

INSTITUT D'ADMINISTRATION SCOLAIRE

Service de Méthodologie et formation, Professeur Marc Demeuse

Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Éducation

**MISE À L'ÉPREUVE DE SITUATIONS SCOLAIRES
VISANT À DÉVELOPPER LE PROCESSUS D'ABSTRACTION
CHEZ LES ÉLÈVES DE 8 À 14 ANS**

RECHERCHE CF/13/13

Rapport final de recherche

Octobre 2015



INSTITUT D'ADMINISTRATION SCOLAIRE

Service de Méthodologie et formation, Professeur Marc Demeuse

Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Éducation

**MISE À L'ÉPREUVE DE SITUATIONS SCOLAIRES
VISANT À DÉVELOPPER LE PROCESSUS D'ABSTRACTION
CHEZ LES ÉLÈVES DE 8 À 14 ANS
RECHERCHE CF/13/13**

Rapport final de recherche

Octobre 2015

NATACHA DUROISIN & STEPHANIE MALAISE

SOMMAIRE

SOMMAIRE	4
Liste des tableaux.....	5
Liste des figures.....	6
Introduction.....	8
I. Pour quelles raisons faut-il développer des compétences spatiales à l'école ?	9
II. Revue de la littérature : Comment développer les apprentissages spatiaux et le processus d'abstraction ?.....	12
III. Vers une modélisation des connaissances	37
IV. Organisation générale des situations.....	44
V. Les situations d'apprentissage	47
VI. Mise à l'épreuve des situations d'apprentissage développées.....	50
VII. Le Site internet : www.espace-abstraction.be	78
VIII. Les perspectives	82
Bibliographie.....	83

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1 - Caractérisation des problématiques spatiales et géométriques (Salin, 2007).....	14
Tableau 2 - Synthèse de propriétés des micro-, méso- et macro-espaces dans l'enseignement de la géométrie telles que décrites par Berthelot et Salin (1992).....	18
Tableau 3 - Tableau présentant les caractéristiques de l'échelle de développement proposée par les Van Hiele	22
Tableau 4 - Présentation synthétiques des compétences, concepts clés, niveaux de pensée géométrique et tâches réalisables à chaque niveau de l'échelle de développement de la pensée géométrique des Van Hiele	23
Tableau 5 - Postures prises par l'apprenant en réponse à une tâche demandée en géométrie, caractéristiques de celles-ci et implication sur le type de visualisation mis en jeu (Duval, 2005).....	26
Tableau 6 - Caractérisation des niveaux des apprenants dans l'acquisition de la capacité à comparer (Barth, 2013).....	36
Tableau 7 - Echantillon constitué pour la mise à l'épreuve les situations développées.....	52
Tableau 8 - Echantillon constitué pour mise à l'épreuve les situations développées suite aux désistements	53
Tableau 9 - Progression des scores globaux : t de student	59
Tableau 10 - Progression des scores globaux au cycle 3 : t de student	60
Tableau 11 - Progression des scores globaux au cycle 4 : t de student	60
Tableau 12 - Homogénéité de l'échantillon : ANOVA	61
Tableau 13 - Décentration : Progression des scores globaux (t de student).....	62
Tableau 14 - Exercice 4 : résultats au prétest et au posttest	63
Tableau 15 - Exercice 4 : Progression des moyennes (t de student).....	63
Tableau 16 - Exercice 5 : résultats au prétest et au posttest	64
Tableau 17 - Exercice 5 : progression des moyennes (t de student).....	65
Tableau 18 - Exercice 5 : résultats au prétest et au posttest par item	65
Tableau 19 - Exercice 6 : résultats au prétest et au posttest	67
Tableau 20 - Exercice 6 : progression des moyennes (t de student).....	68
Tableau 21 - Exercice 6 : résultats au prétest et au posttest par item	68
Tableau 22 – Exercices 7 et 8 : résultats au prétest et au posttest.....	70
Tableau 23 – Exercices 7 et 8 : progression des moyennes (t de student)	71
Tableau 24 - Exercice 7 : résultats au prétest et au posttest par item	71
Tableau 25 - Exercice 8 : résultats au prétest et au posttest par item	73

LISTE DES FIGURES

Figure 1 - Les étapes de la stratégie d'apprentissage impliquant l'abstraction (Barth, 2013), de la perception à la généralisation.....	32
Figure 2 - Les étapes de la stratégie d'apprentissage impliquant l'abstraction (Barth, 2013) et la conceptualisation.	32
Figure 3 - Les étapes de la stratégie d'enseignement (cadres gris foncé) menant à l'abstraction et à la conceptualisation (Barth, 2013), parallèle avec la stratégie d'apprentissage (cadres gris clair).....	34
Figure 4 - Modèle présentant l'organisation des situations d'enseignement visant à développer le processus d'abstraction chez les élèves de 8 à 14 ans.....	37
Figure 5 - Représentation des étapes à mettre en œuvre dans chaque cycle d'enseignement pour développer le processus d'abstraction	38
Figure 6 - Représentation des étapes à mettre en œuvre pour favoriser l'abstraction généralisante chez les élèves	39
Figure 7 - Représentation des étapes à respecter pour évaluer l'acquisition d'un concept abstrait par les élèves	41
Figure 8 - Représentation des contraintes à respecter pour forcer la représentation mentale chez les élèves et favoriser le développement de compétences spatiales	42
Figure 9 - Présentation de l'organisation prévue pour les situations d'enseignement visant à développer le processus d'abstraction au sens large et les processus de décentration et de représentation mentale de solide au départ de représentations planes.....	44
Figure 10 - Organisation concrète des situations d'enseignement visant à développer la décentration et contraintes prises en compte (en vert); les situations déjà développées sont en couleurs pleines et celles à développer sont en couleurs transparentes	45
Figure 11 - Organisation concrète des situations d'enseignement visant à développer la représentation mentale de solides à partir de représentations planes et contraintes prises en compte (en vert).....	46
Figure 12 - Calendrier de la deuxième année de recherche	51
Figure 13 - Exercice 1 : exemple effectué avant la réalisation de l'épreuve.....	55
Figure 14 - Exercice 2 : exemple effectué avant la réalisation de l'épreuve.....	55
Figure 15 - Exercice 3 : exemple effectué avant la réalisation de l'épreuve.....	56
Figure 16 - Exercice 4 : extrait de la consigne	57
Figure 17 - Illustration de l'exercice 5	64
Figure 18 - Illustration de l'exercice 6	67
Figure 19 - Exercice 7 : items 1 (à gauche) et 2 (à droite).....	68
Figure 20 - Exercice 7 : items 3 (à gauche) et 5 (à droite).....	69
Figure 21 – Illustrations des exercices 7 (à gauche) et 8 (à droite).....	70
Figure 22 - Exercice 7 : items 1 (en haut) et 3 (en bas).....	72
Figure 23 - Exercice 8 : items 1 (en haut) et 3 (en bas).....	73
Figure 24 – Page d'accueil du site Internet www.espace-abstraction.be	78
Figure 25 – Page d'accueil (suite) du site Internet www.espace-abstraction.be	79
Figure 26 – Informations à propos du processus de décentration sur la page d'accueil du site.....	79
Figure 27 – Page du site portant sur la décentration au Cycle 3.....	80
Figure 28 – Page d'accueil du site Internet www.espace-abstraction.be	81

INTRODUCTION

Cet écrit constitue le rapport final de la recherche intitulée « Mise à l'épreuve de situations scolaires visant à développer le processus d'abstraction chez les élèves de 8 à 14 ans ». L'objectif de cette recherche était de développer et d'évaluer, dans des classes d'enseignement primaire, des situations d'apprentissage visant à développer des compétences spatiales des élèves impliquant le processus d'abstraction. Une des caractéristiques de cette recherche est d'avoir été réalisée selon une approche qui dépasse les limites disciplinaires tout en s'ancrant dans les apprentissages prévus aux programmes des différentes disciplines. Ce qui est visé est donc, non seulement l'abstraction, mais également le transfert des apprentissages de manière transversale (en géométrie et en géographie).

Pour présenter le travail effectué pendant ces deux dernières années, ce rapport s'articule autour de huit sections. En vue de faciliter la compréhension du présent rapport, certains éléments sont, en tout ou en partie, issus du rapport final de la première année de recherche (Soetewey & Duroisin, 2014). Les trois premières sections sont ainsi des synthèses du travail théorique qui a été effectué au cours de la première année de recherche. La première section de cet écrit est intitulée « POUR QUELLES RAISONS FAUT-IL DÉVELOPPER DES COMPÉTENCES SPATIALES À L'ÉCOLE ? ». L'objectif de cette partie est de préciser l'intérêt global de développer des compétences spatiales et le processus d'abstraction dans le cadre des apprentissages scolaires en dépassant le cloisonnement traditionnel des disciplines. La seconde section, intitulée « REVUE DE LA LITTÉRATURE : COMMENT DÉVELOPPER LES APPRENTISSAGES SPATIAUX ET LE PROCESSUS D'ABSTRACTION ? », présente un résumé des apports de différents auteurs, sélectionnés pour leurs travaux et réflexions sur l'apprentissage de l'espace et de l'abstraction en contexte scolaire. L'objectif est alors de présenter les éléments théoriques clés sur lesquels repose la construction des situations d'apprentissages élaborées. La troisième section, intitulée « VERS UNE MODELISATION DES CONNAISSANCES », présente les principaux éléments théoriques, retenus lors de la revue de littérature, pour l'élaboration d'un modèle permettant le travail de l'abstraction du troisième cycle de l'enseignement primaire à la fin du premier cycle de l'enseignement secondaire. La quatrième section reprend le schéma général d'organisation des situations d'apprentissage. Cette section est intitulée « ORGANISATION GÉNÉRALE DES SITUATIONS ». La cinquième section, nommée « LES SITUATIONS D'APPRENTISSAGE », décrit l'ensemble des situations scolaires qui ont été élaborées dans le cadre de cette recherche. Pour des raisons pratiques, deux fascicules ont été conçus à destination des enseignants de primaire (un fascicule destiné aux enseignants du cycle 3 et un fascicule destiné aux enseignants du cycle 4). Ces fascicules comportent chacun un bref descriptif de ce qu'est l'abstraction, du développement de ce processus chez les élèves et les méthodologies à suivre pour assurer la bonne mise en œuvre de chacune des situations d'apprentissage proposées. La section suivante, intitulée « MISE À L'ÉPREUVE DES SITUATIONS D'APPRENTISSAGE DÉVELOPPÉES » rend compte des résultats des élèves aux pré- et post-tests. L'objectif de cette section est de vérifier que les situations d'apprentissage élaborées permettent le développement du processus d'abstraction chez les élèves. La septième section, nommée « LE SITE INTERNET : espace-abstraction.be », présente l'outil interactif créé pour aider les enseignants dans la mise en œuvre dans la classe des situations d'apprentissage. La dernière section résume les « PERSPECTIVES » pour la suite éventuelle de la recherche.

I. POUR QUELLES RAISONS FAUT-IL DÉVELOPPER DES COMPÉTENCES SPATIALES À L'ÉCOLE ?

Ce chapitre fait brièvement le point sur les raisons qui amènent l'équipe de recherche à s'interroger sur le développement de compétences spatiales dans le cadre des apprentissages scolaires. Sont abordés les questions de leur rôle dans la vie de citoyen, du développement de ces compétences au cours du temps et de la place de ces compétences dans différentes disciplines. Ce chapitre aborde également le recul de l'enseignement de la géométrie et de la géographie et les causes de celui-ci, à mettre en perspectives avec l'importance du développement de compétences spatiales pour les élèves, quels que soient leur parcours.

1.1. Des compétences spatiales pour bien vivre

Si personne ne remet en question le fait qu'il soit utile d'apprendre et de faire apprendre le comptage, le dénombrement, l'écriture et la lecture, il n'en est pas de même pour les activités ayant trait à la géométrie et à la géographie. En effet, que ce soit en Belgique ou dans d'autres pays tels que la France, il n'est pas rare de remettre en question l'utilité de certains contenus issus des programmes de géométrie et de géographie. Pourtant, n'est-il pas important d'appréhender un espace, de se le représenter mentalement, de le définir, d'effectuer des repérages, de situer un lieu par rapport à soi-même ou par rapport à un autre endroit ? N'est-il pas nécessaire de planifier des déplacements sans avoir recours aux technologies de géolocalisation, de lire et de comprendre des plans, des cartes ? N'est-il pas utile de pouvoir décrire une situation, un mouvement, une direction ou une distance afin d'être compris par d'autres personnes ? Toutes les questions qui viennent d'être posées ont pour dénominateur commun l'espace. Darken & Petterson (2002) indiquent que ces compétences spatiales sont essentielles voire vitales pour tout être humain, tout citoyen, d'où la nécessité de les exercer et de les faire acquérir dès le plus jeune âge. Dans la même optique, les cours de géométrie et géographie favorisent le raisonnement dans l'espace et plus particulièrement son apprentissage. N'est-il pas également indispensable d'être capable de raisonner -notamment à partir de différents supports (2D, 3D, textuels, graphiques...)-afin de prendre une place active dans la société ? Kahane (2002) stipule à cet endroit que « le raisonnement géométrique est beaucoup plus riche que la simple déduction formelle et que l'apprentissage de ce raisonnement, convenablement mené, est sans doute l'argument le plus fort en faveur de la géométrie ».

1.2. L'apprentissage de l'espace tout au long de la vie

Les processus de construction de l'espace et de sa structuration sont étudiés depuis plus de 60 ans par des psychologues et des pédagogues. On doit d'ailleurs à Piaget & Inhelder (1948), les deux pionniers en ce domaine, d'avoir mené des dizaines d'expériences avec des enfants et d'avoir consigné par écrit l'ensemble des résultats obtenus. Pour parvenir à appréhender un espace, et, par la suite, se le représenter, l'activité du corps est indispensable. En effet, effectuer des gestes, des mouvements et des déplacements permet de s'approprier l'espace. On remarque ainsi que, dans l'enseignement maternel, bon nombre des activités proposées sont basées sur la préhension d'objets, l'exécution de parcours, la découverte de solides par le toucher... A ce moment-là, il n'est nullement question de géométrie et de géographie ; ce qui importe c'est de travailler la perception globale, l'identification et la visualisation (Van Hiele, 1959 ; cité par Crowley, 1987). A l'école primaire, les connaissances

familiales de l'espace feront place à une pratique géométrique basée sur l'étude des solides. Cette étude des solides sera caractérisée par des exercices requérant l'utilisation de concepts et d'outils mathématiques tels que les symétries, les transformations, les représentations planes et en perspective, les développements de solides à l'aide de cartons ou de logiciels de dessin... L'objectif des apprentissages, réalisés en primaire, est de familiariser les élèves avec les objets constituant le plan et l'espace avant d'introduire les concepts géométriques. Afin de s'approprier et de comprendre l'espace et ses représentations, il est donc important d'avoir construit, déconstruit et reconstruit des figures en 2D et en 3D en utilisant des matériaux réels ou en favorisant le processus d'abstraction par l'utilisation de représentations imagées (Kahane, 2002).

1.3. Enseigner l'espace, quelle(s) discipline(s) pour quel(s) apprentissage(s)?

Que l'espace soit représenté, perçu ou encore vécu, qu'il soit caractérisé par sa dimension (micro, méso, macro), l'espace doit être travaillé tout au long de l'enseignement maternel, primaire, secondaire et supérieur. Cependant, son enseignement se limite-t-il à l'une ou l'autre discipline ? Pour se convaincre du contraire, il suffit de consulter les programmes scolaires. On remarque ainsi que, quelles que soient les disciplines, on retrouve des savoirs, des savoir-faire et des compétences portant sur la notion d' « espace » (Duroisin, 2015a).

- En **français**, par exemple, on apprend à utiliser le vocabulaire spatial dans un contexte adéquat afin de se faire comprendre par autrui et de préciser l'exactitude de la pensée et des faits.
- Les **mathématiques** permettent de travailler la notion d' « espace » de différentes manières en fonction de différents domaines (algèbre ou numéracie, géométrie, résolution de problèmes, grandeurs...). Les calculs de périmètres, d'aires et de volumes, pour être compris, requièrent l'utilisation de l'espace en termes de visualisation, par exemple.
- Les **sciences** offrent un terrain idéal pour travailler la visualisation dans l'espace. C'est le cas tant en physique (avec la rotation autour d'un axe, par exemple), qu'en chimie (pour concevoir l'organisation des atomes dans les molécules, la chiralité, les structures cristallines, etc.) ou en biologie (pour les représentations en coupes, les observations d'objets au microscope, ...).
- En **histoire** est travaillé l' « espace-temps » qui conduit l'enfant à situer « les événements de la vie quotidienne les uns par rapport aux autres, qu'ils se produisent soit dans un même temps et dans des lieux différents, soit dans un même lieu et dans des temps différents » (Programme des études, p.116).
- En **géographie**, les contenus relatifs à l'espace sont nombreux. Par le biais des activités prévues, les enfants se situent et s'orientent dans des espaces connus et inconnus, au travers de situations vécues ou non (utilisation de cartes...), ils parcourent des itinéraires plus ou moins complexes en employant ou non des plans, ils sont capables de lire un paysage et une image géographique pour appréhender l'organisation d'un espace.
- En consacrant à l'espace une partie spécifique, le programme d'**éducation physique** de l'enseignement fondamental, permet de travailler la perception globale et l'organisation spatiale en fonction de repères fixes et mobiles. En outre, les autres activités proposées (reconnaissance de formes géométriques, prise de conscience de la mesure de l'espace, utilisation de cartes dans des activités d'orientation...) conduisent les élèves à se représenter l'espace et à le conceptualiser.

- Les cours d'**éveil artistique** incitent l'élève à s'ouvrir au monde visuel pour percevoir des formes simples et des formes de la nature en 2D et en 3D, à organiser des éléments divers (solides, formes, objets usuels...) pour réaliser des montages, à modeler et représenter des objets spécifiques...

De par les exemples qui ont été fournis, on se rend compte que la notion d' « espace » peut être travaillée dans la majorité des disciplines scolaires même si, de premier abord, on pourrait penser que c'est en géométrie et en géographie que la notion est principalement travaillée. En effet, la géométrie et la géographie sont les lieux « où l'on apprend à appréhender l'espace » (Kahane, 2002, p. 4).

1.4. La géométrie et la géographie boudées par les enseignants et par les élèves

Si, de par les questionnements posés, on se rend compte de l'utilité de l'enseignement de la géométrie et de la géographie, force est de constater que, comme nous l'avons dit plus avant, les deux disciplines sont parfois mises de côté au profit d'autres. Ainsi, pour la géométrie, Berthelot & Salin (1992) indiquent que les enseignants [du primaire en France] s'autorisent à « prendre des libertés avec le programme, c'est-à-dire à en négliger cette partie (tout comme ceux du secondaire avec la géométrie dans l'espace) ». Duroisin, Soetewey & Canzittu (2013) et Duroisin (2013 ; 2015a, 2015b), quant à eux, mentionnent que, dans bien des cas, les parties dédiées à la « géométrie » dans les programmes d'études s'inscrivent dans un paradigme algébrique. Deux des raisons expliquant les mises à l'écart sont énoncées par Duval (2005). Celui-ci (p. 6) indique que non seulement « la géométrie est [...] l'activité cognitive la plus complète, puisqu'elle sollicite le geste, le langage et le regard [et donc de] (...) construire, raisonner et voir, indissociablement » mais qu'il s'agit également du domaine « le plus difficile à enseigner et l'un de ceux où, même lorsque les objectifs restent très modestes, les résultats atteints sont décevants ». Comme Duroisin (2015a) l'a montré dans sa thèse, les résultats des élèves belges aux évaluations externes sont loin d'être excellents et permettent de mettre à jour certaines difficultés liées à l'espace. Parmi celles-ci, on peut citer la décentration, la décomposition de solides, la latéralité, les changements d'échelle...

1.5. Importance des connaissances spatiales pour l'ensemble des élèves, quelles que soient les filières de formation

Tout comme la géométrie, la géographie est donc utile à chacun, que ce soit dans la vie quotidienne ou au niveau professionnel. « Voir dans l'espace » est une des compétences spatiales les plus importantes pour de nombreux métiers (chimiste, technicien, architecte, mécanicien, jardinier, ingénieur...). Ces professionnels doivent avoir développé et acquis, durant leur cursus scolaire, les compétences et connaissances nécessaires afin de réaliser au mieux leurs travaux. Que ce soit dans des filières générales, techniques et professionnelles, on remarque donc à quel point l'enseignement de l'espace a sa place dans les programmes de cours. Ainsi Berthelot et Salin (1992) montrent, exemples à l'appui, les difficultés rencontrées par les élèves dans des filières d'enseignement professionnalisantes. Demal *et al.* (2013) illustrent également le rôle crucial de la géométrie (en particulier des symétries et transformations) dans les travaux scientifiques de prix Nobel tels Prusiner (la maladie de Kreutzfeld-Jacobs), Kroto et ses confrères (pour les fullerènes), les époux Curie, Higgs et ses confrères (le boson) et dans des travaux en médecine (Thalidomide).

II. REVUE DE LA LITTÉRATURE : COMMENT DÉVELOPPER LES APPRENTISSAGES SPATIAUX ET LE PROCESSUS D'ABSTRACTION ?

L'importance de développer des compétences spatiales est, à présent, bien démontrée. Mais comment s'y prendre pour favoriser les apprentissages spatiaux à l'école ? Comment favoriser l'abstraction à partir de la réalité sensible qui entoure l'élève pour entrer dans la géométrie ou la géographie ? Quels sont les freins rencontrés par les élèves et les enseignants ?

Cette section présente un résumé des apports de différents auteurs, sélectionnés pour leurs travaux et réflexions sur l'apprentissage de l'espace et de l'abstraction en contexte scolaire¹. L'objectif est ici de présenter les éléments théoriques clés qui ont permis de construire les situations d'apprentissages pour développer l'abstraction et l'acquisition de compétences spatiales par les élèves.

Chaque point présente, dès lors, des éléments de théorie considérés comme importants dans le travail du ou des auteurs choisis. Les références complètes sont faites en début de chaque chapitre. Certains passages contiennent également des références afin de permettre au lecteur, de temps en temps, un retour au texte source, sans que cela soit fait pour chaque idée du ou des auteurs, car cela rendrait la lecture plus ardue. Les synthèses présentées contenant parfois des éléments moins pertinents pour la suite (par exemple, le niveau « rigueur » du modèle des Van Hiele, qui ne concerne pas les niveaux d'étude visés par le projet de recherche), les informations clés retenues de chaque synthèse sont résumées en fin de chapitre (en encadré).

2.1. L'abstraction vers la géométrie nécessite de quitter l'espace de manipulation

Les idées présentées ici ont été émises par R. Berthelot et M.-H. Salin, dans leur thèse commune (1992), ainsi que dans d'autres publications (Berthelot & Salin, 2001, 2003, 2005 ; Salin, 2007). Elles s'ancrent dans un contexte de recherche impliquant d'autres scientifiques, tels que Brousseau (1983, 1989) ou Pêcheux (1990). Ces auteurs abordent la problématique de l'espace dans l'apprentissage de la géométrie, ou plutôt *des* différents espaces, qu'ils définissent et auxquels ils relient les processus d'abstraction et de conceptualisation. C'est un des points clés, qui a donné le nom à ce chapitre. Ils traitent également des questions de validation des solutions construites par les élèves dans l'espace, du langage associé à l'espace et de ses représentations, de l'évolution de la pensée spatiale, de la nature de l'objet d'étude dans l'espace...

L'ostension comme obstacle et le leurre des représentations spontanées

Parmi les tâches demandées à l'élève en milieu scolaire pour lui permettre d'apprendre en géométrie, certaines font l'objet d'un réel apprentissage sous la responsabilité de l'enseignant. D'autres non, qui sont donc laissées, implicitement, à la responsabilité de l'élève. Pour les auteurs, la pratique de l'ostension, qu'elle soit assumée par l'enseignant ou déguisée sous couvert de situations-problème, constitue un frein à l'abstraction dans l'espace (Berthelot & Salin, 1992, p.79). Cet obstacle est à mettre

¹ Si ce contexte recouvre bien sûr le domaine de la géométrie en mathématiques, il s'étend également au-delà, en géographie, en éducation physique, en sciences, en technologie, en cours de pratiques professionnelles...

en relation avec l'idée que les élèves sont sensés construire les concepts géométriques « simplement » et spontanément à partir de l'observation de figures ou d'objets géométriques (Berthelot & Salin, 1992, p. 91). Idée démontée par l'analyse menée par les auteurs.

En effet, cette façon d'enseigner les concepts géométriques fait porter à l'élève la responsabilité d'établir, seul, les liens entre les concepts géométriques et la réalité de l'espace sensible qui y correspond, et donc avec les problèmes qu'ils devraient permettre de résoudre. Les pratiques habituelles d'enseignement se basent sur l'illusion que cet apprentissage est « naturel », ce qui n'est pas le cas comme le montre l'analyse des difficultés des élèves. L'objectif du discours des auteurs est donc de développer des dispositifs permettant à l'enseignant de prendre à son compte la responsabilité de ce lien. L'idée sous-jacente est que les situations d'enseignement doivent permettre à *tous* les élèves d'être confrontés à la construction de ce lien dans des situations d'apprentissages a-didactiques (voir ci-dessous).

La distinction entre problème spatial et problème géométrique

Un deuxième point traité par les auteurs concerne la nécessaire distinction entre problème spatial et problème géométrique, et donc l'enseignement de l'espace de celui de la géométrie et, entre les deux, de la représentation de l'espace (Ibid., p.27). Cela implique de différencier, pour l'enseignant ainsi que pour l'apprenant, l'espace sensible, réel ou représentatif, de l'espace géométrique. Cette prise en compte consciente des deux types d'espaces doit permettre de ne plus concevoir les relations entre les deux comme un saut entre deux mondes, en laissant ce saut à la responsabilité de l'élève.

L'espace géométrique se conçoit comme un espace infini, continu, en trois dimensions, homogène et isotrope. Autant de caractéristiques qui nécessitent de s'abstraire de la réalité sensible pour parvenir à concevoir ce type d'espace. Au sein de ce type d'espace, la maîtrise des concepts géométriques permet de résoudre des problèmes géométriques et c'est le **raisonnement** qui permet le contrôle des solutions construites dans cet espace.

L'espace sensible, celui que les élèves connaissent, au moins partiellement, est quant à lui, défini par les espaces visuels, tactiles et moteurs auxquels ils ont accès. Il n'est ni homogène, ni isotrope, ni infini dans la représentation mentale qu'en ont les apprenants. Dans l'espace sensible, la figure n'est qu'une représentation imparfaite de la figure géométrique. L'espace sensible se caractérise par un **contrôle empirique** (Ibid., p.32) qui n'est pas possible dans l'espace géométrique. Il faut quitter ce mode de contrôle pour entrer dans la géométrie.

Le passage de l'espace sensible à l'espace géométrique, du contrôle empirique au contrôle par le raisonnement ne nécessite pas obligatoirement un « saut » entre deux mondes distincts. Il est possible de concevoir ce passage comme le passage de la pratique à la théorie, en assumant ce choix. La géométrie devient alors « *une théorie de l'espace* » qui permet de passer « *du fait à la loi* » (Ibid., p.32).

En fonction des situations dans lesquelles l'apprenant va être placé, on distingue différents types de problématiques (voir tableau 1). Lorsque l'élève se trouve « *dans une **problématique géométrique** [il entre] dans un rapport entre mathématiciens établi sur la base de déclarations concernant un espace conceptualisé et contrôlé par la consistance (au sens de non-contradiction) de l'ensemble de ce qui est déclaré sur lui* » (Ibid., p.51).

L'élève se trouve dans une **problématique pratique** quand les rapports à l'espace sont contrôlés de manière empirique et contingente. Le résultat d'une action de l'apprenant est immédiatement visible et est évalué en continu, ce qui lui permet de réguler son action en la modifiant par ajustement.

	Problèmes spatiaux	Problèmes géométriques
Sujet en action	L'élève	L'élève mathématicien
Type d'espace	L'espace sensible	L'espace géométrique
Représenté par :	De multiples façons	Les « figures-dessins »
Validation de l'action	Empirique et immédiate	Par le raisonnement obéissant aux règles du débat mathématique (consistance)
Objectif	Réalisation d'une action ou communication	Démonstration
Canal de communication	Le langage et les représentations spatiales	Le langage mathématique
Sanction de la réussite	Constat par l'élève	Nécessite le regard des pairs

Tableau 1 - Caractérisation des problématiques spatiales et géométriques (Salin, 2007)

Lorsque la résolution d'un problème passe par la modélisation de l'espace sensible ou sa représentation spatiale matérialisée, alors l'apprenant se trouve dans une **problématique de modélisation**. A partir d'un problème dans l'espace, constitué d'objets et de relations initiaux, celui-ci est représenté par un problème dans le modèle, constitué de nouveaux objets et de nouvelles relations. La solution construite dans le modèle peut être interprétée dans l'espace sensible, ce qui permet de la valider. Dans ce cas, l'espace de référence est bien l'espace sensible (comme dans la problématique pratique) et la validation de l'action se fait également dans l'espace sensible. Toutefois, la solution du problème est construite dans le système symbolique du modèle.

Les différents rapports à l'espace dans l'enseignement

Les auteurs abordent également l'importance des rapports qu'établit l'apprenant avec l'espace. Dans un contexte d'enseignement, les élèves sont confrontés à différents types de rapports à l'espace. La prise en compte de ces types de rapport est essentielle. Ces rapports sont définis autour du type de problématique (évoqués juste avant), de l'effectivité de la relation avec le milieu et de l'approche choisie par l'enseignant (Ibid., p.43).

Rapports pratiques, géométriques et de modélisation

On distingue donc dans un premier temps, les rapports géométriques, pratiques et de modélisation. Le **rapport géométrique** est celui du mathématicien. Le **rapport pratique** est empirique et contingent et n'a aucun intérêt pour le formel. Le **rapport de modélisation** s'appuie sur la modélisation pour construire une solution à mettre en œuvre dans le monde sensible. Le rapport pratique que l'élève entretient avec une situation faite, pour les auteurs, obstacle au rapport de modélisation (voir ci-dessous).

Rapports effectifs et intériorisés/évoqués

Dans un deuxième temps, on peut considérer la relation effective ou non avec le milieu pour distinguer deux types de rapports. Le **rapport effectif** est celui qui amène l'apprenant à agir sur le milieu objectif réel de la situation. Le **rapport intériorisé** (ou évoqué) va quant à lui mettre l'apprenant en relation avec un milieu évoqué. C'est le cas dès que l'apprenant évoque des actions spatiales qu'il n'effectue

pas, au moins temporairement. L'évocation peut être faite via des images mentales ou via des systèmes symboliques. Les représentations symboliques peuvent faire appel à des représentations infra-langagière (gestuelle, par exemple), langagière courantes, langagières spécifiques (langage géométrique, professionnel, ...) ou spatiales, qui permettent une mise en correspondance analogique (dessins, croquis, maquettes, figures, ...).

Rapports non didactiques et a-didactiques

Dans un troisième temps, les auteurs distinguent les types de rapports de l'élève avec l'espace selon les caractéristiques de la situation d'enseignement mise en œuvre. S'éloignant volontairement des situations didactiques, ils identifient deux autres types de situations amenant les apprenants à établir des rapports avec l'espace. Ainsi, des **rapports non didactiques** apparaîtront dans des situations où la résolution d'un problème par l'élève, seul, dépend de sa maîtrise de savoirs, hors du contexte scolaire, et sera sanctionné par la situation même.

Les **rapports a-didactiques** avec l'espace s'établissent lorsque, dans une situation scolaire, la résolution d'un problème par l'élève dépend de ses savoirs, est effectuée en opposition (production) et/ou en coopération avec des pairs (acceptation) et est sanctionnée sans intervention de l'enseignant (sanction par la situation même). Ce qui caractérise le rapport a-didactique c'est d'emprunter le contexte scolaire de la situation didactique et d'emprunter la validation pragmatique aux situations non didactiques.

La position des auteurs est que ce dernier type de rapport est celui qui oblige les apprenants à réellement modifier leurs représentations spatiales et à établir les liens entre l'espace sensible et les concepts géométriques qu'ils découvrent.

L'apprentissage de l'espace, de sa représentation, de la géométrie

Les auteurs plaident, d'une part, pour une différenciation claire, par les enseignants, des apprentissages visant l'espace sensible, de ceux visant l'espace géométrique et des apprentissages visant les représentations. Ainsi, il s'agit de prendre conscience de ce qui a trait aux objets sensibles (un cube, par exemple), à l'objet géométrique idéal (le concept de cube) de ce qui a trait aux représentations de ces objets (dessins en 2 dimensions de l'objet sensible ou de l'objet géométrique, maquette, ...). Cette distinction, les auteurs prônent pour qu'elle soit également faite auprès des apprenants. Afin qu'ils prennent à leur tour conscience de la portée exacte (et des limites) des apprentissages réalisés et du degré d'abstraction (de généralisation) du concept découvert.

Les différents types d'espace, l'abstraction et la conceptualisation

Il y a dans le travail de Berthelot et Salin un élément clé pour, d'après eux, améliorer l'abstraction, l'acquisition de concepts géométriques par les apprenants. Cet élément clé, c'est l'existence de trois niveaux d'espaces qui modifient les rapports qu'on entretient avec l'espace et donc les possibilités d'apprentissages de la géométrie : le micro-espace, le méso-espace et le macro-espace. Pour eux, en effet, « *La nécessité d'anticiper et donc de conceptualiser ne se rencontre dans le cadre de la vie courante que dans les conditions du méso-espace ou du macro-espace* » (Ibid., p125). Dans le même temps, en contexte scolaire, c'est le micro-espace qui est privilégié (manipulation concrètes). Ces trois niveaux sont décrits avec leurs caractéristiques principales ci-dessous (Ibid., p.99).

Le micro-espace

Le micro-espace est l'espace que constitue notre environnement immédiat. **Le sujet** a accès à cet espace par la manipulation et la vision, rien ne lui échappe, tous les sens y sont mobilisés. Pour toute action du sujet, la réponse est immédiate et permet une correction (problématique pratique). C'est au travers de la perception immédiate qu'il peut agir sur le milieu.

Dans le micro-espace, **le milieu** avec lequel le sujet est en interaction est proche et les objets y sont manipulables. L'espace, dans ce milieu, est le contenant généré autour des objets, qui n'a donc pas besoin d'être structuré. La densité informationnelle est très forte et, dans le même temps, les déplacements sont aisés ou remplacés par la manipulation des objets. L'existence de trois dimensions est simplement un fait. Le point de référence permettant une orientation est le sujet lui-même.

La perception y est exhaustive, immédiate, permettant une remédiation, ce qui rend inutile la théorisation. En conséquence, dans ce milieu :

- nul besoin de conceptualisation de l'espace ou de ses objets, rendue inutile par le caractère complet et immédiat de la perception ;
- toute décentration se fera à l'extérieur de l'espace considéré, en se centrant sur sa propre perspective ;
- Les propriétés abstraites sont liées aux objets (longueur, 3D, ...).

C'est le niveau dans lequel fonctionne habituellement l'apprenant (dans et hors de l'école) et dont la prégnance est extrêmement forte. Dans une optique d'abstraction et de conceptualisation qui conduit à la géométrie, **le recours au micro-espace constitue donc un obstacle didactique très puissant.**

Le méso-espace

Le méso-espace est celui constitué par l'espace vécu du sujet. Si le micro-espace est à portée immédiate, le méso-espace est l'espace du quartier, par exemple. En comparaison avec le micro-espace, on peut identifier les caractéristiques suivantes du sujet et du milieu.

Dans le méso-espace, **le sujet** est en déplacement dans un domaine qu'il contrôle par la vue, qui est le seul sens mobilisé. Pour toute action du sujet, la réponse est retardée et coûteuse. Pour agir sur le milieu, le sujet doit se construire une représentation mentale.

Le milieu du méso-espace est accessible à une vision globale, presque simultanée et les objets y sont fixes (immeubles, ...). L'espace dans ce milieu devient le contenant homogène des objets. La densité informationnelle est moyenne et les déplacements y sont coûteux. L'existence des trois dimensions s'envisage dans un système de référence fixe, puisque le sujet est en déplacement et, par conséquent, l'orientation doit se faire également par rapport à un point fixe.

La perception intègre les points de vue usuels du sujet et prend en compte les angles et les distances. On constate donc, dans ce milieu :

- Que la conceptualisation devient nécessaire pour coordonner les différentes perspectives et les points de vue ;
- La décentration du sujet devient possible à l'intérieur de l'espace ;
- Les propriétés abstraites sont données à l'espace (distances, 3D, ...), qui est constitué de « vides » et de « pleins » et n'est donc pas isotrope.

Le macro-espace

Le troisième niveau, le macro-espace, est celui caractérisé par des déplacements importants, entre villes différentes, par exemple.

Dans le macro-espace, **le sujet** est en déplacement entre (et non plus dans) des domaines contrôlés par la vue (entre des méso-espaces). Il n'a donc qu'une succession de vues partielles de l'espace, ce qui crée implicitement une conceptualisation. Pour toute action du sujet, la réponse n'intervient qu'au terme du processus (au terme du voyage pour le marin, par exemple), et toute erreur est très coûteuse. Le sujet a donc besoin de se construire une représentation mentale pour relier les visions partielles qu'il a.

Le milieu, dans la macro-espace, n'est accessible que par des visions locales et différées et les objets y sont fixes. L'espace est maintenant le contenant construit intellectuellement, pour les visions locales. La densité informationnelle est faible, voire très faible (comme en pleine mer) et les déplacements ne sont pas seulement coûteux mais également difficiles, nécessitant la conceptualisation et la théorisation de l'espace pour anticiper et optimiser l'action. L'existence de trois dimensions s'envisage dans un système de référence externe aux visions locales, les points de référence sont rares.

La perception dans le macro-espace est partielle et doit donc intégrer les directions. En conséquence, dans ce milieu :

- La conceptualisation est indispensable pour reconstruire la continuité de l'espace ;
- La décentration se fait toujours dans l'espace ;
- Les propriétés abstraites sont données à l'espace (l'étendue, 3D, ...) qui est considéré comme isotrope.

	Micro-espace	Méso-espace	Macro-espace
Objets	Manipulables	Fixes	Fixes et distanciés
Actions effectives	Manipulation et vision	Déplacement dans domaines contrôlés par la vue	Déplacement entre domaines contrôlés par la vue
Coût	Manipulation/déplacements aisés	Déplacement/manipulations coûteuses	Déplacement/manipulations difficiles
Sens impliqué(s)	Tous les sens	Vue	Vue, partiellement
Perception	Proche	Vision globale presque simultanée	Visions locales différées
	Exhaustive	Via les points de vue usuels avec prise en compte des angles et distances	Partielle intégrant les directions
Référence	Personnelle	À un point fixe au choix	À un système externe, car points fixes rares
Réponse à l'action	Immédiate et corrigible	Retardée et coûteuse	Au terme et très coûteuse
Action cognitive	Perception	Abstraction vers représentation mentale	Abstraction vers représentation mentale
Conceptualisation	inutile car contrôle empirique	Nécessaire pour coordonner les perspectives	Indispensable pour reconstruire la continuité de l'espace
Décentration	Décentration à l'extérieur de l'espace vécu	Dans l'espace vécu	Dans l'espace
Espace	Contenant généré autour des objets (immatériel-vide)	Contenant homogène des objets	Contenant construit intellectuellement
	Non structuré	Structuré	Structuré
	Dense en information	Peu dense en information	Très peu d'information
	3D est un fait	3D dans un système de référence fixe	3D dans un système de référence externe
Propriétés	Propriétés données aux objets : longueur, 3D	Propriétés données à l'espace : vide/plein, anisotrope, 3D	Propriétés données à l'espace : étendues, isotrope, 3D
Nécessité	/	Conceptualisation / représentation mentale	Conceptualisation/ théorisation

Tableau 2 - Synthèse de propriétés des micro-, méso- et macro-espaces dans l'enseignement de la géométrie telles que décrites par Berthelot et Salin (1992)

L'enjeu : quitter le micro-espace

Ce qui vient d'être décrit et synthétisé dans le tableau 2, permet de se rendre compte, avec les auteurs, que le passage de l'espace sensible, où la résolution pragmatique s'impose, à l'espace géométrique ou à l'espace de modélisation, ne peut se faire dans le micro-espace. Dans le micro-espace, contrôlé par la perception immédiate, l'apprenant va avoir recours à une stratégie d'action par essais et erreurs sans ressentir le besoin de conceptualiser l'espace et ses objets. L'espace perçu comme contenant d'objet constitue un frein à la conception d'un espace au sens géométrique du terme (isotrope, infini, ...).

C'est dans le méso et dans le macro-espace que les apprenants sont réellement amenés à conceptualiser et à percevoir l'utilité de la théorisation. C'est donc dans un de ces espaces-là que les situations d'enseignement doivent placer les élèves pour favoriser l'abstraction spatiale et la transition

vers la géométrie. C'est à cette condition qu'ils pourront établir, le lien entre l'espace sensible et la géométrie. D'un point de vue pratique, les auteurs sont bien conscients des contingences de l'enseignement (confrontation au méso-espace difficile) et proposent donc de recréer les conditions d'un méso-espace dans le micro-espace de la classe.

La disqualification de la problématique pratique : abstraire pour anticiper

Une des propositions de Berthelot et Salin est donc de recréer les conditions du méso (ou macro)-espace au sein de situations d'enseignement. Pour cela, il faut poser des contraintes, de sorte que la situation ait des caractéristiques proches du méso-espace, voire du macro-espace, et que le recours aux solutions pragmatiques ne soit plus efficace.

Si dans le micro-espace, l'apprenant à accès à toute l'information, soit par la vision, soit par la manipulation, en se déplaçant si nécessaire, cela n'est plus le cas pour les niveaux suivant. Pour parvenir à disqualifier la problématique pratique, le principe est donc de limiter l'accès à l'environnement proche par la mise en situation, par les consignes. Les contraintes de la situation vont donc limiter les interactions possibles de l'apprenant avec l'espace (Ibid., p.109). Il peut s'agir, par exemple, de limiter l'accès à une surface dans une cours de récréation, empêchant ainsi toute mesure au sein de celle-ci.

Dans le micro-espace, la validation de l'action est immédiate et l'erreur est peu coûteuse, ce qui permet de réajuster facilement. A nouveau, pour disqualifier la solution pragmatique, les consignes ou la mise en situation peuvent contraindre à une validation retardée (Ibid., p.113) ou la rendre coûteuse. Par exemple, en amenant les apprenants à produire une solution et à la transmettre pour qu'elle soit seulement mise en œuvre par un autre apprenant (retard). On peut aussi imaginer travailler au déplacement d'un objet lourd (coût).

L'objectif, pour favoriser l'abstraction et la conceptualisation sera donc de « *dégager les contraintes spécifiques à l'intervention des connaissances visées.* » (Ibid., p.125) dans le milieu où sera mis en œuvre la situation d'enseignement.

La prégnance de l'objet micro-spatial

Selon les auteurs, l'enseignement tend à ancrer les premiers apprentissages géométriques dans des problématiques pratiques. Le micro-espace et l'objet du micro-espace y sont au cœur des apprentissages. Or ils font le constat que l'objet micro-spatial a des caractéristiques qui s'opposent à certains apprentissages géométriques. Ainsi, un objet micro-spatial ne peut, par exemple, pas partager ses faces avec un autre. Il ne peut pas non plus prolonger ces faces dans toutes les directions (sur-figures en géométrie), ou être envisagé comme constitué d'éléments (sous-figures en géométrie). Il faut donc effectuer avec les élèves une distanciation de l'objet micro-spatial pour pouvoir entrer dans la géométrie.

La question de l'approximation des mesures

Pour les auteurs, la question de l'approximation des mesure est importante : « la prise en charge de cette question par les élèves est indispensable, et elle ne peut attendre qu'ils soient capables de la maîtriser, par exemple par le calcul différentiel. L'approche de la question des mesures dans le cadre de la géométrie doit compléter celle des autres mesures physiques » (Ibid., p.74). Il faut donc pour les apprenants (Ibid., p. 91) :

- Expliquer que les objets géométriques, dans la pratique, n'ont pas les propriétés rigoureuses qu'annonce la théorie ;
- leur faire vérifier expérimentalement ;
- leur faire constater que les relations dans la pratique sont approximativement celles de la théorie ;
- et que ces approximations ne sont pas inadmissibles.

La production de preuves

Cette imprécision des mesures, lorsqu'elle amène à des situations paradoxales (cas du « triangle » formé dans la pratique, par les bissectrices d'un triangle du fait de l'approximation des tracés) peut servir de déclencheur à la prise de conscience de l'intérêt de la preuve mathématique (Ibid., p.35). Cela permet de montrer que lorsque les mesures ne permettent pas de trancher, il existe une autre façon de travailler qui permet de surmonter cet obstacle. L'avis des auteurs est qu'il est indispensable d'amener les apprenants à constater la nécessité de la preuve mathématique avant d'y avoir recours. Le phénomène d'approximation des mesures permet d'introduire la modélisation.

Ils plaident également pour une distinction claire, tant pour l'apprenant que pour l'enseignant, entre les problèmes spatio-géométriques et les problèmes de géométrie. Dans les premiers, la validation se fait par vérification empirique ou par l'analyse du procédé mis en œuvre, de ses limites. Dans le second cas, c'est la cohérence entre une déclaration conjecturale sur l'espace et les déclarations admises comme vraies auparavant qui valide une solution (Ibid., p.133).

Les obstacles à la géométrie

Ce paragraphe reprend sous forme de liste, les obstacles à l'apprentissage de la géométrie, repérés par Berthelot et Salin, dont certains ont déjà été développés :

- Prégnance du non partage des limites ;
- Prégnance des vides et des pleins (y compris dans l'espace de la feuille) ;
- La prégnance des directions usuelles horizontales et verticales ;
- La prégnance des figures types (le carré sur un côté, le losange sur la pointe...)
- Le conflit entre le « vu » et le « su » ;
- Les difficultés à percevoir les sur- et sous-figures ;
- Le tracé perçu comme objet matériel ou déplacement (prégnance du micro-espace) ;
- La difficulté à positionner de points non assimilables à des objets ;
- La difficulté à abstraire des propriétés utiles (rejoignant le propos de Barth, 2013) ;
- La difficulté à passer de l'objet en 3D représenté en 2D à la représentation mentale en 3D.

A retenir...

Les éléments retenus dans la perspective des travaux de Salin et Berthelot et des auteurs qui les ont inspirés sont les suivants :

- La nécessité d'établir avec les apprenants les liens entre les concepts et la réalité de l'espace sensible qui y correspond ;
- La nécessité de distinguer avec l'apprenant l'espace sensible de l'espace géométrique ;
- De distinguer l'apprentissage de l'espace, celui de la géométrie et celui des représentations ;

- De distinguer la problématique pratique de la problématique de modélisation et de la problématique géométrique ;
- L'intérêt d'établir des rapports a-didactiques avec l'espace afin d'améliorer les apprentissages de tous les élèves ;
- L'existence de 3 niveaux d'espace et la nécessité de quitter le micro-espace, en excluant les solutions pragmatiques, pour entrer dans la conceptualisation et la modélisation.

2.2. Le développement de la pensée géométrique est progressif et peut-être provoqué

Le travail de théorisation du développement de la pensée géométrique des apprenants des époux Van Hiele est présenté dans ce point. Cette présentation, issue des travaux de thèse de Duroisin (2015a ; Duroisin & Demeuse, 2015a ; 2015b), s'appuie sur la lecture de plusieurs auteurs qui ont utilisé et/ou validé le modèle développemental qu'il a proposé (Crowley, 1987 ; Usiskin, 1982 ; Marchand, 2009 ; Lunkenbein, 1982). Les travaux des Van Hiele et leur interprétation mettent en évidence à la fois des compétences nécessaires aux apprentissages géométriques et l'existence de niveaux de développement par lesquels passent les apprenants. Les auteurs envisagent aussi les phases d'apprentissages qui promeuvent le passage d'un niveau à un autre.

Les compétences en géométrie

Le modèle proposé par les époux Van Hiele s'accorde sur l'implication de 5 compétences (« Skills ») dans la pensée géométrique. Il s'agit des compétences visuelles, des compétences verbales, des compétences de représentation graphique (« drawing skills »), des compétences logiques et des compétences appliquées. Ce sont elles qui sont le support du développement qui est présenté ci-dessous. D'après les auteurs, elles sont sollicitées tout à tour, au cours du développement de la pensée géométrique, comme le montre, plus bas, le tableau 3.

Les étapes du développement de la pensée géométrique

Le développement de la pensée géométrique, proposé par les Van Hiele, s'inscrit en partie dans la logique du modèle de Piaget. Comme lui, le modèle de Van Hiele considère chaque niveau de développement comme un potentiel atteignable mais pas forcément atteint (certains adultes sont au deuxième niveau quand les mathématiciens sont au dernier). Les niveaux atteints par l'apprenant sont dépendants de son expérience propre, expérience qui **doit** impliquer un nombre important d'activités d'exploration et de communication (Crowley, 1987, p. 6). Ils ne sont pas, à proprement parler, dépendants de l'âge (Crowley, 1987, p.4).

Les niveaux décrits (Crowley, 1987 ; Usiskin, 1982 ; Belkhodja, 2007) par le modèle sont définis dans la littérature selon une numérotation allant de 0 à 4 ou de 1 à 5. Le choix a été fait d'utiliser la dernière solution, Van Hiele lui-même reconnaissant qu'il existe, avant le premier niveau qu'il décrit, un niveau préalable à tout enseignement (qui serait dès lors le niveau 0) (voir aussi Barth, 2013). Les différents niveaux sont présentés dans le tableau 3 sur la base des écrits de Crowley (1987), Usiskin (1982) et Belkhodja (2007).

Niveau	Nom (Usiskin, 1982)	Nom (Dina Van Hiele)	Description	Lien avec l'enseignement
1	Reconnaissance et visualisation		<ul style="list-style-type: none"> • Identification des formes par ressemblance • Classement par ressemblance 	
2	Analyse	L'aspect de la géométrie	<ul style="list-style-type: none"> • Pensée en termes de propriétés listables • Sans implication de relation 	<ul style="list-style-type: none"> • Majorité des élèves de l'enseignement primaire
3	Ordonnancement (<i>ordering</i>) (Dédution informelle)	L'essence de la géométrie	<ul style="list-style-type: none"> • Pensée en termes de propriétés • Identification des relations entre propriétés • Formulation de définitions • Suivi d'argumentations déductives informelles 	<ul style="list-style-type: none"> • Majorité des élèves de l'enseignement secondaire
4	Dédution (formelle)	Compréhension dans la théorie de la géométrie	<ul style="list-style-type: none"> • Pensée en termes de relation entre les propriétés • Compréhension des relations entre axiomes, définitions, théorèmes, corollaires et postulats • Compréhension des mécanismes de la preuve formelle et de son utilité 	<ul style="list-style-type: none"> • Objectifs de l'enseignement secondaire (au terme)
5	Rigueur	Compréhension scientifique en géométrie	<ul style="list-style-type: none"> • Pensée en termes de systèmes mathématiques abstraits 	<ul style="list-style-type: none"> • Objectifs universitaires

Tableau 3 - Tableau présentant les caractéristiques de l'échelle de développement proposée par les Van Hiele

Les niveaux en jeu pour la tranche d'âges qui nous occupent sont donc les niveaux 2 et 3 essentiellement, avec une entrée dans le niveau 4. Afin de mieux comprendre ce que cela implique comme compétences centrales et comment cela concerne l'enseignement, le tableau 4 illustre chaque niveau par des concepts clés, des attentes vis-à-vis des apprenants et des tâches types.

Niveau	Nom (Usiskin, 1982)	Compétences	Les concepts (Crowley, 1987)	L'apprenant (Usiskin, 1982)	Tâches
1	Reconnaissance et visualisation	Visuelles	Les concepts géométriques sont des entités	Peut apprendre le nom des figures et reconnaître des formes entières	Apprentissage du vocabulaire géométrique Identification Reproduction
2	Analyse	Graphiques et verbales	Les figures ont des parties qui permettent leur reconnaissance	Peut identifier les propriétés des figures	Utilisation des propriétés abstraites pour classer les formes Reconnaissance Généralisation
3	Ordonnancement (<i>ordering</i>)	verbales	Les propriétés d'une figure sont déduites et cela permet de les classer	Peut ordonner les figures et les propriétés sans opération dans un système mathématique Peut suivre une déduction simple, pas une preuve	Etablissement des relations entre propriétés Compréhension des définitions Argumentation (suivi ou donnée)
4	Déduction (formelle)	Logiques	Les conditions nécessaires et suffisantes sont comprises	Peut rédiger une preuve en compréhension	Construction de preuve (de différentes façons)
5	Rigueur	Appliquées	La géométrie est abstraite, dépendante du système axiomatique	Peut entrer dans la géométrie non euclidienne	Extension à différents systèmes

Tableau 4 - Présentation synthétiques des compétences, concepts clés, niveaux de pensée géométrique et tâches réalisables à chaque niveau de l'échelle de développement de la pensée géométrique des Van Hiele

Le modèle est caractérisé par 5 propriétés. Il est **séquentiel**, c'est-à-dire que pour atteindre un niveau donné, il faut être passé par les niveaux inférieurs dans le domaine considéré², sauf à être spécifiquement doué. La deuxième propriété est celle de **proximité**, qui précise que le contenu intrinsèque et inhérent à un niveau devient, au niveau suivant, extrinsèque et objet d'étude. Les niveaux sont **distinctifs**, en ce sens qu'ils ont leurs symboles linguistiques et leur réseau d'interrelations propres. En conséquence, le langage joue un rôle clé, selon le principe de séparation : à chaque niveau correspond un langage propre qui n'est accessible que s'il on a atteint le niveau en question. Cela peut

² Le modèle des Van Hiele a été appliqué à d'autres domaines que la géométrie, par exemple à l'économie et à la chimie en Hollande (Crowley, 1987, p.3).

générer des difficultés de communication entre personnes de niveaux différents, en l'occurrence, l'enseignant et l'apprenant. Deux personnes raisonnant à des niveaux différents ne peuvent se comprendre, le langage utilisé pour s'adresser à l'apprenant doit donc être adapté, ce qui nécessite de la part de l'enseignant une vigilance particulière. La dernière propriété, essentielle, est la **réalisation**. Elle décrit le processus menant à une complète compréhension au niveau supérieur. La réalisation comporte 5 phases d'apprentissage (décrites au point suivant). Contrairement à la vision de Piaget, pour les Van Hiele, le développement cognitif menant à cette réalisation peut être accéléré par l'enseignement en respectant les 5 phases (ce qui nécessite plus d'une heure ou période) (Usiskin, 1982, p.5).

Des phases d'apprentissage pour promouvoir l'évolution de la pensée

Comme mentionné plus haut, le modèle des Van Hiele postule que la réalisation, c'est-à-dire le passage d'un niveau à un autre, peut être accéléré par l'enseignement. Selon le modèle, cela implique que l'on passe par les cinq phases, décrites ci-dessous.

1 : **Le questionnement** ou **l'information** : dont la visée est de prendre appui sur les conceptions préalables et de permettre à l'apprenant de prendre conscience de la direction des apprentissages ;

2 : **L'orientation dirigée** (ou directe) : qui consiste en activités courtes, dirigées par l'enseignant, et qui apportent des éléments de réponses à l'apprenant ;

3 : **L'explication** : est un moment d'expression et d'échanges entre élèves qui fait émerger les concepts (figures et propriétés, ...) ;

4 : **L'orientation libre** : qui consiste en des activités longues et complexes, possédant plusieurs voies de résolution ;

5 : **L'intégration** : au cours de laquelle les apprenant revoient et résumant les apprentissages dans le but de créer un réseau d'objets et de relations.

A retenir...

Les éléments retenus dans la perspective des travaux des Van Hiele sont les suivants :

- La nécessité d'expériences nombreuses d'activités d'exploration et de communication (ce qui rejoint Barth, 2013) ;
- L'existence de trois niveaux de développement à traverser au cours du cursus des élèves de 8 à 14 ans ;
- Les étapes à respecter pour franchir ces niveaux, à savoir, un questionnement, des activités dirigées, un moment d'échange pour expliquer les concepts, une activité complexe en résolution libre et une phase d'intégration (ce qui rejoint en partie Barth) ;
- Le type de tâches et d'attentes à respecter à chaque niveau ;
- L'attention à porter au langage et au mode de raisonnement par l'enseignant pour éviter une mauvaise compréhension (ce qui rejoint Berthelot et Salin et Duval, 2005).

2.3. L'abstraction en géométrie dépend de la tâche et du mode de visualisation

La lecture du travail de Duval (2005) met en évidence plusieurs points intéressants concernant l'apprentissage de l'espace et de l'abstraction en géométrie. Centrés sur l'apprentissage de compétences spatiales relatives aux formes et figures, il apporte des éléments qui peuvent être élargis à d'autres aspects des apprentissages spatiaux. Il s'agit :

- de la mise en exergue d'une évolution de la perception des figures ;
- de l'importance de la tâche demandée dans la définition du rôle qui est attribué aux figures par l'apprenant, et dans la posture prise par l'apprenant en réponse à la tâche ;
- de l'importance du type de visualisation pour effectuer la tâche et de la place des figures dans cette visualisation, qui peut constituer un frein à l'apprentissage de la géométrie.

La perception des figures

Pour Duval (2005, p.7), l'apprentissage de la géométrie des figures passe par un premier seuil critique, qui est celui de la discrimination des propriétés qualitatives, au dépend des propriétés liées aux grandeurs (voir aussi Barth, 2013). Ce stade permet de quitter l'espace de l'aspect des formes et des changements d'échelle pour rentrer dans celui des figures. Il « est peut-être le seuil le plus difficile à faire franchir aux élèves dans l'enseignement, mais aussi le plus décisif pour leur faire comprendre ce qu'est une démarche géométrique ». La clé de voûte de cet apprentissage est, selon lui, **le processus de perception** dans laquelle s'enracine ce premier seuil. Or cette perception va, par la suite, aller à l'encontre des manières de « voir » qui sont sollicitées en géométrie.

Les manières de voir les figures sollicitées une fois passé ce premier seuil requièrent selon lui des processus cognitifs qui sont différents et plus complexes que ceux mis en œuvre en dehors de la géométrie (p. 8), et qui sont des conditions essentielles pour apprendre en géométrie. Ces Processus vont dépendre de la tâche demandée, et doivent faire l'objet d'un apprentissage.

Tâche demandée, Posture de l'apprenant & Rapport aux figures

Duval identifie quatre postures de l'apprenant en réponses à quatre types de tâches demandées (voir tableau 5), la posture du botaniste, de l'arpenteur, du constructeur et de l'inventeur (p.9). Ces quatre postures nécessitent :

- Des modalités de représentations mentales différentes, car prenant appui sur des un ou plusieurs ancrages différents ; ces modalités doivent être acquises par l'apprenant.
- des processus cognitifs différents dans la façon de visualiser les figures géométriques.

TACHE demandée (Résoudre un problème nécessitant de)	Identifier, reconnaître des figures	Mesurer, calculer au sein de figures	Construire des figures en fonction de contraintes	Ajouter des tracés aux figures de départ
POSTURE de l'apprenant	BOTANISTE	ARPEUTEUR	CONSTRUCTEUR	INVENTEUR
Modalités représentationnelles	Géométrie plane	Géométrie incluant des repères et références (directions et orientation)	Géométrie prenant appui sur l'invariance visuelle	Géométrie incluant la déconstruction visuelle des figures
Contraintes pour l'apprenant		Les changements d'échelles de grandeur	Les instruments de construction	L'ajout de tracés à la figure de départ
Propriétés distinguées	Caractéristiques visuelles des contours	Propriétés géométriques à des fins de mesures	Propriétés géométriques comme contraintes de construction	
Constat posé	Perceptif immédiat	A la lecture d'instruments de mesure	Résultat d'une procédure de construction	Résultat d'une procédure de décomposition
Source cognitive	Superposition	Comparaison de valeurs	Enchaînement d'opérations répondant à une nécessité interne à la tâche	
VISUALISATION	ICONIQUE		NON ICONIQUE	
Visualisation géométrique	Repose sur une ressemblance suffisante pour discriminer les formes		Repose sur l'identification des objets géométriques correspondant aux formes reconnues	
Statut de la figure	Objet géométrique indépendant des opérations qu'on effectue sur lui		Configuration particulière détachée d'un réseau plus complexe	

Tableau 5 - Postures prises par l'apprenant en réponse à une tâche demandée en géométrie, caractéristiques de celles-ci et implication sur le type de visualisation mis en jeu (Duval, 2005)

Pour L'auteur, ces quatre postures ne doivent pas être considérées comme des étapes successives, la première préparant le passage à la seconde, et ainsi de suite. Au contraire, il pointe le fait que l'apprentissage et l'exercitation des deux premières tâches jouent en défaveur de l'apprentissage des deux dernières tâches, car elles impliquent des types de visualisation différents.

Visualisation des figures

Duval distingue ainsi (voir tableau 5) deux types de visualisation mise en œuvre par l'apprenant pour réaliser une tâche géométrique, la visualisation iconique et la visualisation non iconique (p.13). La **vision iconique** repose sur la reconnaissance discriminative des formes, basée sur les contours de l'objet géométrique et les propriétés de ces contours. Il s'agit de reconnaître un profil, en considérant les formes comme stables, ce qui permet l'identification. Focaliser la visualisation sur les profils rend difficilement mobilisables des tracés à l'intérieur des figures, ou dans leur prolongation, ce que requièrent la posture du constructeur et de l'inventeur. De même, considérer les formes comme stables est une vision géométrique qui prépare mal à la transformation des figures, nécessaires par la

suite. Cette reconnaissance des formes pour l'identification va également rentrer en conflit avec l'identification elle-même lorsque les situations sont limites (prégnance des directions, illusions, ...).

La **vision non iconique** va amener à l'identification des objets géométriques correspondant aux formes reconnues, en les considérant comme des éléments qui se détachent d'un réseau plus complexe. C'est ce type de vision qui permet, par exemple, de reconnaître un triangle au sein d'un réseau de droites sécantes. Cette visualisation ouvre la porte à la déconstruction géométrique par l'ajout de tracés supplémentaires aux formes en jeu. Ces ajouts de tracés peuvent être **auxiliaires**, lorsqu'ils sont imposés par les instruments mis à disposition pour construire, ou **réorganiseurs** lorsqu'ils sont imaginés pour résoudre un problème spécifique. Les premiers correspondent à la tâche du constructeur, les seconds à celle de l'inventeur.

A retenir...

Les éléments retenus dans la vision de Duval sont les suivants :

- la discrimination des propriétés qualitatives des figures (processus d'abstraction) est un seuil critique pour l'entrée dans la géométrie (ce qui rejoint Barth et le niveau 2 des Van Hiele);
- à quatre types de tâches géométriques demandées correspondent des postures et des processus cognitifs différents qui doivent, chacun, être appris et travaillés avec les apprenants ;
- ces processus cognitifs nécessitent deux types de visualisations différentes auxquelles les élèves doivent être familiarisés.

2.4. L'abstraction dans le domaine des solides et figures

Le travail mené par Douaire, Emprin, Rajain (i.e. 2009) et d'autres chercheurs (Douaire et al., 2009 ; Colmez & Parzysz, 1993) permettent d'éclairer les connaissances sous l'angle des dimensions des objets d'apprentissages (3D, 2D) et de leurs représentations. Quelques-unes de leurs idées sont reprises ici, en lien avec les propos des auteurs abordés précédemment.

Articuler les connaissances spatiales et les apprentissages géométriques

Pour Douaire et ses collègues (2009), les apprenants possèdent des connaissances spatiales, qui leur permettent de maîtriser leurs rapports usuels avec l'espace sensible. Ces connaissances s'acquièrent à l'école et en dehors de celle-ci, en fonction de l'expérience de chacun (Ceci rejoint les théories de Van Hiele). Les connaissances géométriques portent, elles, sur des objets idéaux, mais qui ont, dans l'espace sensible, des représentations. Aux travers de la modélisation, les connaissances géométriques entretiennent des relations complexes avec l'espace physique. A l'école, les apprenants doivent donc prendre en compte un espace qui contient des **objets spatiaux**, des **représentations de ces objets** de l'espace sensible et des **représentations des objets théoriques de la géométrie** (Ibid., p.24).

L'apprentissage des solides

Les auteurs décrivent différents objets en 3 dimensions et les relations qu'ils entretiennent entre eux pour comprendre les apprentissages qui doivent être réalisés par les élèves. Les termes **solides sociaux** désignent les objets du monde sensible environnant, parmi lesquels on distingue les *maquettes* ou **solides géométriques** qui sont soit des représentations d'objets géométriques, soit des représentations épurées des solides sociaux, suivant que l'on se trouve dans un contexte d'abstraction (en primaire) ou d'apprentissage mathématique (en secondaire) (Ibid. p.27). Les **objets géométriques** sont des objets théoriques définis comme une portion de l'espace géométrique (on rejoint ici la vision non-iconique de la figure de Duval, voir plus haut). Il est également utile, selon les auteurs, de considérer chez les apprenants, l'existence **d'objets mentaux**, qui peuvent être décrits comme les représentations qu'ils se font d'un **objet idéal** au cours de l'apprentissage. Ces objets mentaux conservent dès lors encore des liens avec la réalité sensible. Les relations entre tous ces objets mettent en avant les apprentissages qui doivent être faits :

- **Les relations solide social → maquette → solide géométrique** : nécessitent d'abstraire les propriétés qualitatives ;
- **Les relations maquette et patron (développement) → figures (objets géométriques 2D)** : nécessitent de considérer les polygones comme faces de polyèdres ; cela à le double avantage d'éviter les représentations prototypiques des figures et de percevoir la figure autrement que comme un ensemble de traits (une portion du plan) ;
- **Les relations empreinte ↔ patron ou empreinte ↔ maquette ou figure ↔ solide géométrique** : nécessitent d'établir des relations d'incidence, métriques (longueur des côtés, etc.) et spatiales (cotés adjacents, etc.).

Pour les auteurs, afin de favoriser les apprentissages :

- les relations numériques et les caractéristiques des faces sont au cœur de la transition des objets spatiaux aux objets idéaux ;
- l'anticipation dans la construction de maquettes amène à la construction d'objets mentaux (on rejoint la vision de Berthelot et Salin sur la nécessité de se représenter mentalement, voire de conceptualiser, quand la réponse est retardée) ;
- l'apprentissage du langage doit suivre l'expérience de l'enfant (cela rejoint Van Hiele et Duval) ;
- la mise en œuvre de représentations est utile pour dépasser les difficultés des élèves ;
- les situations doivent amener les élèves à résoudre des problèmes spatiaux en construisant des propriétés géométriques, à épurer les objets physiques (abstraction), à travailler sur les relations d'incidence dans les patrons ;
- prendre en compte le conflit « vu/su » pour approcher la représentation plane d'objets 3D.

Cela nécessite, selon eux des situations d'action (pour résoudre un problème), de communication (voir aussi le point validation) ou de description ainsi que des problèmes ouverts.

La représentation des objets 3D

La représentation des solides concerne le passage du 3D au 2D, puis le passage à l'espace graphique (feuille, écran, ...) et peut faire appel à différentes modélisations : perspective cavalière (et dérivées), perspective centrale, représentation topologique, système 3 vues, ...

Pour que le passage du 3D au 2D soit judicieux, tout ce que l'on sait (SU) et ce que l'on voit (VU) ne peut être représenté en même temps. Il y a un choix à faire quant aux informations qu'il faut garder et celles que l'on va écarter.

La validation

Dans l'enseignement primaire, la validation d'une action en géométrie peut se faire sur le mode pratique (déjà abordée par Berthelot et Salin, voir plus haut), par le recours à la perception (voir aussi Barth, ci-dessous) ou à la mesure. En fin d'enseignement primaire, les auteurs prônent que les apprenants aient recours à un autre type de validation, « le recours à des raisonnements pour établir des preuves » (Ibid., p.26). Ils considèrent qu'il peut être utile de reporter la validation pratique en laissant la place à des temps de mise en commun et de débat des solutions. Ces mises en commun vont imposer aux élèves de formuler, préciser, critiquer leurs solutions et donc les amener non seulement à en prendre conscience, mais également à porter un jugement par eux-mêmes sur la validité.

On retrouve ici des éléments communs aux propos de Berthelot et Salin concernant les rapports didactiques (validation autonome) et l'intérêt de la production de preuve.

A retenir...

Les éléments retenus dans la logique de ces chercheurs sont les suivants :

- l'existence de différents types d'objets (à l'instar des différentes fonctions des figures de Duval) ;
- l'existence de différents types d'espace et du rôle de jonction entre ces espaces que tient la modélisation (rejoignant les propos de Berthelot et Salin) ;
- les apprentissages spécifiques liés aux relations entre les différents objets (2D-3D, spatiaux-modèles-géométriques, ...)
- le conflit vu-su dans la représentation plane d'objets 3D ;
- l'intérêt de l'anticipation (voir aussi Berthelot et Salin) basée sur les relations numériques et les caractéristiques des faces ;
- l'intérêt pour la mise en œuvre de représentations (comme chez Berthelot et Salin);
- l'intérêt des interactions verbales entre les apprenants pour valider par le raisonnement (voir aussi Barth, 2013 ;
- l'importance du langage (comme pour Duval et Van Hiele).

2.5. Des stratégies pour apprendre et enseigner l'abstraction

Après avoir présenté les points de vue d'auteurs sur les questions d'apprentissage spatiaux, impliquant le processus d'abstraction, ce dernier aborde le processus d'abstraction lui-même. Qu'entend-t-on par abstraction ? Quelles difficultés y sont liées ? Comment promouvoir l'abstraction ? L'analyse présentée par B.-M. Barth, qui s'ancre dans les travaux d'autres auteurs comme Bruner (Barth, 1985), permet d'envisager des éléments de réponses, à prendre en compte dans le domaine de la géométrie et à

mettre en parallèle et en relation avec les idées abordés ci-dessus. Les points essentiels retenus de son propos sont présentés ci-dessous.

Un point de vue sur les processus cognitifs

Se référant à Bruner, Barth signale que pratiquement toute activité cognitive comprend le processus d'abstraction et en dépend. Cela montre que, allant à l'encontre des stades de développement liés à l'âge (tels que décrit par Piaget, par exemple), le développement cognitif est « conçu comme un processus social d'intériorisation d'outils intellectuels » (Barth, 2013, p.15). Par les interactions sociales, notamment en classe, il est donc possible de s'appuyer sur les possibilités des apprenants (« Readyness ») pour provoquer la maturité et développer le processus d'abstraction.

La difficulté de l'abstraction – apprendre à « voir »

Pour l'auteur, « voir » à l'école correspond en fait à « voir ce qui est pertinent pour l'enseignant », chose à laquelle l'apprenant n'a pas forcément accès s'il ne sait pas déjà ou s'il n'est pas guidé (Ibid., p.27). Cette problématique rejoint, sans l'approfondir de la même manière, ce que Duval a identifié comme un facteur clé en géométrie.

Face à cette tâche d'abstraction, que seul l'élève peut faire, l'enseignant peut l'aider à mobiliser ses ressources intellectuelles. Barth considère en effet que (Ibid., p.31):

- la capacité de raisonner dépend de **processus fondamentaux et universels**
- ceux-ci se développent tôt (avant même l'école) et leur degré de développement dépend de l'univers culturel, dont **l'école fait partie** ;
- en comprenant leur fonctionnement, on peut **provoquer leur apparition**
- la prise de conscience par l'élève et l'entraînement de ces processus **facilite leur transfert** à d'autres situations.

Savoir et élaboration : abstraire et conceptualiser

Abstraire, apprendre (à voir), c'est donc apprendre à discerner les attributs d'un concept, à distinguer les attributs essentiels des non-essentiels à partir d'exemples. Une combinaison d'attributs particulière est désignée par une étiquette (nom, ...) sous laquelle on regroupe tous les exemples qui ont la même combinaison d'attributs. Apprendre implique donc de s'approprier l'ensemble « dénomination + attributs (définition) + exemples » au terme d'un processus d'abstraction et de conceptualisation.

Barth distingue différents types de concepts (Ibid., p.40). Les concepts **conjonctifs** sont ceux dont les attributs sont liés par des relations de types « et » (un polygone dont les angles ont 90° *et* dont les longueurs des côtés sont égales). Les concepts **disjonctifs** sont ceux dont les attributs sont liés par des relations de types « soit » (un verbe décrit *soit* une action, *soit* un état). Les concepts **de relation** ne se définissent que par rapport à d'autres éléments (comme petit, grand, ...).

D'autres aspects importants du concept sont le niveau de complexité, le niveau d'abstraction et le niveau de validité (Ibid., p.42). Le **niveau de complexité** est défini par le nombre d'attributs, le nombre de valeurs pour ces attributs, les relations entre attributs et la nature des attributs (attribut concret, conceptuel ou faisant appel à un réseau conceptuel). Le **niveau d'abstraction** (ex : chien, mammifère, animal, être vivant) désigne le compromis entre l'effort cognitif (le nombre d'attributs retenus) et la richesse en informations du concept. Il existe pour chacun un compromis, au rapport coût bénéfice

optimal, qui désigne le niveau de base. Le **niveau de validité** informe sur le niveau de consensus d'une définition donnée. Certains concepts sont scientifiques, officiellement reconnus³ (le rectangle), d'autres sont plus « flous », pouvant varier avec la culture, les individus, ... (la beauté).

Il y a donc une nécessité de rendre transmissible le savoir. En prenant en compte ce qui vient d'être précisé, le travail de préparation de l'enseignant doit consister à rendre accessible le savoir dans son ensemble :

- en délimitant et en analysant le contenu : quels sont ses attributs ? quelle est sa structure ? son niveau de complexité ? d'abstraction ? de validité ?
- en préparant des exemples (et contre-exemple, voir ci-dessous) ;
- en préparant des questions éclaircissantes (voir ci-dessous).

Stratégies d'apprentissage

La décomposition du cheminement qui mène vers l'abstraction (Ibid., p.111), proposée par Barth, permet d'identifier, dans ce processus intégré, des étapes séquentielles sur lesquelles il est possible de s'appuyer pour favoriser l'abstraction. Il s'agit d'une démarche cognitive non linéaire.

La première étape implique la **perception** (voir aussi Duval):

- elle n'est pas la même pour tous ;
- elle amène à se construire une image mentale perceptive ou perception primaire ;
- elle amène à prendre une décision sur ce que l'on croit percevoir ;
- en impliquant trois modes de perception (dont l'utilisation dépend de l'âge et de l'expérience pour finalement travailler en parallèle), le mode enactif (sensori-moteur), le mode iconique (visualisation mentale) et le mode symbolique (représentation par un code).

La deuxième étape est celle de la **comparaison**. Il s'agit d'identifier des critères, puis, s'il y a des ressemblances ou des différences dans les mêmes catégories de critères. Cet aspect est difficile à comprendre intuitivement pour les apprenants. Cela nécessite de séparer une entité (l'exemple) en ses composantes et de reconnaître les relations qui les lient (on rejoint là le niveau 2 du modèle de Van Hiele). La pertinence des choix des critères de comparaison est dépendante du contexte, que maîtrise l'enseignant (puisqu'il connaît le concept), mais pas l'apprenant (qui doit découvrir le concept).

La troisième étape consiste à faire une **inférence** et sa **vérification**. C'est là une démarche osée qui produit des hypothèses à vérifier selon la démarche « Si ..., alors... », qui dépasse l'information donnée au départ à l'apprenant. Il doit identifier des similarités entre exemples, malgré les différences et conserver celles qui restent constantes pour définir une combinaison possible d'attributs. Loin de « deviner », il s'agit de mettre en perspective de nombreux exemples. Le processus à mettre en œuvre est celui de l'inférence inductive. Inférer une règle à partir de faits particuliers nécessite des choix arbitraires et donc une vérification qui est, elle, déductive.

Ces trois étapes ont lieu en boucles tant que les vérifications par la confrontation à des exemples amènent à modifier l'inférence faite par l'apprenant (voir figure 1). Il s'agit donc d'un processus

³ Cela n'exclut pas qu'ils puissent évoluer dans le temps.

d'abstraction, en tant qu'« opération mentale qui considère à part un ou plusieurs éléments d'une perception en négligeant les autres » (Ibid., p.125). Abstraction qui, à terme, permet de remplacer la réalité (les exemples) par un symbole (le concept) et peut mener éventuellement à une généralisation.

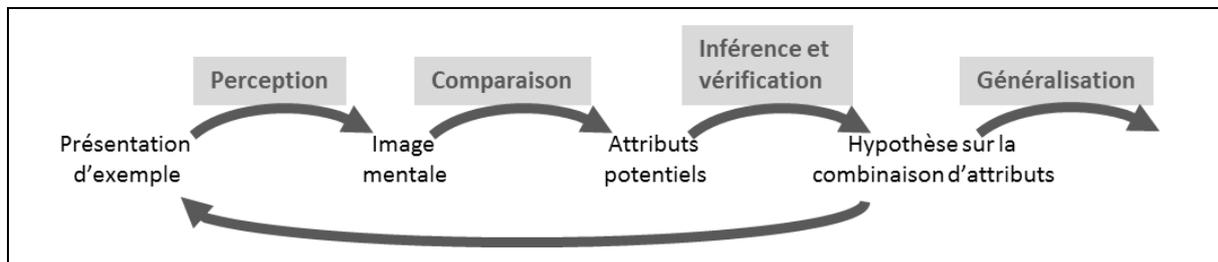


Figure 1 - Les étapes de la stratégie d'apprentissage impliquant l'abstraction (Barth, 2013), de la perception à la généralisation.

La quatrième étape, au terme de la boucle menant à l'abstraction, est celle où l'apprenant pose une **hypothèse** et fait sa **vérification**. Cette hypothèse est l'anticipation de la règle, de la définition du concept. Il s'agit de la généralisation, opération mentale qui consiste à élargir à une classe entière de cas particuliers ce qui a été abstrait sur un nombre restreint de cas appartenant à cette classe.

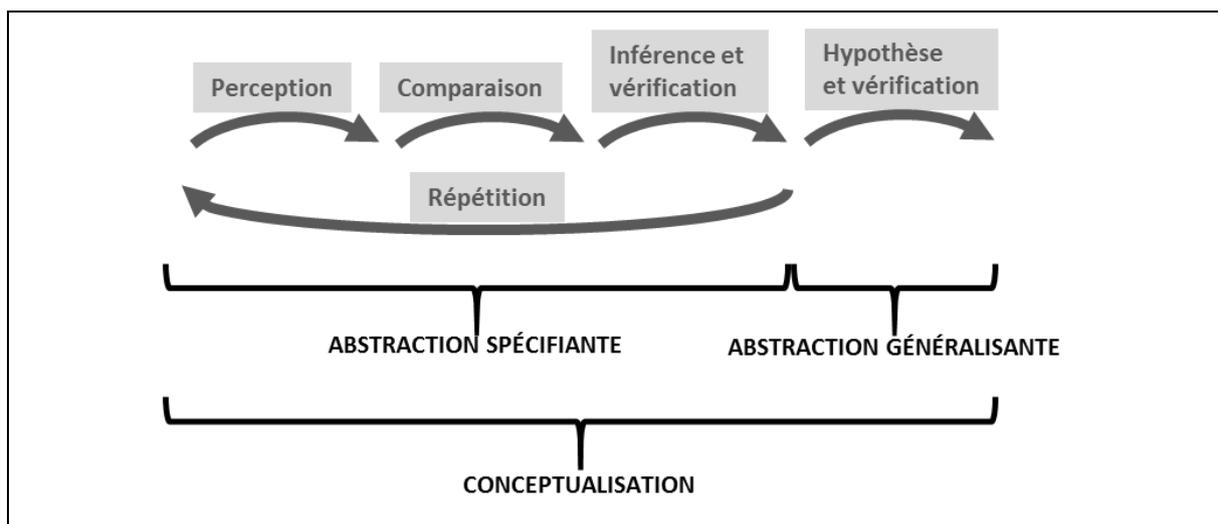


Figure 2 - Les étapes de la stratégie d'apprentissage impliquant l'abstraction (Barth, 2013) et la conceptualisation.

Le processus d'abstraction mis en œuvre dans la première phase peut être décrit comme une abstraction *spécifiante*, quand celui de la seconde phase peut être considéré comme une abstraction *généralisante* (Ibid., p.126). L'ensemble mène à la conceptualisation (voir figure 2). Il est important de distinguer les deux types d'abstraction, car elles peuvent, en fonction des situations d'enseignement, être des objectifs distincts.

Stratégies d'enseignement pour abstraire et conceptualiser

Prenant en compte la stratégie d'apprentissage ci-dessus, Barth propose une stratégie d'enseignement à mettre en œuvre. Celle-ci est divisée en Préparation et Mise en œuvre, qui sont présentées ci-dessous.

La **mise en œuvre** a lieu en trois phases, une d'observation-exploration, une de clarification-vérification, et une d'abstraction (voir figure 3).

La **phase d'observation** consiste à présenter aux élèves des exemples et contre-exemples du concept à découvrir. Le premier exemple présenté doit être clair et le premier contre-exemple ne posséder aucun attribut du concept. Les contre-exemples suivants pourront petit à petit posséder des attributs en commun avec les exemples. Au fur et à mesure des présentations, les élèves proposent des caractéristiques du concept que l'on pourrait retenir et qui sont toutes notées. La confrontation avec les contre-exemples permet de vérifier les propositions faites par les élèves, en en débattant.

Certains points doivent être respectés pour garantir un apprentissage :

- La présentation des consignes doit être faite au départ ;
- Le **droit à l'erreur** doit être mis en avant et respecté tout au long de l'activité ; ceci permet à l'apprenant de s'exprimer honnêtement sur sa perception, sans jugement et à l'enseignant de se confronter aux préconceptions ; la validation ou la réfutation se fera de façon autonome (pas par l'enseignant) au cours de l'activité (rejoignant une des propositions de Salin et Berthelot) ;
- La **perception intuitive** doit être mise en œuvre au début de l'activité en laissant l'apprenant quelques minutes seul avant de prendre connaissance de sa vision ; cela permet de partir du cadre de référence de l'élève (forcément éloigné de celui de l'enseignant qui « sait déjà ») ; cela permet également de montrer aux apprenants que tout le monde ne voit pas la même chose, voire de constater que le moment d'aborder le concept est trop précoce par rapport aux perceptions des élèves ; finalement, cela permet d'assurer la compatibilité entre les préconceptions de chaque apprenant et les apprentissages qui vont se faire ;
- L'apprentissage nécessite de **rechercher des attributs** en confrontant exemples et contre-exemples ; les informations « négatives » sont utiles au processus d'abstraction si l'on en comprend la fonction ;
- Il faut veiller à **l'importance des contrastes** au travers des exemples négatifs choisis par l'enseignant ; les contrastes vont aider les apprenants à repérer les attributs essentiels parmi les non-essentiels et vont permettre de confirmer ou infirmer les inférences ; c'est donc un outil efficace dans une stratégie où les erreurs sont consciemment mises à profit ;
- Les **exemples sont le moyen de guidage** pour faire la différence entre les attributs essentiels ou non ; le premier exemple doit donc être simplifié et le premier contre-exemple n'avoir aucun attribut essentiel ; il faut prévoir un nombre élevé d'exemples différents pour faire varier les attributs non-essentiels (par exemple l'orientation d'une forme) et ne pas induire l'apprenant en erreur (un losange n'est pas toujours « sur la pointe ») ; les exemples négatifs doivent être prévus pour chacun des attributs, et en faisant progresser le nombre d'attribut en commun avec le concept, en commençant par aucun en commun pour finir avec des contre-exemples proches des exemples ; cette progression est particulièrement utile pour travailler sur des concepts dont la définition varie et permet ainsi de situer le concept dans un réseau conceptuel ;
- Il faut prévoir des **questions élucidantes** comme autre moyen de guidage pour focaliser l'attention de l'apprenant sur ce qu'il ne perçoit pas encore, pour suggérer une mise en relation ; leur rôle est d'induire les processus cognitifs de comparaison, d'inférence et de vérification ;

- La définition du concept est importante, en termes de choix d'attributs, en fonction du public, mais aussi en veillant à son utilité ; il faut veiller à ce que la définition ne se confonde pas ou ne fasse pas appel à un synonyme, à un concept de niveau supérieur ou à un exemple ;
- Le choix du vocabulaire doit se faire en fonction du public et être introduit progressivement ; si le nom du concept est donné rapidement par un ou plusieurs apprenants, il est nécessaire de demander des précisions afin de vérifier (ou faire émerger) tous les attributs.

La deuxième phase de la mise en œuvre est la **phase de clarification et de vérification**. La **clarification** consiste, quand l'enseignant a l'impression que le concept est compris, à présenter des exemples inconnus à identifier en justifiant. L'objectif est de vérifier rigoureusement la perception de l'apprenant et de la modifier si nécessaire, en détectant les éventuelles confusions. En ce sens, le fait de travailler en groupe génère des **interactions verbales et des conflits cognitifs** et donc implique pour l'apprenant de codifier ses idées pour les exprimer, de les clarifier et de les structurer. On rejoint là les propos tenus par Douaire et ses collègues (voir plus haut) sur le rôle du débat pour valider par le raisonnement. La **validation** doit être immédiate et doit permettre de comprendre le pourquoi de l'erreur ; si trop d'apprenants se trompent, alors le passage à cette phase a été trop rapide. Plus les exemples sont intrigants, voire « limites », mieux on vérifie l'acquisition du concept. La **directivité** de l'enseignant doit être dosée en fonction du public. Si le niveau de connaissance le permet, il peut être fort directif, sinon, il faudra prendre plus de temps. Ceci doit être envisagé et décidé lors de la préparation.

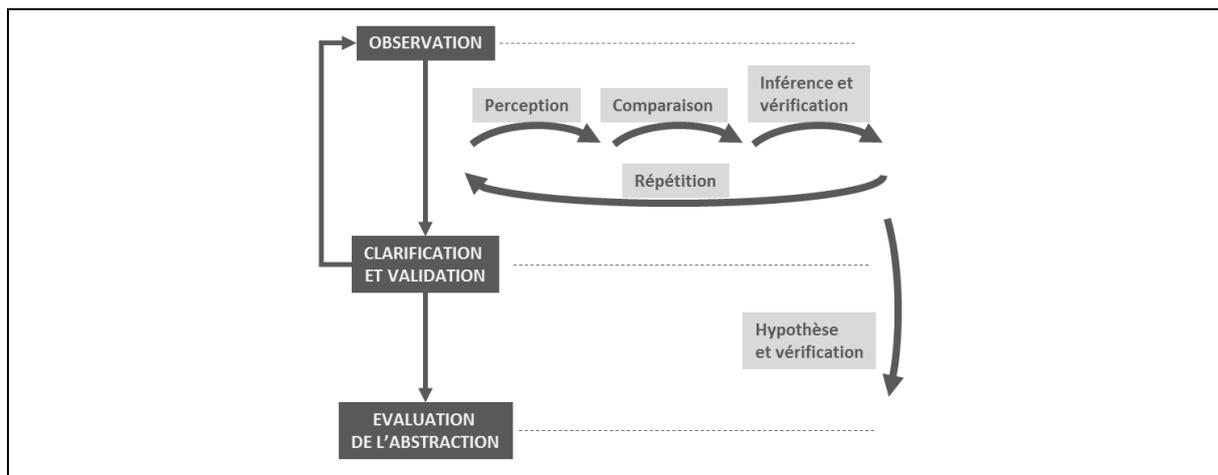


Figure 3 - Les étapes de la stratégie d'enseignement (cadres gris foncé) menant à l'abstraction et à la conceptualisation (Barth, 2013), parallèle avec la stratégie d'apprentissage (cadres gris clair).

La troisième phase, celle que Barth nomme **l'abstraction**, a pour but d'évaluer si l'apprentissage est complet et s'il est transférable. Cela peut se faire à 5 niveaux, mais implique au minimum les trois premiers :

1. L'extension : l'apprenant est capable de distinguer des exemples nouveaux ;
2. La compréhension : il est capable de justifier cette distinction, ce qui revient à nommer tous les attributs essentiels du concept ;
3. L'abstraction : il est capable d'utiliser l'idée abstraite, l'étiquette, c'est-à-dire de nommer le concept et de faire le lien entre le nom, les exemples et les attributs
4. L'application : il est capable de générer ses propres exemples ;

5. Le transfert : il est capable de localiser le concept dans un autre contexte et/ou de l'utiliser dans un autre contexte.

Il est essentiel de garder en mémoire, lors de l'évaluation que « les élèves et les enseignants ne partagent pas une compréhension mutuelle et explicite de ce qu'on veut dire par *apprendre* ou *comprendre*, ni de la manière de s'y prendre pour y arriver ou de la manière de mettre en œuvre ses connaissances » (Ibid., p.92). Il est donc nécessaire d'énoncer aux apprenants, avant l'enseignement, comment manifester leurs nouveaux apprentissages et à quel niveau cognitif (abstraction, conceptualisation, application, transfert).

Variante de la stratégie d'enseignement

L'auteur propose une variante de sa stratégie d'enseignement, basée sur la comparaison de concepts, à partir du travail de Taba (Ibid., p.163). Celle-ci consiste à donner à **manipuler** individuellement, sur un support visuel, des exemples des concepts à distinguer. Un travail de **classification** individuel (ou en petits groupes) est demandé à l'apprenant, qui sait qu'il va devoir expliquer sa classification (ou ses classifications, pour les plus rapides). Un **temps de discussion** est mis en œuvre autour des différentes classifications, ce qui permet de constater la diversité, mais aussi de mettre en évidence les combinaisons les plus courantes. En suivant avec leur propre support visuel, les élèves prennent connaissance de **l'explication des classements** d'un d'entre eux, éventuellement complétée par d'autres ayant fait les mêmes groupements. Chaque auteur propose un nom pour ses classes, noms qui sont notés, sans rejet d'aucun classement. En cas d'incohérence dans la classification proposée, celle-ci est immédiatement corrigée, soit en réorganisant les exemples, soit en modifiant l'argument. La **confrontation** à d'autres propositions permet de progresser vers la définition des concepts, à l'aide des questions élucidantes. Au besoin, l'enseignant peut proposer sa classification en demandant d'en chercher les raisons. Les interactions verbales et la manipulation réelle amène à prendre conscience des justifications cohérentes, qui correspondent aux attributs essentiels ou à la définition. On retrouve dans la démarche proposée des objectifs stratégiques proches de ceux évoqués plus haut : l'observation mais aussi la manipulation, le regroupement en fonction d'attributs essentiels à distinguer, la comparaison et l'inférence, à valider en groupe en justifiant, la généralisation, ... Cette approche a aussi des avantages spécifiques car elle permet de **créer d'emblée un réseau conceptuel** autour des concepts qui sont construits en même temps.

Apprendre à abstraire : métacognition et transfert

La métacognition, le besoin d'analyser la démarche cognitive et de prendre conscience de la mise en œuvre particulière d'un raisonnement, vise tant l'enseignant que l'apprenant (Ibid., p.139).

L'enseignant doit prendre conscience de la structure du savoir qu'il veut transmettre et de son élaboration. L'élève quant à lui doit prendre conscience de la démarche mentale qu'il a mise en œuvre et qu'a suscité l'enseignant.

Il faut donc amener les élèves à percevoir :

- La succession des opérations mentales qui décomposent la stratégie d'apprentissage (perception, comparaison, ...);
- La structure du concept/de la règle : nom + attributs essentiels + exemples

- La démarche menant à l'organisation interne du concept (chercher et valider les attributs essentiels) et à la généralisation.

Pour développer les capacités de transfert du processus d'abstraction, il est, selon Barth, nécessaire de travailler avec les apprenants :

- La perception, qui dépend des connaissances antérieures, pour faciliter la fluidité, l'originalité, la flexibilité ;
- L'organisation des apprentissages (concepts), qui se retiennent mieux s'ils sont organisés en structures avec d'autres ;
- La comparaison ;
- L'inférence et la vérification ;
- L'hypothèse et la validation.

Pour la comparaison, on peut en effet identifier des niveaux différents (Ibid., p. 150), comme présentés dans le tableau 6. L'expérience permet à l'apprenant de progresser dans ces niveaux, et par là même dans sa capacité d'abstraire.

Niveau	Caractérisation du niveau de comparaison entre A et B
0	<ul style="list-style-type: none"> Liste des attributs de A
1	<ul style="list-style-type: none"> Donne des exemples de A et B Sans lien / en comparant des éléments incomparables
2	<ul style="list-style-type: none"> Compare A et B sur une catégorie Sans exemple
3	<ul style="list-style-type: none"> Compare A et B sur une catégorie Avec des exemples
4	<ul style="list-style-type: none"> Compare A et B sur une catégorie Avec des exemples En précisant les différences et ressemblances

Tableau 6 - Caractérisation des niveaux des apprenants dans l'acquisition de la capacité à comparer (Barth, 2013)

A retenir...

Les éléments clés retenus sont, de façon synthétique :

- La possibilité de provoquer la maturité des apprenants (que l'on peut mettre en lien avec la vision des Van Hiele) et de développer le processus d'abstraction chez eux ;
 - La description des caractéristiques d'un concept permettant une préparation des situations d'enseignement ;
 - La description d'un processus d'abstraction en étapes, associé à une stratégie d'apprentissage et une stratégie d'enseignement éprouvées en classe ;
 - L'existence d'une difficulté à « voir » pour abstraire (ce qui rejoint le seuil critique de la visualisation géométrique évoqué par Duval) et la possibilité d'enseigner à « voir » ;
 - L'importance des exemples et contre-exemples nombreux (ou de nombreux exemples à classer) (ce propos rejoint celui de Van Hiele) ;
 - L'importance de la perception intuitive, de l'interaction verbale (rejoignant ici les propos de Douaire et ses collègues), du langage (voir aussi Douaire, Duval et Van Hiele) ;
 - L'importance du niveau cognitif d'évaluation et de la communication de cette information ;
- le rôle essentiel de la métacognition et de l'entraînement pour transférer le processus d'abstraction.

III. VERS UNE MODELISATION DES CONNAISSANCES

Organisation générale

La longueur de la liste des éléments théoriques à prendre en compte montre la nécessité de structurer et de modéliser les contraintes à intégrer dans le développement de situations scolaires. Le travail a abouti au modèle qui est schématisé ci-dessous (figure 4).

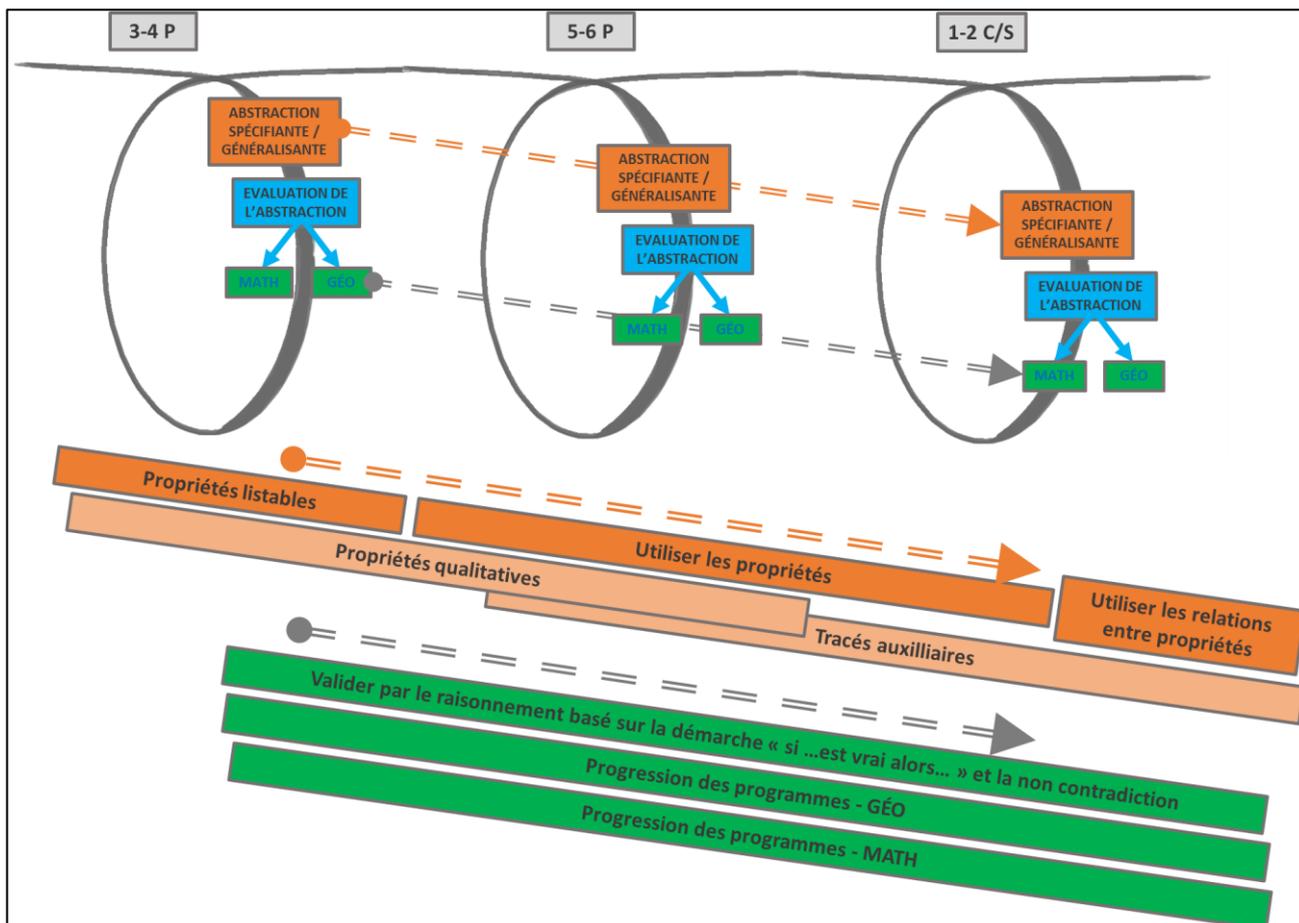


Figure 4 - Modèle présentant l'organisation des situations d'enseignement visant à développer le processus d'abstraction chez les élèves de 8 à 14 ans

Les apprentissages sont envisagés comme des unités, répétés au sein de chaque cycle d'enseignement. Ceci est représenté par les boucles grises. Cette forme de répétition, à mettre en œuvre pour les apprentissages importants (Bruner, in Barth, 1985) permet de prendre en compte l'évolution avec le développement de l'enfant de plusieurs éléments, représentés par les barrettes sous les boucles :

- le passage de propriétés listables à l'utilisation de ces propriétés puis à l'utilisation des relations entre les propriétés (i.e. Van Hiele in Crowley, 1987 or in Usiskin, 1982)
- Le passage du travail basé sur les propriétés qualitatives au travail basé sur les tracés auxiliaires (Duval, 2005)
- L'instillation progressive du raisonnement/débat mathématique basé sur l'implication ("si ... est vrai, alors ...") et la non-contradiction

- Et bien entendu la progression des apprentissages tels que prévus par les programmes.

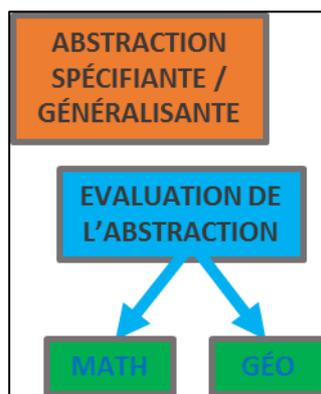


Figure 5 - Représentation des étapes à mettre en œuvre dans chaque cycle d'enseignement pour développer le processus d'abstraction

Au sein d'un cycle, chaque apprentissage est lui-même envisagé au travers de trois étapes (voir figure 5):

- la première, l'ABSTRACTION SPÉCIFIANTE/GÉNÉRALISANTE, a pour but de faire construire par l'élève le concept au cœur de l'apprentissage ; derrière cette étape se dessine la nécessité d'explicitier, pour l'enfant, ce qui est attendu, de mettre des mots précis sur les apprentissages, de dire ce que l'on attend que l'élève fasse
- la seconde étape, l'EVALUATION DE L'ABSTRACTION, prend à sa charge l'évaluation de l'acquisition du concept en tant que tel
- la troisième étape se focalise sur le transfert du concept au sein des disciplines (ici, mathématiques et géographie), en lien avec les apprentissages prévus par les programmes.

Au travers de cette organisation, on instille dans le développement de situations d'apprentissage les apports de Barth, de Bruner et de Berthelot et Salin entre autres. A chacune de ces étapes, le développement de situations d'apprentissages doit également répondre à des critères importants pour favoriser le processus d'abstraction, son développement et sa transférabilité.

Abstraction du concept

La première étape de chaque cycle (représentée en orange sur les figures) est, idéalement et lorsque cela est pertinent, centrée sur la construction du concept de l'apprentissage. Il s'agit, dans le cadre de cette recherche, de *la représentation du point de vue d'autrui*, de *la représentation plane de solides*. Cela pourrait tout aussi bien concerner *le développement du solide*, *les angles obtus, aigus et droits*, *la ligne du temps*...

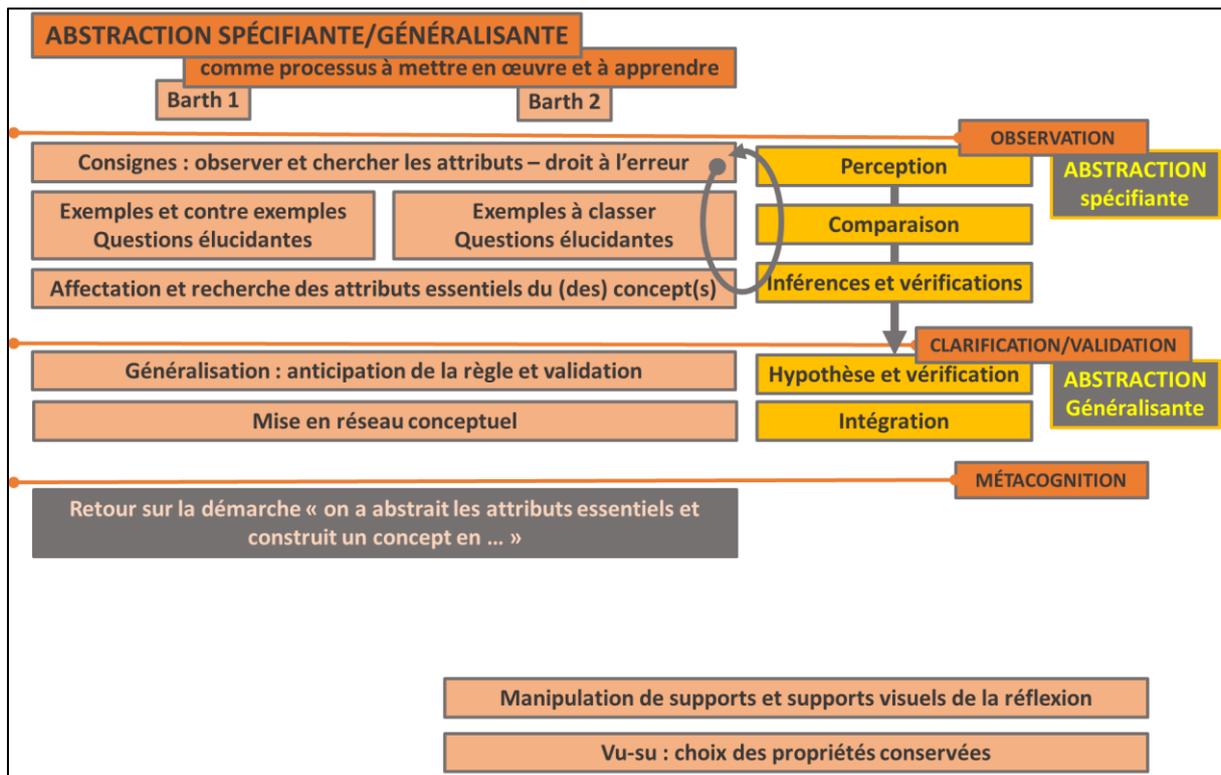


Figure 6 - Représentation des étapes à mettre en œuvre pour favoriser l'abstraction généralisante chez les élèves

Le schéma ci-dessus (figure 6) présente les étapes à respecter (Barth, 2013) pour amener les élèves à l'abstraction, dans deux cas de figure. Le premier cas de figure (Barth 1) concerne les situations où le travail de conceptualisation se fait par la confrontation d'exemples du concept à des contre-exemples, permettant d'isoler les caractéristiques essentielles qui définissent le concept. Le second cas de figure (Barth 2) est adapté au processus d'abstraction basé sur le classement d'exemples en groupes définissant différents concepts proches (pour plus de détails, voir rapport intermédiaire, p. 29). Dans le premier, on peut confronter les élèves à des exemples de représentation du point de vue d'autrui et représentations qui sont soit, de leur point de vue, soit incorrect... Dans le second, on peut présenter des exemples de représentation sous différents angles de vue et amener les élèves à classer selon les angles de vue.

Quelle que soit l'entrée choisie, le travail se fait en groupe, oralement, et il est indispensable que :

- chacun soit libre de proposer ses solutions et de se tromper, puisque cela fait partie du processus d'abstraction
- chacun comprenne et accepte les propositions émises par les autres enfants ; cela implique que les élèves argumentent et/ou explicitent leurs propositions et leurs avis ; en conséquence, la sanction de ce qui est accepté ou rejeté revient au groupe, et non à l'enseignant (Barth, 2013 ; Berthelot & Salin, 1992)

La première partie de l'abstraction qui est demandée reste spécifique, c'est-à-dire limitée aux exemples scolaires utilisés. Cette approche permet de faire travailler deux processus, la perception et la comparaison, qui posent souvent des difficultés aux élèves tant en géométrie (Duval, 2005) que de

façon transversale. Elle nécessite également de la part de l'élève de faire des inférences et de les vérifier dans une logique d'implication : si cette caractéristique est essentielle, alors elle doit se trouver dans tous les exemples.

Cette approche permet par ailleurs de prendre en compte une contrainte importante relevée dans la littérature. Il s'agit de la gestion du conflit entre le "vu" et le "su". Cela doit avoir lieu durant le travail de perception et de comparaison réalisé en groupe classe. Les interactions entre élèves, la nécessité d'explicitier ce que l'on propose comme caractéristiques à abstraire et les questions élucidantes de l'enseignant sont l'occasion de travailler ce conflit.

Exemple: confronté à une maquette puis à une photo décentrée de la maquette, la première réponse spontanée formulée suite à l'observation est souvent "c'est la maquette" ou "c'est la maquette, mais vue d'ailleurs". Il y a manifestement confusion entre ce qui est vu (la photo) et ce qui est su (c'est une représentation de la maquette).

La seconde partie de l'abstraction, généralisante, va amener l'élève à étendre le concept qu'il a découvert à l'ensemble des cas possibles, puis, lorsque cela s'y prête, à mettre en relation chaque concept avec d'autres. C'est le cas spontanément lorsque l'on se trouve dans le cas d'exemples de différents concepts à classer (Barth 2).

Cette étape se termine par un moment dédié à la métacognition. Il est en effet important, si l'on souhaite que l'élève puisse développer et transférer le processus d'abstraction, qu'il prenne conscience de ce qui s'est déroulé. Dans l'activité, il a appris et exercé un processus pouvant être reproduit dans d'autres situations. Toutefois, il est utile de montrer et d'explicitier ce qui peut, sans cela, paraître naturel. Le fait d'identifier le processus et de le détacher de la situation peut permettre à l'élève de faire appel au processus dans une autre situation.

Evaluation de l'abstraction du concept

Au terme du processus d'abstraction qui a été travaillé, il est nécessaire de mettre en œuvre une évaluation formative de l'acquisition du concept (représentée en bleu sur les figures). Cette évaluation répond aux questions suivantes: *Est-il capable de reconnaître des exemples inédits du concept? Est-il capable de se servir des caractéristiques du concept? Est-il capable d'utiliser l'idée du concept? D'utiliser le concept dans une application? De l'utiliser dans un autre contexte, une autre discipline...?*

En fonction des attentes de l'enseignant et de l'apprentissage qui est envisagé, toutes les questions ne doivent pas forcément être envisagées. Il est dès lors important que les attentes soient explicitées pour l'élève.

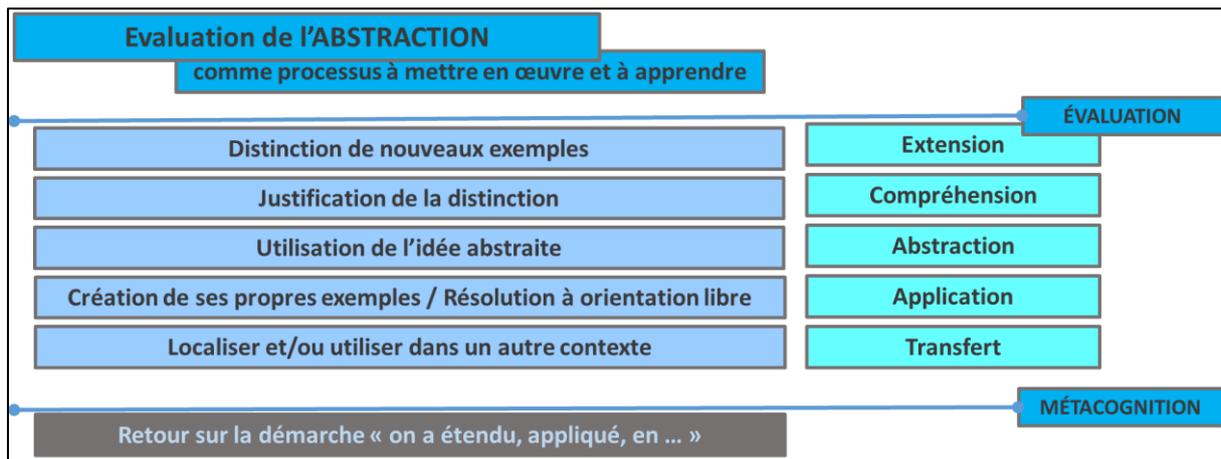


Figure 7 - Représentation des étapes à respecter pour évaluer l'acquisition d'un concept abstrait par les élèves

Comme le montre la figure 7, le premier niveau d'évaluation, l'extension, permet de vérifier que l'élève est capable d'utiliser le concept pour reconnaître de nouveaux exemples. Le second niveau d'évaluation, la compréhension, permet d'attester que l'élève parvient à utiliser le concept, et en particulier les caractéristiques du concept. Pour ce faire, on attend de l'élève qu'il sache justifier, en faisant références aux caractéristiques, les exemples qu'il a reconnus. Le troisième niveau, l'abstraction, évalue la capacité de l'élève à utiliser l'idée abstraite du concept.

Une fois le concept acquis, le 4^e niveau d'évaluation vise à s'assurer que l'élève soit capable d'appliquer ce qu'il a appris, soit en créant ses propres exemples (Barth, 2013), soit en utilisant le concept dans le cadre d'une résolution de problème à orientation libre (Van Hiele in Crowley 1987). Le transfert (ainsi que l'application par conséquent) est travaillé spécifiquement dans la troisième étape.

Comme lors de la première étape, il est intéressant de terminer l'étape d'évaluation formative par un moment de métacognition.

Mise en œuvre du concept (application) et transfert aux disciplines

Lorsque l'élève a construit le concept (étape 1 : abstraction) et que l'apprentissage a été vérifié (étape 2 : évaluation), la troisième étape (représentée en vert dans les figures) a pour objectif de provoquer le transfert de l'apprentissage à d'autres contextes. Les chercheurs ont choisi, autant que faire se peut, de provoquer le transfert dans deux disciplines. Les situations d'enseignements dédiées à cette étape de l'apprentissage doivent également répondre à des contraintes théoriques résumées à la figure 8.

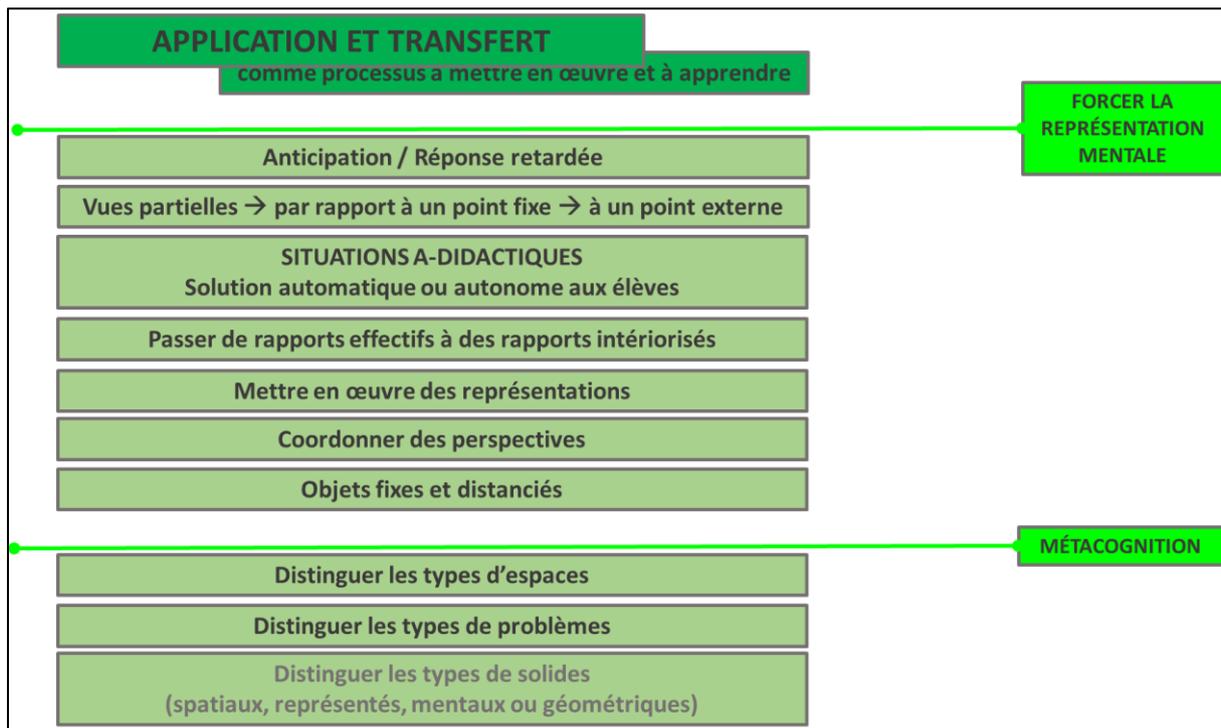


Figure 8 - Représentation des contraintes à respecter pour forcer la représentation mentale chez les élèves et favoriser le développement de compétences spatiales

Sortir du micro-espace pour obliger la représentation mentale

La première contrainte relevée comme essentielle dans la littérature (Berthelot & Salin, 1992) pour que tous les élèves puissent développer des compétences spatiales consiste à éviter que les élèves parviennent à une réponse par une succession d'ajustements. Si pour réaliser une tâche, un élève a la possibilité d'y parvenir par essais et erreurs, alors, il est peu probable qu'il mette en œuvre une abstraction spatiale. Certains le feront peut-être, mais tous ne feront pas la démarche. En conséquence, les situations envisagées par les chercheurs devront soit:

- nécessiter une anticipation de l'action (écrire avant de faire, prédire une situation finale, ...)
- impliquer une réponse retardée par rapport à l'action de l'élève.

C'est une façon de quitter le micro-espace (Brousseau, 1983 ; Brousseau, 1989 ; Berthelot & Salin, 1992), dans lequel l'élève n'a pas besoin d'abstraire de la réalité, puisqu'il peut manipuler, déplacer... Quitter le micro-espace peut se faire également en amenant les élèves à se confronter à des objets fixes et distanciés.

Dans la même logique, il est également possible de faire travailler les élèves en les amenant à coordonner des perspectives différentes pour se représenter la réalité. Dans ce cas, on peut envisager une progression dans l'apprentissage, qui débiterait avec des vues partielles subjectives nécessitant de se repérer et de s'orienter, pour passer à un repérage par rapport à un point fixe interne au méso-espace, puis à un repérage impliquant un point externe au méso-espace.

Les apports théoriques mettent aussi en évidence l'importance de passer progressivement de rapports effectifs à la réalité à des rapports intériorisés. Dans tous les cas, il semble essentiel (Berthelot & Salin,

1992; Douaire *et al.*, 2009) que les élèves aient l'occasion de mettre en œuvre les représentations de la réalité par eux-mêmes.

Finalement, le dernier point abordé, crucial, concerne le caractère a-didactique des situations dans lesquelles sont placés les élèves. S'il est essentiel que les élèves ne puissent pas parvenir à effectuer la tâche par ajustement pour forcer les représentations et l'abstraction, il est également nécessaire que les élèves qui ont des représentations erronées soient amenés à constater par eux-mêmes la nécessité de les modifier. La "parole" de l'enseignant est ici insuffisante et il faut dès lors s'appuyer :

- soit sur l'argumentation des pairs et le débat mathématique (implication et non contradiction)
- soit sur des tâches où la situation elle-même valide ou invalide la solution trouvée par l'élève.

IV. ORGANISATION GENERALE DES SITUATIONS

Les deux compétences spatiales visées dans le cadre de la recherche sont la décentration, c'est-à-dire la capacité à se représenter le point de vue d'autrui et la représentation mentale de solide à partir de représentations planes. Les chercheurs ont donc appliqué le modèle présenté ci-dessus à chacune de ces compétences, comme le montre la figure 9. Ce chapitre présente la façon dont sont organisées les situations déjà développées, en cours de développement et à développer.

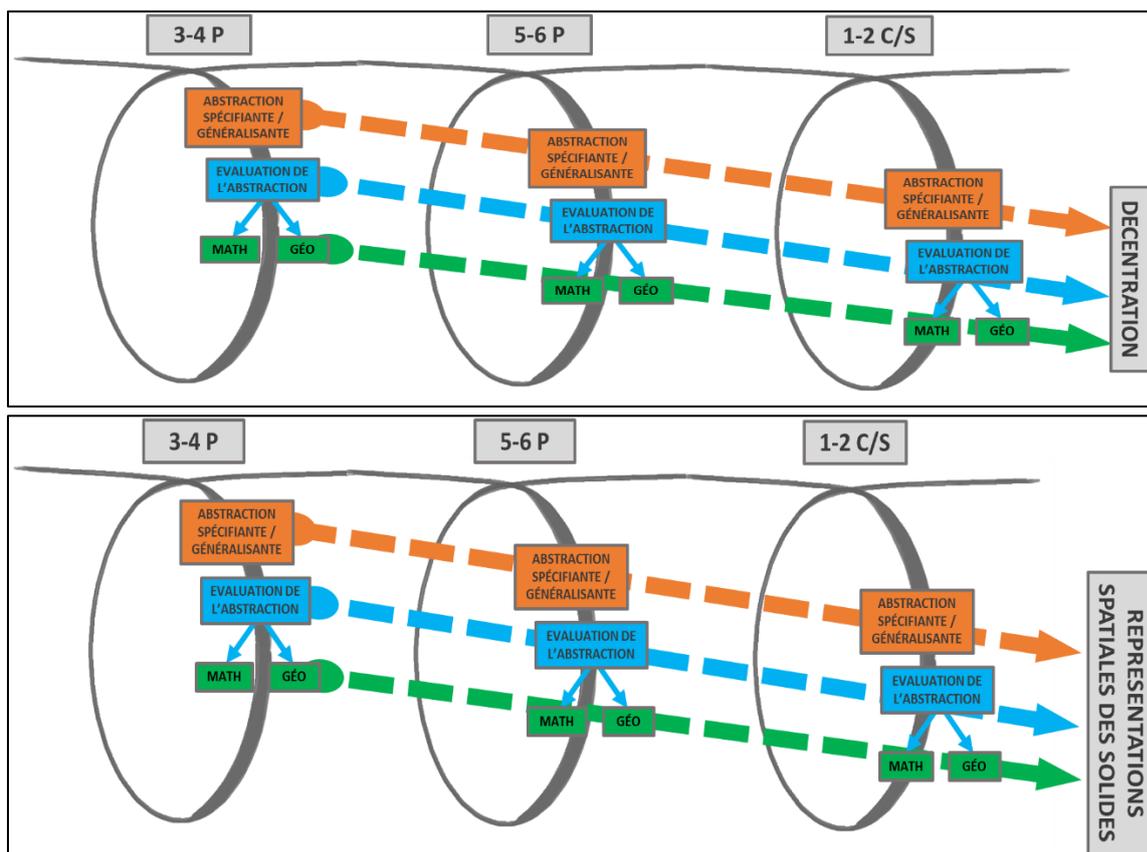


Figure 9 - Présentation de l'organisation prévue pour les situations d'enseignement visant à développer le processus d'abstraction au sens large et les processus de décentration et de représentation mentale de solide au départ de représentations planes

4.1. Favoriser le développement des processus d'abstraction et de décentration

Le schéma de la figure 8 illustre la manière dont les chercheurs ont organisé différentes situations d'apprentissage dans l'optique de développer à la fois le processus d'abstraction au sens large et le processus spécifique d'abstraction spatiale qu'est la décentration. Les situations sont décrites au chapitre suivant, le but est ici de montrer leur articulation.

Les cadres sans intitulés correspondent à des étapes pour lesquelles une idée pertinente n'a pas encore été dessinée. Les cadres de couleur pleine décrivent des situations qui ont été réalisées à l'état de prototype, ceux en couleur transparente sont encore en cours de réalisation.

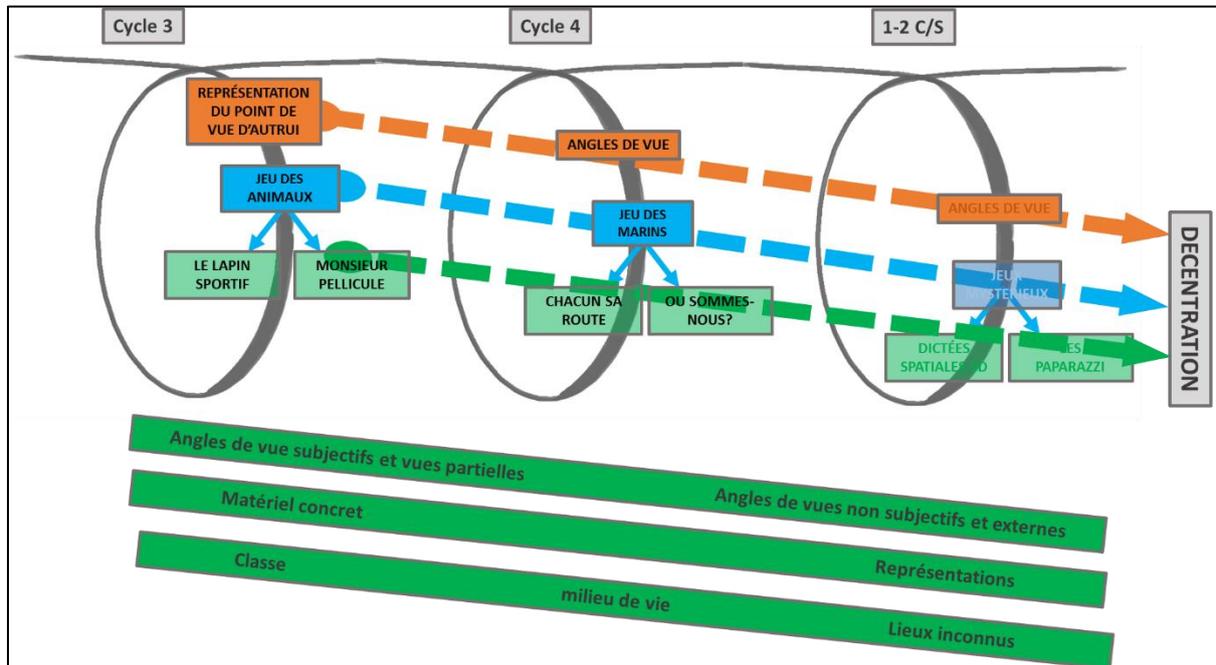


Figure 10 - Organisation concrète des situations d'enseignement visant à développer la décentration et contraintes prises en compte (en vert); les situations déjà développées sont en couleurs pleines et celles à développer sont en couleurs transparentes

4.2. Favoriser le développement des processus d'abstraction et de représentation mentale de solides

Le schéma de la figure 9 illustre la manière dont les chercheurs ont organisé différentes situations d'apprentissage dans l'optique de développer à la fois le processus d'abstraction au sens large et le processus spécifique d'abstraction spatiale qui mène à se représenter mentalement les solides au départ de représentations dans le plan.

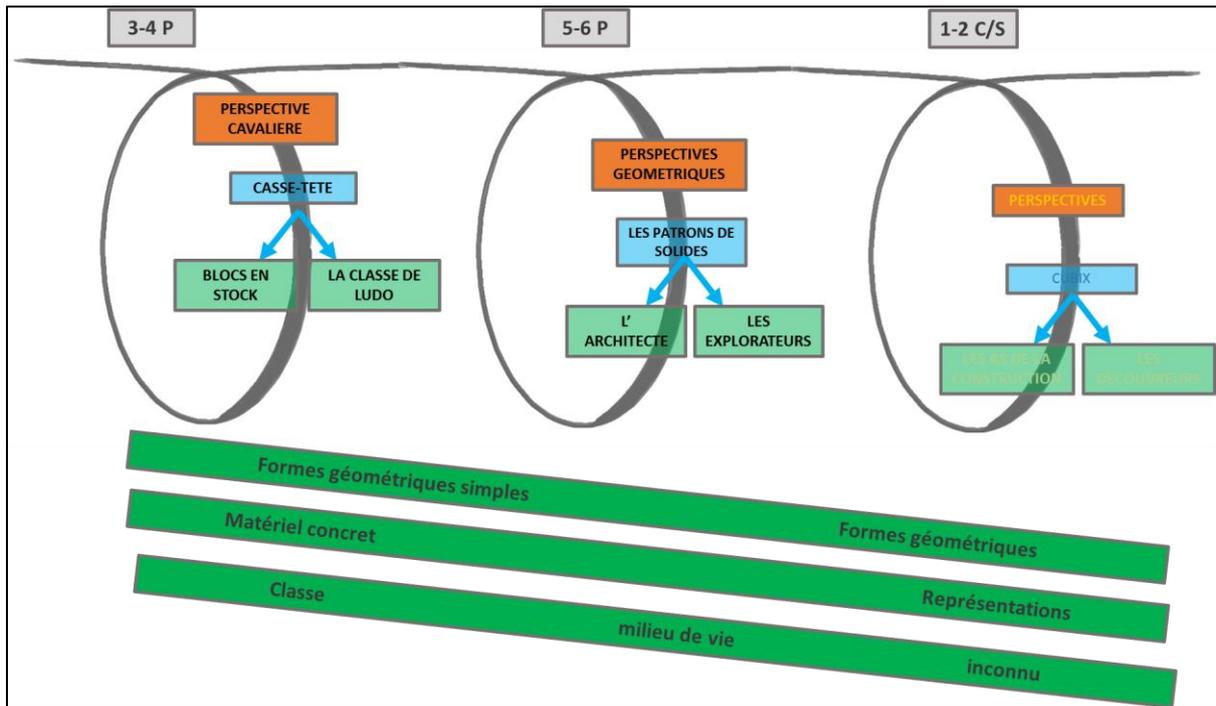


Figure 11 - Organisation concrète des situations d'enseignement visant à développer la représentation mentale de solides à partir de représentations planes et contraintes prises en compte (en vert)

V. LES SITUATIONS D'APPRENTISSAGE

Au total, 16 situations d'apprentissage ont été élaborées. Celles-ci sont présentées dans deux fascicules distincts. L'un des fascicules est à destination des enseignants du cycle 3 de l'enseignement primaire, l'autre est à destination des enseignants du cycle 4 de l'enseignement primaire. L'objectif de ces deux fascicules est double. D'une part, il permet à l'enseignant de prendre connaissance des principales notions à connaître pour favoriser le développement du processus d'abstraction chez ses élèves ; d'autre part, il constitue un outil méthodologique présentant les situations didactiques développées.

Ces fascicules sont proposés dans leur intégralité ci-après.

5.1. Le fascicule à destination des enseignants du Cycle 3

5.2. Le fascicule à destination des enseignants du Cycle 4

VI. MISE À L'ÉPREUVE DES SITUATIONS D'APPRENTISSAGE DÉVELOPPÉES

En vue de tester l'efficacité des situations créées et le modèle d'organisation des situations d'enseignement élaboré dans le cadre de la première partie de la recherche, deux outils ont été utilisés. D'une part, la mise en œuvre d'un plan quasi-expérimental (Myers & Hansen, 2003) avec un prétest et un posttest à groupe unique, et d'autre part, le questionnement des enseignants ayant utilisé les outils créés, par l'intermédiaire d'un questionnaire.

En outre, les contacts informels par téléphone ou lorsque les chercheurs se sont rendus dans les écoles ont permis d'obtenir des informations importantes relatives à l'accueil et à l'appropriation, par les enseignants, des outils proposés.

De plus, les tests et les questionnaires, il était prévu que séquences d'enseignement fassent l'objet d'observations par les chercheurs dans le but d'avoir une représentation correcte de la manière dont les activités se mettent en œuvre au sein des classes. Les séances devaient être filmées afin de garder des traces des observations effectuées et d'alimenter des capsules vidéo explicitant la démarche à adopter dans le cadre de la mise en œuvre des situations proposées.

Bien que dans un premier temps deux écoles ont accepté la présence des chercheurs et des caméras en classe, toutes deux se sont désistées. Le premier établissement s'est désengagé de la recherche et les enseignants n'ont donc pas testé les situations. En ce qui concerne le second établissement, les enseignants, ne se sentant pas à l'aise avec la mise en place de situations visant à développer l'abstraction, n'ont pas souhaité la présence des chercheurs lors de la première utilisation des outils. L'enregistrement des séquences est toutefois envisageable dans le courant de l'année scolaire 2015-2016 puisqu'ils ont pu tester les outils et en maîtrisent à présent m'utilisation.

Les contraintes en termes de temps, aussi bien au niveau des écoles participant à la recherche qu'au niveau du travail des chercheurs, impliquent que seules les huit situations relatives à la décentration ont pu être mises en œuvre dans les classes. En effet, en ce qui concerne les enseignants, la mise en œuvre de quatre situations d'apprentissage représente un investissement important puisqu'il implique la libération de deux périodes de cours pour que les chercheurs puissent effectuer la passation du prétest ainsi que de deux périodes de cours pour le posttest. Ils doivent en outre s'approprier des outils nécessitant parfois d'adopter une démarche peu utilisée dans l'enseignement. Enfin, suite à la mise en place de chacune des activités, il leur est demandé de compléter un questionnaire. En ce qui concerne l'équipe de recherche, les contraintes liées à l'agencement du calendrier scolaire et du calendrier de recherche ont nécessité d'alterner la création d'outils et le testing dans les classes.

6.1. Calendrier

Le calendrier adopté est présenté dans la figure 12.

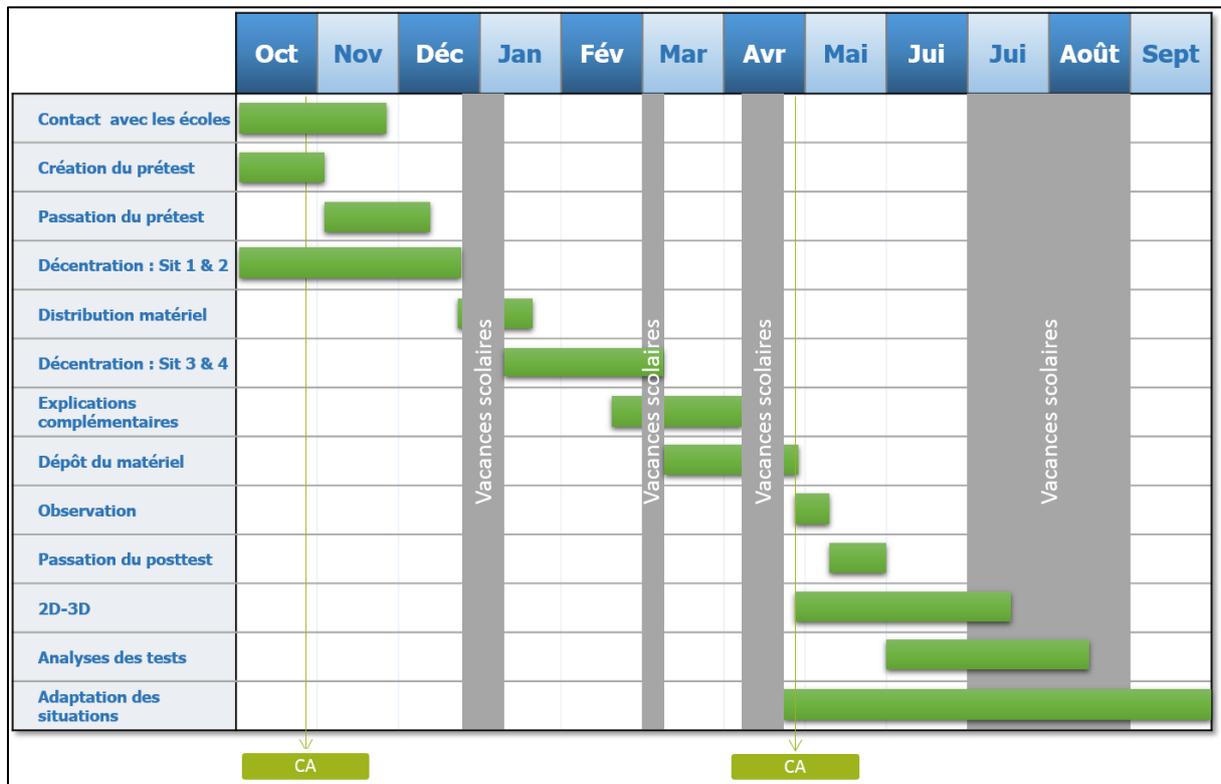


Figure 12 - Calendrier de la deuxième année de recherche

Les deux premières situations d'apprentissage visant le développement de compétences relatives à la décentration ont été déposées dans les écoles juste avant et juste après les vacances d'hiver.

Suite à la demande d'explications complémentaires de la part d'une école dans le courant du mois de février, chacune des écoles participant à la recherche a été contactée en vue de vérifier que la mise en œuvre des situations se déroulait dans de bonnes conditions. Cette prise de contact a permis de mettre en évidence que dans certaines écoles, les enseignants souhaitaient des explications orales de la part des chercheurs. En effet, n'ayant pas l'habitude de travailler l'abstraction, ni de mettre en œuvre des séquences d'apprentissages telles que celles proposées par les chercheurs, ils avaient des difficultés à planifier leurs séquences. Pour ces écoles, des réunions d'explicitation ont été fixées pour la fin du mois de février et le courant du mois de mars.

D'autres écoles ont assuré que tout se déroulait sans problème. Dans ce cas, un rendez-vous visant à déposer la seconde partie du matériel, en vue de pouvoir tester les situations 3 et 4 a été pris. Toutefois, lors du dépôt des dernières situations, après les vacances de printemps, les chercheurs ont constaté qu'aucune situation d'apprentissage n'avait été testée. Les enseignants n'ont pas relayé les difficultés ressenties auprès de la direction et cette dernière n'a donc pu en informer les chercheurs. A ce stade de l'année, la mise en œuvre des quatre situations semblait trop lourde pour les enseignants qui ont donc décidé de se retirer de la recherche.

6.2. Echantillon

En vue de mettre à l'épreuve le modèle élaboré et les situations développées différentes écoles du réseau d'enseignement organisé par la Fédération Wallonie-Bruxelles implantées dans le Hainaut ont été contactées. Dans un premier temps, six écoles ont accepté de participer à l'expérimentation. S'agissant de la première évaluation du modèle élaboré, il a été décidé de travailler avec des écoles dont la classe d'indice socio-économique est située entre 6 et 15. Ce choix a été effectué par l'équipe de recherche en vue d'éviter tout biais dans les résultats liés au contexte particulier de certaines écoles. Toutefois, à la demande du comité d'accompagnement, une école bénéficiant de l'encadrement différencié a été ajoutée à l'échantillon en vue de s'assurer que les situations développées peuvent être utilisées aisément dans l'ensemble des écoles de la Fédération Wallonie-Bruxelles.

Le tableau 7 présente les écoles ayant accepté de mettre à l'épreuve les outils créés dans les classes des deux derniers cycles de l'enseignement fondamental.

Tableau 7 - Echantillon constitué pour la mise à l'épreuve les situations développées

Ecole	Ville	Classe d'ISE	Nombre de classes				Nombre d'élèves			
			3e	4e	5e	6e	3e	4e	5e	6e
EFA anonyme	anonyme	8	1	1	1	1	22	21	19	19
			2		2		43		38	
AR anonyme	anonyme	11	2	2	2	2	35	46	40	37
			4		4		81		77	
AR anonyme	anonyme	9	1	1	1	1	11	15	16	23
			2		2		26		39	
AR anonyme	anonyme	6	1	1	1	1	14	16	16	9
			2		2		30		25	
EFA anonyme	anonyme	10	2	2	2	2	40	46	44	43
			4		4		86		87	
AR anonyme	anonyme	2	2	2	2	1	38	41	38	25
			4		3		79		63	
Total			9	9	9	8	160	185	173	156
			18 classes dans le cycle 3		17 classes dans le cycle 4		345 élèves dans le cycle 3		329 élèves dans le cycle 4	
			35 classes				674 élèves			

Malgré la passation du prétest et la réception du matériel, trois écoles se sont retirées de la recherche dans le courant des mois d'avril et mai : l'Athénée Royal anonyme, l'école fondamentale autonome anonyme et l'Athénée Royal anonyme. Finalement, l'échantillon a donc été réduit à trois écoles. En outre, les deux enseignantes de troisième année primaire de l'Athénée Royal René Magritte ont également renoncé à leur participation.

L'étude sur le terrain a finalement été réalisée en collaboration avec 14 classes. Théoriquement, 269 élèves ont été impliqués et 228 d'entre eux ont répondu à la fois au prétest et au posttest (tableau 8).

Tableau 8 - Echantillon constitué pour mise à l'épreuve les situations développées suite aux désistements

Ecole	Ville	Classe d'ISE	Nombre de classes				Nombre d'élèves			
			3e	4e	5e	6e	3e	4e	5e	6e
EFA anonyme	anonyme	8	1	1	1	1	22	21	19	19
			2		2		43		38	
AR anonyme	anonyme	11	0	2	2	2	0	46	40	37
			2		4		46		77	
AR anonyme	anonyme	9	1	1	1	1	11	15	16	23
			2		2		26		39	
Total			2	4	4	4	33	82	75	79
			6 classes dans le cycle 3		8 classes dans le cycle 4		115 élèves dans le cycle 3		154 élèves dans le cycle 4	
			14 classes				269 élèves			

6.3. Test de l'efficacité des outils

En vue de tester l'efficacité des outils fournis aux enseignants, un plan quasi-expérimental (Myers & H. Hansen, 2003) avec un prétest et un posttest à groupe unique (O1 x O2) a été mis en œuvre. Celui-ci se compose de trois étapes :

1. Avant de fournir les outils conçus aux enseignants, un chercheur se rend dans chaque classe en vue de procéder à un prétest⁴. Les élèves reçoivent alors un questionnaire qu'ils doivent compléter. Celui-ci est composé de diverses questions permettant de statuer du niveau de maîtrise des compétences liées à la décentration et au passage de la 2D à la 3D.
2. L'enseignant met en œuvre les situations d'apprentissage fournies par l'équipe de recherche. L'objectif étant de tester les outils en situation réelle, le chercheur n'assiste pas aux séances. Toutefois, en vue d'obtenir des informations pratiques liées à l'utilisation des outils, un questionnaire est fourni aux enseignants.
3. Lorsque l'ensemble des situations d'apprentissages ont été mise en œuvre, une mesure de sortie est réalisée par l'intermédiaire d'un posttest. Dans le but de pouvoir effectuer une comparaison exercice par exercice, le même questionnaire est utilisé avant et après le traitement. En vue d'éviter un entraînement à l'épreuve avant le posttest et réduire ainsi les biais liés à l'effet de l'exercice (Myers & Hansen, 2003) les enseignants n'ont pas pu conserver le de test après la première passation.

⁴ Le test se trouve en annexe 1.

6.3.1. CONTENU DU TEST

Quel que soit l'âge des élèves ou l'année d'études dans laquelle ils sont inscrits, le même test a été utilisé. De cette manière, il est possible de faire des comparaisons entre les différents groupes. Cet objectif nécessite que le test soit suffisamment discriminant, c'est pourquoi la première partie du test qui a été élaboré est composée d'items issus ou inspirés de tests psychométriques évaluant les capacités spatiales. Deux tests psychométriques ont été utilisés : le test des figures encastrées dans sa forme collective (Oltman, Raskin & Witkin, 1985) - conçu pour évaluer la dépendance-indépendance du champ, élément qui pourrait jouer un rôle important dans le processus de décentration et, plus encore dans la représentation mentale de solides à partir de représentations planes – et le test de perception des volumes issus des épreuves visuo-spatiales (Rey, 1968).

La seconde partie du test comporte des items à caractère plus scolaires, inspirés des exercices présents dans les évaluations externes effectuées en Fédération Wallonie-Bruxelles.

Au total, le test est composé de neuf exercices. Sa passation nécessite deux périodes de cours consécutives et s'effectue en présence du chercheur. Les quatre premiers exercices sont expliqués aux élèves au fur et à mesure de la passation, les élèves disposent donc tous du même temps pour réaliser les exercices. Avant d'entamer l'exercice à proprement parler, un exemple permettant à l'élève de se familiariser avec la consigne est proposé et corrigé collectivement.

Une fois le quatrième exercice terminé, le chercheur lit les consignes des cinq derniers exercices (exercices 5 à 9). Les élèves effectuent ensuite l'ensemble des exercices dans l'ordre proposé mais selon leur propre rythme.

Les paragraphes suivants présentent les différentes épreuves composant le test ainsi que les modalités de passation.

A. Exercice 1

Le premier exercice est l'exercice de perception des volumes issu des épreuves visuo-spatiales de Rey (1968). Il a pour objectif de « *mettre en évidence les facilités que possède un individu à percevoir des formes dans l'espace* » (Rey, 1968, p. 50).

Dans cette épreuve, 15 solides dont toutes les arêtes sont visibles sont représentés. A l'aide d'un crayon de couleur, l'élève doit repasser les arêtes qui seraient visibles si les représentations proposées étaient celles de solides en bois. Pour cet exercice, 5 minutes sont accordées aux élèves.

En vue de s'assurer que chacun comprenne bien ce qui est attendu, trois exemples sont proposés préalablement : un cylindre, un octaèdre régulier et un décaèdre.

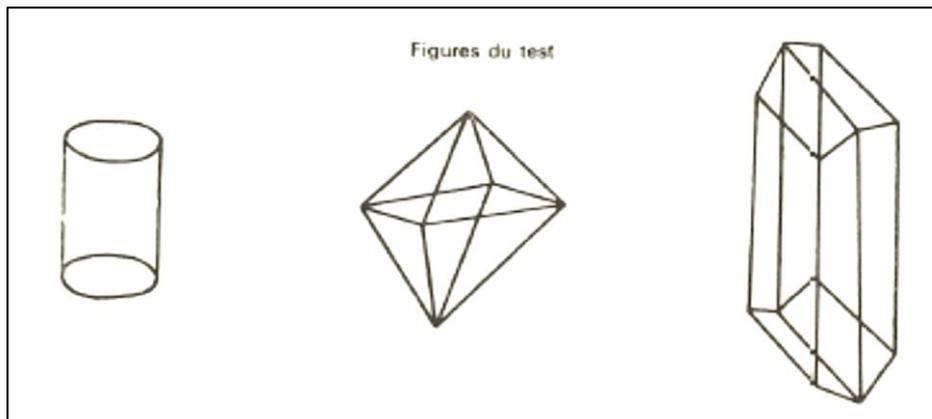


Figure 13 - Exercice 1 : exemple effectué avant la réalisation de l'épreuve

Les élèves sont invités à effectuer l'exercice seuls et une correction collective est ensuite effectuée. Pour ce faire, les représentations des solides de la figure 16 sont disposées en grand au tableau.

En vue de faciliter la compréhension de la consigne, le chercheur présente un octaèdre régulier dont les faces sont transparentes ainsi qu'un octaèdre régulier de même dimension dont les faces sont pleines. Ces deux solides sont ensuite utilisés pour effectuer la correction de l'exercice. Le même procédé est utilisé avec deux cylindres.

B. Exercice 2

Le test des figures encadrées « *permet de distinguer les individus selon leur capacité à percevoir un élément en le séparant de son contexte et d'adopter une attitude analytique dans la résolution de problèmes* » (Oltman, Raskin & Witkin, 1985, p.5). Lors de la passation de l'épreuve, la tâche de l'élève est de retrouver, au sein de formes complexes, l'une des huit formes simples présentées préalablement.

L'exercice se déroule en trois phases que les élèves doivent réaliser en 3 minutes chacune. La première partie de l'exercice comporte sept items, les deux parties suivantes constituent le test. Elles comportent chacune neuf items (Oltman, Raskin & Witkin, 1985).

Comme pour le premier exercice, un exemple préalable est proposé. Celui-ci est présenté à la figure 14.

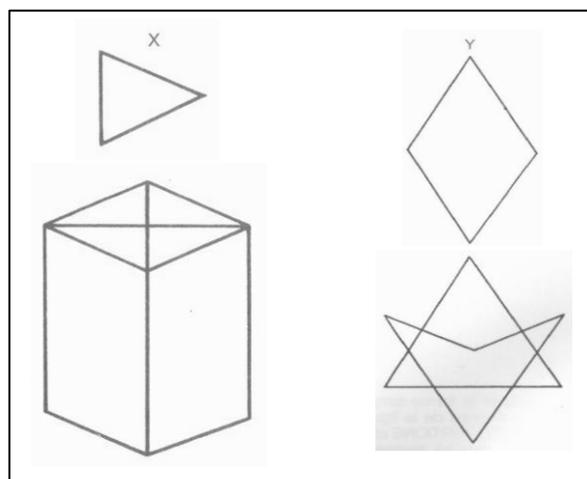


Figure 14 - Exercice 2 : exemple effectué avant la réalisation de l'épreuve

L'exercice, proposé en guise d'exemple, est d'abord effectué de manière individuelle et est ensuite corrigé de manière collective. Pour faciliter la compréhension, du matériel est utilisé par le chercheur : la reproduction des deux formes complexes en grand format et la reproduction de la « forme x » et de la « forme y » découpées dans du papier de couleur en vue de pouvoir les déplacer sur les figures complexes.

C. Exercice 3

Le troisième exercice est inspiré du test des figures encastrées (cf. exercice 2). Dans cette épreuve, l'objectif est de retrouver des formes simples au sein de solides cachés dans des figures complexes. Dans un premier temps, les élèves doivent donc repérer un solide caché au sein d'une figure complexe et dans un second temps, ils doivent trouver une forme simple au sein d'une des faces de ce solide.

Encore une fois, un exemple est effectué individuellement et corrigé collectivement à l'aide de matériel avant d'entamer la réalisation de l'activité. Celui-ci est présenté à la figure 15.

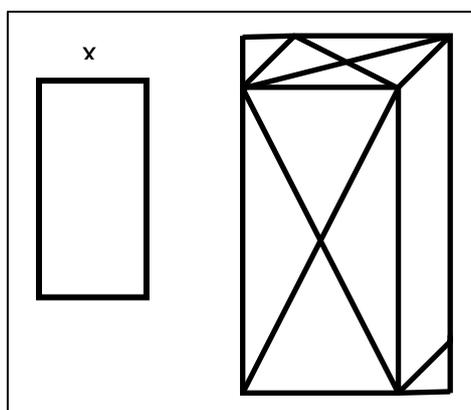


Figure 15 - Exercice 3 : exemple effectué avant la réalisation de l'épreuve

Dans le cadre du troisième exercice, 17 figures complexes sont présentées aux élèves. Ils disposent de 10 minutes pour le réaliser.

D. Exercice 4

Le quatrième exercice évalue la capacité de l'élève à associer une photographie prise à l'intérieur d'une maquette à la photographie d'une vue zénithale de cette maquette. Ainsi, pour neuf photographies prises au sein de la maquette, les élèves sont amenés à indiquer, sur la vue zénithale de la maquette, une croix à l'emplacement où la photo a été prise ainsi qu'une flèche indiquant la direction du regard du photographe (figure 16).



Figure 16 - Exercice 4 : extrait de la consigne

Cet exercice permettant d'évaluer la capacité de décentration des élèves fait l'objet d'une explication grâce à un exemple préalable. Les élèves disposent de 10 minutes pour le réaliser.

E. Exercices 5 à 9

Les cinq derniers exercices du test sont inspirés des évaluations externes certificatives et non certificatives passées par les élèves de l'enseignement obligatoire en Fédération Wallonie-Bruxelles.

Dans l'exercice 5, l'élève est amené à indiquer, sur la représentation d'une classe, la position qu'occupent différents élèves en fonctions d'indices qui lui sont fournis. Les indices sont rédigés à partir de la position d'un élève se trouvant dans la représentation. L'exercice vise donc à évaluer la capacité de décentration.

Dans l'exercice 6, la capacité de décentration est également testée puisque les élèves doivent associer un personnage avec la vue qu'ils ont d'un objet. Toutefois, une difficulté supplémentaire est apportée puisque la capacité à se représenter un volume dans l'espace est également nécessaire pour arriver à effectuer l'exercice.

Les septième et huitième exercices sont également basés simultanément sur le mécanisme de décentration et sur la visualisation dans l'espace puisque les élèves doivent observer la représentation d'un polyèdre concave dont chaque face possède une couleur différente et colorier ensuite la représentation de chacune des faces avec la couleur adéquate.

Enfin, dans le dernier exercice du test, les élèves sont amenés d'une part à identifier des formes géométriques dessinées sur les faces d'un cube dessiné en perspective et d'autre part à retracer ces formes sur un carré représentant la face du cube. Leur capacité à dépasser l'apparence visuelle de certains tracés est donc évaluée.

6.3.2. PASSATION

Le test a été passé pour la première fois dans l'ensemble des classes participant à la recherche durant le mois de novembre. La première version du test a été passée à l'Athénée Royal René Magritte. Suite à la passation du test, des modifications au niveau des consignes ont été effectuées en vue d'assurer une meilleure compréhension des consignes par les élèves.

La passation du posttest a été effectuée dans le courant des mois de mai et de juin, une fois que les enseignants ont utilisé les outils développés. Lors de la passation du posttest, la question n°3, liée au passage de la 2D à la 3D a été supprimée en vue de raccourcir le temps de passation de l'épreuve. En effet, lors de la passation du prétest, les deux périodes de cours n'ont pas toujours été suffisantes pour réaliser le test, notamment avec les élèves du cycle 3.

La correction des tests a débuté à partir du mois de juin, lorsque le travail des chercheurs *sur le terrain* s'est achevé.

6.3.3. CORRECTION

En vue de permettre l'analyse des résultats, chacune des réponses des élèves aux tests a été encodée au sein d'un tableau. Dans un deuxième temps, chacune des réponses a fait l'objet d'un recodage, en termes de réussite ou d'échec à l'item. Dans un troisième temps, un score global a été calculé par élève, pour chaque exercice effectué. Enfin, la somme de ces scores a été calculée pour obtenir le score global à chacun des tests.

Le passage par l'encodage des réponses des élèves offre l'avantage de pouvoir identifier les erreurs commises par les élèves et ainsi, effectuer un diagnostic des difficultés puisque l'on dépasse le constat d'une réussite ou d'un échec à un item.

6.3.4. ANALYSES

A. Comparaison des scores globaux

L'efficacité des outils se mesure à travers la progression des résultats et l'amélioration de l'apprentissage qu'il permet lorsque les élèves l'utilisent. Dans le cadre de cette étude, l'analyse consiste à comparer les scores globaux entre les résultats obtenus aux deux tests de manière à fournir une idée générale de la progression des élèves suite à l'utilisation de l'outil pédagogique. Le test t de Student pour échantillons appariés a été utilisé afin de comparer entre elles les moyennes des résultats aux deux tests et d'estimer s'il existe des différences entre les résultats des élèves au prétest et au posttest. Trois indicateurs sont utilisés pour ce type de comparaison.

- Les différences de moyenne : une augmentation des scores représente un indicateur d'amélioration de l'apprentissage.
- Les écarts-type : une diminution de la dispersion des résultats au posttest (et par conséquent de la variance) démontre qu'il y a une homogénéisation des résultats. Autrement dit, les écarts entre élèves ont tendance à diminuer globalement. Associé à une augmentation de la moyenne, cet indice permet de montrer que les sujets plus faibles obtiennent des scores davantage proches des scores des sujets « plus forts », c'est-à-dire qu'ils améliorent leur apprentissage tout en comblant certaines faiblesses initiales.
- L'indice de corrélation entre le prétest et le posttest : une forte corrélation signifie que le lien entre les deux tests est important, c'est-à-dire que les scores faibles au prétest demeurent faibles au posttest, une certaine hiérarchie entre élèves faibles et élèves forts étant maintenue.

Les scores globaux sont calculés à partir des élèves ayant répondu à l'ensemble de l'épreuve. En effet, il est arrivé que certains élèves n'aient pas effectués tous les exercices par manque de temps (les deux périodes étant passées, la passation a été stoppée), à cause d'une arrivée tardive en classe, ou encore pour des raisons de concentration.

Comme le montre le tableau 9, la progression des scores globaux entre le prétest et le posttest est positive. En effet, on passe d'un score moyen de 36,96/82 au prétest à un score moyen de 48/82 au posttest. Cette différence de résultats est significative ($p = 0,000$) et permet donc de conclure que les élèves ont développé des compétences d'abstraction.

Tableau 9 - Progression des scores globaux : t de student

		N	Scores moyens	Progression	Ecart Type	Corrélation	t	Sig.
Total	Prétest	129	36,96/82 (45,07%)	10,36 (12,64%)	10,003	0,764	-15,837	0,000
	Posttest		47,32/82 (57,71%)		11,305			

Même si le modèle organisationnel est identique pour les deux cycles, les situations diffèrent. Aussi, une analyse des scores globaux par cycle a été effectuée. Le tableau 10 et le tableau 11 présentent l'évolution des scores globaux par cycle et par année.

Tableau 10 - Progression des scores globaux au cycle 3 : t de student

		N	Scores moyens	Progression	Ecart Type	Corrélation	t	Sig.
Cycle 3	Prétest	47	30,02/82 (36,61%)	10,26 (12,51%)	7,094	0,352	-5,588	0,000
	Posttest		40,28/82 (49,12%)		15,815			
3P	Prétest	12	25,33/82 (30,89%)	10,75 (13,11%)	5,710	0,470	-5,415	0,000
	Posttest		36,08/82 (44,00%)		7,366			
4P	Prétest	35	31,63/82 (38,57%)	10,08 (12,29%)	6,865	0,575	-8,705	0,000
	Posttest		41,71/82 (50,87%)		9,699			

Tableau 11 - Progression des scores globaux au cycle 4 : t de student

		N	Scores moyens	Progression	Ecart Type	Corrélation	t	Sig.
Cycle 4	Prétest	82	40,94/82 (49,93%)	10,59 (12,91%)	9,250	0,738	-13,321	0,000
	Posttest		51,53/82 (62,84%)		10,163			
5P	Prétest	28	36,11/82 (44,04%)	11,57 (14,11%)	9,453	0,757	-8,715	0,000
	Posttest		47,68/82 (58,15%)		10,495			
6P	Prétest	54	43,44/82 (52,98%)	9,82 (11,98%)	8,156	0,688	-10,161	0,000
	Posttest		53,26/82 (64,95%)		9,535			

Quelle que soit l'année d'études, la progression des scores globaux entre le prétest et le posttest est positive : elle atteint plus de dix points de pourcentage, quel que soit le cycle d'enseignement. Ces différences de résultats sont significatives ($p = 0,000$).

Etant donné qu'environ six mois ont séparé la passation du prétest et du posttest, nous pouvons difficilement conclure, à ce stade des analyses, que la progression des élèves est liée à l'utilisation des outils développés par l'équipe de recherche. En effet, un effet de maturation des sujets ne peut pas être exclu. Toutefois, une comparaison des résultats moyens obtenus au posttest par les élèves d'une année d'études donnée avec les résultats que les élèves de l'année supérieure ont obtenu au prétest peut donner une indication. On constate qu'au posttest, les élèves de troisième année obtiennent de meilleurs résultats que ceux obtenus au prétest par les élèves de quatrième année. La comparaison des résultats entre les élèves de quatrième et de cinquième années et entre les élèves de cinquième et de sixième années vont dans le même sens. Les dispositifs d'apprentissage construits semblent donc permettre le développement de compétences d'abstraction dans l'espace.

Bien que les résultats obtenus par les élèves au posttest soient significativement supérieurs à ceux obtenus au prétest, l'écart-type augmente et ce, quel que soit le niveau d'analyse. L'utilisation des outils, telle qu'elle a été proposée aux enseignants, n'a donc pas permis de réduire la dispersion des résultats.

Enfin, la corrélation entre les scores obtenus par les élèves aux deux tests est relativement faible au cycle 3 mais élevée au cycle 4. Les outils, tels que proposés aux enseignants, n'ont donc pas permis de modifier la hiérarchie entre les élèves forts et faibles.

B. Comparaison entre les établissements

Avant de comparer les résultats des élèves (au prétest et au posttest) question par question, il est intéressant de comparer les scores globaux des élèves regroupés par établissement scolaire. Cette comparaison permet de constater si l'échantillon constitué forme un groupe homogène ou non en matière de résultats, c'est-à-dire d'identifier l'existence ou non d'un effet « école ». Pour ce faire, les résultats des écoles sont comparés entre eux à l'aide d'une analyse de variance (ANOVA) à un facteur (tableau 12). Ce type d'analyse permet de comparer globalement plusieurs moyennes entre elles. On associe à l'analyse de variance un test post-hoc (le Least Significant Difference dans ce cas-ci) permettant, le cas échéant, de préciser quelles sont les différences de moyennes significatives. La comparaison des établissements n'a pas pour objectif de réaliser un classement entre les écoles en fonction des résultats des élèves, mais bien de mettre en évidence d'éventuels sous-groupes.

L'analyse de variance effectuée montre que l'échantillon constitué est homogène. Que ce soit au prétest ou au posttest, on ne constate pas de différences significatives entre les résultats des élèves selon l'établissement dans lequel ils sont scolarisés.

Tableau 12 - Homogénéité de l'échantillon : ANOVA

		Somme des carrés	ddl	Carré moyen	F	Sig.
Prétest	Intergroupes	9,111	2	4,556	,041	,960
	Intragroupes	16232,755	146	111,183		
	Total	16241,866	148			
Posttest	Intergroupes	108,538	2	54,269	,427	,653
	Intragroupes	23255,978	183	127,082		
	Total	23364,516	185			

C. La décentration

Puisque les situations testées en classe sont celles qui visent le développement de la capacité à se décentrer, la progression des élèves aux exercices faisant intervenir cette capacité est analysée de manière plus détaillée.

Dans un premier temps, nous procéderons à l'analyse des scores moyens à l'ensemble des exercices. Nous étudierons ensuite la progression des élèves, exercice par exercice.

❖ *Progression des scores globaux.*

Pour calculer le score relatif à la décentration, les résultats des cinq exercices faisant intervenir cette compétence, à savoir les exercices 7 à 8 sont additionnés. Le tableau 13 indique la progression des élèves.

Tableau 13 - Décentration : Progression des scores globaux (t de student)

		N	Scores moyens	Progression	Ecart Type	Corrélation	t	Sig.
Cycle 3 et 4	Prétest	181	17,75/33 (53,79%)	5,47/33 (16,58%)	4,462	0,533	-17,225	0,000
	Posttest		23,22/33 (70,36%)		4,381			
Cycle 3	Prétest	75	16,08/33 (48,73%)	4,71/33 (14,27%)	4,135	0,449	-9,197	0,000
	Posttest		20,79/33 (63,00%)		4,307			
Cycle 4	Prétest	106	18,93/33 (57,36%)	6,01/33 (18,21%)	4,321	0,474	-15,125	0,000
	Posttest		24,94/33 (75,58%)		3,551			

L'analyse des scores globaux relatifs à la décentration met en évidence une nette progression. Au cycle 3, les élèves obtiennent en moyenne près de 5 points supplémentaires sur un maximum théorique de 33, ce qui représente plus de 14 points de pourcentage. Au cycle 4, cette progression monte à 6,01/33, ce qui correspond à plus de 18 points de pourcentage.

Au cycle 3, on constate une légère augmentation de la dispersion des résultats. Au cycle 4, au contraire, on constate une légère diminution puisque l'écart type passe de 4,321 à 3,551. En ce qui concerne la maîtrise des compétences de décentration, les outils testés en classe ne permettent pas de rendre le groupe plus homogène, mais n'accroît pas les disparités entre élèves.

Enfin, l'indice de corrélation entre le prétest et le posttest est peu élevé, ce qui indique que les outils permettent à tous les élèves de développer les compétences visées, quel que soit leur niveau initial.

❖ Exercice 4

Dans le cadre de l'exercice 4, les élèves sont amenés à associer des photographies prises au sein d'une maquette à une photographie zénithale de cette maquette.

Bien que l'exercice proposé comporte initialement neuf items, seuls 7 ont été pris en compte pour la correction du test. En effet, deux des neuf photographies proposées sont des images « miroir » de photos prises dans la maquette. Dès lors, il est impossible de localiser l'endroit où la photographie a été prise sur la carte. Bien que l'intégration de cette activité est intéressante puisqu'elle permet de démontrer un haut niveau de compétence, ces items n'ont pas été pris en compte. En effet, pour obtenir un point, il faut ne pas placer de croix sur la carte, ce qui rend impossible de distinguer une non réponse d'une réponse correcte.

Quel que soit le cycle, on constate une nette augmentation de la moyenne obtenue à cet exercice suite à l'utilisation des outils fournis (tableau 14). Celle-ci est doublée au cycle 4. Au cycle 3, cette augmentation est encore plus importante. En outre, la moyenne obtenue au posttest par les élèves du cycle 3 est supérieure à celle obtenue au prétest par les élèves du cycle 4. Notons toutefois qu'au cycle 3, la moyenne obtenue par les élèves de l'échantillon n'atteint pas les 50%.

Tableau 14 - Exercice 4 : résultats au prétest et au posttest

		N	Minimum	Maximum	Moyenne
Cycle 3	Prétest	94	0/7	6/7	1,21/7
	Posttest	95	0/7	7/7	2,63/7
Cycle 4	Prétest	110	0/7	6/7	1,83/7
	Posttest	129	0/7	7/7	3,60/7

Au cycle 3, 91 élèves ont effectué l'exercice 4 à la fois au prétest et au posttest. Au cycle 4, ils sont 109. Un test T de Student met en évidence que l'augmentation de la moyenne est significative dans les deux cycles. Si la corrélation entre les résultats au prétest et au posttest est faible, quel que soit le cycle, on constate que les résultats sont plus dispersés au posttest (tableau 15).

Tableau 15 - Exercice 4 : Progression des moyennes (t de student)

		N	Scores moyens	Ecart Type	Corrélation	t	Sig.
Cycle 3	Prétest	91	1,24	1,448	0,200	-7,092	0,000
	Posttest		2,67	1,585			
Cycle 4	Prétest	109	1,83	1,378	0,259	-11,842	0,000
	Posttest		3,77	1,425			

❖ **Exercice 5**

La figure 17 présente la consigne de l'exercice 5. Les noms des personnages dont les élèves doivent trouver la place dans les cinq questions qui suivent sont indiqués ici en vue de faciliter la compréhension des analyses qui suivent. Bien-sûr, dans le test, seule la place de Tom est spécifiée.

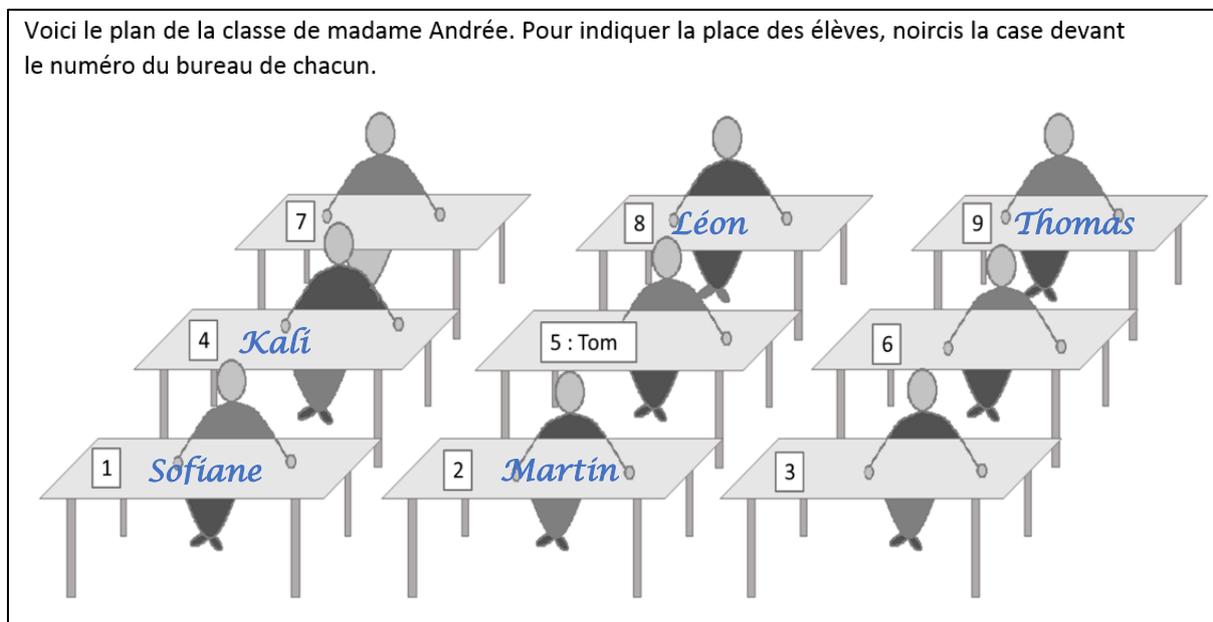


Figure 17 - Illustration de l'exercice 5

Au cycle 3, 96 élèves sur 98 ont répondu à au moins une des cinq questions. Au cycle 4, ils sont 129 sur 130. Au cycle 3, la moyenne obtenue pour cet exercice au prétest est de 3,3 sur 5 (tableau 16). Au posttest, elle passe à 3,81. On constate également une augmentation de la moyenne au cycle 4 puisqu'elle passe de 3,88 à 4,4.

Tableau 16 - Exercice 5 : résultats au prétest et au posttest

		N	Minimum	Maximum	Moyenne
Cycle 3	Prétest	98	0/5	5/5	3,30/5
	Posttest	96	2/5	5/5	3,81/5
Cycle 4	Prétest	129	1/5	5/5	3,88/5
	Posttest	129	0/5	5/5	4,40/5

Un test T de Student pour échantillon apparié⁵ met en évidence que les augmentations de moyennes sont significatives pour les deux groupes d'élèves.

⁵ Les moyennes présentées dans le tableau 16 sont calculées pour chacun des tests, sur la base du nombre d'élèves ayant effectué l'exercice. Les données présentées dans le tableau 17 ont été calculées pour les élèves ayant effectué l'exercice à la fois au prétest et au posttest, ce qui explique les différences entre les nombres de répondants et les moyennes dans les deux tableaux.

Tableau 17 - Exercice 5 : progression des moyennes (t de student)

		N	Scores moyens	Ecart Type	Corrélation	t	Sig.
Cycle 3	Prétest	96	3,28	1,112	0,461	-4,672	0,000
	Posttest		3,81	1,029			
Cycle 4	Prétest	128	3,88	1,062	0,410	-5,298	0,000
	Posttest		4,40	0,959			

Pour chacun des groupes, la corrélation entre les résultats au prétest et au posttest est peu élevée, ce qui indique que les élèves ayant obtenu de faibles résultats au prétest n'ont pas systématiquement obtenu de faibles résultats au posttest. De plus, pour les deux niveaux, les écarts-types diminuent légèrement. Les outils n'ont donc pas creusé les écarts existant entre les apprenants en ce qui concerne les résultats obtenus à cet exercice.

Le tableau 18 présente le taux de réussite par cycle pour chacune des questions du test. Les taux de réussite ont été calculés sur la base du nombre d'élèves ayant répondu à au moins une des cinq questions de l'exercice.

Tableau 18 - Exercice 5 : résultats au prétest et au posttest par item

	Cycle 3				Cycle 4				Total			
	Prétest N = 98		Posttest N = 96		Prétest N = 129		Posttest N = 129		Prétest N = 227		Posttest N = 226	
Q1	94	95,9%	96	100%	125	96,9%	127	98,4%	219	96,5%	223	98,7%
Q2	66	67,3%	75	78,1%	109	84,5%	117	90,7%	175	77,1%	192	85,0%
Q3	38	38,8%	52	54,2%	72	55,8%	101	78,3%	110	48,5%	153	67,7%
Q4	36	36,7%	52	54,2%	72	55,8%	99	76,7%	108	47,6%	151	66,8%
Q5	89	90,8%	95	99,0%	123	95,3%	123	95,3%	212	93,4%	218	96,5%

Question 1 : Léon est assis derrière Tom. Quel est le numéro du bureau de Léon?

La réponse attendue est « 8 ». Cette question pose peu de problèmes au prétest puisque plus de 96% des élèves y ont répondu correctement. On constate néanmoins une progression, allant même jusqu'à 100% de réussite au cycle 3.

Question 2 : Quand Madame André est devant sa classe, elle voit Thomas au fond à droite. Quel est le numéro du bureau de Thomas?

Au cycle 3, 67 pour cent des élèves ont réussi l'exercice au prétest. La réponse erronée la plus souvent fournie est « 7 ». Près de 20% des élèves ont pris le point de vue des élèves et non celui de l'enseignant situé face au groupe classe, ce qui montre une difficulté à alterner centration et décentration. Au prétest, la même erreur a été commise par 12 pour cent des élèves du cycle 4.

Le nombre d'élève réussissant cet item a augmenté au posttest. Les deux niveaux confondus, on constate que le taux de réussite a augmenté de huit points de pourcentage. Toutefois, les élèves du cycle 3 sont encore plus de 16% à cocher la réponse « 7 ». Au cycle 4, ils sont un peu plus de 6%

Question 3 : Tom a Kali à sa droite. Quel est le numéro du bureau de Kali ?

La question 3 est la première question qui nécessite de mettre en œuvre la capacité à se décentrer. Au prétest, les taux de réussite sont nettement plus faibles que ceux observés pour les deux questions précédentes. Seuls 39% des élèves du cycle 3 et 56% des élèves du cycle 4 ont fourni une réponse correcte. L'étude des réponses fournies par les élèves montre que 54% des élèves du cycle 3 et 40% des élèves du cycle 4 ont répondu « 6 » à cette question. Près de la moitié des élèves n'ont donc pas été capables de se décentrer pour prendre le point de vue de Tom mais ont répondu en prenant leur propre point de vue en compte.

Suite à l'utilisation des outils en classe, on observe une nette progression des résultats. En effet, plus de la moitié des élèves du cycle 3 et plus des trois quarts des élèves du cycle 4 ont répondu correctement à cette question au posttest. L'erreur majoritairement rencontrée au prétest est néanmoins encore commise au posttest par plus de 40% des élèves du cycle 3 et un peu moins de 20% des élèves du cycle 4.

Question 4 : Sofiane est devant Kali. Quel est le numéro du bureau de Sofiane?

La réussite de la question 4 est conditionnée à la réussite de la question 3 puisqu'elle implique Kali, le personnage dont il fallait trouver l'emplacement précédemment. Il n'est donc pas étonnant de constater que les taux de réussite à cette question sont faibles. La réponse erronée la plus souvent rencontrée est la réponse « 3 ». On constate donc que les élèves ayant des difficultés à distinguer la gauche et la droite de personnages situés face à eux n'éprouvent pas de difficultés à distinguer l'avant et l'arrière de ces mêmes personnages. Une hypothèse découlant de cette observation est que plus que la décentration, c'est la distinction gauche/droite qui est source de difficulté chez les élèves.

Question 5 : Quand Tom regarde Madame au tableau, il est parfois gêné par la tête de Martin devant lui. Quel est le numéro du bureau de Martin?

Cette question obtient un bon taux de réussite au prétest. Plus de 93% des élèves ont fourni la bonne réponse. Le taux de réussite atteint 96% au posttest.

❖ **Exercice 6**

L'exercice 6 est basé sur l'observation de personnages se situant autour d'un solide présentés dans la figure 18. Les élèves doivent être capables d'associer les personnages et la vue que ces personnages ont de l'objet.

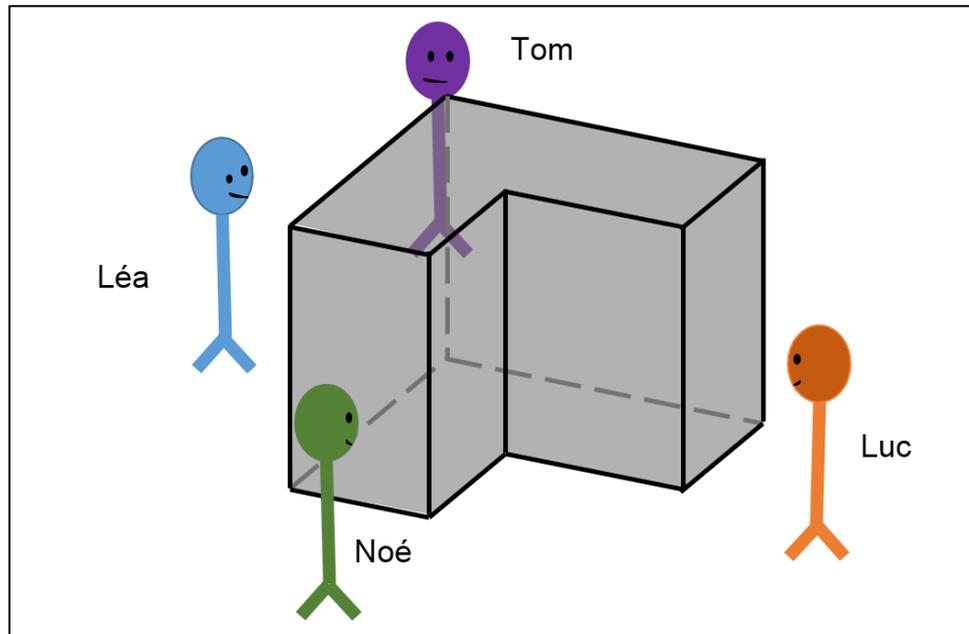


Figure 18 - Illustration de l'exercice 6

Au cycle 3 comme au cycle 4, la moyenne obtenue au posttest est supérieure à la moyenne obtenue au prétest. Par contre, contrairement aux exercices précédents, la moyenne obtenue par les élèves au posttest par les élèves du cycle 3 est inférieure à la moyenne obtenue au prétest par les élèves du cycle 4.

Tableau 19 - Exercice 6 : résultats au prétest et au posttest

		N	Minimum	Maximum	Moyenne
Cycle 3	Prétest	98	0/6	6/6	2,85/6
	Posttest	98	0/6	6/6	3,27/6
Cycle 4	Prétest	121	0/6	6/6	3,42/6
	Posttest	130	0/6	6/6	4,39/6

L'étude des différences de moyenne⁶ entre le prétest et le posttest met en évidence une progression de plus d'un point sur 6 au cycle 4. De plus, la corrélation entre les résultats aux deux tests est faible et la dispersion des résultats diminue légèrement. Au cycle 3, cette progression est plus modeste et les résultats obtenus par les élèves sont davantage dispersés au posttest. Néanmoins, dans les deux cas, les différences de moyennes sont significatives. Notons que cet exercice est plus complexe que le

⁶ Les moyennes présentées dans le tableau 19 sont calculées pour chacun des tests, sur la base du nombre d'élèves ayant effectué l'exercice. Les données présentées dans le tableau 20 ont été calculées pour les élèves ayant effectué l'exercice à la fois au prétest et au posttest, ce qui explique les différences entre les nombres de répondants et les moyennes dans les deux tableaux.

précédent car en plus d'impliquer la décentration il implique la perception de la représentation de solides en trois dimensions. Or, le travail sur les représentations de solide ne fait partie du programme des études qu'à partir de la cinquième année primaire.

Tableau 20 - Exercice 6 : progression des moyennes (t de student)

		N	Scores moyens	Ecart Type	Corrélation	t	Sig.
Cycle 3	Prétest	98	2,85	1,467	0,468	-2,492	0,014
	Posttest		3,27	1,726			
Cycle 4	Prétest	121	3,42	1,736	0,193	-5,506	0,000
	Posttest		4,45	1,472			

Le tableau 21 présente le taux de réussite par cycle pour chacune des questions du test. Les taux de réussite ont été calculés sur la base du nombre d'élèves ayant répondu à au moins une des six questions de l'exercice.

Tableau 21 - Exercice 6 : résultats au prétest et au posttest par item

	Cycle 3				Cycle 4				Total			
	Prétest		Posttest		Prétest		Posttest		Prétest		Posttest	
	N = 98		N = 98		N = 121		N = 130		N = 219		N = 228	
Q1	62	63,3%	71	72,4%	93	76,9%	113	86,9%	155	70,8%	184	80,7%
Q2	53	54,1%	66	67,3%	75	62,0%	110	84,6%	128	58,4%	176	77,2%
Q3	40	40,8%	45	45,9%	57	47,1%	83	63,8%	97	44,3%	128	56,1%
Q4	41	41,8%	47	48,0%	68	56,2%	101	77,7%	109	49,8%	148	64,9%
Q5	39	39,8%	34	34,7%	56	46,3%	61	46,9%	95	43,4%	95	41,7%
Q6	44	44,9%	57	58,2%	65	53,7%	103	79,2%	109	49,8%	160	70,2%

Bien que les items 1 et 2 sont ceux pour lesquels l'effort de décentration demandé est le plus important (les représentations montrent des faces cachées pour l'élève), ils sont ceux pour lesquels les taux de réussite sont les plus élevés dans les deux cycles, au prétest comme au posttest (figure 19).

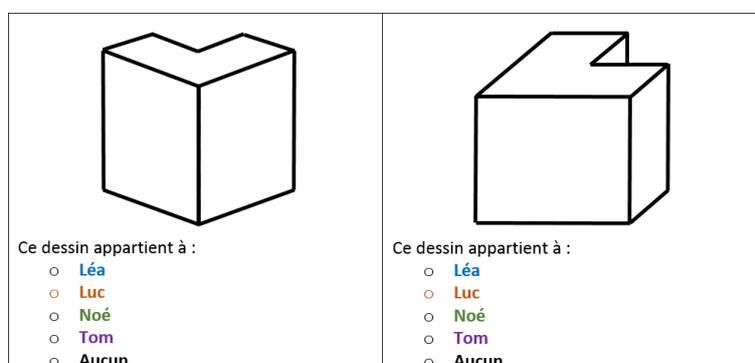


Figure 19 - Exercice 7 : items 1 (à gauche) et 2 (à droite)

Parmi les quatre items suivants, l'item 5 se dégage d'une part, par les faibles taux de réussite au prétest et au posttest et d'autre part, parce qu'il est le seul pour lequel la progression est très faible au cycle 4 et négative au cycle 3. La représentation proposée dans cet item (à droite dans la figure 20) est une représentation qu'aucun des personnages n'a pu réaliser puisque le solide n'a pas les mêmes proportions que le solide de référence. L'item 3 (à gauche dans la figure 20), par contre, correspond à la représentation effectuée par Luc.

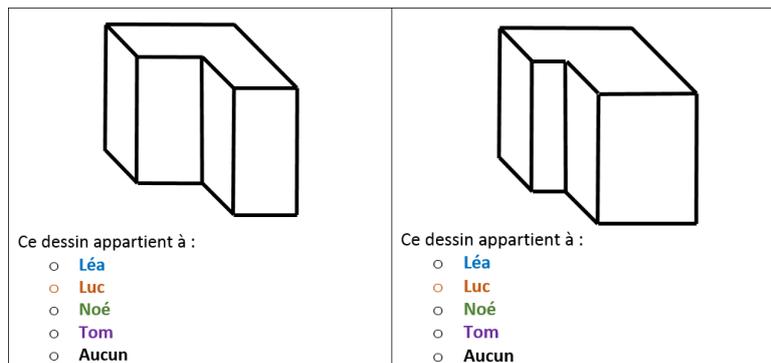


Figure 20 - Exercice 7 : items 3 (à gauche) et 5 (à droite)

Au cycle 3, plus d'un quart des élèves indique que la représentation proposée dans l'item 5 a été effectuée par Paul. Au posttest, ce taux s'élève à plus de 40%.

Au prétest, neuf élèves ont fourni la réponse 2 à la fois pour l'item 3 et pour l'item 5. Au posttest, ce nombre s'élève à 15. On constate donc d'une que les élèves prêtent peu attention aux proportions des représentations et qu'ils attribuent deux représentations de la réalité différente pour un seul personnage.

Le constat est similaire au cycle 4 puisque pour l'item 5, la réponse 2 est sélectionnée plus de 30% des élèves au prétest et pour plus de 37% au posttest.

❖ **Exercices 7 et 8**

Ces deux exercices impliquent le processus de décentration et celui du passage de la représentation en 2D à la représentation en 3D. Pour chacun des exercices, les élèves doivent observer un solide et colorier ensuite la représentation des faces de ce solide dans la couleur adéquate (figure 21).

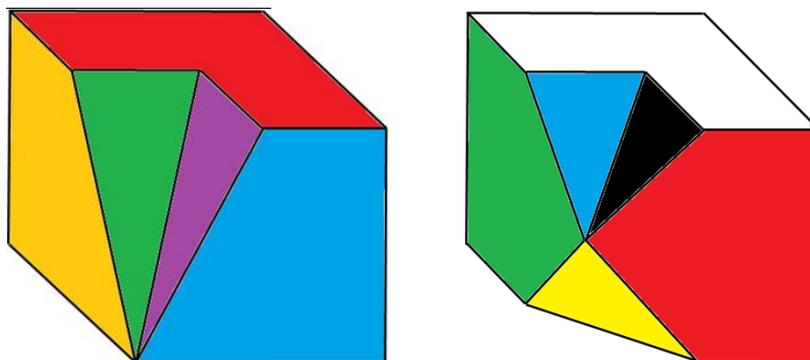


Figure 21 – Illustrations des exercices 7 (à gauche) et 8 (à droite)

Quel que soit l'exercice, on constate une progression positive des résultats pour les deux groupes d'élèves (tableau 22). La moyenne obtenue au posttest par les élèves du cycle 3 est supérieure à la moyenne obtenue au prétest par les élèves du cycle 4, ce qui laisse penser que la progression est liée aux outils développés.

Tableau 22 – Exercices 7 et 8 : résultats au prétest et au posttest

		Exercice 7			
		N	Minimum	Maximum	Moyenne
Cycle 3	Prétest	97	0/7	6/7	3,51/7
	Posttest	96	0/7	7/7	5,14/7
Cycle 4	Prétest	110	0/7	6/7	4,27/7
	Posttest	130	1/7	7/7	5,76/7
		Exercice 8			
		N	Minimum	Maximum	Moyenne
Cycle 3	Prétest	87	0/6	8/8	4,46/8
	Posttest	88	0/6	8/8	5,35/8
Cycle 4	Prétest	109	1/6	8/8	5,28/8
	Posttest	129	1/6	8/8	6,26/8

Les progressions constatées pour chacun des groupes aux deux exercices sont significatives. La corrélation entre les résultats au prétest et au posttest est relativement faible (tableau 23). Par contre, comme pour la majorité des exercices, on ne constate pas de baisse (importante) de la dispersion des résultats des élèves.

Tableau 23 – Exercices 7 et 8 : progression des moyennes (t de student)

		Exercice 7					
		N	Scores moyens	Ecart Type	Corrélation	t	Sig.
Cycle 3	Prétest	95	3,56	1,146	0,244	-10,104	0,000
	Posttest		5,15	1,337			
Cycle 4	Prétest	110	4,27	1,367	0,281	-10,721	0,000
	Posttest		5,84	1,169			
		Exercice 8					
		N	Scores moyens	Ecart Type	Corrélation	t	Sig.
Cycle 3	Prétest	83	4,59	1,631	0,375	-3,748	0,000
	Posttest		5,35	1,671			
Cycle 4	Prétest	109	5,28	1,656	0,369	-6,577	0,000
	Posttest		6,39	1,440			

Le tableau 24 présente les taux de réussites obtenus par les élèves à chaque item, selon le cycle d'études.

Tableau 24 - Exercice 7 : résultats au prétest et au posttest par item

	Cycle 3				Cycle 4				Total			
	Prétest		Posttest		Prétest		Posttest		Prétest		Posttest	
	N = 97		N = 96		N = 110		N = 130		N = 207		N = 226	
Q1.1	19	19,6%	36	37,5%	39	35,5%	68	52,3%	58	28,0%	104	46,0%
Q1.2	86	88,7%	86	89,6%	101	91,8%	124	95,4%	187	90,3%	210	92,9%
Q2.1	82	84,5%	89	92,7%	105	95,5%	126	96,9%	187	90,3%	215	95,1%
Q2.2	67	69,1%	85	88,5%	96	87,3%	123	94,6%	163	78,7%	208	92,0%
Q2.3	64	66,0%	82	85,4%	95	86,4%	124	95,4%	159	76,8%	206	91,2%
Q3.1	73	75,3%	79	82,3%	94	85,5%	122	93,8%	167	80,7%	201	88,9%
Q3.2	19	19,6%	36	37,5%	39	35,5%	62	47,7%	58	28,0%	98	43,4%

On observe une progression des taux de réussite pour chacun des items de l'exercice 7, quel que soit le cycle dans lequel les élèves sont inscrits. Les deux items les moins bien réussis sont les items 1.1 et 3.2. Ceux-ci sont présentés dans la figure 22.

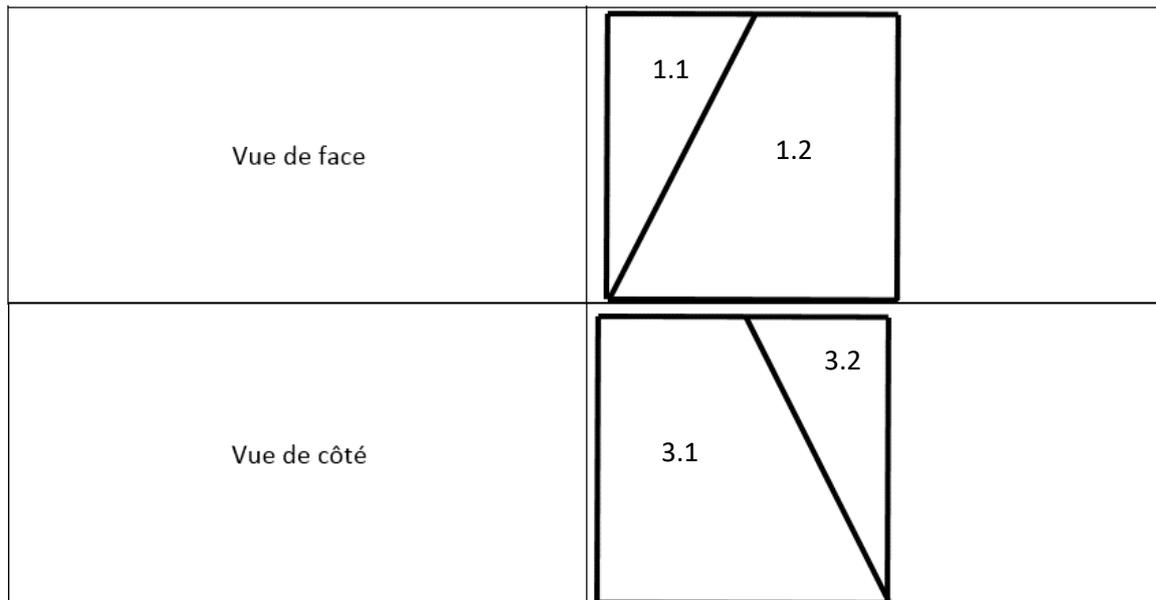


Figure 22 - Exercice 7 : items 1 (en haut) et 3 (en bas)

L'item 1 représente le solide vu de face. La réponse à l'item 1.1 est donc la couleur verte. Au cycle 3, 59 élèves sur 97 ont colorié cette zone en mauve. Au posttest, ils sont 55/96 à avoir fourni cette réponse. L'item 1.2, quant à lui est réussi par un grand nombre d'élèves. La difficulté relevée n'est donc pas liée à l'incapacité à se décentrer mais bien à la perception de la représentation des solides. Au cycle 4, le constat est similaire puisque 59 élèves sur 110 ont colorié cette partie du dessin en mauve au prétest et 56 ont commis cette même erreur dans le posttest.

Au prétest, taux de réussite à l'item 3.2 sont identiques à ceux observés pour l'item 1.1. Pour cet item, qui implique une vue du solide de côté, l'erreur majoritairement commise est de colorier la partie du dessin concernée en vert et non en mauve, que ce soit au prétest ou au posttest. Au cycle 3, 59 élèves ont commis cette erreur au prétest et 36 l'ont commise au posttest. Au cycle 4, ils sont 63 à l'avoir commise au prétest et 57 au posttest.

En ce qui concerne le cycle 4, la même conclusion s'impose que pour l'item 1.1. Il ne s'agit pas d'un problème lié à la décentration puisque très peu d'élèves ont colorié la partie de gauche de la figure (item 3.1) en bleu. Au cycle 3, par contre, on constate qu'en plus de la perception du solide, le fait de se décentrer pose également des difficultés. Au prétest, 15 élèves sur 97 ont colorié l'item 3.1 en bleu. Au posttest, ils ont été 13/97 à commettre cette erreur.

Le tableau 25 présente les taux de réussites obtenus par les élèves à chaque item, selon le cycle d'études.

Tableau 25 - Exercice 8 : résultats au prétest et au posttest par item

	Cycle 3				Cycle 4				Total			
	Prétest		Posttest		Prétest		Posttest		Prétest		Posttest	
	N = 87		N = 88		N = 109		N = 129		N = 196		N = 217	
Q1.1	13	14,9%	35	39,8%	29	26,6%	58	45,0%	42	21,4%	93	42,9%
Q1.2	76	87,4%	78	88,6%	99	90,8%	120	93,0%	175	89,3%	198	91,2%
Q1.3	63	72,4%	61	69,3%	85	78,0%	111	86,0%	148	75,5%	172	79,3%
Q2.1	51	58,6%	63	71,6%	78	71,6%	116	89,9%	129	65,8%	179	82,5%
Q2.2	80	92,0%	81	92,0%	97	89,0%	127	98,4%	177	90,3%	208	95,9%
Q3.1	52	59,8%	68	77,3%	84	77,1%	115	89,1%	136	69,4%	183	84,3%
Q3.2	8	9,2%	30	34,1%	28	25,7%	55	42,6%	36	18,4%	85	39,2%
Q.3.3	45	51,7%	55	62,5%	76	69,7%	106	82,2%	121	61,7%	161	74,2%

Trois items se dégagent de l'analyse des taux de réussite à chaque item de la question 8 : les items 1.1 et 3.2 pour leurs faibles taux de réussite et l'item 1.3 qui, au cycle 3, est le seul pour lequel on constate une évolution négative entre le taux de réussite du prétest et du posttest (figure 23).

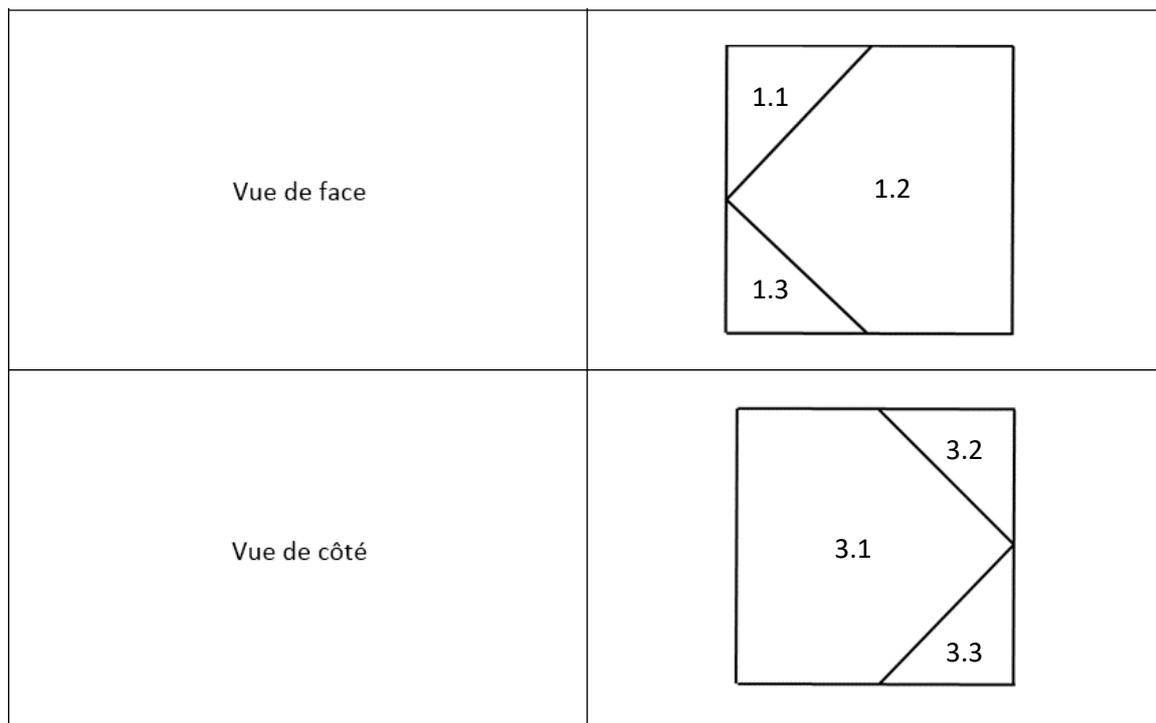


Figure 23 - Exercice 8 : items 1 (en haut) et 3 (en bas)

Etant donné que la première figure est relative à la vue de face, l'item 1.1 correspond à la couleur bleue. Toutefois, la majorité des élèves colorient cette partie en noir, que ce soit au prétest ou au posttest (cycle 3 : 52/87 au prétest et 40/88 au posttest ; cycle 4 : 67/109 au prétest et 56/129) au posttest. Puisque l'item 1.2 est nettement mieux réussi, on assiste ici encore à une difficulté liée à la représentation des solides et non à la décentration.

Bon nombre d'élèves colorient la partie de la figure constituant l'item 3.2 en bleu et non noir, comme cela devrait être le cas. Au cycle 3, ils sont 46/87 à commettre cette erreur au prétest et 44/88 à la commettre au posttest. Au cycle 4, ils sont respectivement 64/109 et 56/129. L'étude des réponses à l'item 3.1 montre que pour la grande partie des élèves, l'erreur commise à l'item 3.3 est liée à la représentation des solides et non à la décentration. En effet, les taux de réussite à l'item 3.1 sont plus élevés. Le nombre d'élève ayant colorié la partie de la figure correspondant à l'item 3.1 en rouge au cycle 4 est de 17/87 au prétest et 12/88 au posttest. Au cycle 4, ils sont 16/109 au prétest et 5/129 au posttest.

Au cycle 3, l'item 1.3 a été mieux réussi au prétest qu'au posttest. Pour obtenir le point, cette partie de la figure doit être coloriée en jaune. Au prétest près de 7% des élèves ont colorié cette partie en noir. Au posttest, ils sont plus de 20% à avoir commis cette erreur qui démontre une difficulté à appréhender les représentations de solides, compétence qui n'est abordée qu'à partir de la cinquième année primaire.

❖ Conclusion

L'expérimentation menée au sein des établissements scolaires met en évidence que suite à l'utilisation des outils la capacité d'abstraction des élèves a été augmentée. En effet, quel que soit le cycle (cycle 3 ou cycle 4), les élèves ont obtenu de meilleurs résultats globaux au posttest (passé après l'utilisation des outils en classe) qu'au prétest (passé avant le traitement). Le fait qu'au posttest, les élèves d'une année scolaire donnée obtiennent de meilleurs résultats que ceux obtenus au prétest par les élèves de l'année supérieure tend à confirmer que les gains obtenus sont bien liés à l'utilisation des situations d'apprentissage développées et non à des facteurs extérieurs.

Les exercices du test liés à la décentration mettent en évidence un net progrès des élèves dans ce domaine. En effet quel que soit l'exercice, on observe une augmentation significative des scores avant et après traitement.

Enfin, l'analyse descriptive des réponses des élèves permet de déterminer qu'en ce qui concerne les exercices liés simultanément à la décentration et à la représentation des solides, les difficultés rencontrées sont davantage liées à la perception dans l'espace qu'à la capacité de décentration, surtout dans le cadre du posttest.

6.4. L'avis des enseignants

En vue d'améliorer les outils au niveau de la forme et au niveau du fond, chaque enseignant a été invité compléter un questionnaire après la mise en place de chacune des situations d'apprentissage. Ce questionnaire se divise en deux parties, la première partie est relative au fascicule, la seconde est relative aux situations didactiques.

Les enseignants de deux écoles ont pris le temps de compléter les questionnaires et de les transmettre aux chercheurs, lors de la passation des posttests. Dans les deux cas, les enseignants d'un même cycle ont complété ensemble un seul questionnaire. La remise des questionnaires a été l'occasion, pour les enseignants, de faire part de leurs impressions au chercheur. Les descriptions suivantes reprennent à la fois les réponses récoltées par l'intermédiaire du questionnaire et le contenu des échanges oraux.

6.4.1. RÉFLEXIONS RELATIVES AUX FASCICULES

Quel que soit le cycle, les retours permettent de constater que les fascicules, tels qu'ils ont été proposés aux enseignants, nécessitaient une adaptation. En effet, plusieurs enseignants ont eu besoin d'une explication orale pour s'approprier les activités proposées.

Au niveau de la forme, certains estiment que le fascicule ne dirige pas assez l'enseignant et que le vocabulaire est parfois un peu trop complexe. Des enseignants indiquent que les objectifs et les explications des démarches sont clairs mais nécessitent une lecture très attentive avec des retours en arrière. Enfin, les références au programme semblent être un atout, permettant aux enseignants de mieux comprendre les objectifs des différentes situations.

Suite à ce constat, il a été décidé de revoir entièrement la présentation des fascicules. Une nouvelle mise en page a été réalisée, les textes ont été revus en vue d'en faciliter la compréhension et le déroulement des activités est présenté dans un tableau à quatre colonnes reprenant :

- 1) les modalités de travail ;
- 2) la durée de chaque étape ;
- 3) le déroulement ;
- 4) des conseils méthodologiques.

6.4.2. RÉFLEXIONS RELATIVES AUX SITUATIONS DIDACTIQUES

A. Cycle 3

❖ *Situation 1 : Découverte du concept*

Les difficultés rencontrées par les enseignants sont liées à la difficulté d'appréhender la situation. En effet, la découverte du savoir mystère à travers des exemples et des contre-exemples n'est pas une activité habituelle.

La fait d'avoir un appareil photo factice et des photographies à la fois en petit et en grand format est un atout car chaque élève peut manipuler le matériel tout en se référant à ce qui est présent au tableau.

Si dans une école, les enseignants estiment que la situation proposée permet d'atteindre son objectif, les enseignants de l'autre école sont plus nuancés et indiquent qu'il est difficile pour les élèves de prendre le point de vue d'autrui lorsqu'il s'agit d'une vue latérale ou zénithale. Les résultats au test indiquent toutefois une progression positive pour l'ensemble des élèves, quelle que soit l'école.

Enfin, l'une des deux écoles indique que l'activité est un peu longue.

❖ *Situation 2 : Application du concept*

La deuxième situation proposée au cycle 3 semble plus aisée à appréhender par les enseignants. De plus, le côté très ludique de l'activité a été source de motivation pour les élèves.

Le matériel de remédiation immédiate prévu pour aider les élèves en difficulté est considéré comme un facilitateur et semble avoir été particulièrement nécessaire lors des phases de jeu où les photos sont prises en diagonale.

Les enseignants indiquent que la préparation de la séquence est fastidieuse car elle nécessite le classement des cartes pour chaque groupe.

❖ *Situation 3 et 4 : Transfert du concept en mathématiques et en géographie*

Ces deux situations ont été facilement menées par les enseignants et facilement compréhensibles par les élèves. Le fait que les photographies soient reproduites en grand et en couleur est un atout pour la réalisation de l'activité.

B. Cycle 4

❖ *Situation 1 : Découverte du concept*

Si l'activité proposée a pu être réalisée, sa compréhension par les élèves n'a pas été aisée. La durée de l'activité a donc été plus longue que prévue. Les photographies « parasites », ne correspondant pas à des représentations de la maquette sont celles qui ont été les plus difficiles à classer par les élèves. Toutefois, les enseignants indiquent qu'ils ont pu maintenir l'attention des élèves et que les objectifs ont pu être atteints.

❖ *Situation 2 : Application du concept*

Les enseignants ont eu de grandes difficultés à comprendre le jeu des marins. Aussi, la modification du fascicule ainsi que la capsule vidéo présente sur le site Internet ont fait l'objet d'une attention particulière pour cette situation.

Pour être bien comprise par les élèves, cette activité gagne à être répétée à plusieurs reprises. De manière, les élèves peuvent appréhender les règles du jeu petit à petit. La maîtrise des règles du jeu permet ensuite aux élèves de se concentrer sur les actions du marin et donc sur le processus de décentration.

❖ *Situation 3 et 4 : Transfert du concept en mathématiques et en géographie*

Ces deux situations ont été facilement menées par les enseignants et facilement compréhensibles par les élèves. Le fait que les photographies soient reproduites en grand et en couleur est un atout pour la réalisation de l'activité.

VII. LE SITE INTERNET : WWW.ESPACE-ABSTRACTION.BE

Note préalable : À l'heure où ce rapport est écrit, seule une partie du site Internet est accessible. Nous demandons aux membres du comité d'accompagnement de ne pas diffuser le lien vers ce site avant que celui-ci ait été validé lors du prochain comité d'accompagnement.

Afin de permettre aux enseignants de prendre aisément connaissance de toutes les ressources qui ont été élaborées dans le cadre de cette recherche, un site Internet a été conçu. Celui-ci regroupe les informations relatives au processus d'abstraction, toutes les situations d'apprentissage créées, les fascicules pour les enseignants ainsi que les guides méthodologiques. Pour faciliter la prise en main des situations d'apprentissage par les enseignants, des vidéos explicatives sont disponibles via ce site. Cette section du rapport présente ce site Internet, disponible via l'adresse : espace-abstraction.be

La page d'accueil est disponible via l'onglet « Présentation » (figure 24).

The screenshot shows the homepage of the website. At the top, there are logos for UMONS (Université de Mons) and Institut d'Administration Scolaire, and the logo for Wallonie-Bruxelles Enseignement. The navigation bar is dark red with white text, including 'Présentation', 'Cycle 3', 'Cycle 4', and 'A propos / FAQ'. Below the navigation bar, the heading 'ACCUEIL' is centered. The main content area contains three paragraphs of text and a video player. The video player shows a presentation slide with the following text:

Présentation générale

Navigation dans les activités d'apprentissage

Structure identique cycle 3 - cycle 4

2 thématiques : décentration et représentation 3D-2D

Sous chaque thématique

Activité de découverte

Activité de diagnostic

The video player also features a play button and the UMONS logo in the bottom right corner.

Figure 24 – Page d'accueil du site Internet www.espace-abstraction.be

Cette page d'accueil reprend quelques informations utiles relatives à la recherche qui a été menée (objectifs, objets de recherche, outils créés, etc.). Afin d'accompagner au mieux l'enseignant dans la découverte du site Internet, une vidéo de présentation est proposée.

Suite à la présentation globale de la recherche, de l'information à propos de l'utilité de développer le processus d'abstraction est rendue disponible (figure 25). S'en suit une description des processus d'abstraction et de décentration ainsi que des éléments portant sur la représentation plane de solides.

Pourquoi développer l'abstraction ?

Alors qu'en fin de primaire, les taux de réussite en mathématiques sont relativement élevés, dès le début du secondaire, les élèves se retrouvent en grande partie en situation d'échec. En effet, environ 90% des élèves réussissent l'épreuve de mathématiques du CEB alors que moins de 60% des élèves de deuxième secondaire réussissent l'épreuve de mathématiques du CE1D. Il existe donc une nette rupture entre ces deux niveaux d'enseignement. Celle-ci peut en partie s'expliquer par une différence entre le niveau d'exigence demandé aux apprenants en termes d'argumentation et de raisonnement. En effet, le niveau d'abstraction nécessaire pour répondre aux exigences est beaucoup plus élevé pour un apprenant en fin de 2e secondaire que pour un élève de 6e primaire. [En savoir plus...](#)

L'abstraction

L'abstraction est un processus par lequel l'élève va aborder une série de phénomènes proches afin d'en retirer les caractéristiques essentielles et aboutir dès lors à la formation d'un concept. [En savoir plus...](#)

La décentration

Il s'agit de la capacité à pouvoir se positionner selon un point de vue autre que le sien. Le diaporama suivant présente un exemple d'illustration de ce phénomène. [En savoir plus...](#)

La représentation plane des solides

Il s'agit pour l'élève d'être capable de se représenter mentalement les caractéristiques de solides représentés dans le plan. [En savoir plus...](#)

Plan du site - Tous droits réservés.

Figure 25 – Page d'accueil (suite) du site Internet www.espace-abstraction.be

Afin de ne pas surcharger d'informations la page d'accueil du site, il a été décidé de laisser la possibilité aux enseignants de cliquer sur « En savoir plus... » pour obtenir des informations supplémentaires (figure 26).

La décentration

Il s'agit de la capacité à pouvoir se positionner selon un point de vue autre que le sien. Le diaporama suivant présente un exemple d'illustration de ce phénomène. [En savoir plus...](#)

La décentration

Illustration du phénomène

1 of 4

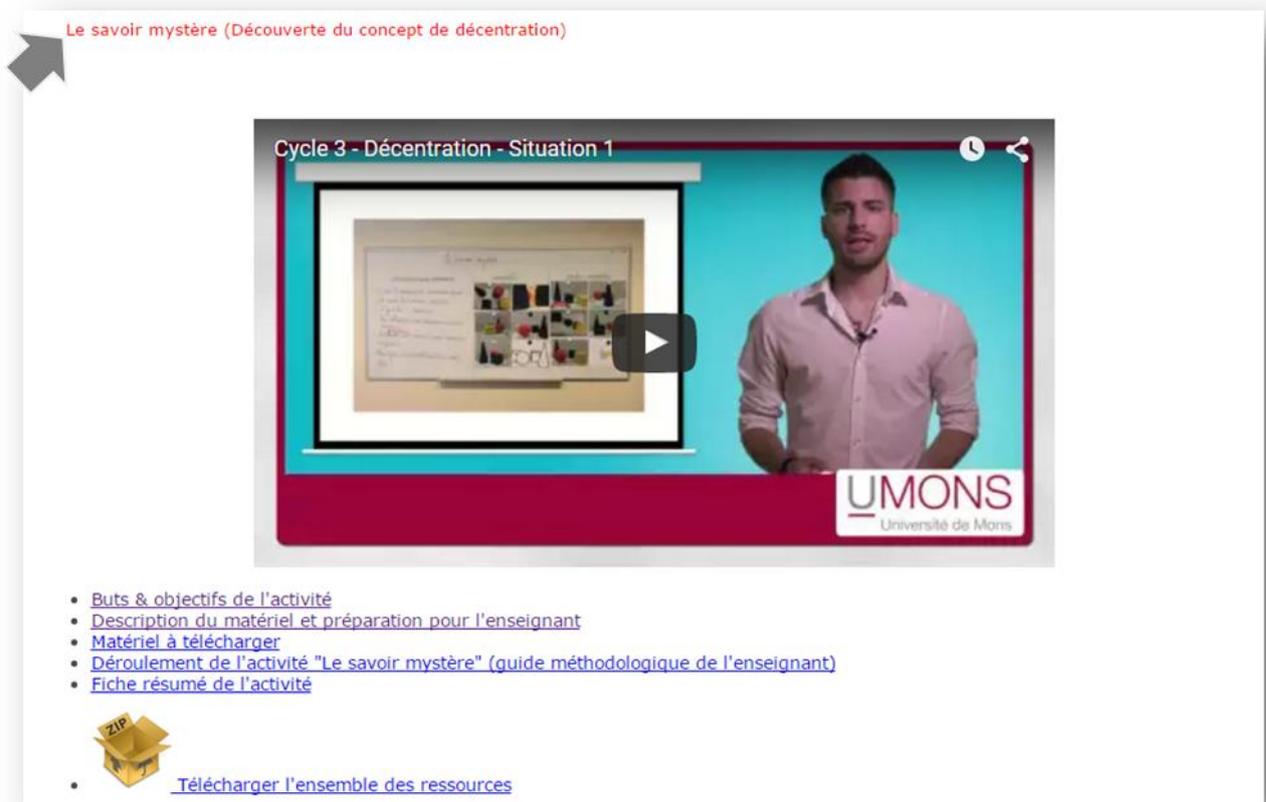
Figure 26 – Informations à propos du processus de décentration sur la page d'accueil du site

En cliquant sur l'onglet « Décentration » du Cycle 3, l'enseignant a accès aux explications relatives aux situations d'apprentissage portant sur le processus de décentration (figure 27). Une première vidéo est proposée. Celle-ci a pour objectif de présenter, de manière brève, les quatre situations d'apprentissage qui ont été élaborées pour les élèves du cycle 3 de l'enseignement primaire. Chacune des situations d'apprentissage est ensuite présentée.

The screenshot shows a website interface with a dark red header. On the left, there is a logo for 'UMONS Université de Mons' and 'INSTITUT D'ADMINISTRATION SCOLAIRE'. On the right, there is a logo for 'WALLONIE-BRUXELLES ENSEIGNEMENT'. The header contains navigation tabs: 'Présentation', 'Cycle 3' (with sub-tabs 'Décentration' and '2D / 3D'), 'Cycle 4' (with sub-tabs 'Décentration' and '2D / 3D'), and 'A propos / FAQ'. A grey arrow points to the 'Décentration' tab under 'Cycle 3'. Below the header, the main content area is titled 'Cycle 3 - Décentration'. It features a video player with a play button and a thumbnail showing a man in a pink shirt. Below the video, there are four red text links: 'Le savoir mystère (Découverte du concept de décentration)', 'Le jeu des animaux (Evaluation formative du concept de concept de décentration)', 'Le lapin sportif : "Où est-il ?" & "Les devinettes" (Transfert du concept de décentration en mathématiques)', and 'Monsieur Pellicule (Transfert du concept de décentration en géographie)'. At the bottom, there are logos for 'UMONS Université de Mons' and 'WALLONIE-BRUXELLES ENSEIGNEMENT', along with social media icons for YouTube, Twitter, and Facebook.

Figure 27 – Page du site portant sur la décentration au Cycle 3

En cliquant sur le nom de la situation d'apprentissage souhaité, la page relative à cette situation apparaît dans son entièreté (figure 28). L'enseignant peut visualiser une nouvelle vidéo qui explique dans le détail la situation d'apprentissage. En cliquant sur les différents intitulés présentés, il peut également visualiser et/ou télécharger tout le matériel nécessaire pour mener à bien cette situation d'apprentissage avec ses élèves. Afin de faciliter le téléchargement de l'ensemble des ressources, une icône « zip » a été créée.



Le savoir mystère (Découverte du concept de décentration)

Cycle 3 - Décentration - Situation 1

UMONS
Université de Mons

- [Buts & objectifs de l'activité](#)
- [Description du matériel et préparation pour l'enseignant](#)
- [Matériel à télécharger](#)
- [Déroulement de l'activité "Le savoir mystère" \(guide méthodologique de l'enseignant\)](#)
- [Fiche résumé de l'activité](#)

 [Télécharger l'ensemble des ressources](#)

Figure 28 – Page d'accueil du site Internet www.espace-abstraction.be

L'organisation des autres pages est semblable à celles décrites précédemment.

VIII. LES PERSPECTIVES

S'appuyant sur les acquis de cette recherche, l'objectif est de poursuivre la création de situations d'apprentissage dans le but de fournir aux enseignants des quatre dernières années du primaire et des deux premières années de secondaire du réseau d'enseignement organisé par la Fédération Wallonie-Bruxelles, un ensemble d'outils permettant de développer les compétences spatiales qui posent problème : la décentration, la représentation et la décomposition 3D-2D, la latéralité, la prégnance des figures types en référence à la déconstruction dimensionnelle et le changement d'échelle.

Comme cela a déjà été fait pour les situations d'apprentissage liées au passage de la 3D à la 2D, chaque outil sera proposé dans une version classique et dans une version adaptée pour une utilisation avec un TBI dont l'utilisation permet de faciliter les interactions au sein du groupe classe (Duroisin, Temperman & De Lièvre, 2011 ; Duroisin, Temperman & De Lièvre, 2015). De cette manière, ils pourront être utilisés par un maximum d'enseignants, quels que soit le matériel dont ils disposent.

En vue de valider les outils créés, chaque prototype sera testé dans deux classes. L'observation de séquences filmées et les entretiens effectués auprès des enseignants ayant utilisé les prototypes permettront d'améliorer les outils avant leur diffusion.

En vue de permettre à tous les enseignants du réseau d'enseignement de la Fédération Wallonie-Bruxelles de disposer des outils et de les utiliser à bon escient, il sera nécessaire de les reproduire et de les diffuser. En ce qui concerne la reproduction des prototypes, l'équipe de recherche prévoit une collaboration avec le centre technique de la Fédération Wallonie-Bruxelles. La communication aux enseignants pourra, quant à elle, se faire d'une part grâce au site Internet déjà existant à l'heure actuelle (qui sera complété grâce aux nouveaux contenus) et d'autre part, par l'intermédiaire de formations. A cet effet seront développés des modules de formations destinés à être dispensés par les formateurs du réseau d'enseignement de la Fédération Wallonie-Bruxelles (tels que les conseillers pédagogiques), préalablement formés par l'équipe de recherche. Enfin, la formation initiale fera également l'objet d'une attention particulière. En effet, les Hautes écoles étant le terrain privilégié pour effectuer le lien entre la recherche et le métier d'enseignant, il est important qu'elles puissent être associées au projet. Aussi, les résultats de la recherche et les outils développés feront l'objet d'une présentation auprès des responsables des formations. En outre, les futurs instituteurs et institutrices primaire ainsi que les futurs agrégés de l'enseignement secondaire inférieur en mathématiques seront invités à tester les outils dans le cadre de leurs stages et/ou d'en tester les effets dans le cadre de la réalisation de leur travail de fin d'étude.

BIBLIOGRAPHIE

Barth B.-M. (1985). Jérôme Bruner et l'innovation pédagogique. *Communication et langage*, 66, 4^e trim., 46-58.

Barth B.-M. (2013). *L'apprentissage de l'abstraction* (2^e édition). Montréal : Retz

Belkhouja, M. (2007). *La visualisation en géométrie dans trois et deux dimensions en tant que compétence à développer à l'école*. Tome 1. Thèse de doctorat. Université de Laval, Laval.

Berthelot R. & Salin M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse de doctorat en didactique des mathématiques non publiée, Université de Bordeaux, Bordeaux.

Berthelot R. & Salin M.-H. (2001). L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment peut-on concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? *Petit x*, 56. p. 5-34.

Berthelot, R & Salin, M.H., (2003). Le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive Analyse critique de démarches préconisées actuellement dans les instructions officielles et dans les manuels. Des propositions alternatives à étudier. *Actes du Colloque interirem 1er cycle*, juin 2001, IREM de Montpellier

Berthelot, R. & Salin, M.H. (2005). Vers une problématique de modélisation dans l'enseignement élémentaire de la géométrie, in Salin, Clanché, Sarrazy, eds. *Sur la théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Brousseau, G. (1983). Etudes de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie Communication présentée au *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, LSD IMAG, Université J. Fourier, Grenoble

Brousseau, G. (1989a). Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège, *Petit x* n°21.

Centre de psychologie appliquée (1963) Manuel d'application pour le test spatial (11-17 ans) Aptitudes mentales primaires (Chicago Tests of Primary Mental abilities). Éditions du centre de psychologie appliquée : Paris

Colmez F. et Parzysz B., 1993, Le VU et le SU dans l'évolution de dessins de pyramides du CE2 à la seconde, in *Espaces graphiques et graphismes d'espace, Recherche en Didactique des Mathématiques*, coord. A. BESSOT & P. VERILLON, éd. La Pensée Sauvage.

Crowley, M. (1987). The Van Hiele Model of the Development of geometric thought. *Learning and teaching geometry*, K-12, 1-16

Darken, R.P. & Petterson, J. (2002). "Spatial Orientation and Wayfinding in Large-Scale Virtual Spaces II". *Presence* 8(6).

Demal M. (2013). Une géométrie pour les 5 à 18 ans: Laquelle, comment et pourquoi ? Communication présentée au *Colloque des Mathématiques*, Liège. En ligne <http://www.uvgt.net/philo2.pdf>.

Douaire J., Emprin F. & Rajain C. (2009). L'apprentissage du 3D à l'école. Des situations d'apprentissages à la formation des enseignants. *Repères – IREM*, 77, 23-52.

Duroisin N. (2013). La place de la géométrie dans les programmes d'études de mathématiques. Communication présentée aux *Journées scientifiques, Cclépod, Changements dans les curricula et reconfigurations des disciplines scolaires*, Toulouse.

Duroisin, N. (2015a). "Quelle place pour les apprentissages spatiaux à l'école ? Etude expérimentale du développement des compétences spatiales des élèves âgés de 6 à 15 ans", thèse, Université de Mons, <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01152392>.

Duroisin, N. (2015b). Evaluations externes non-certificatives, programme international pour le suivi des acquis des élèves (PISA)... nos élèves sont-ils performants dans les tâches spatiales? Working Papers de l'INAS, WP01/2015, 1-40.

Duroisin, N., Demeuse, M. (2014). *Évaluer les programmes d'études de mathématiques (parties « géométrie ») en regard aux théories développementales – analyse des programmes d'études de mathématiques de l'enseignement primaire et du début du secondaire en Belgique francophone*. Actes du 26e colloque de l'ADMEE-Europe, Marrakech, Maroc.

Duroisin N., Demeuse M. (2015a). "What role for developmental theories in mathematics study programmes in French-speaking Belgium? An analysis of the geometry curriculum's aspects, framed by Van Hiele's model". *Cogent Education*, 2(1), <http://dx.doi.org/10.1080/2331186X.2015.1049846>.

Duroisin, N., & Demeuse, M. (2015b). Quelle place pour les théories développementales dans les programmes d'études de mathématiques en Belgique francophone? Working Papers de l'INAS, WP02/2015, 1-18.

Duroisin, N., Temperman, G. & De Lièvre, B. (2011). Effets de deux modalités d'usage du tableau blanc interactif sur la dynamique d'apprentissage et la progression des apprenants. *Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain*. 257-269, Mons, Belgique.

Duroisin, N., Temperman, G., De Lièvre, B. (2015), Restrict or Share the Use of the Interactive Whiteboard? The Consequences on the Perception, the Learning Processes and the Performance of Students within a Learning Sequence on Dynamic Geometry. *Turkish Online Journal of Educational Technology*, 14, 2.

Duroisin N., Soetewey S. & Canzittu D. (2013). On the importance To Consider Developmental Psychology In The Process Of Writing A Curriculum. Communication présentée à l'*European Conference on Educational Research 2013*, Istanbul.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et sciences cognitives*, 10, 5-53.

Guilford & Zimmerman (1989). Orientation spatiale. Éditions du centre de psychologie appliquée : Paris.

Kahane, J. P. (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques*. Odile Jacob.

Lunkenbein, D. (1982). Géométrie dans l'enseignement au primaire. *Instantanés mathématiques*, p.5-15.

Marchand, P. (2009). Le développement du sens spatial au primaire. *Bulletin AMQ*, Vol. XLIX, n°3.

Meuris G. (1971). Test de raisonnement spatial. Editest : bruxelles. 4pp.

Ministère de la Communauté française (2009). *Programme des études*. Volume 1. Bruxelles : Ministère de la Communauté française.

OCDE, (2004). Profil de performance des élèves en mathématiques. In *Apprendre aujourd'hui, réussir demain – Premiers résultats de PISA 2003* ; (37-114).

Oltman P.K., Raskin E. & Witkin H.A. (1985). Test des figures encastrées Forme collective. Éditions du centre de psychologie appliquée : Paris

Piaget, J. & Inhelder, B. (1948). *La représentation de l'espace chez l'enfant*. Presses universitaires de France, Paris.

Salin M.-H. (2007). *Enseignement et apprentissage de la géométrie à l'école primaire et au début du collège, le facteur temps*. Communication présentée aux Journées nationales de l'APMEP 2007, Besançon. En ligne <http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/Conf-salin.pdf>, consulté le 10 janvier 2014.

Service général du Pilotage du système éducatif (2012a). *Évaluation externe non certificative 2012 – formation historique et géographique – Résultats et commentaires – 2e année de l'enseignement secondaire* (2012). Bruxelles : Administration générale de l'enseignement et de la recherche scientifique. En ligne http://www.enseignement.be/download.php?do_id=9787&do_check=

Service général du Pilotage du système éducatif (2012b). *Évaluation externe non certificative 2011 – Mathématiques – Résultats et commentaires – 4e année de l'enseignement secondaire* (2011). Bruxelles : Administration générale de l'enseignement et de la recherche scientifique. En ligne http://www.enseignement.be/download.php?do_id=9026&do_check=

Service général du Pilotage du système éducatif (2012c). *Évaluation externe non certificative 2011 – Mathématiques – Résultats et commentaires – 2e année de l'enseignement secondaire* (2011). Bruxelles : Administration générale de l'enseignement et de la recherche scientifique. En ligne http://www.enseignement.be/download.php?do_id=9025&do_check=

Service général du Pilotage du système éducatif (2012d). *Évaluation externe non certificative 2011 – Mathématiques – Résultats et commentaires – 4e année de l'enseignement primaire* (2011). Bruxelles : Administration générale de l'enseignement et de la recherche scientifique. En ligne http://www.enseignement.be/download.php?do_id=9024&do_check=

Service général du Pilotage du système éducatif (2012e). *Évaluation externe non certificative 2011 – Mathématiques – Résultats et commentaires – 2e année de l'enseignement primaire* (2011). Bruxelles : Administration générale de l'enseignement et de la recherche scientifique. En ligne http://www.enseignement.be/download.php?do_id=9023&do_check=

Service général du Pilotage du système éducatif (2012f). *Évaluation externe non certificative 2011 – sciences – Résultats et commentaires – 3e année de l'enseignement secondaire* (2011). Bruxelles : Administration générale de l'enseignement et de la recherche scientifique. En ligne http://www.enseignement.be/download.php?do_id=9788&do_check=

Service général du Pilotage du système éducatif (2013a). *Évaluation externe non certificative 2012 – formation historique et géographique – Résultats et commentaires – 5e année de l'enseignement primaire* (2012). Bruxelles : Administration générale de l'enseignement et de la recherche scientifique. En ligne http://www.enseignement.be/download.php?do_id=9786&do_check=

Service général du Pilotage du système éducatif (2013b). *Évaluation externe non certificative 2012 – formation historique et géographique – Résultats et commentaires – 2e année de l'enseignement primaire* (2012). Bruxelles : Administration générale de l'enseignement et de la recherche scientifique. En ligne http://www.enseignement.be/download.php?do_id=9785&do_check=

Rey A. (1968). *Techniques inédites pour l'examen psychologique. Épreuves visuo-spatiales*. Delachaux & Niestlé : Neuchâtel. Pp. 93.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry*. Thèse de doctorat en sciences de l'éducation non publiée, University of Chicago, Chicago.

Vygotski (1986). *Thought and language* (revisited edition). Cambridge, Mass : MIT Press.

TABLE DES MATIERES

SOMMAIRE	4
Liste des tableaux	5
Liste des figures.....	6
Introduction.....	8
I. Pour quelles raisons faut-il développer des compétences spatiales à l'école ?	9
1.1. Des compétences spatiales pour bien vivre	9
1.2. L'apprentissage de l'espace tout au long de la vie.....	9
1.3. Enseigner l'espace, quelle(s) discipline(s) pour quel(s) apprentissage(s)?	10
1.4. La géométrie et la géographie boudées par les enseignants et par les élèves.....	11
1.5. Importance des connaissances spatiales pour l'ensemble des élèves, quelles que soient les filières de formation.....	11
II. Revue de la littérature : Comment développer les apprentissages spatiaux et le processus d'abstraction ?.....	12
2.1. L'abstraction vers la géométrie nécessite de quitter l'espace de manipulation	12
L'ostension comme obstacle et le leurre des représentations spontanées	12
La distinction entre problème spatial et problème géométrique.....	13
Les différents rapports à l'espace dans l'enseignement	14
L'apprentissage de l'espace, de sa représentation, de la géométrie	15
Les différents types d'espace, l'abstraction et la conceptualisation	15
La disqualification de la problématique pratique : abstraire pour anticiper	19
La prégnance de l'objet micro-spatial	19
La question de l'approximation des mesures	19
La production de preuves	20
Les obstacles à la géométrie	20
2.2. Le développement de la pensée géométrique est progressif et peut-être provoqué.....	21
Les compétences en géométrie	21
Les étapes du développement de la pensée géométrique	21
Des phases d'apprentissage pour promouvoir l'évolution de la pensée	24
2.3. L'abstraction en géométrie dépend de la tâche et du mode de visualisation	25
La perception des figures.....	25
Tâche demandée, Posture de l'apprenant & Rapport aux figures	25
Visualisation des figures.....	26
2.4. L'abstraction dans le domaine des solides et figures.....	27

Articuler les connaissances spatiales et les apprentissages géométriques.....	27
L'apprentissage des solides	28
La représentation des objets 3D	28
La validation.....	29
2.5. Des stratégies pour apprendre et enseigner l'abstraction.....	29
Un point de vue sur les processus cognitifs.....	30
La difficulté de l'abstraction – apprendre à « voir »	30
Savoir et élaboration : abstraire et conceptualiser	30
Stratégies d'apprentissage	31
Stratégies d'enseignement pour abstraire et conceptualiser	32
Variante de la stratégie d'enseignement.....	35
Apprendre à abstraire : métacognition et transfert	35
III. Vers une modélisation des connaissances	37
Organisation générale.....	37
Abstraction du concept.....	38
Evaluation de l'abstraction du concept	40
Mise en œuvre du concept (application) et transfert aux disciplines.....	41
IV. Organisation générale des situations.....	44
4.1. Favoriser le développement des processus d'abstraction et de décentration	44
4.2. Favoriser le développement des processus d'abstraction et de représentation mentale de solides	45
V. Les situations d'apprentissage	47
5.1. Le fascicule à destination des enseignants du Cycle 3	48
5.2. Le fascicule à destination des enseignants du Cycle 4	49
VI. Mise à l'épreuve des situations d'apprentissage développées.....	50
6.1. Calendrier	51
6.2. Echantillon.....	52
6.3. Test de l'efficacité des outils	53
6.3.1. Contenu du test.....	54
6.3.2. Passation.....	58
6.3.3. Correction.....	58
6.3.4. Analyses.....	59
6.4. L'avis des enseignants	75
6.4.1. Réflexions relatives aux fascicules.....	75

6.4.2. Réflexions relatives aux situations didactiques.....	75
VII. Le Site internet : www.espace-abstraction.be	78
VIII. Les perspectives	82
Bibliographie.....	83

Annexe 1 – Test