Difficultés d'étudiants universitaires dans la conceptualisation des équations de droites et de plans dans l'espace

Céline Nihoul

Université de Mons
Département de Mathématique

UMONS

Faculté
des Sciences

WEJCH
16 mai 2015

Contexte institutionnel

- Cours : Mathématiques générales (pendant les six premières semaines), étudiants de L1 en mathématique.
- Objectif du cours : revoir des notions du lycée en intégrant des exigences universitaires (rédaction des raisonnements, connaissances en théorie des ensembles et en logique).
- Sujet : équations de droites et de plans dans l'espace.
- Un chapitre qui suit l'étude des équations de droites dans le plan.

Contexte institutionnel

- Cours : Mathématiques générales (pendant les six premières semaines), étudiants de L1 en mathématique.
- Objectif du cours : revoir des notions du lycée en intégrant des exigences universitaires (rédaction des raisonnements, connaissances en théorie des ensembles et en logique).
- Sujet : équations de droites et de plans dans l'espace.
- Un chapitre qui suit l'étude des équations de droites dans le plan.

Objectifs

- Comprendre les difficultés des étudiants en relation avec l'enseignement visé.
- Étudier les premières spécificités des notions enseignées.
- Formuler ma problématique de recherche à partir de cette première analyse.

Équation et ensemble de points dans l'espace

- Dans l'espace, l'équation $2x + 3y = 6$ décrit un plan P.
- Interpréter géométriquement les objets à partir d'une équation cartésienne ou un ensemble de points.

  Seuls les triplets de la forme $\left(x, \frac{6-2x}{3}, 0\right)$ sont pris en compte.
- Description ensembliste : $P = \left\{\left(x, \frac{6-2x}{3}, z\right) | x, z \in \mathbb{R}\right\}$.

Équation et ensemble de points dans l'espace

- Dans l'espace, l'équation $2x + 3y = 6$ décrit un plan P.
- Interpréter géométriquement les objets à partir d'une équation cartésienne ou un ensemble de points.

  Seuls les triplets de la forme $\left(x, \frac{6-2x}{3}, 0\right)$ sont pris en compte.
- Description ensembliste : $P = \left\{\left(x, \frac{6-2x}{3}, z\right) \middle| x, z \in \mathbb{R}\right\}$.

Difficultés

- Concevoir un plan comme un ensemble de triplets satisfaisant une même relation.
- Interpréter géométriquement les objets de la forme $ax + by = d$ dans l'espace comme étant un plan (Schneider & Lebeau, 2010).

Orthogonalité dans le plan

Rechercher une équation

Donnez une équation cartésienne de la droite D perpendiculaire à la droite $D' \equiv 2x + 3y = 6$ passant par l'origine du repère.

Technique utilisée dans le cours :

- identifier un vecteur normal à partir de l'équation cartésienne de la droite D' : $(2, 3)$.
- les vecteurs orthogonaux au vecteur $(2, 3)$ sont de la forme $\lambda(-3, 2)$ où $\lambda \in \mathbb{R}_0$ (résultat du cours). $(-3, 2)$ est un vecteur orthogonal à $(2, 3)$.

Orthogonalité dans l'espace

Rechercher une équation

Donnez une équation cartésienne du plan α perpendiculaire au plan $\beta \equiv x - 2y + 5z = 3$ et contenant la droite D passant par le point $(2, 1, 1)$ et dont un vecteur directeur est $(-1, 2, 1)$.

Que devient cette technique dans l'espace ?

- $(1, -2, 5)$ est un vecteur normal de β.
- $(5, 0, -1)$ est un vecteur normal de α car $\big((5, 0, -1)|(1, -2, 5)\big) = 5 - 5 = 0$.

Or, $\big((-1, 2, 1)|(5, 0, -1)\big) = -6$ et $(-1, 2, 1)$ doit être orthogonal à $(5, 0, -1)$.

Orthogonalité dans l'espace

Rechercher une équation

Donnez une équation cartésienne du plan α perpendiculaire au plan $\beta \equiv x - 2y + 5z = 3$ et contenant la droite D passant par le point $(2, 1, 1)$ et dont un vecteur directeur est $(-1, 2, 1)$.

Que devient cette technique dans l'espace ?

- $(1, -2, 5)$ est un vecteur normal de β.
- $(5, 0, -1)$ est un vecteur normal de α car $\big((5, 0, -1)|(1, -2, 5)\big) = 5 - 5 = 0$.

Or, $\big((-1, 2, 1)|(5, 0, -1)\big) = -6$ et $(-1, 2, 1)$ doit être orthogonal à $(5, 0, -1)$.
$\Rightarrow$ **rupture** entre les techniques du plan et de l'espace pour la notion d'orthogonalité.

Orthogonalité dans l'espace

Rechercher une équation

Donnez une équation cartésienne du plan α perpendiculaire au plan $\beta \equiv x - 2y + 5z = 3$ et contenant la droite D passant par le point $(2, 1, 1)$ et dont un vecteur directeur est $(-1, 2, 1)$.

Que devient cette technique dans l'espace ?

- $(1, -2, 5)$ est un vecteur normal de β.
- $(5, 0, -1)$ est un vecteur normal de α car $\big((5, 0, -1)|(1, -2, 5)\big) = 5 - 5 = 0$.

Or, $\big((-1, 2, 1)|(5, 0, -1)\big) = -6$ et $(-1, 2, 1)$ doit être orthogonal à $(5, 0, -1)$.
$\Rightarrow$ **rupture** entre les techniques du plan et de l'espace pour la notion d'orthogonalité.

Difficulté

Adapter la technique de résolution en fonction du contexte.

Premiers constats

- Présence de nombreuses conceptions erronées ou manquantes (conception ensembliste et interprétation géométrique des objets).

Premiers constats

- Présence de nombreuses conceptions erronées ou manquantes (conception ensembliste et interprétation géométrique des objets).
- Présence de nombreuses ruptures avec les connaissances anciennes des étudiants dans le plan (construction d'un vecteur normal, type d'équation).

Premiers constats

- Présence de nombreuses conceptions erronées ou manquantes (conception ensembliste et interprétation géométrique des objets).
- Présence de nombreuses ruptures avec les connaissances anciennes des étudiants dans le plan (construction d'un vecteur normal, type d'équation).

Spécificités des notions

Les droites et les plans dans l'espace sont des **extensions** de notions du plan **avec accident** au sens de Pariès et Robert (2014).

Programmes du lycée

En Belgique, les nouveaux programmes :

- demandent de travailler ces notions en première au lycée.
- insistent sur le fait que les connaissances en logique et en théorie des ensembles « prennent naturellement leur place au fil des unités » dans le cours.

Programmes du lycée

En Belgique, les nouveaux programmes :

- demandent de travailler ces notions en première au lycée.
- insistent sur le fait que les connaissances en logique et en théorie des ensembles « prennent naturellement leur place au fil des unités » dans le cours.

$\Rightarrow$ Comment ces notions sont-elles enseignées au lycée ?

Problématique de recherche (1/2)

Hypothèse

Le langage utilisé par les enseignants (mots, reformulations, symboles, explications complémentaires,...) pour interpréter géométriquement les objets introduits par leurs équations a un impact sur les apprentissages des élèves.

Problématique de recherche (1/2)

Hypothèse

Le langage utilisé par les enseignants (mots, reformulations, symboles, explications complémentaires,...) pour interpréter géométriquement les objets introduits par leurs équations a un impact sur les apprentissages des élèves.

Question

Quels sont les éléments du langage utilisés par les enseignants pour amorcer le passage des équations cartésiennes à l'interprétation géométrique des notions et réciproquement ?

Problématique de recherche (1/2)

Hypothèse

Le langage utilisé par les enseignants (mots, reformulations, symboles, explications complémentaires,...) pour interpréter géométriquement les objets introduits par leurs équations a un impact sur les apprentissages des élèves.

Question

Quels sont les éléments du langage utilisés par les enseignants pour amorcer le passage des équations cartésiennes à l'interprétation géométrique des notions et réciproquement ?

$\Rightarrow$ questionnement sur les moments d'exposition des connaissances (perspective : filmer les enseignants du lycée).

Problématique de recherche (2/2)

Objectif général

Élaborer une séquence d'enseignement pour travailler spécifiquement sur l'interprétation géométrique des notions étudiées au lycée dans l'espace.