} \end{cases} \quad (5.95)$$

Les coordonnées du point approché sont obtenues par l'intermédiaire du gisement g_{AM_a} :

$$g_{AM_a} = g_{AC} + \mu = 1,931343288 \text{ rad} = 122,9531324 \text{ gon} \quad (5.96)$$

On peut également calculer la distance $|AM_a|$ par la relation 5.74 :

$$|AM_a| = |AC| \frac{\sin(\alpha + \mu)}{\sin \alpha} = 664836,6985 \text{ cm} \quad (5.97)$$

Ce qui permet au final le calcul de la position du point A approché :

$$\begin{cases} X_{M_a} = X_A + |AM_a| \sin g_{AM_a} = 9885691,36 \text{ cm} \\ Y_{M_a} = Y_A + |AM_a| \cos g_{AM_a} = 10409775,87 \text{ cm} \end{cases} \quad (5.98)$$

5.6.5.3 Recherche de la position définitive du point M

On commence par rechercher la constante d'orientation approchée en faisant la moyenne sur les constantes qui seraient calculées à partir des différents points ($g_{0a} = g_{aJ} - L_J$). Les valeurs sont reprises dans le tableau 5.6 :

gaJ (rad)	gaJ (gon)	gaJ - LJ (rad)	gaJ - LJ (gon)
5,07293594	322,953132	2,74041178	174,460032
5,74663974	365,842448	2,74040418	174,459548
1,2216685	77,7738324	2,74041178	174,460032
2,74041492	174,460232	2,74041178	174,460032

TABLE 5.6 – Recherche de la constante d'orientation approchée

La moyenne des valeurs donne comme valeur retenue $g_{0a} = 2,74040988 \text{ rad} = 174,4599114 \text{ gon}$. On peut ensuite calculer les différents termes intervenant dans la relation matricielle 5.86 à partir des calculs présentés au tableau 5.7.

$$\begin{bmatrix} 8,69442 \cdot 10^{-12} & -7,89647 \cdot 10^{-13} & 5,34612 \cdot 10^{-7} \\ -7,89647 \cdot 10^{-13} & 1,60104 \cdot 10^{-11} & -2,50802 \cdot 10^{-6} \\ -5,34612 \cdot 10^{-7} & 2,50802 \cdot 10^{-6} & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} dX \\ dY \\ dg_0 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} -7,15583 \cdot 10^{-12} \\ -9,62937 \cdot 10^{-12} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.99)$$

Ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{cases} dX = -0,866443872 \text{ cm} \\ dY = -0,694223113 \text{ cm} \\ dg_0 = -3,19479 \cdot 10^{-7} \text{ rad} \end{cases} \quad (5.100)$$

Station	ΔX (cm)	ΔY (cm)	D_J (cm)	a_J (cm ⁻¹)	b_J (cm ⁻¹)	c_J (rad)
A	-622090,36	234545,133	664836,6985	-5,3063610 ⁻⁷	-1,4074210 ⁻⁶	1,9014610 ⁻⁶
B	-408883,36	687495,133	799896,9683	-1,0744910 ⁻⁶	-6,3904510 ⁻⁷	-5,7043810 ⁻⁶
C	248593,64	90498,1327	264553,7936	-1,2930410 ⁻⁶	3,5519110 ⁻⁶	1,9014610 ⁻⁶
D	152100,64	-358573,867	389499,4517	2,3635510 ⁻⁶	1,0025810 ⁻⁶	1,9014610 ⁻⁶

TABLE 5.7 – Calculs intermédiaires pour l'exemple du relevement

Les coordonnées finales du point seront donc :

$$\begin{cases} X_{M_a} = 9885690,5 \text{ cm} \\ Y_{M_a} = 10409775,2 \text{ cm} \\ g_0 = 2,7404 \text{ rad} = 174,4599 \text{ gon} \end{cases} \quad (5.101)$$

Comme contrôle, il est possible de recalculer les résidus après optimisation par la méthode de Gauss (tableau 5.8).

	résidu initial (rad)	résidu final (rad)
A	$1,90146 \cdot 10^{-06}$	$3,65777 \cdot 10^{-06}$
B	$-5,70438 \cdot 10^{-06}$	$-4,01027 \cdot 10^{-06}$
C	$1,90146 \cdot 10^{-06}$	$8,75465 \cdot 10^{-07}$
D	$1,90146 \cdot 10^{-06}$	$-5,22958 \cdot 10^{-07}$

TABLE 5.8 – Calcul des résidus.

On vérifie que la somme des carrés des résidus finaux ($\approx 3,05^{-11}$) est inférieure à la somme des carrés des résidus initiaux ($\approx 4,33^{-11}$).

5.7 Méthode par multilatération

La méthode de multilatération consiste à viser le point inconnu à partir d'un ensemble de points de station (dont les coordonnées sont connues) et de relever la distance horizontale (figure 5.22).

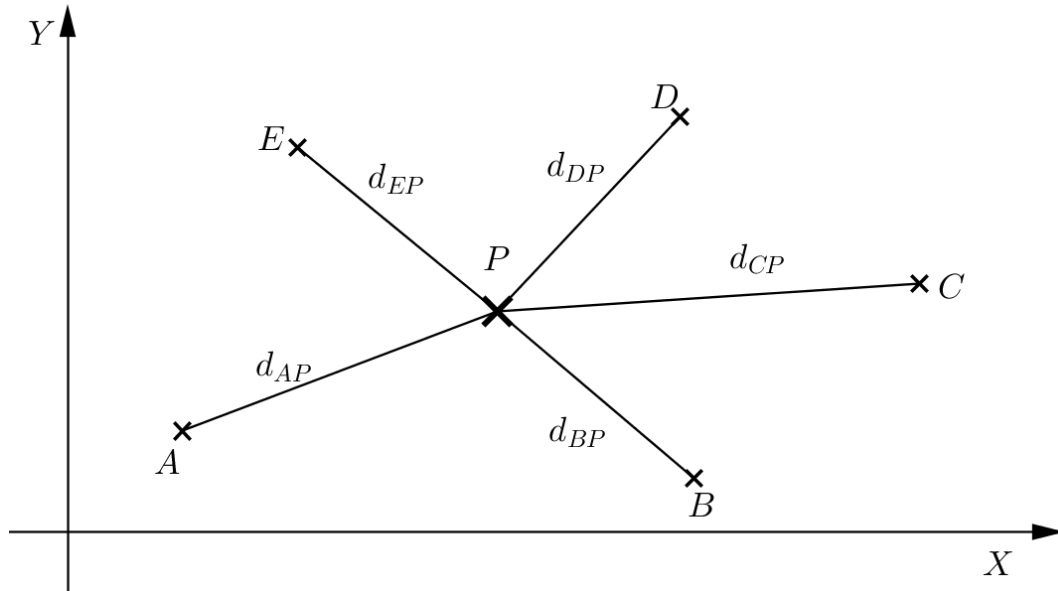


Figure 5.22 – Principe de la méthode par multilatération.

Ce type de méthode était d'emploi assez limité à cause de la faible précision de la mesure de distance par rapport aux mesures angulaires mais les progrès techniques les rendent de plus en plus compétitives. La multilatération présente l'avantage de proposer des calculs nettement plus simples que les méthodes basées sur les mesures angulaires.

Le principe général de la méthode est similaire aux méthodes angulaires, à savoir :

- l'établissement d'un croquis à petite échelle ;
- la détermination d'un point approché ;
- le calcul de la correction pour tenir compte des mesures redondantes.

5.7.1 Coordonnées du point approché

Le point approché est obtenu à partir de la mesure de distances par rapport à deux points connus. Le problème se réduit à la recherche de l'intersection de deux cercles.

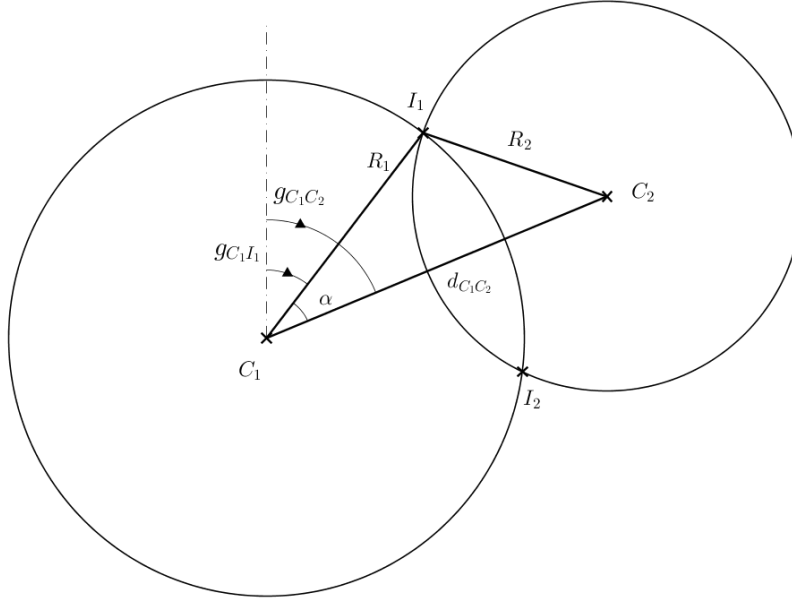


Figure 5.23 – Recherche du point approché par multilatération.

Dans la figure 5.23, on peut écrire la relation de pythagore généralisé dans le triangle $I_1C_1C_2$:

$$R_2^2 = R_1^2 + d_{C_1C_2}^2 - 2R_1d_{C_1C_2} \cos \alpha \quad (5.102)$$

avec :

$$d_{C_1C_2} = \sqrt{(X_{C_2} - X_{C_1})^2 + (Y_{C_2} - Y_{C_1})^2} \quad (5.103)$$

L'angle α peut donc être calculé à partir des données. Pour obtenir le gisement des différentes visées, on applique :

$$\begin{cases} g_{C_1C_2} = \arctan \frac{X_{C_2} - X_{C_1}}{Y_{C_2} - Y_{C_1}} \\ g_{C_1I_1} = g_{C_1C_2} - \alpha \\ g_{C_1I_2} = g_{C_1C_2} + \alpha \end{cases} \quad (5.104)$$

Les coordonnées des points d'intersection sont ensuite classiquement obtenues par :

$$\begin{cases} X_{I_1} = X_{C_1} + R_1 \sin g_{C_1I_1} \\ Y_{I_1} = Y_{C_1} + R_1 \cos g_{C_1I_1} \end{cases} \quad \begin{cases} X_{I_2} = X_{C_1} + R_1 \sin g_{C_1I_2} \\ Y_{I_2} = Y_{C_1} + R_1 \cos g_{C_1I_2} \end{cases} \quad (5.105)$$

Pour décider entre ces deux possibilités le point à retenir, il faut employer l'information provenant d'une troisième mesure de distance.

5.7.2 Calcul du point définitif

Comme pour les deux méthodes précédentes, nous nous concentrerons sur une méthode des moindres carrés pour la résolution du système surabondant reprenant l'ensemble des mesures. Comme dans le cas des méthodes employant les mesures angulaires, on peut exprimer la distance finale de deux manières différentes :

- distance définitive = distance mesurée + résidu
- distance définitive = distance approchée + variation

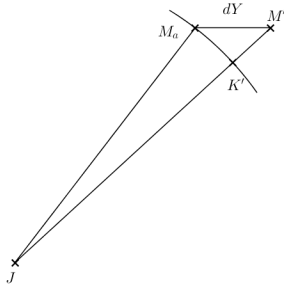


Figure 5.24 – Effet d'une variation selon X.

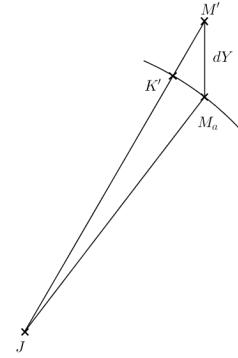


Figure 5.25 – Effet d'une variation selon Y.

Pour calculer la variation, on peut décomposer l'effet d'une variation selon X et selon Y.

5.7.2.1 Variation selon X

La figure 5.24 présente la situation. Sous l'effet d'une variation dX . La variation de distance correspond à la longueur du segment $|K'M'|$. Comme dX est une variation, on peut assimiler l'arc $K'M_a$ à la corde. Ceci permet de dire que dans le triangle rectangle $K'M'M_a$:

$$|K'M'| = dX \sin g_{JM_a} \quad (5.106)$$

5.7.2.2 Variation selon Y

La figure 5.25 présente la situation. Sous l'effet d'une variation dY . La variation de distance correspond à la longueur du segment $|K'M'|$. Comme dY est une variation, on peut assimiler l'arc $K'M_a$ à la corde. Ceci permet de dire que dans le triangle rectangle $K'M'M_a$:

$$|K'M'| = dY \cos g_{JM_a} \quad (5.107)$$

5.7.2.3 Moindres carrés

Comme dX et dY sont indépendants, la variation globale peut s'exprimer selon

$$d|JM_a| = \sin g_{JM_a} dX + \cos g_{JM_a} dY \quad (5.108)$$

On peut donc écrire en synthèse :

$$résidu_{|JM|} = \sin g_{JM_a} dX + \cos g_{JM_a} dY + \Delta D_{JM} \quad (5.109)$$

ΔD_{JM} valant l'écart entre la distance approchée et la distance mesurée. Le calcul procède à la minimisation de la somme des carrés des résidus, c'est-à-dire l'annulation des dérivées selon x et y . On obtient :

$$\frac{d}{dX} \sum_{j=1}^n \text{résidu}_{|JM|}^2 = 2 \sum_{j=1}^n (\sin g_{jMa} dX + \cos g_{jMa} dY + \Delta D_{JM}) \sin g_{jMa} = 0 \quad (5.110)$$

$$\frac{d}{dY} \sum_{j=1}^n \text{résidu}_{|JM|}^2 = 2 \sum_{j=1}^n (\sin g_{jMa} dX + \cos g_{jMa} dY + \Delta D_{JM}) \cos g_{jMa} = 0 \quad (5.111)$$

Ces deux expressions peuvent être mises sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \sin^2 g_{jMa} & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sin 2g_{jMa} \\ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sin 2g_{jMa} & \sum_{j=1}^n \cos^2 g_{jMa} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} dX \\ dY \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^n D_{JM} \sin g_{jMa} \\ \sum_{j=1}^n D_{JM} \cos g_{jMa} \end{Bmatrix} \quad (5.112)$$

La résolution de ce système permet le calcul des résidus, donc la recherche de la position définitive du point.

5.7.3 Exemple d'application

On dispose de mesures de distance entre un point inconnu M et quatre stations A , B , C et D selon le tableau 5.9.

Points	X (cm)	Y (cm)	Distances à M (cm)
A	9263601	10644321	664837,8
B	9476808	11097271	799894,4
C	10134285	10500274	264552,9
D	10037792	10051202	389499,7

TABLE 5.9 – Données de base pour l'exemple de la multilatération

Le calcul de la position approchée de M en employant par exemple les mesures à partir des points A et C donne en employant les relations 5.102 et 5.103 :

$$\|AC\| = \sqrt{(X_A - X_C)^2 + (Y_A - Y_C)^2} = 882519,2157 \text{ cm} \quad (5.113)$$

$$\cos \alpha = \frac{\|MA\|^2 + \|AC\|^2 - \|MC\|^2}{2 \|MA\| \|AC\|} = 0,980738196 \quad (5.114)$$

L'angle α vaut donc 0,196590739 rad ou 12,51535514 gon. On peut donc calculer :

$$\begin{cases} g_{AC} = \arctan \frac{X_C - X_A}{Y_C - Y_A} = 110,4377688 \text{ gon} \\ g_{AM_1} = g_{AC} - \alpha = 97,92241364 \text{ gon} \\ g_{AM_2} = g_{AC} + \alpha = 122,9531239 \text{ gon} \end{cases} \quad (5.115)$$

Ce qui permet de calculer les coordonnées des deux points potentiels :

$$\begin{cases} X_{M_1} = X_A + R_1 \sin g_{AM_1} = 9928084,799 \text{ cm} \\ Y_{M_1} = Y_A + R_1 \cos g_{AM_1} = 10666013,9 \text{ cm} \end{cases} \quad (5.116)$$

$$\begin{cases} X_{M_2} = X_A + R_1 \sin g_{AM_2} = 9885692,422 \text{ cm} \\ Y_{M_2} = Y_A + R_1 \cos g_{AM_2} = 10409775,56 \text{ cm} \end{cases} \quad (5.117)$$

Pour sélectionner le point parmi les deux possibilités, on calcule la distance à un troisième point, par exemple le point B, qu'on peut comparer à la mesure. On obtient une distance de 624206,2455 cm pour M_1 et de 799897,7735 cm pour M_2 à comparer à la mesure (799894,4 cm). On conserve donc le point M_2 comme première approximation de la position du point ($M_a = M_2$), ce qui permet d'établir le croquis présenté en figure 5.26.

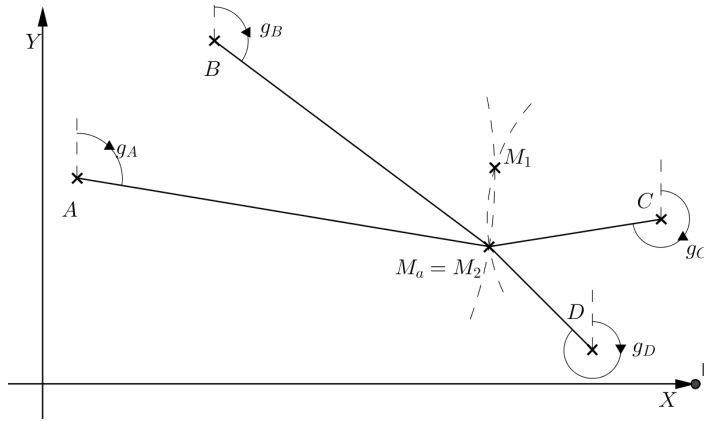


Figure 5.26 – Croquis à petite échelle pour l'exemple d'application.

Une fois cette information connue, il est possible de calculer l'ensemble des données permettant de remplir les matrices pour la relation 5.112 (tableau 5.10).

Points	Gisements approchés (rad)	Gisements approchés (gon)	Distances approchées (cm)	Distances mesurées (cm)	ΔD_{JM} (cm)
A	1,9313432	122,95312	664837,8	664837,8	0
B	2,6050461	165,84239	799897,77	799894,4	3,37352619
C	4,3632587	277,77368	264552,9	264552,9	0
D	5,8820098	374,46037	389498,76	389499,7	-0,94402613

TABLE 5.10 – Calculs pour l'exemple de multilatération

La relation matricielle donne donc :

$$\begin{bmatrix} 2,172309387 & -0,80749681 \\ -0,80749681 & 1,827690613 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} dX \\ dY \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2,093091203 \\ 3,768548234 \end{Bmatrix} \quad (5.118)$$

qui donne après résolution :

$$\begin{cases} dX = -0,235796125 \text{ cm} \\ dY = 1,957740325 \text{ cm} \end{cases} \quad (5.119)$$

Après correction, la position finale du point (coordonnées arrondies au mm) est :

$$\begin{cases} X_{M_f} = 9885692,2 \text{ cm} \\ Y_{M_f} = 10409777,5 \text{ cm} \end{cases} \quad (5.120)$$

On peut calculer les résidus finaux qui valent :

$$\begin{cases} \text{résidu}_A = -0,891796425 \text{ cm} \\ \text{résidu}_B = 1,594209178 \text{ cm} \\ \text{résidu}_C = -0,453925332 \text{ cm} \\ \text{résidu}_D = 0,926906158 \text{ cm} \end{cases} \quad (5.121)$$

dont la somme des carrés vaut $4,4 \text{ cm}^2$ (à comparer à une valeur initiale de $12,27 \text{ cm}^2$) ; On remarque une distribution plus homogène des résidus.

5.8 Lexique

Français	Anglais	Français	Anglais
boussole	compass	insertion par	resection
canevas planimétrique	network of control points	relèvement levé	survey
clisimètre	clinometer	lever	survey
constante d'orientation	station constant	méthode des moindres carrés	root mean square method
erreur de fermeture	closing error	point approché	approximate position
gisement	grid bearing	polygonale	transverse line
insertion par intersection	intersection	résidu	residual value
insertion par multilatération	multilateration		

TABLE 5.11 – Lexique du chapitre 5

Références

- [1] M. Brabant. *Maîtriser la topographie - Des observations au plan*. Eyrolles, 2003.
- [2] Y. Durand. *Topographie Fascicule II : Méthodes classiques de levés topographiques : Méthode par intersections de rayons de visée*. Mutuelle d'édition FPMs, 2010.
- [3] Y. Durand. *Topographie Fascicule III : Méthodes classiques de levés topographiques : Méthode par relèvement*. Mutuelle d'édition FPMs, 2010.
- [4] Y. Durand. *Topographie Fascicule IV : Méthodes classiques de levés topographiques : Méthode des multilatérations*. Mutuelle d'édition FPMs, 2010.

Chapitre 6

Implantation

You build a beautiful superstructure, but it may be standing on air

- I. Asimov, *Foundation and Earth*

6.1 Introduction

L'implantation reprend l'ensemble des opérations consistant à matérialiser sur le terrain les points qui sont présents sur les plans d'éléments à construire (position de bâtiments, axes ou points isolés) dans un but de construction ou de repérage. Suivant la précision souhaitée, les implantations emploient différents instruments (ruban, équerre optique, théodolite,...) et différentes méthodes. On recherche typiquement une précision décimétrique pour les terrassements, centimétrique pour les ouvrages courants et millimétrique pour les fondations d'ouvrages spéciaux. Deux principes doivent être respectés [1] :

- aller de l'ensemble vers le détail ce qui implique de s'appuyer sur un canevas existant ou à créer ;
- prévoir des mesures surabondantes pour un contrôle sur le terrain.

6.2 Implantation d'alignements

6.2.1 Jalonnement

Le jalonnement est l'opération consistant à positionner un ou plusieurs jalons sur un alignement existant, soit entre les points matérialisant cet alignement, soit en prolongement de l'alignement.

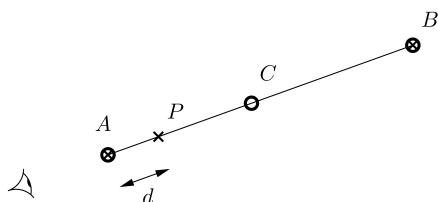


Figure 6.1 – Jalonnement sans obstacles.

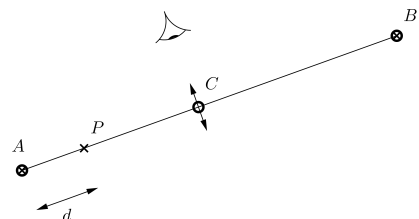


Figure 6.2 – Jalonnement à l'équerre.

6.2.1.1 Jalonnement sans obstacles

On matérialise l'alignement initial AB par des jalons (idéalement réglés au fil à plomb). Un opérateur se place en retrait du jalon A et l'aligne visuellement avec le jalon B. Un deuxième opérateur se déplace avec un jalon C et le place sous les instructions du premier opérateur (lorsque les trois jalons sont alignés, figure 6.1). Une mesure au ruban aligné sur deux des jalons permet ensuite de placer définitivement le jalon C.

On peut également employer une équerre optique (figure 6.3) pour réaliser le jalonnement. Une équerre optique est instrument qui permet de construire rapidement des perpendiculaires par l'alignement de jalons. Elle est constituée de deux prismes renvoyant la lumière (figure 6.4). Elle est associée à un fil à plomb ou à une canne à plomber sur laquelle elle est vissée.

Un seul opérateur peut également réaliser le jalonnement à l'aide d'une équerre optique. Il se place entre A et B, les épaules parallèles à la direction AB. Il se déplace perpendiculairement à la direction AB jusqu'à observer l'alignement des deux jalons en A et B dans l'équerre optique, ce qui permet de marquer le point C.

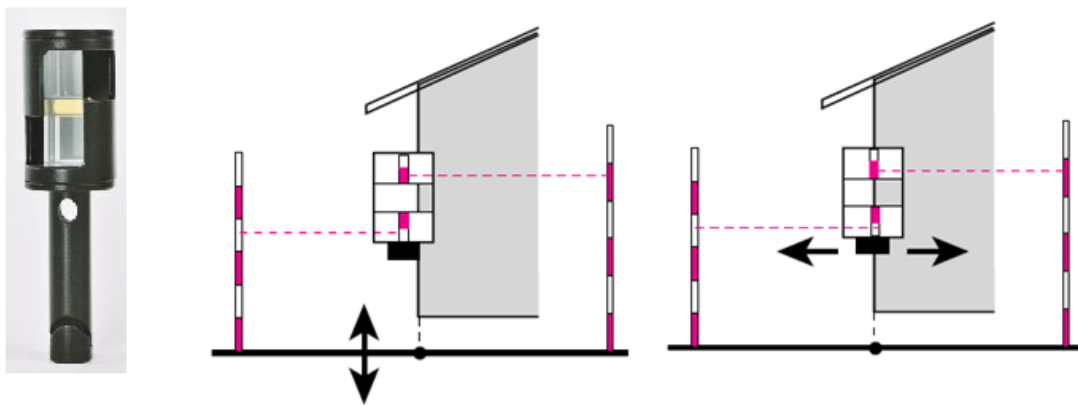


Figure 6.3 – Équerre optique (Doc Leica).

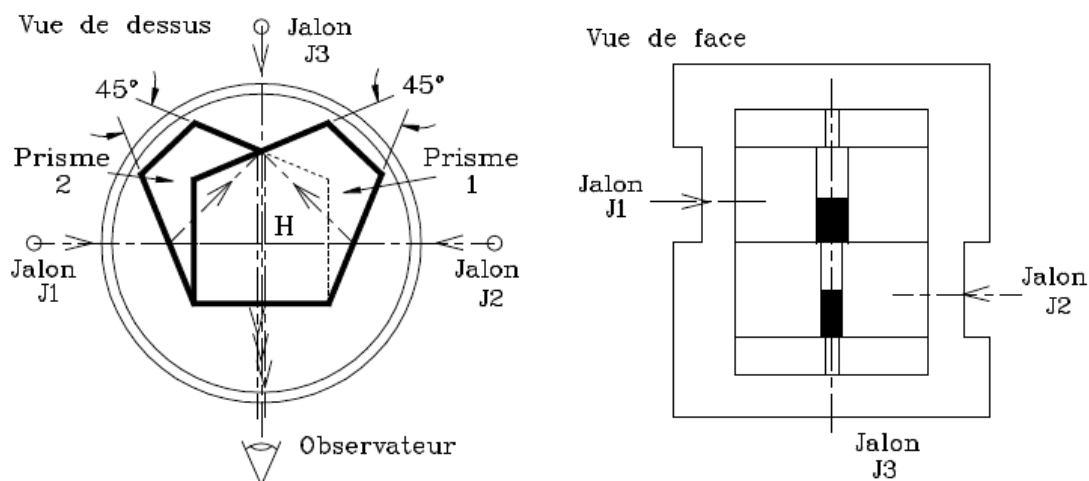


Figure 6.4 – Principe de fonctionnement de l'équerre optique [2].

6.2.1.2 Franchissement d'une butte

S'il n'est pas possible de voir les deux jalons d'un point donné suite à la configuration du terrain, on emploie une méthode itérative (procédé Fourier, figure 6.5) :

- poser un jalon en 1, visible de A et de B ;
- poser un jalon en 2, visible de B et sur l'alignement A-1 ;
- poser un jalon en 3, visible de A et sur l'alignement B-2 ;
- répéter jusqu'à obtenir un alignement entre A et B.

Ce procédé permet d'obtenir un alignement satisfaisant en quelques itérations.

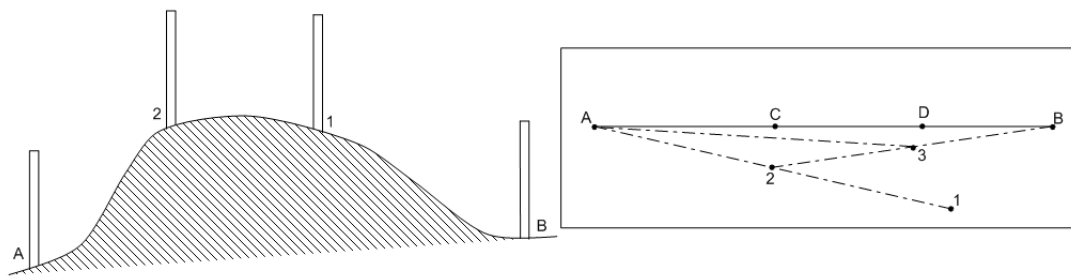


Figure 6.5 – Franchissement d'une butte par le procédé Fourier.

6.2.2 Intersection d'alignements

L'intersection de deux alignements peut s'effectuer :

- avec un cordex (corde laissant une trace sur un support bétonné par exemple) en matérialisant l'intersection des deux alignements ;
- en tendant des cordeaux (fils de fer) et en reportant le point à leur intersection (figure 6.6) ;
- avec un théodolite (par approximations successives).

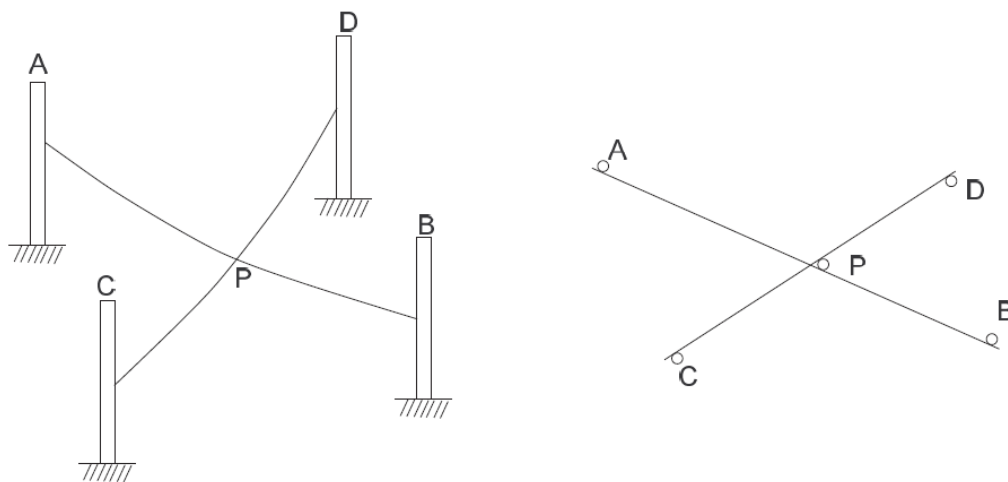


Figure 6.6 – Intersection d'alignements aux courdeaux.

6.2.3 Perpendiculaire à un alignement

Le tracé de perpendiculaires est une opération très fréquente, que ce soit pour l'implantation de points ou pour la réalisation de constructions intermédiaires. Nous allons lister différentes méthodes possibles suivant le matériel à disposition (ruban, équerre optique, théodolite) pour réaliser un alignement perpendiculaire à un autre à partir d'un point de l'alignement ou d'un point extérieur (figure 6.7).

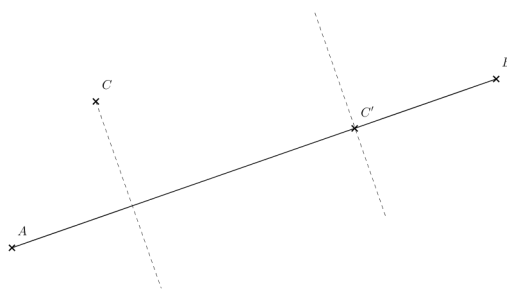


Figure 6.7 – Perpendiculaire à un alignement.

6.2.3.1 Perpendiculaire au ruban

La réalisation de perpendiculaires au ruban utilise des triangles particuliers. On exploite par exemple la propriété des triangles isocèles d'avoir la hauteur issue du troisième côté confondue avec la médiatrice de ce côté. Pour la construction d'une perpendiculaire à partir d'un point C de l'alignement (figure 6.8), on décale deux points D et E d'une même distance de part et d'autre de C , puis on tend le ruban en le maintenant par la graduation qui garantit l'égalité des côtés DP et EP (dans ce cas, deux aides sont nécessaires). On peut également tracer deux arcs de cercle de même rayon dont l'intersection donne le point P recherché (dans ce cas, une seule aide est nécessaire). Si le point n'appartient pas à l'alignement, on trace un arc de cercle centré en ce point coupant l'alignement en D et E . Le pied de la perpendiculaire est au milieu de ce segment DE (figure 6.9).

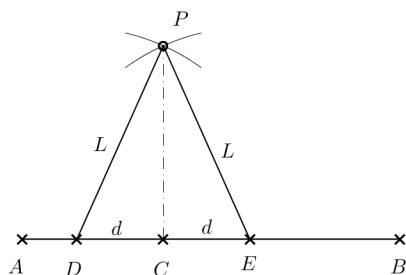


Figure 6.8 – Perpendiculaire au ruban (triangle isocèle) par un point de l'alignement.

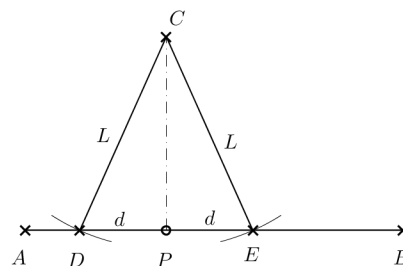


Figure 6.9 – Perpendiculaire au ruban (triangle isocèle) par un point extérieur à l'alignement.

Pour une meilleure précision, il est recommandé de prendre des distances les plus grandes possibles. La méthode du triangle isocèle permet une vérification directe de l'implantation, il suffit de vérifier, après mesure au ruban, qu'on a bien $PD^2 + CD^2 = PD^2$.

On peut également exploiter le théorème de Pythagore : un angle droit est obtenu par la réalisation d'un triangle rectangle (carré de l'hypoténuse valant la somme des carrés des autres côtés). On parle de règle des 3-4-5 (trois côtés dans ces proportions conduisent à la réalisation d'un triangle rectangle, figure 6.10).

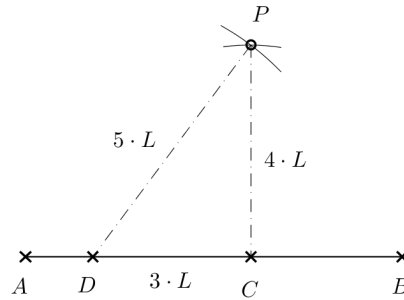


Figure 6.10 – Perpendiculaire au ruban (triangle rectangle).

6.2.3.2 Perpendiculaire à l'équerre optique

On dispose deux jalons sur A et B. Si le point C est sur l'alignement, l'opérateur se positionne au moyen de l'équerre sur l'alignement AB en alignant les images des deux jalons de A et B puis un deuxième opérateur se déplace un jalon jusqu'à ce que la correspondance soit établie. Si le point C est en-dehors de l'alignement, c'est l'opérateur qui se déplace le long de AB jusqu'à aligner le troisième jalon avec les deux premiers.

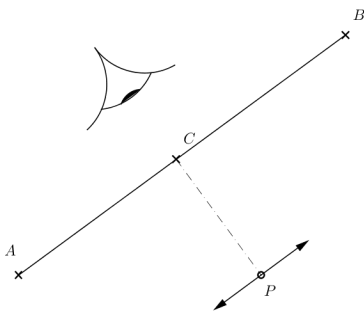


Figure 6.11 – Perpendiculaire à l'équerre optique (point sur l'alignement).

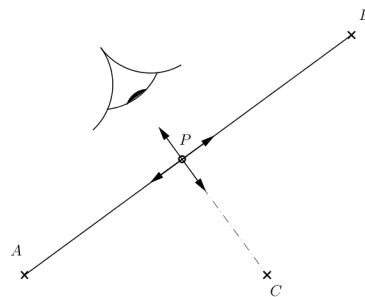


Figure 6.12 – Perpendiculaire à l'équerre optique (point hors de l'alignement).

6.2.3.3 Perpendiculaire au théodolite

Si le point C est sur l'alignement, il suffit d'y stationner puis de pivoter de 100 gon par rapport à une visée sur un des points de l'alignement. Si le point est extérieur, on peut procéder de plusieurs façons :

- tracer une perpendiculaire d'essai en un point M visuellement proche du pied de la perpendiculaire, puis mesurer la distance d par rapport au point C (figure 6.13); on peut répéter l'opération pour plus de précision ;
- stationner en A et mesurer l'angle α entre AB et AC, puis stationner en C et reporter un angle (100 gon $-\alpha$) (figure 6.14) ;
- marquer le milieu M de AB, stationner en C et mesurer les angles α_1 et α_2 (figure 6.15), en déduire l'angle à reporter α en résolvant l'équation 6.1 .

$$\frac{\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha)}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \quad (6.1)$$

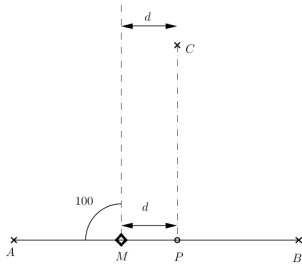


Figure 6.13 – Perpendiculaire au théodolite : première méthode.

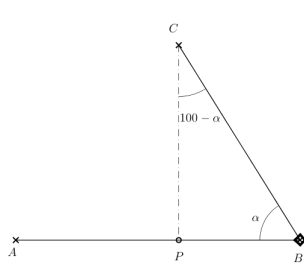


Figure 6.14 – Perpendiculaire au théodolite : deuxième méthode.

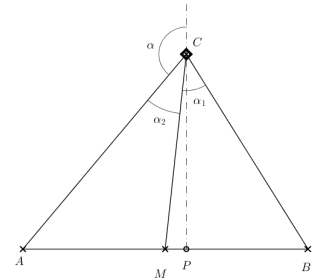


Figure 6.15 – Perpendiculaire au théodolite : troisième méthode.

6.2.4 Parallèle à un alignement

Le tracé de parallèles à un alignement au ruban peut être réalisé simplement en traçant deux perpendiculaires successives à l'alignement initial ou en reportant la même distance sur deux perpendiculaires à l'alignement initial (figure 6.16).

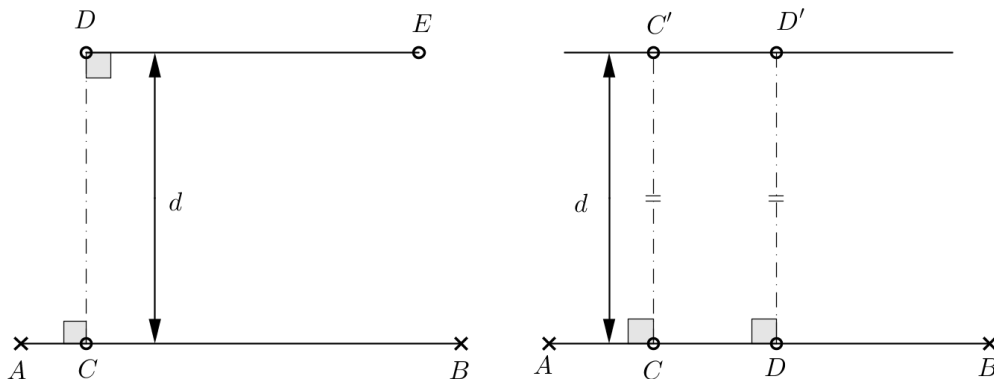


Figure 6.16 – Tracé d'un alignement parallèle au ruban.

Un tracé plus précis est obtenu en employant un théodolite. En stationnant au point A, on effectue une rotation d'un angle α par rapport à l'alignement AB. On implante le point C à une distance calculée selon (d étant la distance souhaitée entre les deux alignements) :

$$AC = \frac{d}{\sin \alpha} \quad (6.2)$$

Ensuite, on stationne en C et on reporte un angle $-\alpha$ pour matérialiser l'alignement CC' parallèle à AB (figure 6.17).

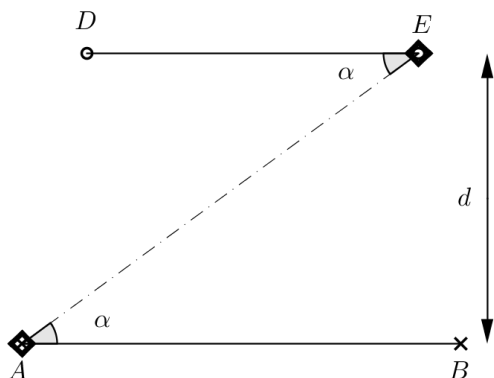


Figure 6.17 – Alignement parallèle au théodolite.

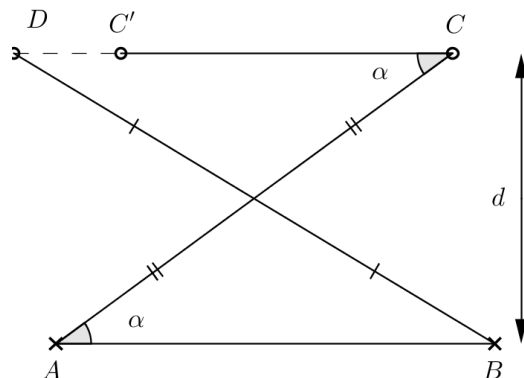


Figure 6.18 – Vérification du parallélisme de deux alignements.

Dans tous les cas, une vérification simple peut être opérée : les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Il suffit donc de construire un parallélogramme ABCD (D est situé à la même distance de C que A de B) et de vérifier que ses diagonales se coupent en leur milieu (figure 6.18).

6.2.5 Prolongement d'alignements

Le prolongement consiste à poser des jalons supplémentaires pour étendre un alignement existant.

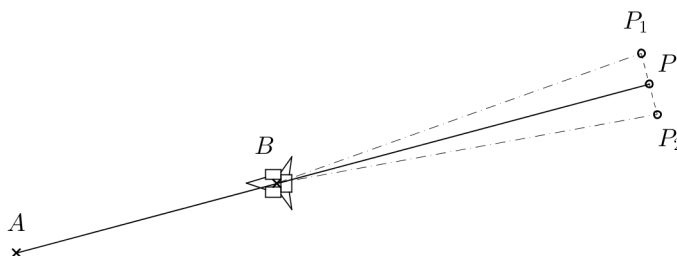


Figure 6.19 – Prolongement d'alignement au théodolite

6.2.5.1 Prolongement sans obstacles

Lorsqu'il n'y a pas d'obstacles, le prolongement peut s'effectuer selon les méthodes de jalonnement présentée au § 6.2.1.1 ; il est recommandé dans ce cas de ne pas prolonger d'une distance supérieure au quart de la longueur de l'alignement existant pour conserver une bonne précision.

Si on dispose d'une lunette, on stationne en l'extrémité B de l'alignement à prolonger, puis on tourne de 200 gon pour viser le nouveau point à implanter. Si on dispose d'un théodolite, on peut effectuer un double retournement pour avoir deux mesures ; si le point obtenu est différent, on prend comme point final le milieu du segment obtenu (figure 6.19).

6.2.5.2 Prolongement avec obstacle

6.2.5.2.1 Au ruban Le prolongement avec obstacle peut se réaliser au ruban seul. On implante une parallèle à l'alignement original à une distance donnée d (qui permet le contournement de l'obstacle) puis on trace une perpendiculaire auxiliaire sur laquelle on reporte la même distance d pour finalement implanter l'alignement prolongé sur une perpendiculaire à ce segment (figure 6.21).

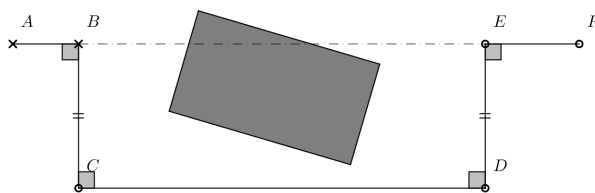


Figure 6.20 – Prolongement sans visibilité au ruban

6.2.5.2.2 Au théodolite Si on dispose d'un théodolite, on implante à partir de A un point P qui permet de voir l'autre côté de l'obstacle et on mesure l'angle α entre l'alignement initial et le rayon de visée vers P. En stationnant en P, on reporte la distance d ($d=|AP|$) selon un angle 2α pour trouver un point dans le prolongement de AB. En stationnant en ce point, on peut matérialiser l'alignement en reportant l'angle α (figure 6.21).

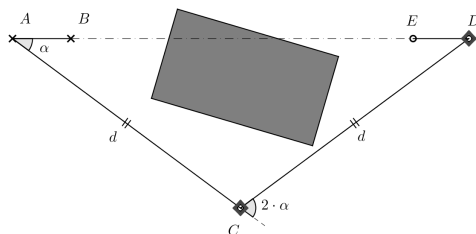


Figure 6.21 – Prolongement sans visibilité au ruban

6.2.6 Contournement d'obstacle

Lorsque la ligne joignant les deux extrémités du segment à mesurer est interrompue par un obstacle, il est nécessaire de le contourner pour réaliser la mesure.

6.2.6.1 Contournement au ruban

On se base sur le théorème de Thalès : on construit par un point de l'alignement initial un alignement sécant en A qui contourne l'obstacle. On implante ensuite sur cet alignement le pied B' de la perpendiculaire issue du point final de l'alignement extrême. Il ne reste plus qu'à jalonner entre A et B' et reporter les points correspondants via des perpendiculaires à l'alignement AB'.

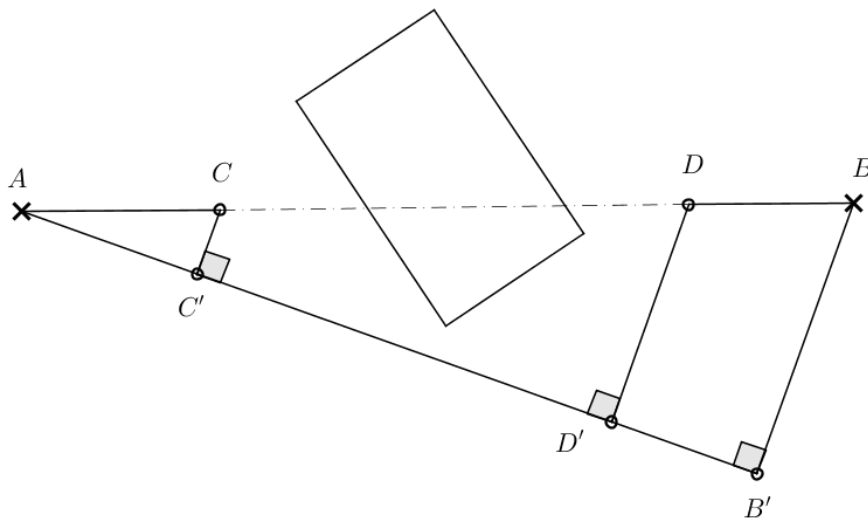


Figure 6.22 – Contournement au ruban.

Comme toutes ces perpendiculaires à AB' sont parallèles entre elles ; le théorème de Thalès garantit d'avoir :

$$\frac{|BB'|}{|AB'|} = \frac{|CC'|}{|AC'|} = \frac{|DD'|}{|AD'|} \quad (6.3)$$

6.2.6.2 Contournement au théodolithe

Dans ce cas de figure, on stationne en un point M duquel on peut voir A et B. On mesure l'angle β selon lequel on voit le segment AB et les distances $|AM|$ et $|BM|$. La résolution du triangle ABC donne successivement :

$$\frac{\sin \alpha_1}{|BM|} = \frac{\sin \alpha_2}{|AM|} = \frac{\sin (200 - \alpha_1 - \beta)}{|AM|} = \frac{\sin (\alpha_1 + \beta)}{|AM|} \quad (6.4)$$

$$\Rightarrow |AM| \sin \alpha_1 = |BM| (\sin \alpha_1 \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha_1) \quad (6.5)$$

$$\Rightarrow \cot \alpha_1 = \frac{|AM|}{|BM| \sin \beta} - \cot \beta \quad (6.6)$$

La distance AB est ensuite déduite de la règle des sinus

$$\frac{\sin \alpha_1}{|BM|} = \frac{\sin \alpha_2}{|AM|} = \frac{\sin \beta}{|AB|} \quad (6.7)$$

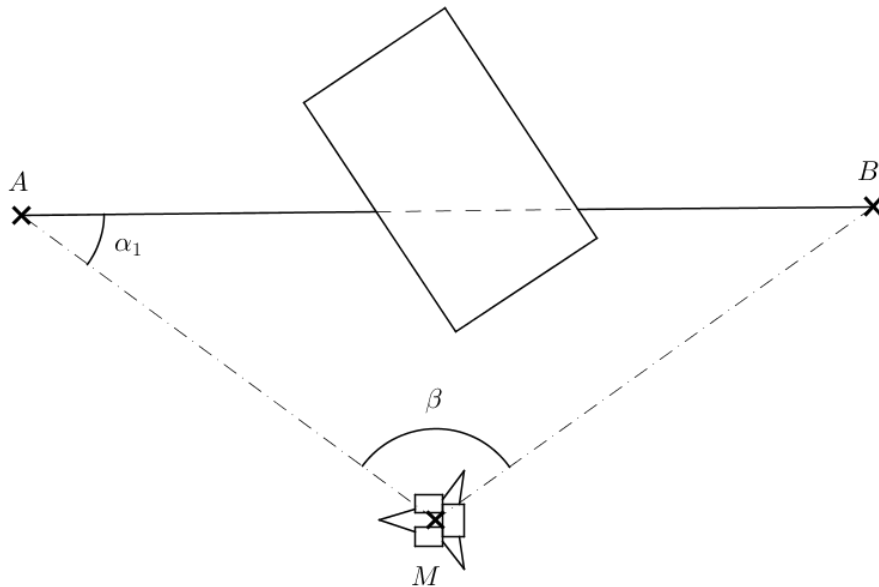


Figure 6.23 – Contournement au théodolithe.

Si des obstacles multiples ne permettent pas de stationner en un point où A et B sont visibles, il est nécessaire de suivre un cheminement planimétrique entre A et B (cf chapitre 5) trouver les coordonnées de points, et donc déterminer la distance les séparant.

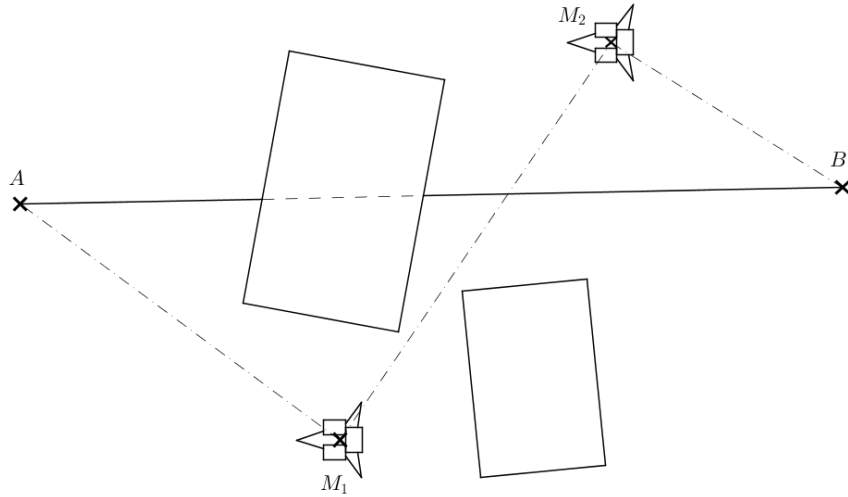


Figure 6.24 – Contournement au théodolite, obstacles multiples.

6.2.7 Alignement faisant un angle donné avec un autre alignement

L'objectif est de matérialiser un alignement faisant un angle α avec un alignement AB existant dont un des points est à une distance h de A.

6.2.7.1 Au théodolite, intersection accessible

La méthode la plus simple consiste à implanter le point S (intersection des alignements) à une distance $|AS|$ de A telle que

$$|AS| = \frac{h}{\sin \alpha} \quad (6.8)$$

Ensuite, il suffit de stationner en S et de reporter l'angle α . On peut vérifier en traçant la perpendiculaire au nouvel alignement passant par A et vérifier la distance entre A et le pied de cette perpendiculaire A' vaut bien h (figure 6.26).

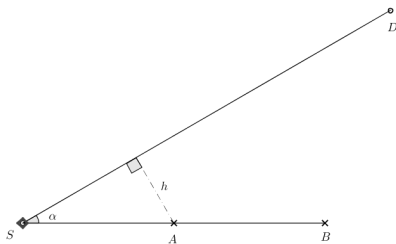


Figure 6.25 – Alignement faisant un angle avec un autre.

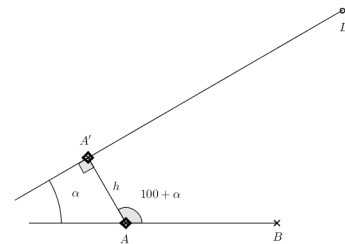


Figure 6.26 – Alignement faisant un angle avec un autre, intersection inaccessible.

6.2.7.2 Au théodolite, intersection inaccessible

Si l'intersection n'est pas accessible, on peut implanter le point A' à partir de A (reporter la distance h selon un angle de $100+\alpha$) puis tracer le perpendiculaire à AA' pour obtenir l'alignement recherché (figure 6.25). La vérification doit se baser sur des informations qui n'ont pas été implantées, par exemple en vérifiant que

$$|BA'| = \sqrt{(d + h \sin \alpha)^2 + (h \cos \alpha)^2} \quad (6.9)$$

6.2.7.3 Au ruban

Si l'alignement doit être réalisé au ruban, on implante les point C et D sur des perpendiculaires à l'alignement initial issues de A et de B telles que (figure 6.27) :

$$|AC| = \frac{h}{\cos \alpha} \quad (6.10)$$

$$|BD| = AC + d \tan \alpha \quad (6.11)$$

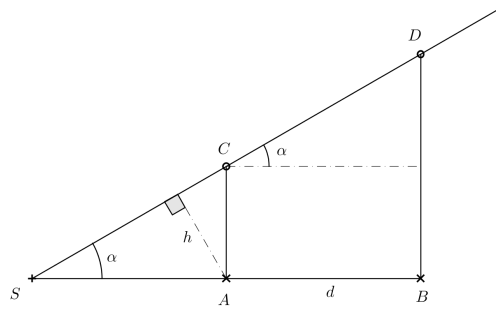


Figure 6.27 – Alignement faisant un angle avec un autre au ruban.

Le contrôle consiste par exemple à vérifier que

$$CB = \sqrt{d^2 + \left(\frac{h}{\cos \alpha}\right)^2} \quad (6.12)$$

$$AD = \sqrt{d^2 + \left(\frac{h}{\cos \alpha} + d \tan \alpha\right)^2} \quad (6.13)$$

6.2.8 Pan coupé régulier

Un pan coupé régulier est un alignement coupant deux pans de murs selon des angles égaux. Cette solution permet d'optimiser la visibilité aux intersections de voiries. Typiquement, la longueur du pan est imposée et l'implantation est réalisée à partir du point d'intersection entre les alignements. Si l'angle α entre les alignements est connu, on peut directement reporter les distances :

$$|SA| = |SB| = \frac{|AB|}{2 \sin(\alpha/2)} \quad (6.14)$$

Si l'angle α n'est pas mesurable, on implante des point N et M respectivement sur les alignements de A et de B de sorte que les distances entre S et M et N soient égales. On peut ensuite placer A et B en respectant :

$$|SA| = |SB| = |SM| \frac{|AB|}{|MN|} \quad (6.15)$$

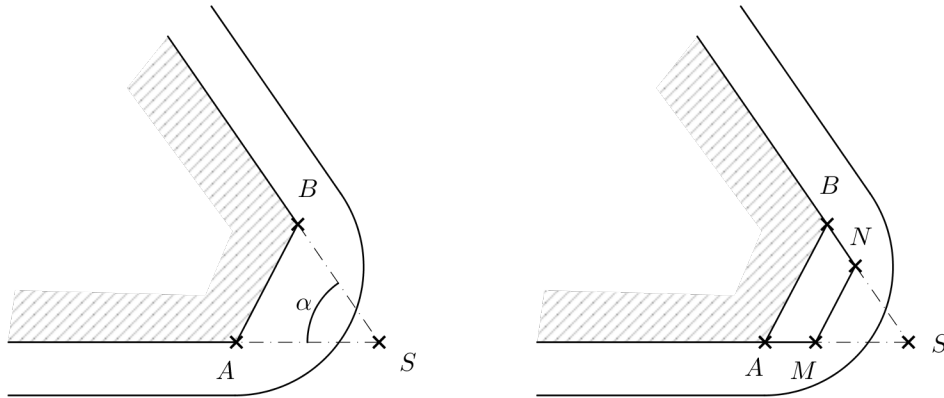


Figure 6.28 – Pan coupé régulier.

6.3 Implantation planimétrique

L'implantation de points consiste à reporter sur le terrain des points issus d'un plan préétabli pour les matérialiser. On distingue les implantations courantes (précision typiquement centimétrique) pouvant être réalisées au ruban des implantations spéciales (précision millimétrique) réalisées à la station totale.

De manière générale, l'implantation consiste à reporter à partir d'éléments connus (un point de référence et une direction de références) des points en coordonnées cartésiennes (implantation en abscisses et ordonnées au ruban, figure 6.29) ou en coordonnées polaires (implantation par rayonnement à la station totale, figure 6.30). L'implantation de bâtiments courants consiste à

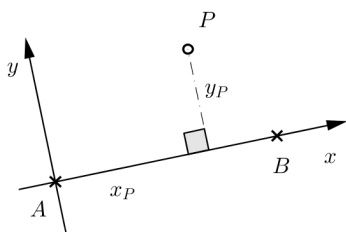


Figure 6.29 – Implantation cartésienne.

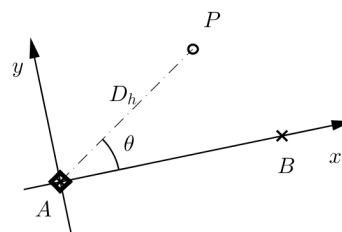


Figure 6.30 – Implantation polaire.

implanter des 'chaises' (figure 6.31) qui délimitent le contour des fondations sur lesquelles des clous permettent de matérialiser les alignements (figure 6.32).

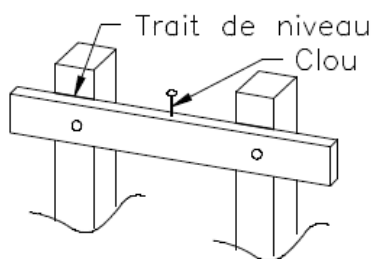


Figure 6.31 – Chaises pour l'implantation.

Pour ce type d'implantation courante, on implante deux des points à la station totale par rapport à une référence (borne cadastrale par exemple), les autres points sont implantés par jalonnement (figure 6.33).

Il faut noter que, dans les procédures d'implantation, les erreurs grossières peuvent vite se produire ce qui peut avoir des conséquences dramatiques sur la suite du projet. C'est pourquoi il est fondamental de systématiquement contrôler les points implantés en fin de campagne à partir de mesures redondantes par rapport à celles qui ont été effectuées pour l'implantation (exemple : mesure des diagonales d'un rectangle dont les côtés ont été implantés). Cette étape est au moins aussi importante que l'implantation elle-même.

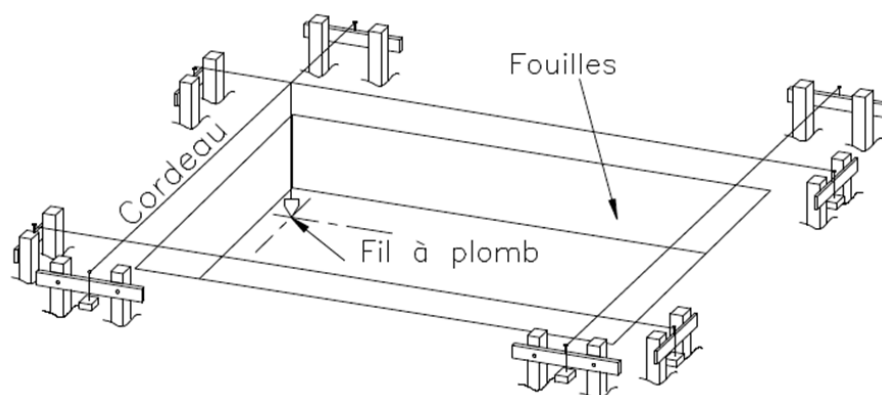


Figure 6.32 – Implantation de chaise pour la réalisation de fondations [1].

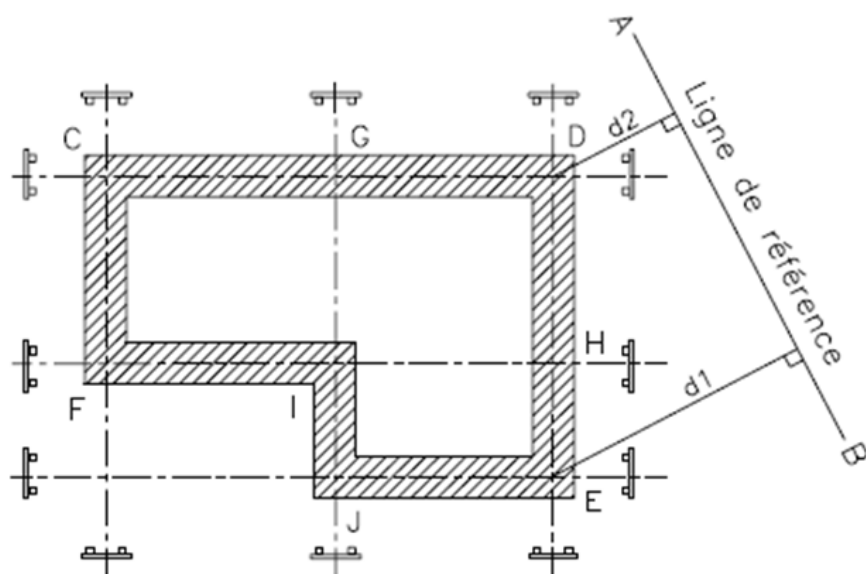


Figure 6.33 – Implantation classique d'un plan de fondation [1].

6.3.1 Exemple pratique

6.3.1.1 Présentation du problème

Cet exemple, tiré de [1] consiste à réaliser l'implantation de quatre pieux P_1 , P_2 , P_3 et P_4 à partir du plan donné en figure 6.34. Les points A et B sont connus dans un repère global :

$$X_A = 100,000m \quad Y_A = 500,000m \quad (6.16)$$

$$X_B = 109,882m \quad Y_B = 501,530m \quad (6.17)$$

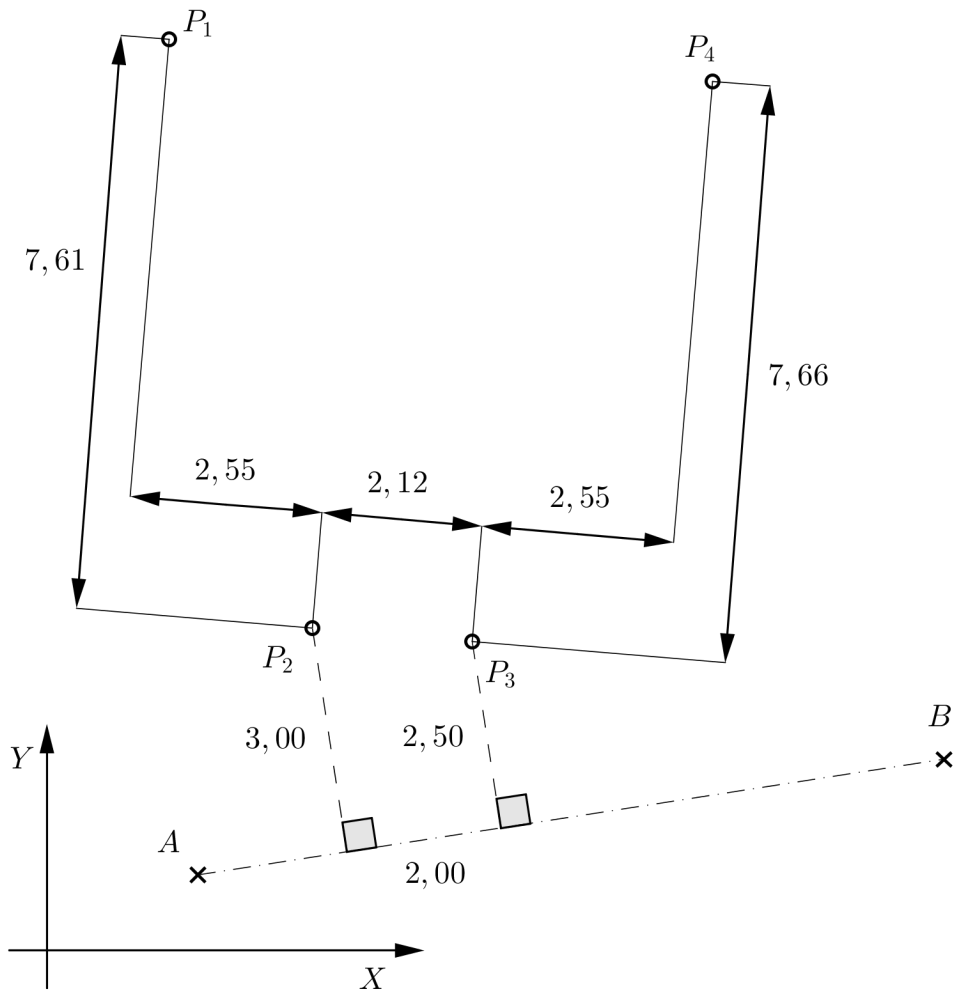


Figure 6.34 – Plan de l'implantation des pieux [1].

Le plan permet de retrouver facilement les coordonnées des différents pieux dans un repère local $P_2x_1y_1$ (tableau 6.1).

Point	x(m)	y(m)
P_1	-2,550	-7,610
P_1	0,000	0,000
P_1	2,120	0,000
P_1	4,670	7,660

TABLE 6.1 – Coordonnées des points dans le repère local

6.3.1.2 Implantation

Pour repasser dans le repère global, il est nécessaire d'effectuer des changements de repère successifs (figure 6.35) :

- une rotation d'un angle α (à déterminer) autour de P_3 permettant de placer P_2P_3 parallèlement à AB (repère $P_2x_2y_2$) ;
- translation de repère pour amener son origine en A (repère Ax_3y_3) ;
- une rotation d'un angle $-\beta$ (à déterminer) autour de A permettant de placer les axes parallèlement au repère global (Ax_4y_4) ;
- une translation de repère pour ramener l'origine commune avec le repère global.

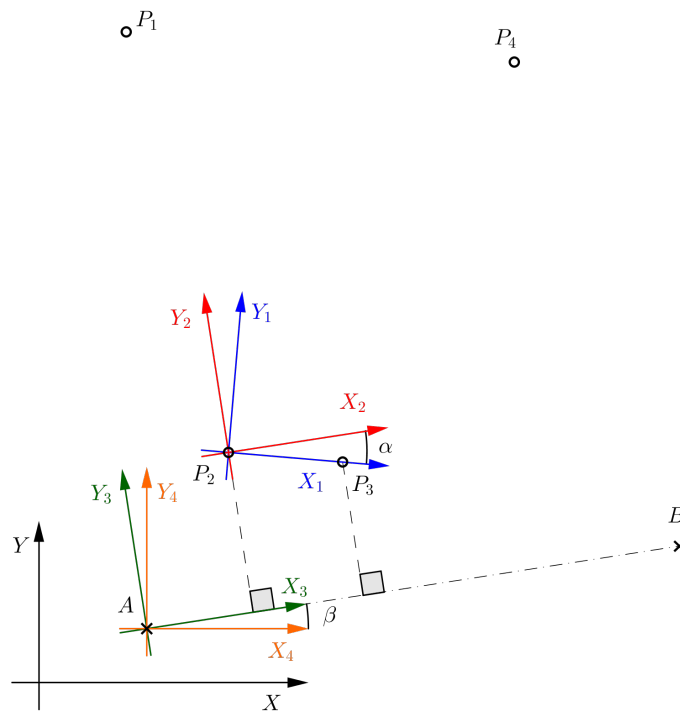


Figure 6.35 – Repères employés pour l'exercice d'implantation.

Pour rappel, un changement de repère implique de modifier les coordonnées des points selon la relation 6.18 pour une translation de repère (figure 6.36) et selon la relation 6.19 pour une rotation de repère (figure 6.37).

$$\begin{cases} x' = x - T_x \\ y' = y - T_y \end{cases} \quad (6.18)$$

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (6.19)$$

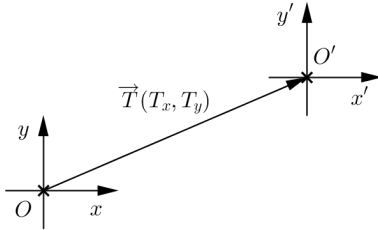


Figure 6.36 – Changement de repère par translation.

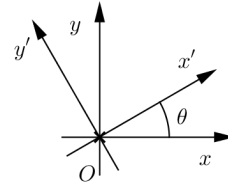


Figure 6.37 – Changement de repère par rotation.

L'angle α peut être calculé par résolution de triangle rectangle, on trouve :

$$\alpha = \arcsin \frac{3 - 2,5}{2,12} = 15,157gon \quad (6.20)$$

Dans le repère 2, les points ont donc pour coordonnées les valeurs données dans le tableau 6.38 (après application de la formule 6.19). La translation de repère permet de replacer l'origine en

Point	x(m)	y(m)
P_1	-0,683	7,997
P_1	0,000	0,000
P_1	2,060	-0,500
P_1	6,345	6,342

Figure 6.38 – Coordonnées des points dans le repère 2

Point	x(m)	y(m)
P_1	1,317	10,997
P_1	2,000	3,000
P_1	4,060	2,500
P_1	8,345	9,342

Figure 6.39 – Coordonnées des points dans le repère 3

A (suivant la relation 6.18), ce qui donne les résultats repris dans le tableau 6.39. On peut déjà à ce stade réaliser l'implantation à partir du point A en prenant AB comme origine des angles. Dans ce cadre, il est plus simple de réaliser une implantation polaire, et donc de convertir les coordonnées cartésiennes du tableau 6.39 en coordonnées polaires (cf tableau tab :coord3pol).

Point	Dh (m)	Hz (gon)
P_1	11,075	307,586
P_1	3,606	337,432
P_1	4,768	364,863
P_1	12,527	346,412

TABLE 6.2 – Coordonnées polaires des points dans le repère 3

6.3.1.3 Retour au repère global

Si on veut raccrocher les points au repère global, il est nécessaire d'effectuer deux nouveaux changements de repère :

- rotation de $-\beta$ autour de A ($\beta = 100 - g_{AB} = 100 - \arctan \frac{\Delta x}{\Delta y}$) pour obtenir les coordonnées du tableau 6.40 ;
- translation pour ramener l'origine au point de référence pour obtenir les coordonnées du tableau 6.41.

Point	x(m)	y(m)
P_1	-0,381	11,069
P_1	1,517	3,271
P_1	3,630	3,092
P_1	6,817	10,509

Figure 6.40 – Coordonnées des points dans le repère 4

Point	x(m)	y(m)
P_1	99,619	511,069
P_1	101,517	503,271
P_1	103,630	503,092
P_1	106,817	510,509

Figure 6.41 – Coordonnées des points dans le repère global

6.3.1.4 Vérification de l'implantation

La vérification de l'implantation doit se faire sur des éléments qui n'ont pas été implantés. C'est pourquoi la vérification va passer par la mesure des distances entre les pieux et de leur position par rapport au point B. Les distances se calculent immédiatement par :

$$d_{P_i P_j} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (6.21)$$

Le tableau 6.42 reprend les distances entre les pieux, le tableau 6.43 les distances entre les pieux et le point B.

Distance	d(m)
$P_1 P_2$	8,026
$P_1 P_3$	8,929
$P_1 P_4$	7,220
$P_2 P_3$	2,120
$P_2 P_4$	8,971
$P_3 P_4$	8,073

Figure 6.42 – Distances entre les points implantés

Distance	d(m)
BP_1	14,012
BP_2	8,544
BP_3	6,444
BP_4	9,488

Figure 6.43 – Distances entre le point B et les points implantés

6.4 Implantation altimétrique

L'implantation altimétrique consiste à repérer le niveau des éléments implantés par rapport à une référence. Les techniques sont présentées au chapitre 3 de ce cours. On peut envisager de poser un trait de niveau servant de repère en mettant en station un niveau puis en repérant l'altitude du plan de visée par lecture sur une mire posée sur la référence. il suffit ensuite de reporter la différence d'altitude entre le plan de visée et la hauteur souhaitée du trait de niveau à l'aide d'un mètre ruban (figure 6.44).

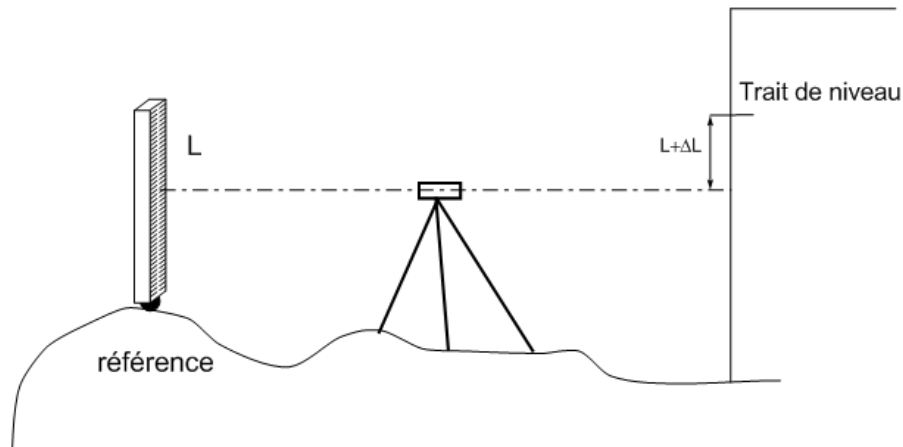


Figure 6.44 – Pose d'un trait de niveau.

On peut éventuellement employer un niveau laser (figures 6.45 et 6.46) pour marquer un plan de référence (horizontal, éventuellement vertical ou incliné) sur un chantier de faible étendue. Il faut rester conscient de l'incertitude qui peut y être liée (incertitude donnée de l'appareil, erreur sur l'altitude proportionnelle à la distance entre l'instrument et la surface visée, typiquement de l'ordre de 0,1 mm/m à 10 mm/m suivant la qualité du matériel).



Figure 6.45 – Niveau laser (document Bosch).



Figure 6.46 – Niveau laser (document CST Berger).

6.5 Piquetage de pentes

Le piquetage de pentes consiste à matérialiser des pentes à créer par l'intermédiaire de piquets régulièrement espacés. Les piquets sont enfoncés jusqu'à ce que leur sommet matérialise la pente recherchée. Le piquetage de pente peut se faire avec un niveau ; dans ce cas, on mesure le dénivelé entre deux piquets et on s'arrange pour que ce dénivelé soit compatible avec la pente recherchée (figure 6.47). On peut également régler la pente à l'aide d'un théodolite en réglant l'angle vertical à la valeur recherchée (figure 6.48).

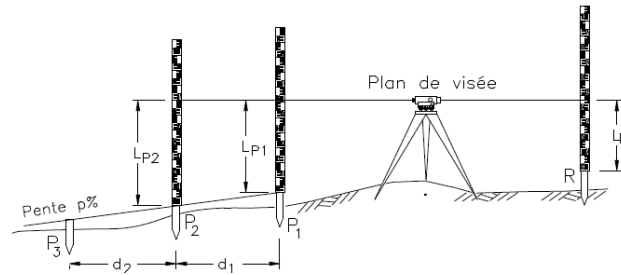


Figure 6.47 – Piquetage de pentes avec un niveau [2].

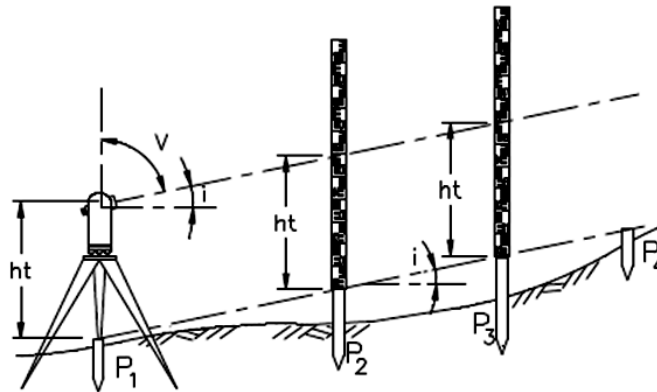


Figure 6.48 – Piquetage de pentes avec un théodolite [2].

6.6 Lexique

Français	Anglais	Français	Anglais
alignement	<i>alignment</i>	implantation polaire	polar setting out
chaise	batter boards	jalonnement	ranging
contournement	pas d'équivalent (ranging between points that don't see each other)	parallèle	parallel
		perpendiculaire	perpendicular
équerre optique	optical square	piquetage de pente	inclination setting out
fouilles	digging	prolongement	pas d'équivalent (ranging outside an interval)
implantation	altimetric setting out	transformation	homogeneous
altimétrique		homogène	coordinate matrix
implantation cartésienne	cartesian setting out		

TABLE 6.3 – Lexique du chapitre 6 (les valeurs en italique sont des traductions littérales)

Références

- [1] M. Brabant. *Maîtriser la topographie - Des observations au plan*. Eyrolles, 2003.
- [2] S. Miles. *Topographie et toponométrie moderne*. Eyrolles, 1999.

Chapitre 7

Techniques modernes employées en topographie

The U.S. Global Positioning System (GPS) Standard Positioning Service (SPS) consists of space-based positioning, navigation, and timing (PNT) signals delivered free of direct user fees for peaceful civil, commercial, and scientific uses worldwide

- GPS Performance Standard, *Department of defense*

7.1 Introduction

Ce chapitre a pour but de présenter les principes de bases de deux techniques avancées utilisables en topographie : le positionnement par système GPS et la restitution par photogrammétrie.

7.2 GPS

GPS (Global Positioning System) ou NAVSTAR (NAVigation System by Timing And Ranging) est à l'origine un système militaire américain conçu dans les années 70 et contrôlé par le département de la défense. Il s'agit d'un système spatial de radio-positionnement et de transfert de temps. Il fournit à un nombre illimité d'utilisateurs, dans un système global et unique, une information de position, de vitesse et de temps [1]. Le maillon principal du système est la flotte de 24 satellites (21 opérationnels et 3 de réserve). Son utilisation en topographie permet à tout utilisateur de repérer un point sur le globe dans un repère absolu, donc de simplifier les opérations dans lesquelles les mesures doivent être reprises dans un canevas global.

Il faut noter que l'union Européenne a lancé depuis 2001 le projet de lancer sa propre constellation de satellites pour le géopositionnement (Gallileo) qui est à l'heure actuelle en début de déploiement. Ce système a pour objectif d'augmenter la couverture du globe terrestre (le système GPS couvre globalement mal les hautes latitudes) et de proposer une précision supérieure à celle fournie par le GPS. Le projet devrait être pleinement opérationnel en 2020.

7.2.1 Principe général

Le système GPS est constitué de trois composants essentiels :

- le segment spatial ;
- le segment de contrôle ;
- le segment utilisateur.

7.2.1.1 Segment spatial

La composante principale du segment spatial est la constellation de 24 satellites (21 opérationnels et 3 de réserve) qui est pleinement opérationnelle depuis 1994. Les satellites orbitent à 20200 km d'altitude dans six plans orbitaux décalés de 60° (figure 7.1).

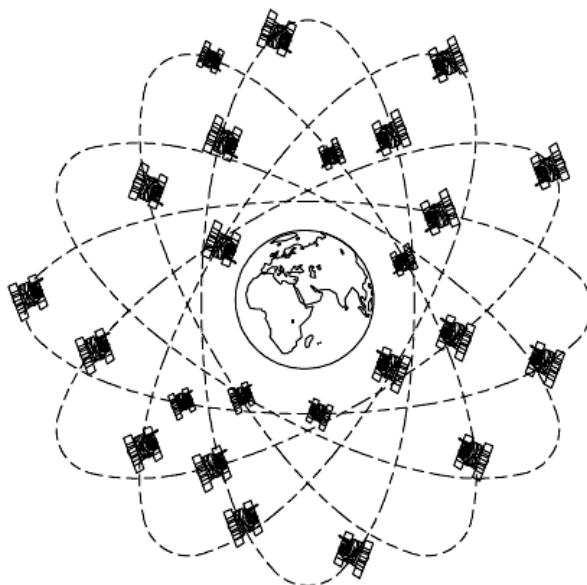


Figure 7.1 – Satellites GPS.

Le signal GPS est émis sous forme d'ondes électromagnétiques se composant de deux fréquences porteuses (L1 à 1575,42 MHz et L2 à 1227,60 MHz) correspondant à des longueurs d'ondes de 19 et 24 cm. Le cadencement est assuré par l'intermédiaire d'horloges atomiques. Ces deux fréquences sont portées par une fréquence dite fondamentale f_0 à 10,23 MHz ($f_{L1} = 154f_0$, $f_{L2} = 120f_0$). Ces fréquences sont modulées par des codes pseudo-aléatoires :

- code C/A (Coarse/Acquisition ou Clear/Access) modulant L1 accessible à tout utilisateur (fréquence de 1,023 MHz se répétant toutes les millisecondes) ;
- code P (Precise) modulant L1 et L2 se répétant une fois par semaine (ce code n'est accessible qu'aux utilisateurs habilité suite à son chiffrement ;
- le message de navigation contenant diverses informations (temps GPS, position du satellite,...) à 50 Hz.

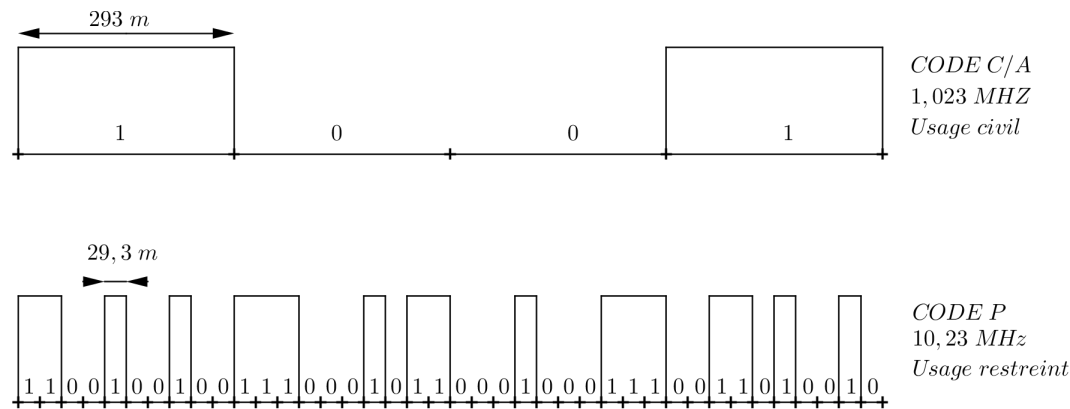


Figure 7.2 – Message GPS.

Par convention, le temps GPS est défini par le numéro de la semaine et le temps dans la semaine (origine le 6 janvier 1980 à 0h00, l'origine de la semaine est le dimanche à 0h00).

7.2.1.2 Segment de contrôle

Le segment de contrôle rassemble les éléments permettant d'assurer le contrôle de la flotte de satellites. Les stations au sol sont notamment chargées de :

- enregistrer les signaux et envoyer les éventuelles corrections (compenser les dérives d'horloges) ;
- prédire les éphémérides (prédiction précise des position de l'ensemble des satellites au cours du temps) ;
- collecte des informations météorologiques.



Figure 7.3 – Stations de contrôle GPS.

7.2.1.3 Segment utilisateur

Le segment utilisateur regroupe les appareils capables de recevoir le signal GPS pour en déduire (suivant plusieurs modes comme expliqué plus loin) la position de l'appareil sur le globe terrestre. On distingue plusieurs types principaux de récepteurs :

- les récepteurs grand public de navigation simples ou associés à un logiciel cartographique ;
- les récepteurs professionnels mono ou bi fréquences.

7.2.2 Techniques de positionnement

Le positionnement par GPS utilise deux techniques qui présentent chacune leurs avantages et leurs inconvénients : la mesure de pseudo-distances par observation du code et le mesure de phase.

La mesure de pseudo-distances consiste à examiner la corrélation entre le code émis par le satellite et celui généré par le récepteur. Le décalage temporel est ainsi estimé ce qui donne accès à la distance entre le récepteur et le satellite. Si quatre satellites sont visibles, la position est obtenue par intersection des sphères. Cette technique nécessite une haute précision dans la détermination du temps (la précision peut aller jusqu'au dixième de nanosecondes pour certains modèles).

De fortes imprécisions peuvent entacher la mesure de pseudo distances ; c'est pourquoi une autre méthode employant la mesure du déphasage entre le signal reçu et le signal généré (mesure de la fréquence de battement en fait). Ce type de mesure est beaucoup moins sensible aux erreurs de mesure, mais fournit une information ambiguë (le déphasage est connu à n longueurs d'ondes près) qui nécessite un traitement plus complexe.

on peut évaluer la précision de la mesure par des indicateurs nommés DOP (Dilution Of Precision) :

- en positionnement planimétrique (HDOP : Horizontal DOP)
- en positionnement altimétrique (VDOP : vertical DOP)
- en détermination du temps (TDOP : Time DOP)
- en positionnement 3D (PDOP : Position DOP)

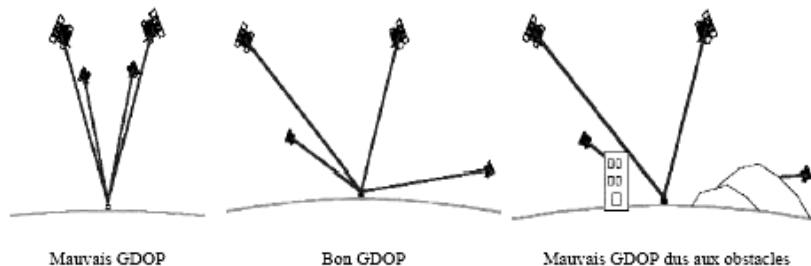


Figure 7.4 – Dilution of precision [2].

Cette imprécision est fonction de la position des différents satellites visibles ; lorsque plus de quatre satellites sont visibles, cette valeur est calculée pour toutes les configurations possible pour permettre de déterminer les satellites les mieux placés pour obtenir les meilleurs résultats.

7.2.2.1 Types de positionnements basés sur les pseudo-distances

Le positionnement basé sur la mesure de pseudo-distance est la méthode implantée dans la majorité des appareils grand public. On distingue :

- la méthode autonome (basée sur l'intersection de sphères) qui offre une précision de l'ordre de la dizaine de mètres pour une mesure instantanée (l'erreur diminue si on prend l moyenne de mesures sur une durée déterminée) ;
- la méthode différentielle qui se base sur un récepteur fixe (station de contrôle ou pivot) qui envoi des corrections au récepteur mobile servant à la mesure (pour que la méthode soit utilisable, il faut toutefois s'assurer que les deux récepteurs observent toujours les quatre mêmes satellites. Au vu de leur lourdeur, les calculs peuvent s'effectuer en temps réel ou en post-traitement.

7.2.2.2 Types de positionnements basés sur la mesure de phase

La mesure de phases est également employée dans des récepteurs professionnels, avec deux types de méthodes (on parle de modes) :

- le mode statique dans lequel on mesure l'information en au moins deux points durant une longue durée (de une à dix heures typiquement) ;
- le mode dynamique se déclinant en quatre variantes :
 - le mode cinématique qui permet de mesurer en continu la position d'un mobile en mouvement (anciennement, l'initialisation devait se faire à partir d'un point fixe, ce qui n'est plus le cas actuellement) ;
 - le mode semi-cinématique dans lequel on stationne quelques secondes sur les différents points à relever ;
 - le mode pseudo-cinématique consiste à stationner au moins deux fois sur chaque points avec un décalage donné (au moins une heure) pour obtenir une optimisation sur la précision de positionnement (cette méthode est toutefois assez lourde d'emploi) ;
 - le mode statique rapide dans lequel des informations additionnelles sont employées (lecture de code ou emploi de plus de quatre satellites par exemple) pour accélérer la convergence des calculs.

Le tableau 7.1 issu de la référence [1] récapitule les performances classiques pour les différents modes de mesure.

Méthode	Nb. mini de récepteur(s)	Durée d'observation	Exactitude	Commentaires
Autonome	1	15 à 20 min	6 à 8 cm	Très simple
Statique	2	1 h	1 cm	Complexité variable
Cinématique	2	-	10 cm à 1 m	Difficulté du maintien du verrouillage
Semi-cinématique	2	1 min / point	qq cm	Bases courtes, maintien du verrouillage
Pseudo-cinématique	2	1 à 3 min	qq ppm	Méthode lourde
Statique rapide	2	3 à 5 min	qq cm	Bases courtes, observations supplémentaires

TABLE 7.1 – Récapitulatif des méthodes GPS

7.3 Photogrammétrie

7.3.1 Principe de base

La photogrammétrie regroupe l'ensemble des techniques permettant d'exploiter la prise de vue d'une même scène de plusieurs points de vue différents. Le principe général est celui de la vision stéréoscopique (principe permettant au cerveau de reconstituer le relief à partir des observations effectuées par nos deux yeux, figure 7.5).

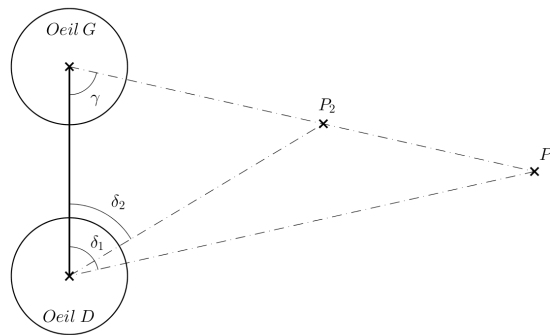


Figure 7.5 – Principe de la vision stéréoscopique : les deux points sont vus de la même façon par l'oeil gauche, mais pas par l'oeil droit.

La photogrammétrie a des applications à grande échelle (établissement de cartes à partir de clichés en altitude) ou à petite échelle (restitution de la géométrie d'un bâtiment à partir de différents clichés). Le principe de base consiste à repérer des éléments communs aux deux clichés pour établir les transformations géométriques entre les deux prises de vue.

Il est ensuite possible de retrouver les coordonnées de points d'éléments qui sont visibles sur les deux clichés suivant une procédure mathématique présentée plus en détail dans la référence [2]. Dans le cadre de ce cours, nous nous contenterons d'établir les principes généraux ainsi que les usages classiques de cette technique.

7.3.2 Photogrammétrie terrestre

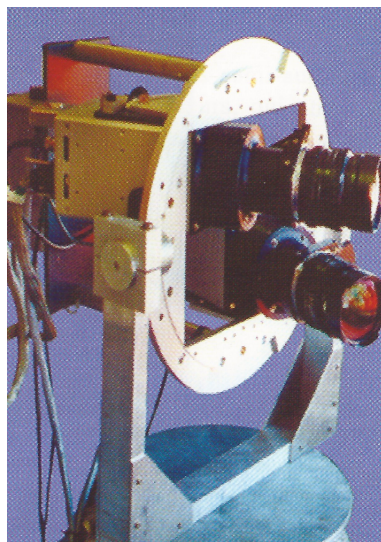


Figure 7.6 – Matériel de photogrammétrie [2].

Figure 7.7 – Matériel de photogrammétrie [2].

Figure 7.8 – Matériel de photogrammétrie [2].

La photogrammétrie terrestre vise à reconstituer la configuration du terrain à partir de clichés aériens. Des caméras (cf figures 7.6 à 7.8) sont embarquées dans des avions qui balayent le terrain à couvrir en bandes parallèles se chevauchant (figure 7.9 et 7.10).

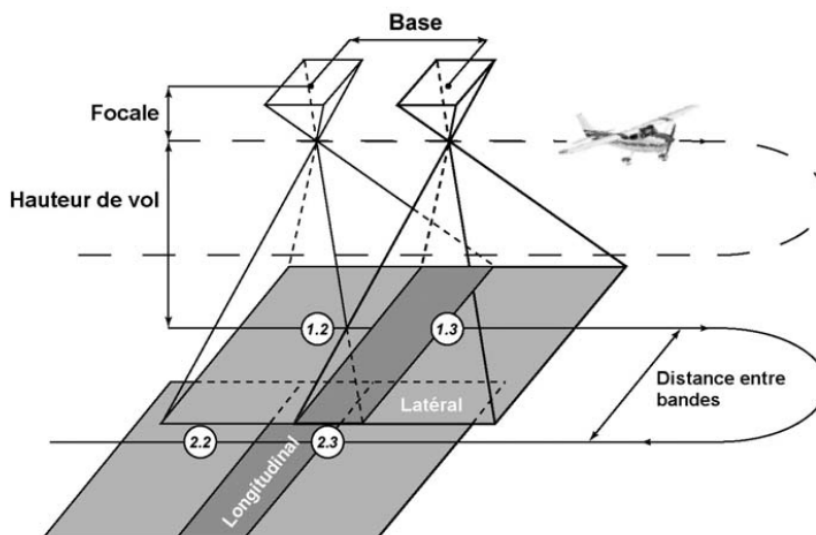


Figure 7.9 – Principe de prise de vue en photogrammétrie aérienne.

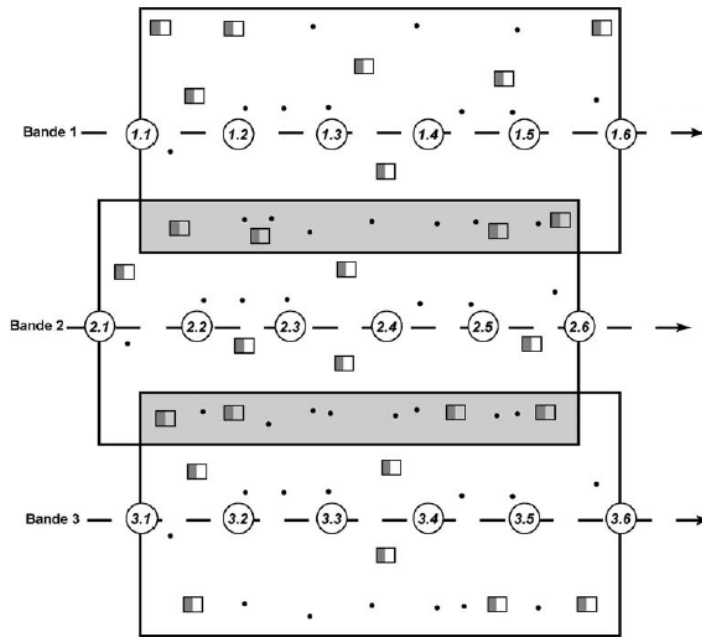


Figure 7.10 – Chevauchement des bandes.

7.3.3 Photogrammétrie numérique

L'évolution des possibilités de calcul graphique permet actuellement une analyse automatique des clichés pour la restitution du relief à partir de différents points de vue. On parle alors de photogrammétrie numérique. Le recalage entre les différents clichés peut s'effectuer en mesurant la corrélation entre les images. Cette corrélation exprime la correspondance plus ou moins forte entre deux éléments (ici les pixel des deux images). La position relative de deux clichés présentant la plus forte corrélation renseigne sur la transformation permettant la superposition des points homologues sur un cliché. Mathématiquement si $f(x,y)$ et $g(x,y)$ représentent l'intensité d'un pixel de l'image respectivement pour le cliché 1 et le cliché 2¹, la corrélation se calcule selon :

$$f(x,y)og(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f^*(m,n)g(x+m,y+n) \quad (7.1)$$

En pratique, les algorithmes employés ne font pas le calcul sur l'ensemble des pixels mais bien une fenêtre de taille variable pour établir la corrélation entre deux images.

1. dans l'hypothèse où l'image est en niveau de gris, pour une image en couleur, on calcule la corrélation sur les trois composants RGB

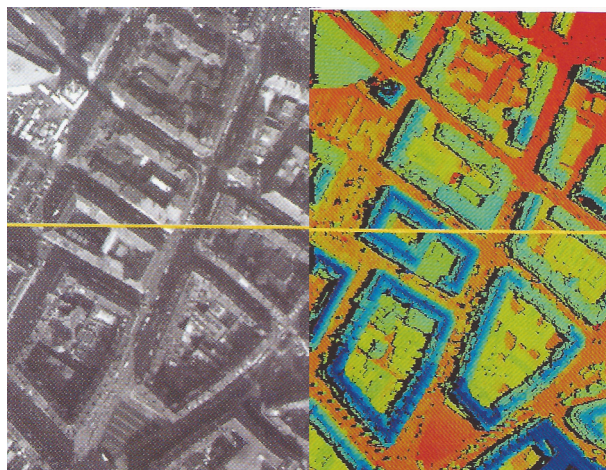


Figure 7.11 – Corrélation entre deux images.

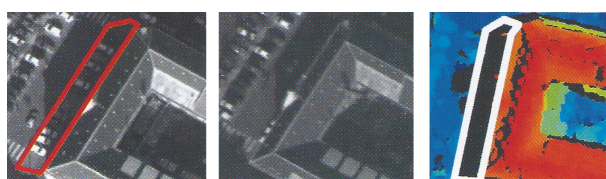


Figure 7.12 – Corrélation entre deux images, traitement de points cachés sur un des clichés.



Figure 7.13 – Corrélation, problème lié aux éléments mobiles (voitures par exemple).

L'image utilisée pour le traitement mathématique est généralement prétraitée pour mettre en avant les éléments pertinents qui serviront au recalage par la suite. Par exemple, dans le cas d'un échangeur autoroutier (cf figure 7.14), l'application successive de filtres numériques permet de rehausser les contours des voiries au détriment du reste du cliché.

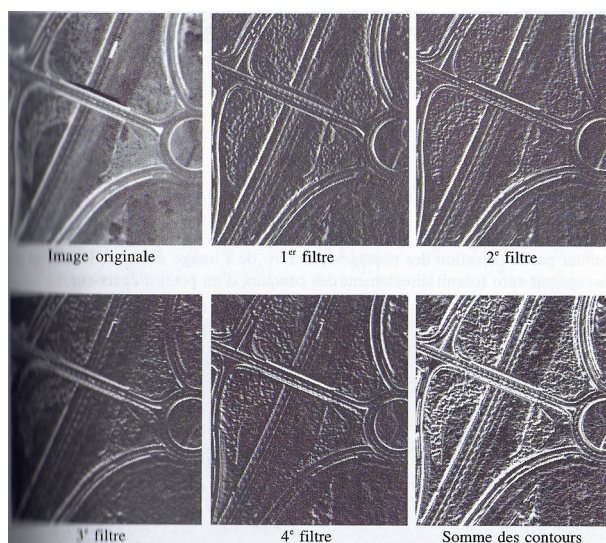


Figure 7.14 – Application de filtres.

7.3.4 Restitution de bâtiments

La photogrammétrie à petite échelle peut être employée pour la restitution 3D de bâtiments. Le principe général est identique à celui présenté précédemment, à savoir la mise en évidence de points communs à plusieurs clichés pour obtenir leur position spatiale. Il existe de nombreux logiciels (dont certains libres) dont l'interface propose des fonctions de base communes :

- affichage des clichés en vis à vis ;
- possibilité de traitement numérique (filtre, transformation géométrique,...) ;
- sélection de points communs sur les clichés (on parle de feature matching, cf figure 7.15) ;
- sauvegarde des coordonnées des points identifiés et possibilité de restitution tridimensionnelle (cf figures 7.16 et 7.17).

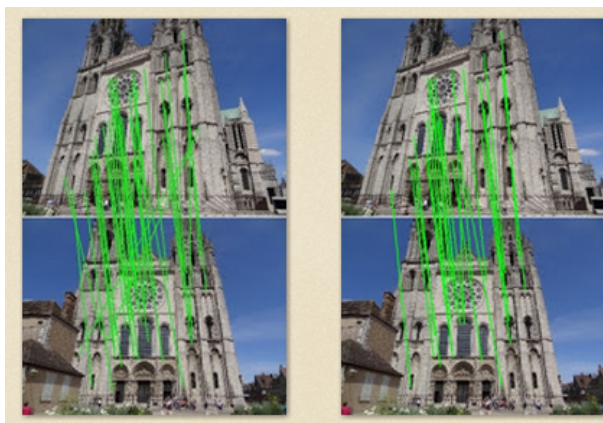


Figure 7.15 – Feature matching.

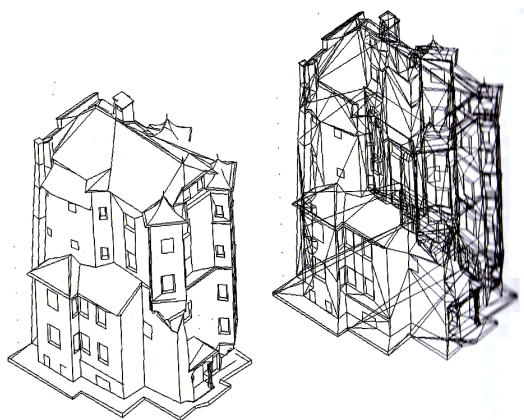


Figure 7.16 – Rendu filaire.

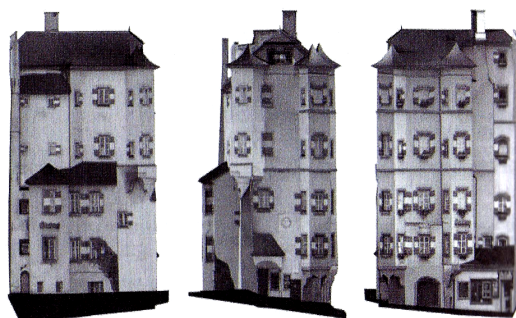


Figure 7.17 – Rendu 3D.

Ce type de logiciel présente un grand intérêt dans les projets de restauration pour lesquels aucune donnée n'est disponible sur les objets existants.

7.4 Lexique

Français	Anglais	Français	Anglais
photogrammétrie	photogrammetry	- différentiel	differential location
- aérienne	aerial photogrammetry	segment de contrôle	control segment
- terrestre	ground photogrammetry	segment spatial	space segment
positionnement	location	segment utilisateur	user segment
- autonome	autonomous location		

TABLE 7.2 – Lexique du chapitre 7.

Références

- [1] J-B Henry. *Cours de topographie et de topométrie générale*. Université Louis Pasteur Strasbourg, 2008.
- [2] M. Kasser and Y. Egels. *Photogrammétrie numérique*. Lavoisier, 2001.
- [3] S. Miles. *Topographie et toponométrie moderne*. Eyrolles, 1999.
- [4] M. Brabant. *Maîtriser la topographie - Des observations au plan*. Eyrolles, 2003.

Annexe A

Formulaire de topographie

Incertitude expérimentale

Moyenne arithmétique

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Ecart type expérimental

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Ecart type de la moyenne

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Planimétrie

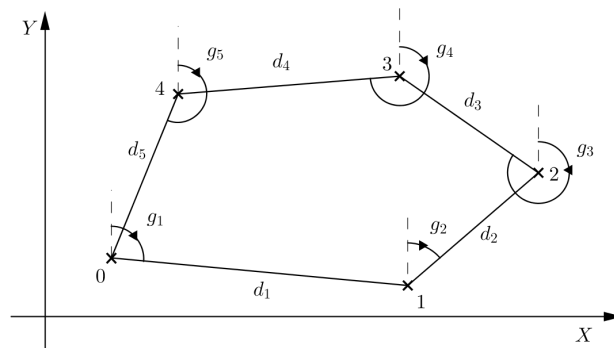


Figure A.1 – Exemples de mesures relevées pour l'établissement d'un canevas polygonal.

Canevas polygonal

Le calcul initial des coordonnées :

$$\begin{cases} \Delta x_i = d_i \sin g_i \\ \Delta y_i = d_i \cos g_i \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Erreur de fermeture :

Corrections :

$$\begin{cases} e_{x,tot} = \sum_{i=1}^N \Delta x_i \\ e_{y,tot} = \sum_{i=1}^N \Delta y_i \end{cases} \quad (A.2)$$

$$\begin{cases} k_{xi} = \frac{d_i}{\sum d_i} e_{x,tot} \\ k_{yi} = \frac{d_i}{\sum d_i} e_{y,tot} \end{cases} \quad (A.3)$$

$$\begin{cases} \Delta x_{i,corr} = \Delta x_i - k_{xi} \\ \Delta y_{i,corr} = \Delta y_i - k_{yi} \end{cases} \quad (A.4)$$

Insertion

Méthode d'intersection

Point approché

$$Y_P = Y_A + \frac{(X_B - X_A) - (Y_B - Y_A) \tan g_B}{\tan g_A - \tan g_B} \quad (A.5)$$

$$X_P = X_A + (Y_P - Y_A) \tan g_A \quad (A.6)$$

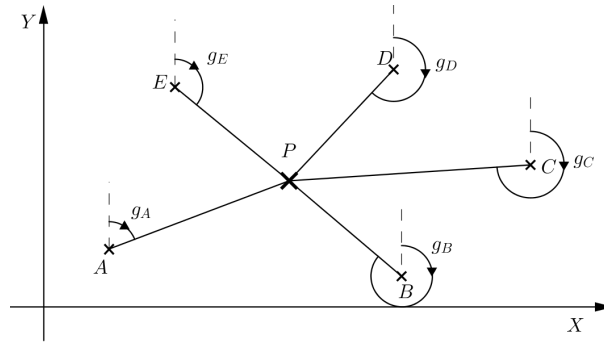


Figure A.2 – Principe de la méthode par intersections des rayons de visée.

Méthode des moindres carrés Résidus :

$$r_J = \frac{dX \Delta Y}{D^2} - \frac{dY \Delta X}{D^2} + g_{a_J} - g_{m_J} \quad (A.7)$$

Minimisation de la somme des carrés des résidus :

$$\begin{bmatrix} \sum a_i^2 & \sum a_i b_i \\ \sum a_i b_i & \sum b_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} dX \\ dY \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \sum a_i c_i \\ \sum b_i c_i \end{Bmatrix} \quad (A.8)$$

avec :

$$a_J = \frac{\Delta Y}{D^2} \quad (A.9)$$

$$b_J = -\frac{\Delta X}{D^2} \quad (A.10)$$

$$c_J = g_{a_J} - g_{m_J} \quad (A.11)$$

$$D^2 = \Delta X^2 + \Delta Y^2 \quad (A.12)$$

Méthode par relèvement

Point approché Méthode du calcul du gisement :

$$\tan g_A = -\frac{(Y_C - Y_B) - (X_A - X_B) \cot \alpha + (X_A - X_C) \cot \beta}{(X_C - X_B) - (Y_A - Y_B) \cot \alpha + (Y_A - Y_C) \cot \beta} \quad (\text{A.13})$$

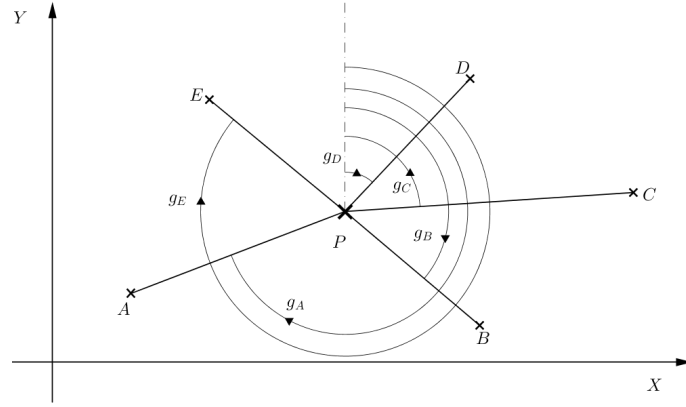


Figure A.3 – Principe de la méthode par relèvement.

Point approché :

$$Y_{M_a} = Y_A + \frac{(X_B - X_A) - (Y_B - Y_A) \tan g_B}{\tan g_A - \tan g_B} \quad (\text{A.14})$$

$$X_{M_a} = X_A + (Y_P - Y_A) \tan g_A \quad (\text{A.15})$$

Méthode de Ponthenod

$$\mu + \nu = 400 \text{ gon} - (\alpha + \beta + \gamma) = m \quad (\text{A.16})$$

$$\gamma = g_{BA} - g_{BC} = \arctan \frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A} - \arctan \frac{X_C - X_B}{Y_C - Y_B} \quad (\text{A.17})$$

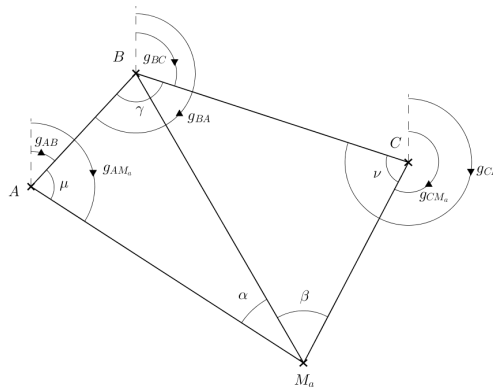


Figure A.4 – Principe de la méthode de Ponthenod.

$$\frac{\sin \mu}{\sin \nu} = \frac{|BC| \sin \alpha}{|BA| \sin \beta} = k \quad (\text{A.18})$$

$$\mu - \nu = 2 \arctan \left(\frac{k-1}{k+1} \tan \frac{m}{2} \right) = n \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{cases} \mu = \frac{m+n}{2} \\ \nu = \frac{m-n}{2} \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

Point approché :

$$|AM_a| = |AB| \frac{\sin \pi - (\alpha + \mu)}{\sin \alpha} = |AB| \frac{\sin \alpha + \mu}{\sin \alpha} \Rightarrow \begin{cases} X_{M_a} = X_A + |AM_a| \sin g_{AM_a} \\ Y_{M_a} = Y_A + |AM_a| \cos g_{AM_a} \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

Méthode des moindres carrés Résidus :

$$r_J = a_J \cdot dX + b_J \cdot dY - dg_0 + c_J \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N a_i^2 & \sum_{i=1}^N a_i b_i & -\sum_{i=1}^N a_i \\ \sum_{i=1}^N a_i b_i & \sum_{i=1}^N b_i^2 & -\sum_{i=1}^N b_i \\ \sum_{i=1}^N a_i & \sum_{i=1}^N b_i & -N \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} dX \\ dY \\ dg_0 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^N a_i c_i \\ \sum_{i=1}^N b_i c_i \\ \sum_{i=1}^N c_i \end{Bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

Avec :

$$a_J = -\frac{\Delta Y_J}{D_J^2} \quad b_J = \frac{\Delta X_J}{D_J^2} \quad c_J = g_{aJ} - g_{0a} - L_J \quad (\text{A.24})$$

Méthode de multilatération

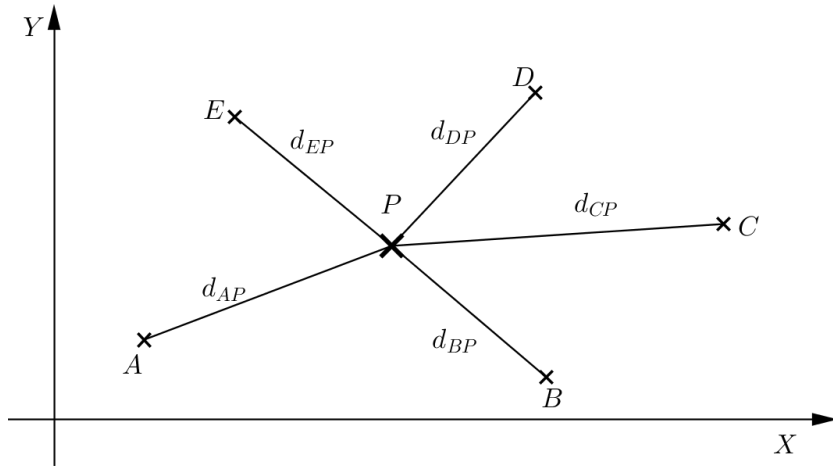


Figure A.5 – Principe de la méthode par multilatération.

Point approché

$$R_2^2 = R_1^2 + d_{C_1 C_2}^2 - 2R_1 d_{C_1 C_2} \cos \alpha \quad (\text{A.25})$$

avec :

$$d_{C_1 C_2} = \sqrt{(X_{C_2} - X_{C_1})^2 + (Y_{C_2} - Y_{C_1})^2} \quad (\text{A.26})$$

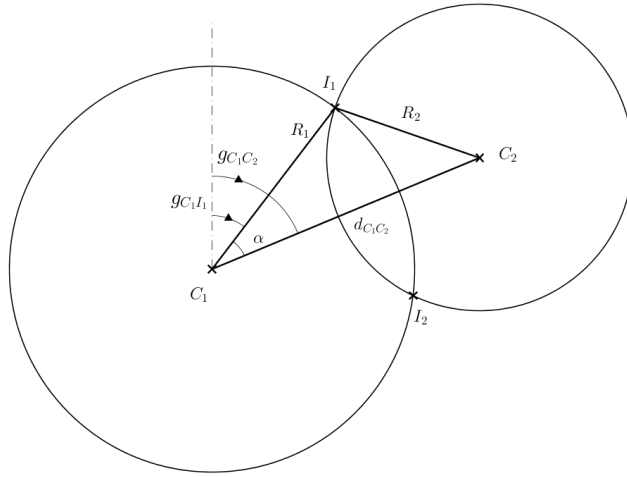


Figure A.6 – Recherche du point approché par multilatération.

Gisement de visée :

$$\begin{cases} g_{C_1C_2} = \arctan \frac{X_{C_2} - X_{C_1}}{Y_{C_2} - Y_{C_1}} \\ g_{C_1I_1} = g_{C_1C_2} - \alpha \\ g_{C_1I_2} = g_{C_1C_2} + \alpha \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

Points d'intersection :

$$\begin{cases} X_{I_1} = X_{C_1} + R_1 \sin g_{C_1I_1} \\ Y_{I_1} = Y_{C_1} + R_1 \cos g_{C_1I_1} \end{cases} \quad \begin{cases} X_{I_2} = X_{C_1} + R_1 \sin g_{C_1I_2} \\ Y_{I_2} = Y_{C_1} + R_1 \cos g_{C_1I_2} \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

Méthode des moindres carrés

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \sin^2 g_{JM a} & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sin 2g_{JM a} \\ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sin 2g_{JM a} & \sum_{j=1}^n \cos^2 g_{JM a} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} dX \\ dY \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^n \Delta D_{JM} \sin g_{JM a} \\ \sum_{j=1}^n \Delta D_{JM} \cos g_{JM a} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.29})$$