UMONS
Université de Mons

Faculté Polytechnique

Géométries, communication graphique et infographie

Syllabus d'exercices

Edouard RIVIÈRE-LORPHÈVRE
Service de Génie Mécanique

POLYTECH MONS

Dernière mise à jour: février 2025

ACADÉMIE UNIVERSITAIRE WALLONIE-BRUXELLES

Table des matières

Chapitre 1

Plans techniques

1.1 Plans vers Isométrie

1.1.1 Exemple 1

Énoncé

Le plan d'une pièce est donné à la figure 1.1. On demande de réprésenter cette pièce en isométrie.

1.1.2 Aout 2013 – Question 1

Énoncé

Le plan d'une pièce est donné à la figure 1.2. On demande de réprésenter cette pièce en isométrie.

1.1.3 Novembre 2014 – Question 1 (série 1)

Énoncé

On donne la plan décrivant une pièce en figure 1.3. On demande de dessiner la représentation en isométrie de la pièce en employant le système d'axes porté en figure 5.4. Les conventions du cours doivent impérativement être respectées (facteur d'échelle, ligne de terre selon Oy,...).

1.1.4 Novembre 2015 – Question 1

Énoncé

Le plan d'une pièce est donné à la figure 1.4. On demande de représenter sur la figure 5.4 la vue en isométrie de cette pièce en employant une échelle 1:2 et en respectant **impérativement** les conventions du cours concernant l'orientation de la pièce. Les dimensions paramétriques p_1, p_2 et p_3 sont mentionnées dans le tableau 1.1.

cote	variante 0	variante 1	variante 2
p_1	60 mm	100 mm	140 mm
p_2	30 mm	40 mm	50 mm
p_3	30 mm	40 mm	50 mm

TABLE 1.1 – dimensions paramétriques

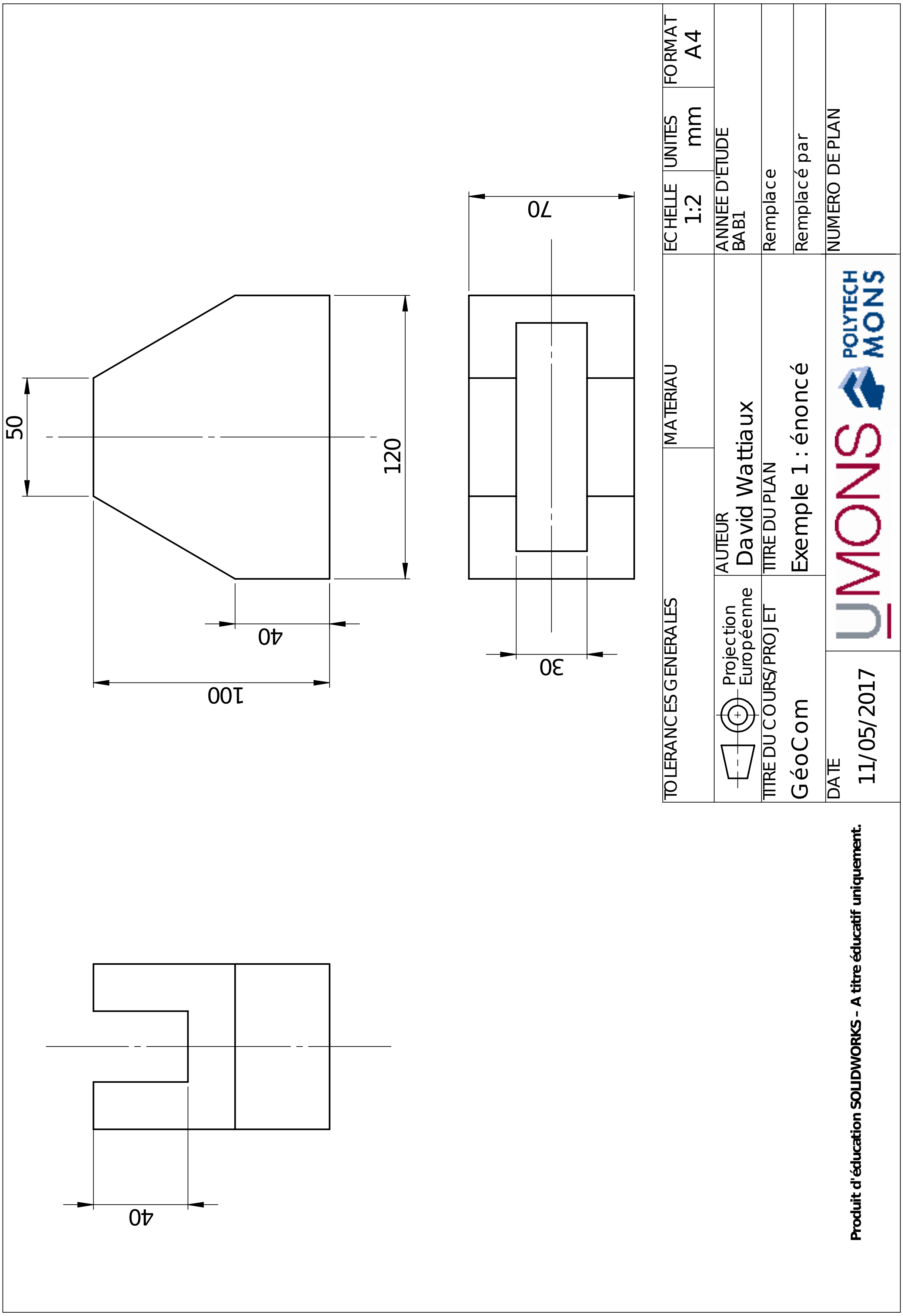


FIGURE 1.1 – Exemple 1 : énoncé

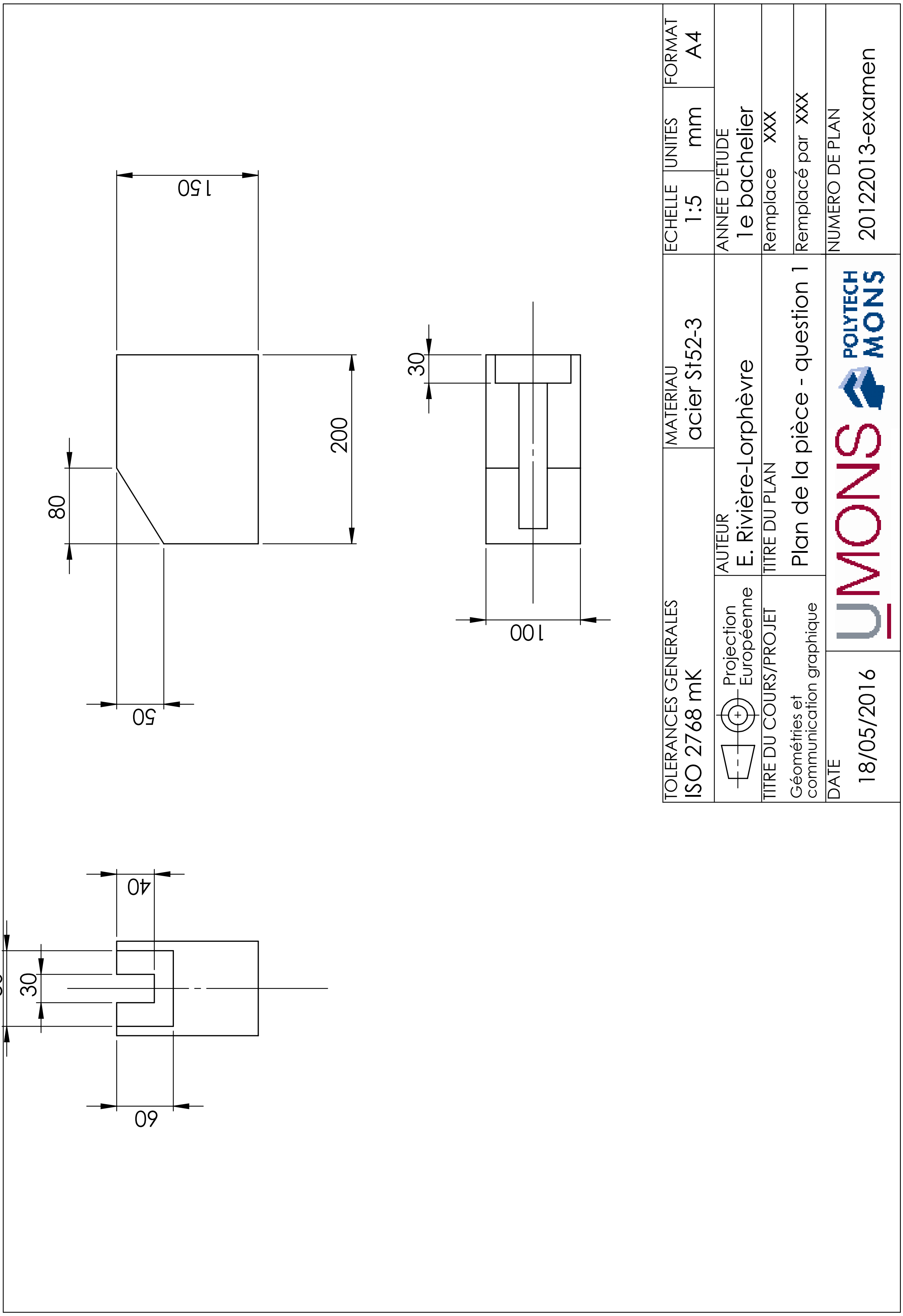


FIGURE 1.2 – Aout 2013 – Question 1

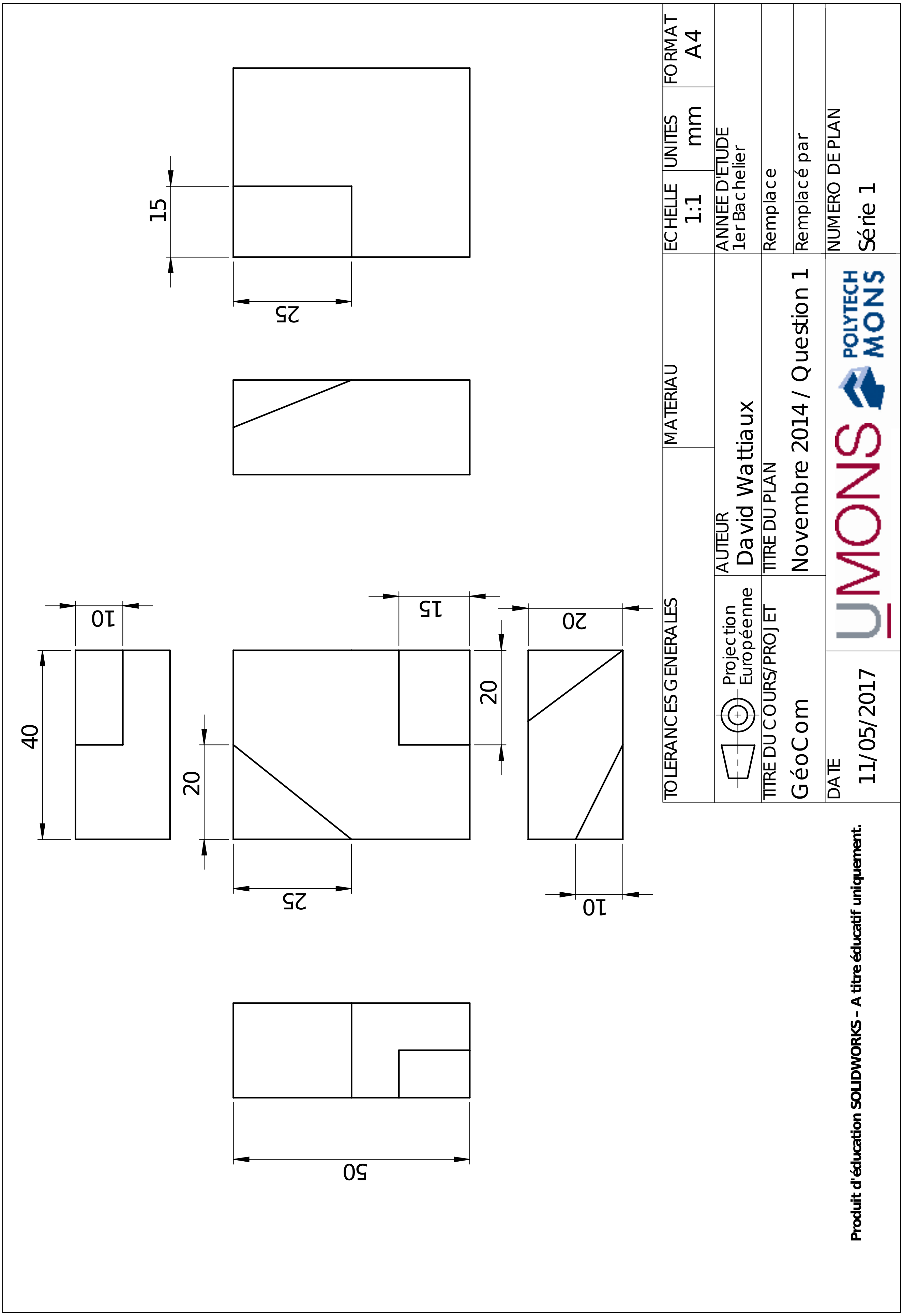
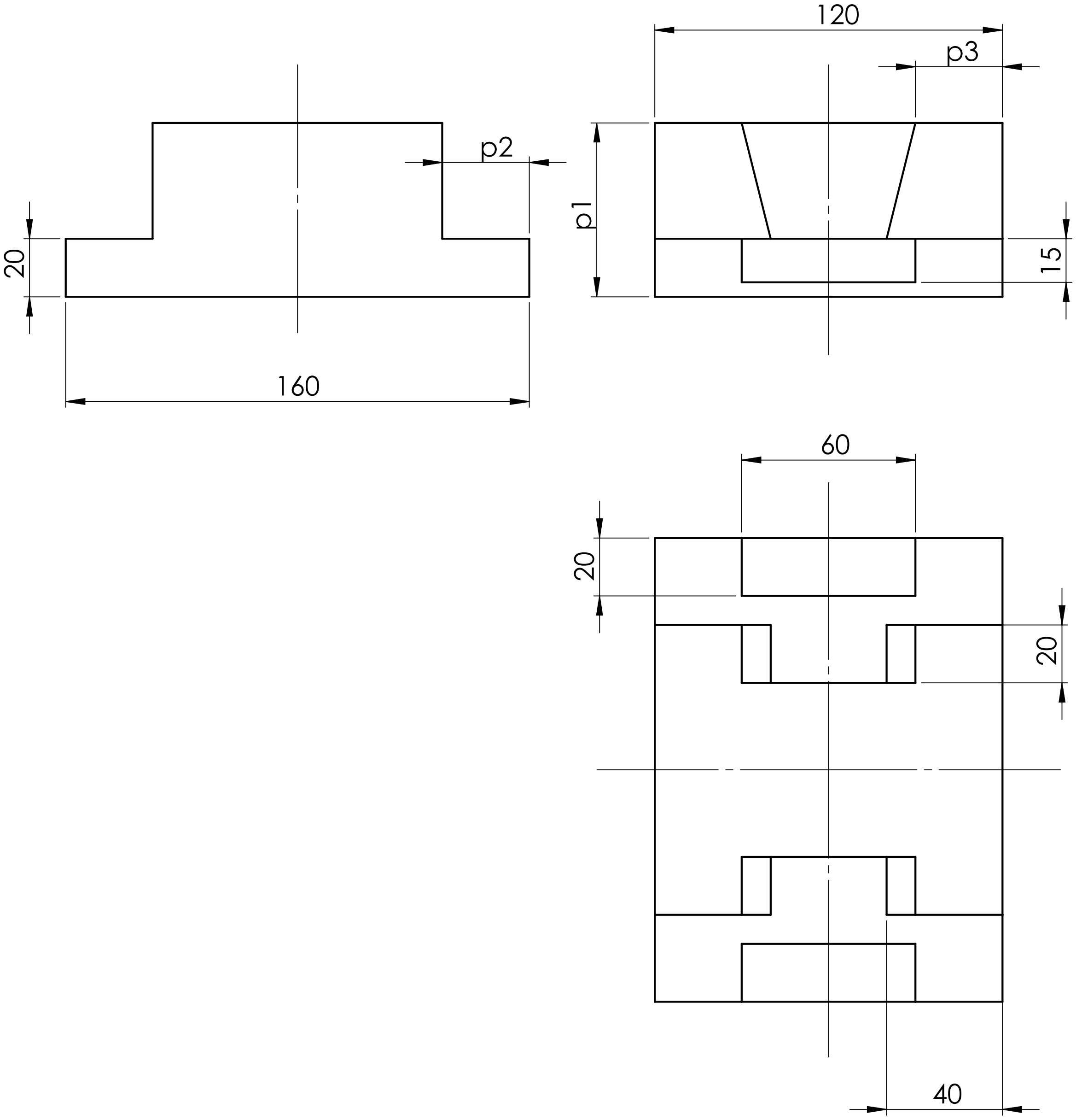


Figure 1.3 – Novembre 2014 – Question 1 (série 1) : énoncé



TOLERANCES GENERALES	MATERIAU	ECHELLE 1:2	UNITES mm	FORMAT A4
Projection Européenne	AUTEUR David Wattiaux	ANNEE D'ETUDE 2015 -2016		
TITRE DU COURS/PROJET GéoCom	TITRE DU PLAN Test de novembre	Remplace Remplacé par		
DATE 4/11/2015	UMONS POLYTECH MONS	NUMERO DE PLAN		

Figure 1.4 – Novembre 2015 – Question 1 : énoncé

1.1.5 Novembre 2016 – Question 1

Énoncé

Le plan d'une pièce est donné à la figure 1.5. On demande de représenter sur la figure 5.4 la vue en isométrie de cette pièce en choisissant l'échelle que vous jugerez la plus adaptée et en respectant **impérativement** les conventions du cours concernant l'orientation du système d'axes.

1.1.6 Novembre 2017 – Question 1

Énoncé

Le plan de la figure 1.6 mélange des vues de deux pièces différentes :

- la variante 0 considère uniquement la vue de **face** et la vue de **droite**;
- la variante 1 considère uniquement la vue de **face** et la vue de **dessus**.

On demande de représenter la vue en isométrie de ces deux variantes de la pièce en choisissant l'échelle que vous jugerez la plus adaptée et en respectant **impérativement** les conventions du cours concernant l'orientation du système d'axes (utiliser le système d'axes de la figure 5.4 pour réaliser vos isométries).

1.1.7 Novembre 2018 – Question 1

Énoncé

La vue de face et la vue de profil droit d'une pièce sont renseignées sur le plan technique donné à la Figure 1.7. Deux des cotes sont paramétrisées par les variables p_1 et p_2. On demande de représenter sur la Figure 5.4 la vue en isométrie de cette pièce en employant **obligatoirement** une échelle 1 : 1 et en respectant **impérativement** les conventions du cours concernant l'orientation de la pièce par rapport au système d'axes renseigné à la Figure 5.4. Uniquement les arrêtes vues seront dessinées sur la vue en isométrie. Les dimensions paramétriques p_1 et p_2 que vous devez considérer pour réaliser cette isométrie sont mentionnées dans le tableau 1.2.

	p_1	p_2
Variante 0	20 mm	10 mm
Variante 1	20 mm	30 mm
Variante 2	40 mm	10 mm
Variante 3	40 mm	30 mm

TABLE 1.2 – Novembre 2018 – Question 1 : Dimensions paramétriques

1.1.8 Novembre 2019 – Question 1

Énoncé

La vue de face et la vue de profil droit d'une pièce sont renseignées sur le plan technique donné à la figure 1.8. Deux des cotes sont variables selon les paramètres C_1 et C_2 (le plan n'est donc pas strictement à l'échelle). On demande de représenter, sur la figure 5.4, la vue en isométrie de cette pièce en employant **obligatoirement** une échelle normalisée que vous préciserez sur le plan. Veillez à respecter **impérativement** les conventions du cours concernant l'orientation de la pièce par rapport au système d'axes renseigné à la figure 5.4. Nous vous recommandons de représenter uniquement les arêtes vues.

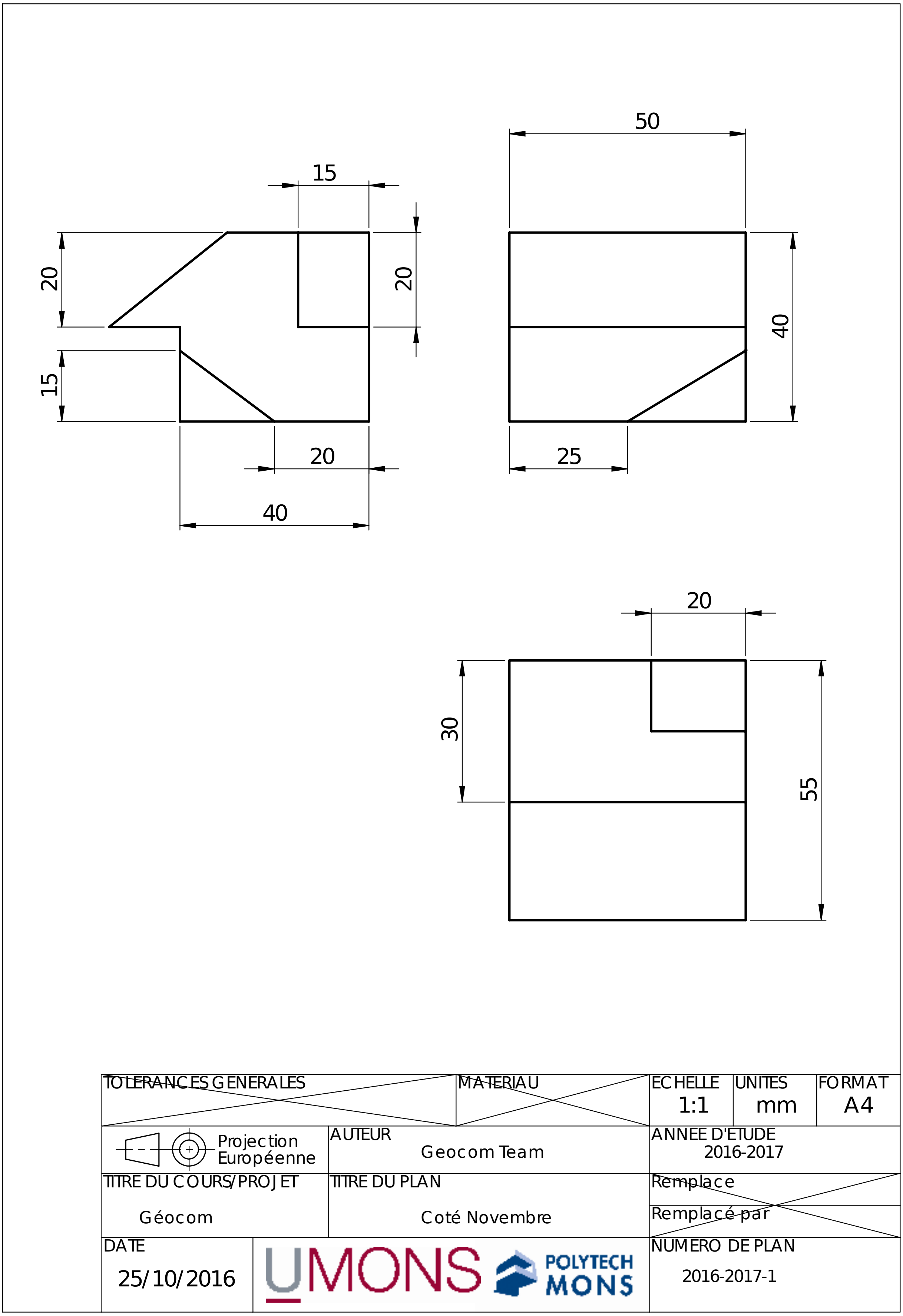
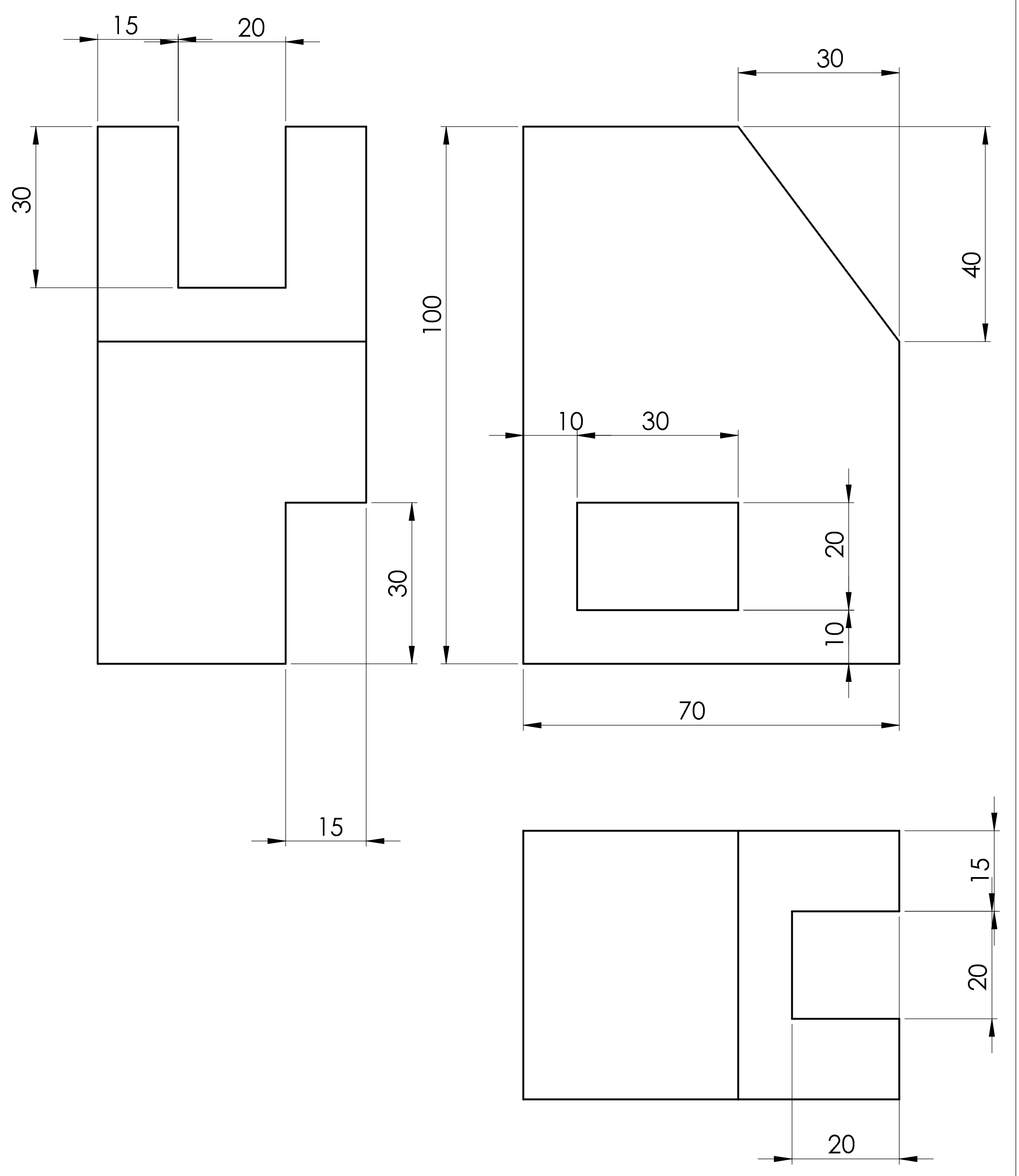


Figure 1.5 – Novembre 2016 – Question 1 : plans techniques de la pièce



TOLERANCES GENERALES	MATERIAU	ECHELLE 1:1	UNITES mm	FORMAT A4
Projection Européenne	AUTEUR Team GEOCOM	ANNEE D'ETUDE BAB1 2017-2018		
TITRE DU COURS/PROJET GEOCOM	TITRE DU PLAN Remédiation: plan	Remplace		
		Remplacé par		
DATE 24-10-17	UMONS POLYTECH MONS	NUMERO DE PLAN		

FIGURE 1.6 – Novembre 2017 – Question 1 : plans techniques

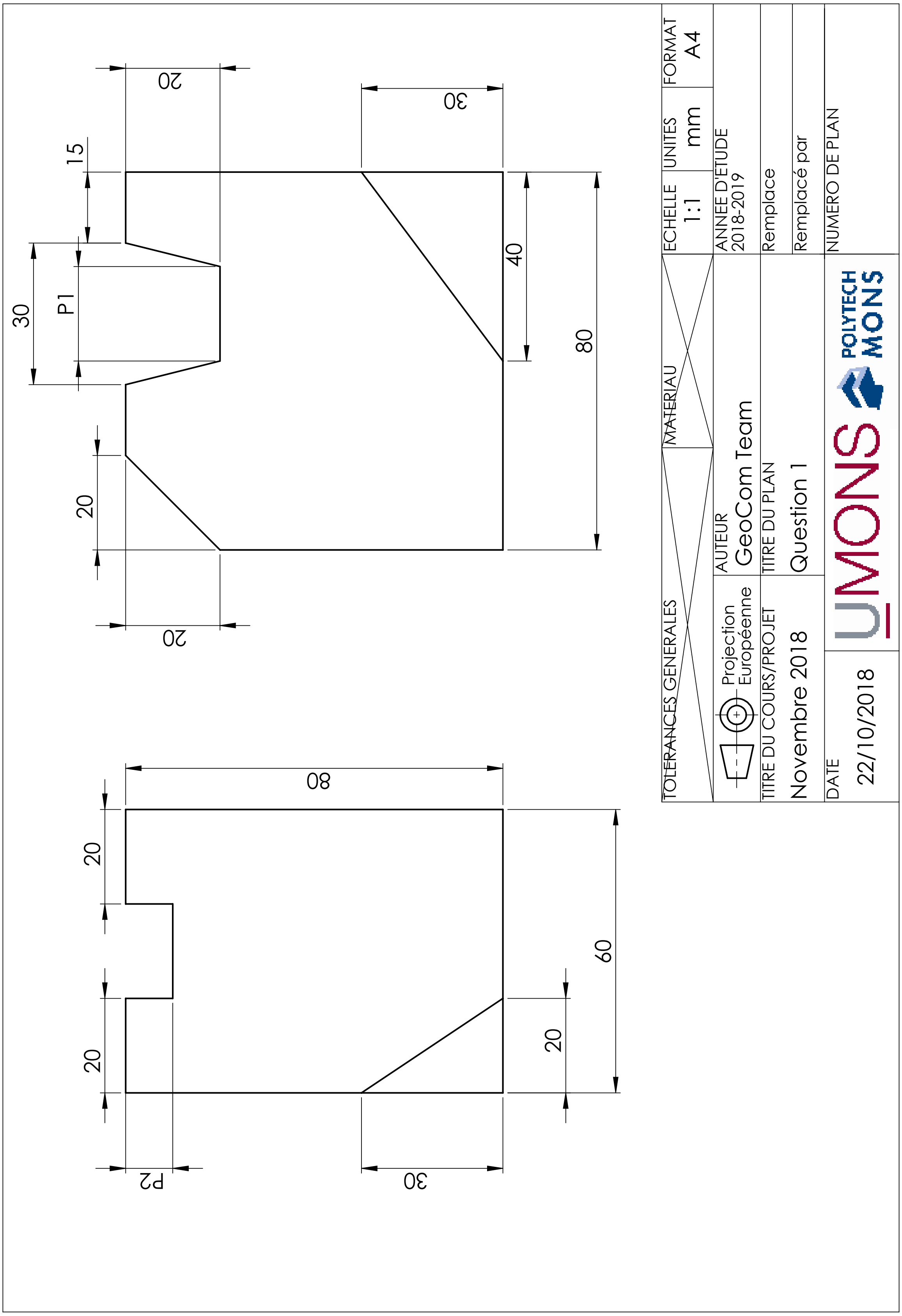
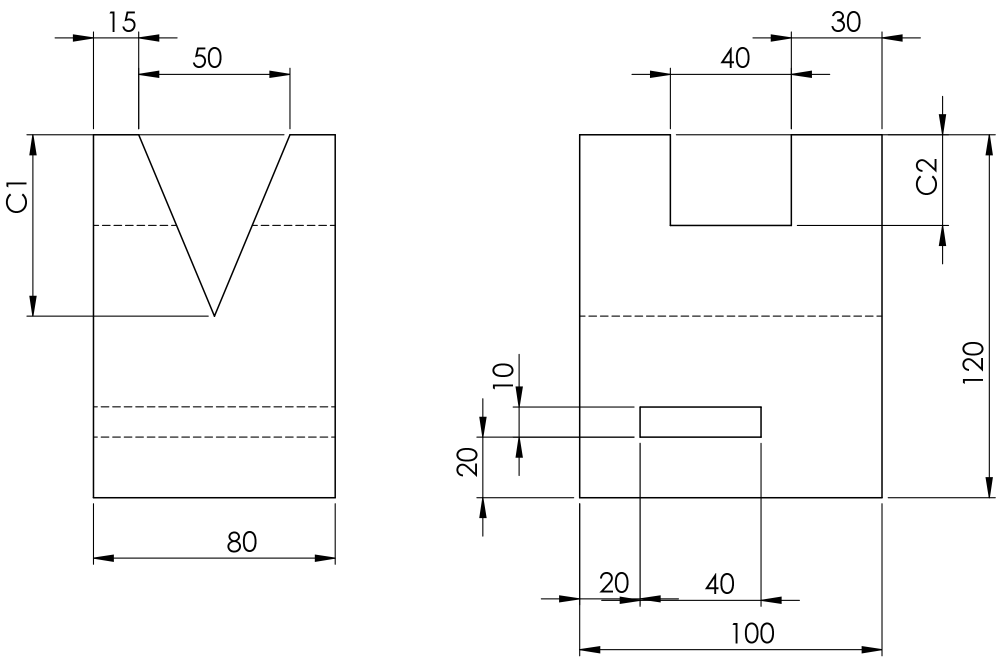


FIGURE 1.7 – Novembre 2018 – Question 1 : plans techniques

	C1	C2
Variante 0	60	30
Variante 1	50	20
Variante 2	70	40



TOLERANCES GENERALES
MATERIAU
ECHELLE 1:2
UNITES mm
FORMAT A4
Projection Européenne
AUTEUR Edouard Rivière-Lorphèvre
ANNEE D'ETUDE 2019-2020
TITRE DU COURS/PROJET GEOCOM
TITRE DU PLAN Test de remédiation
Remplace
Remplacé par
DATE 22-10-19
UMONS POLYTECH MONS
NUMERO DE PLAN

Figure 1.8 – Novembre 2019 – Question 1 : plans techniques

1.1.9 Janvier 2014 – Question 1

Énoncé

La figure 1.9 donne le plan d'une pièce donnant une vue de face et une vue de profil **droit**.

On demande de :

- représenter en isométrie la pièce en employant une échelle 1:1 (**on demande spécifiquement de respecter les conventions vues au cours pour l'orientation de la pièce**: le plan horizontal est le plan Oxy);
- rajouter au plan donné à la figure 1.10 la vue de dessus de la pièce.

1.1.10 Janvier 2015 : Question 1

Énoncé

La figure 1.11 présente la vue de face et de profil droit d'une pièce (échelle 1:2). On demande:

- de représenter sur la figure 5.4 la vue en isométrie de la pièce (en respectant **impérativement** les conventions du cours concernant l'orientation du système d'axe);
- de représenter sur la figure 1.12 la vue de dessus de la pièce obtenue par l'intermédiaire de construction géométrique (ne reportez pas de distances car l'impression modifie le rapport d'échelle); à cet effet, placez sur le plan la ligne de terre et la ligne de terre secondaire que vous avez choisies;
- de représenter sur ce même plan la vue en vraie grandeur (obtenue par la méthode de rotation) de la face inclinée de la pièce mentionnée sur la plan initial.

1.1.11 Janvier 2016 – Question 1

Énoncé

La figure 1.13 donne le plan d'une pièce suivant les conventions de dessin technique. On demande de représenter sur la figure 5.4 la vue en isométrie de cette pièce. Veillez à suivre les conventions du cours (choix du facteur d'échelle, orientation des axes,...).

1.1.12 Janvier 2017 : Question 1

Énoncé

La figure 1.14 donne le plan coté d'une pièce suivant les conventions de dessin technique (une vue de face et une vue de dessus). On demande:

1. de réaliser (par construction) sur la figure 1.15 la mise en vraie grandeur de la face inclinée (cette face est hachurée sur le plan);
2. de représenter sur la figure 5.4 la vue en isométrie de cette pièce.

Veillez à suivre les conventions du cours (choix du facteur d'échelle, orientation des axes,...).

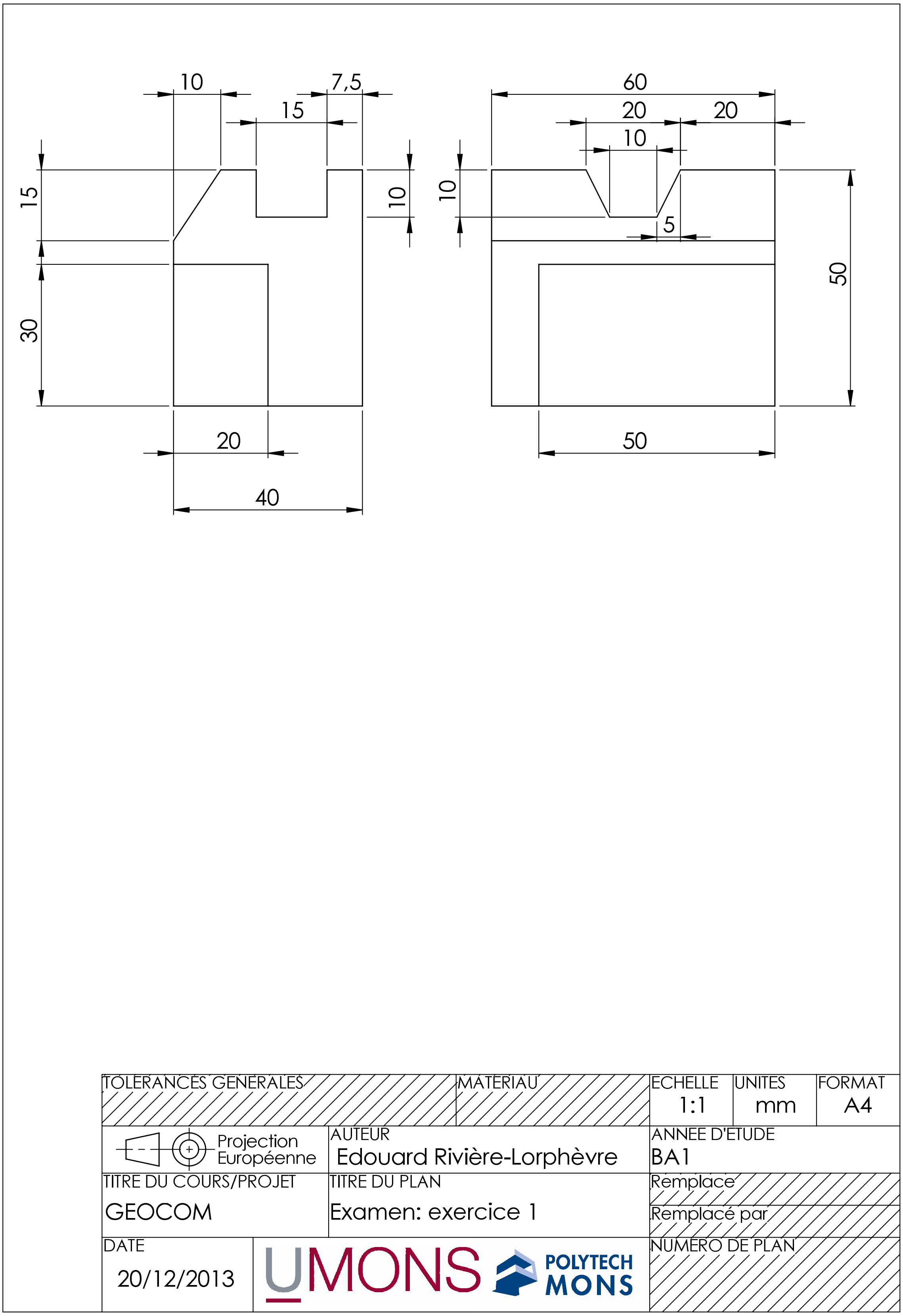
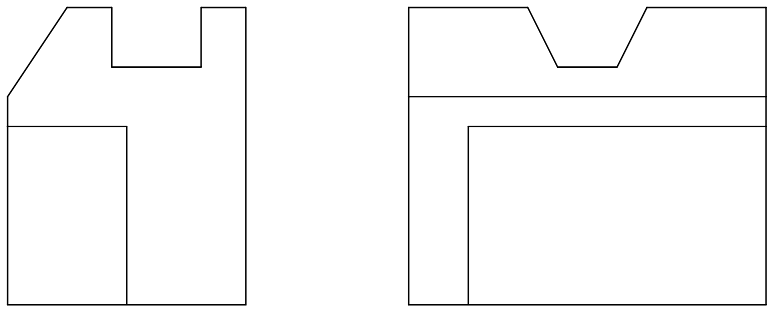
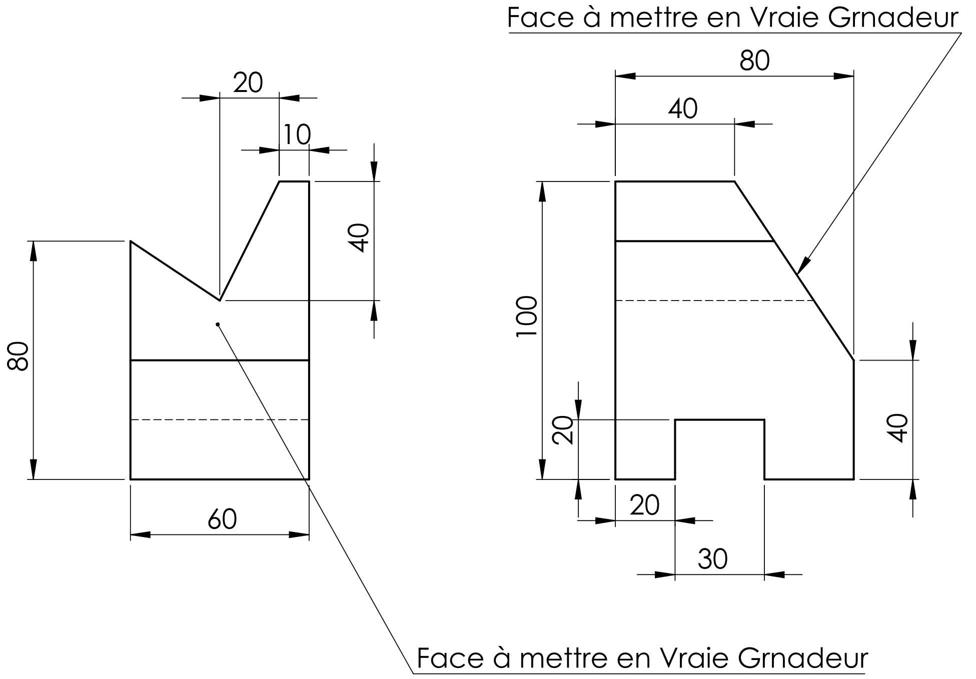


FIGURE 1.9 – Janvier 2014 – Question 1 : énoncé



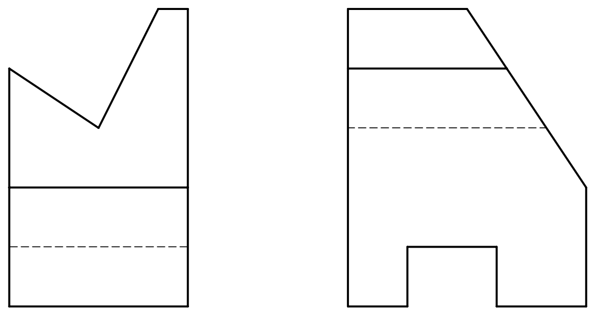
TOLERANCES GENERALES	MATERIAU	ECHELLE 1:1	UNITES mm	FORMAT A4
Projection Européenne	AUTEUR Edouard Rivière-Lorphèvre	ANNEE D'ETUDE BA1		
TITRE DU COURS/PROJET GEOCOM	TITRE DU PLAN Examen: exercice 1	Remplace		
		Remplacé par		
DATE 18/05/2016	UMONS POLYTECH MONS	NUMERO DE PLAN		

FIGURE 1.10 – Janvier 2014 – Question 1 : épure à compléter



TOLERANCES GENERALES	MATERIAU	ECHELLE 1:2	UNITES mm	FORMAT A4
Projection Européenne	AUTEUR David Wattiaux	ANNEE D'ETUDE		
TITRE DU COURS/PROJET GéoCom	TITRE DU PLAN Janvier 2015 - Question 1	Remplace		
		Remplacé par		
DATE 18/05/2016		NUMERO DE PLAN		

Figure 1.11 – Janvier 2015 : Question 1 : énoncé



TOLERANCES GENERALES	MATERIAU	ECHELLE 1:2	UNITES mm	FORMAT A4
Projection Européenne	AUTEUR David Wattiaux	ANNEE D'ETUDE		
TITRE DU COURS/PROJET AAA	TITRE DU PLAN Janvier 2015 - Question 1	Remplace Remplacé par		
DATE 18/05/2016	UMONS POLYTECH MONS	NUMERO DE PLAN		

Figure 1.12 – Janvier 2015 : Question 1 : épure à compléter

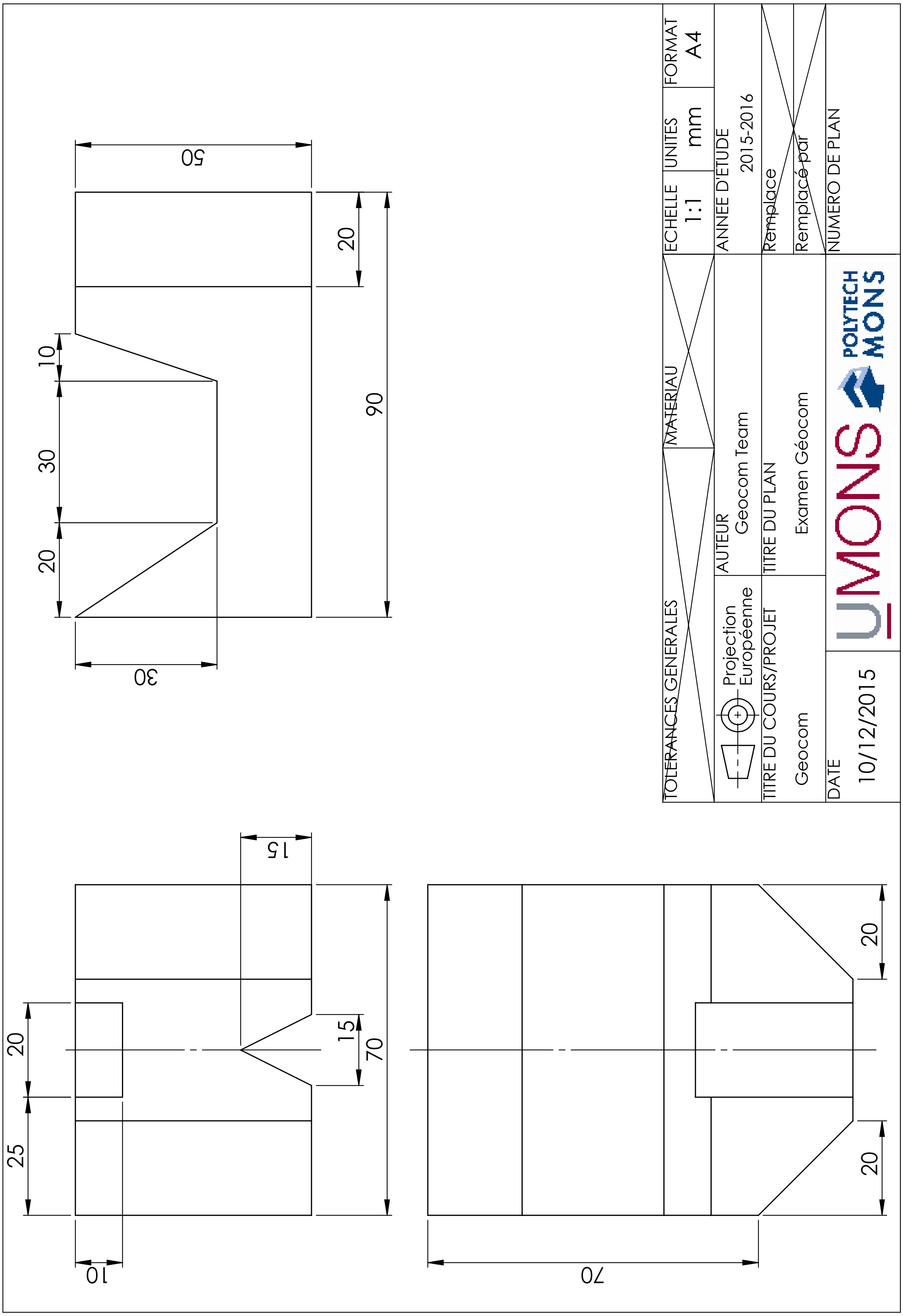


Figure 1.13 – Janvier 2016 – Question 1 : plans techniques de la pièce

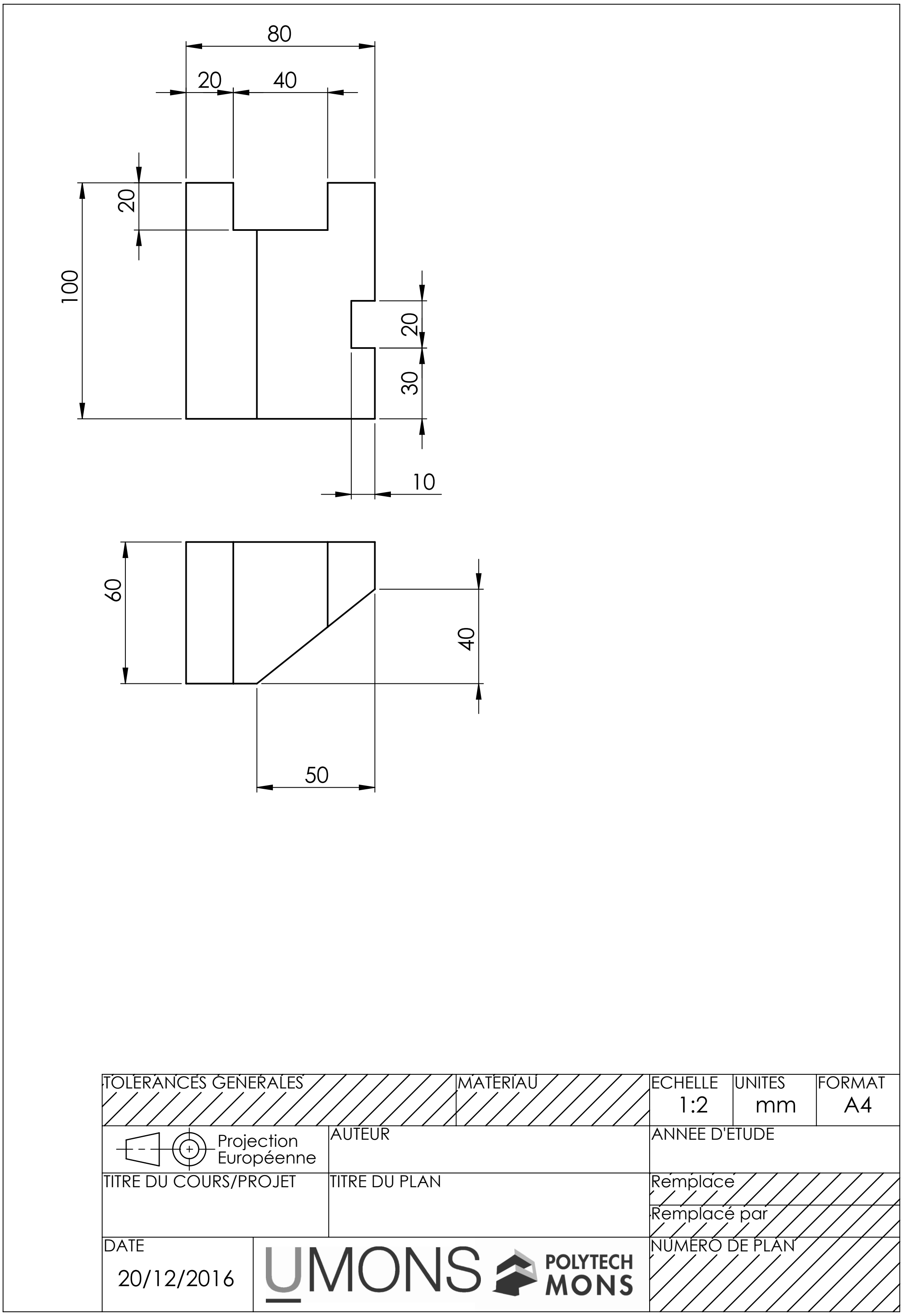


Figure 1.14 – Janvier 2017 : Question 1 – Cotations

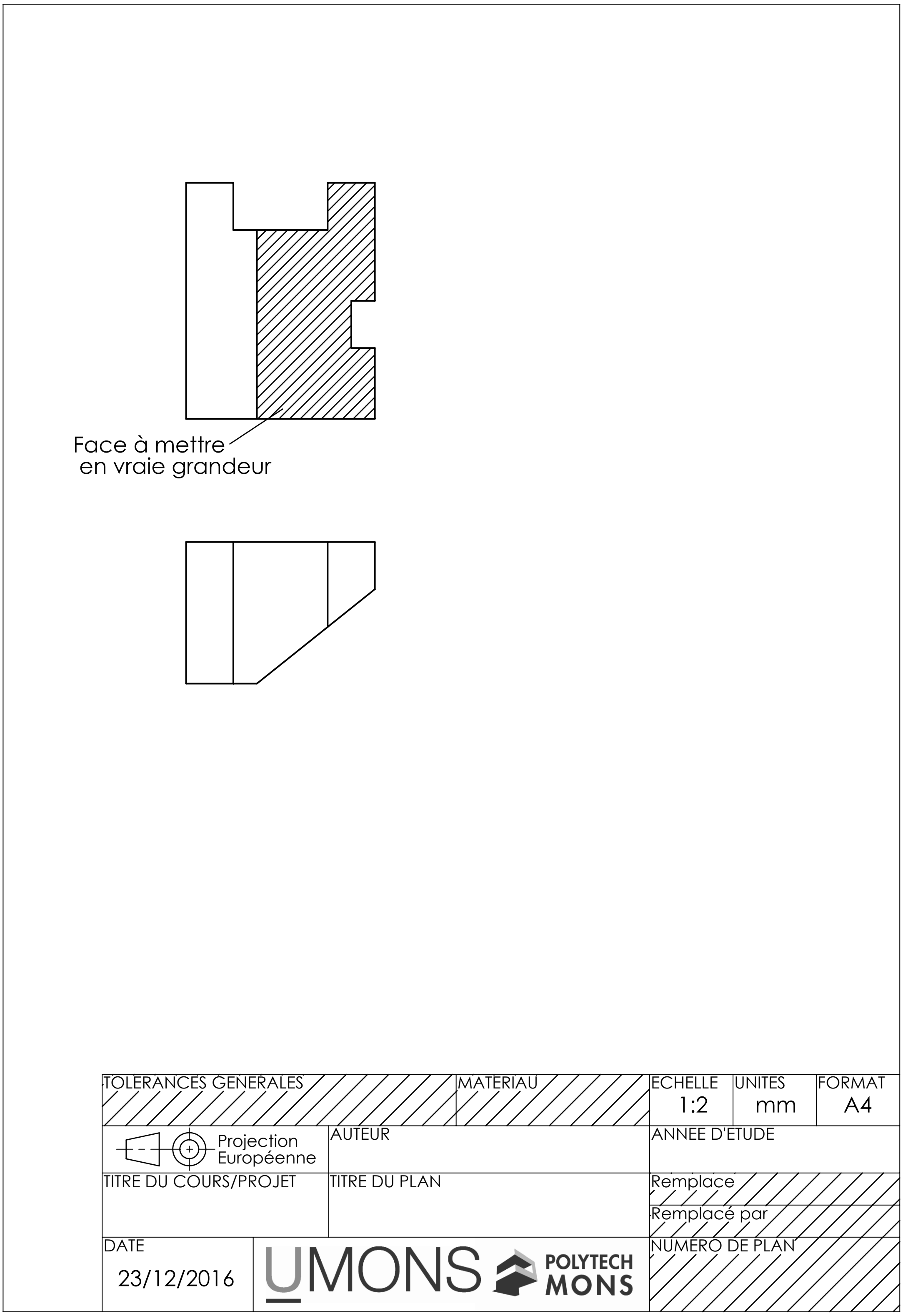


Figure 1.15 – Janvier 2017 : Question 1 – Plan à compléter

1.1.13 Janvier 2018 : Question 1

Énoncé

La Figure 1.16 présente le plan technique d'une pièce (vue de face et vue de dessus) avec ses cotations. On demande:

1. de représenter sur la Figure 5.4 la vue en isométrie de cette pièce en respectant impérativement les règles d'orientation des axes vues au cours;
2. de représenter sur la Figure 1.17 la vue en vraie grandeur de la face inclinée de la pièce (procédez uniquement par constructions géométriques, l'impression du document peut avoir introduit un facteur d'échelle sur le plan).

1.1.14 Janvier 2019 : Question 1

Énoncé

La figure 1.18 présente la vue de face et de profil *droit* d'une pièce (échelle 1:2). On demande:

1. de représenter sur la figure 5.4 la vue en isométrie de la pièce (en respectant **impérativement** les conventions du cours concernant l'orientation du système d'axes);
2. de représenter sur la figure 1.19 la vue de dessus de la pièce obtenue par l'intermédiaire de constructions géométriques (ne reportez pas de distances car l'impression modifie le rapport d'échelle); à cet effet, placez sur le plan la ligne de terre et la ligne de terre secondaire qui ont été choisies. N'oubliez pas de compléter le cartouche.

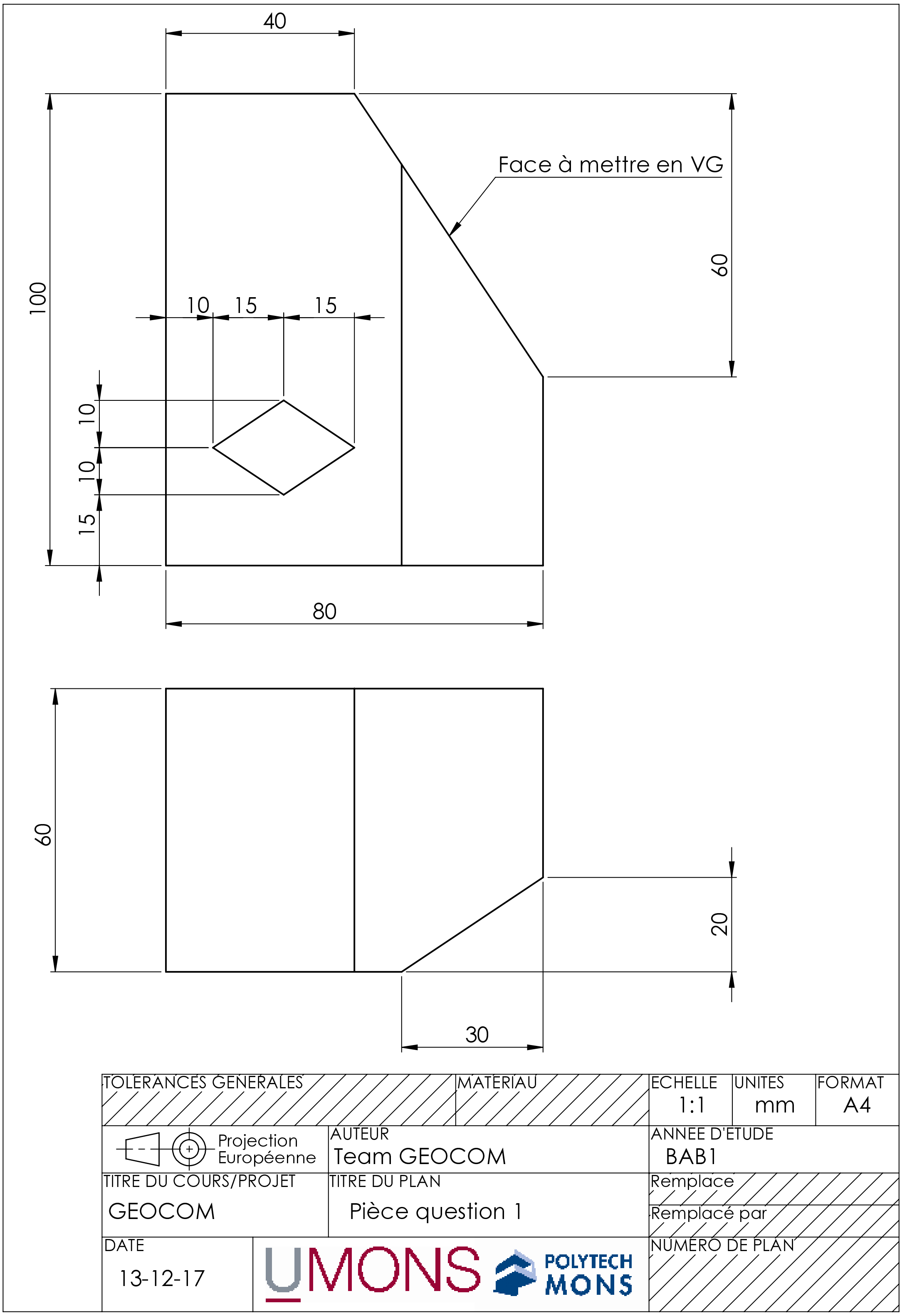


FIGURE 1.16 – Janvier 2018 : Question 1 – Plans techniques de la pièce

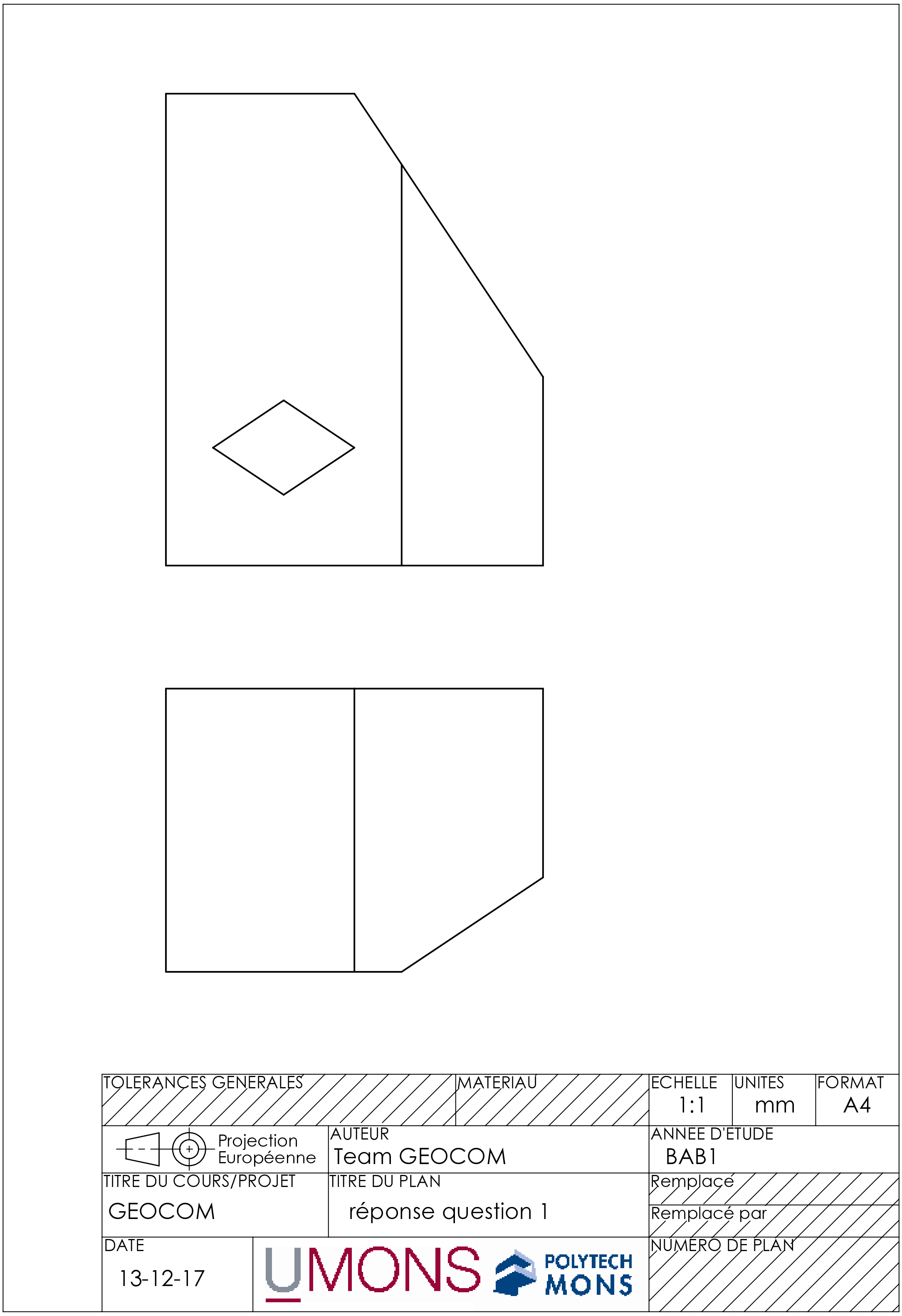


FIGURE 1.17 – Janvier 2018 : Question 1 – Plans à compléter

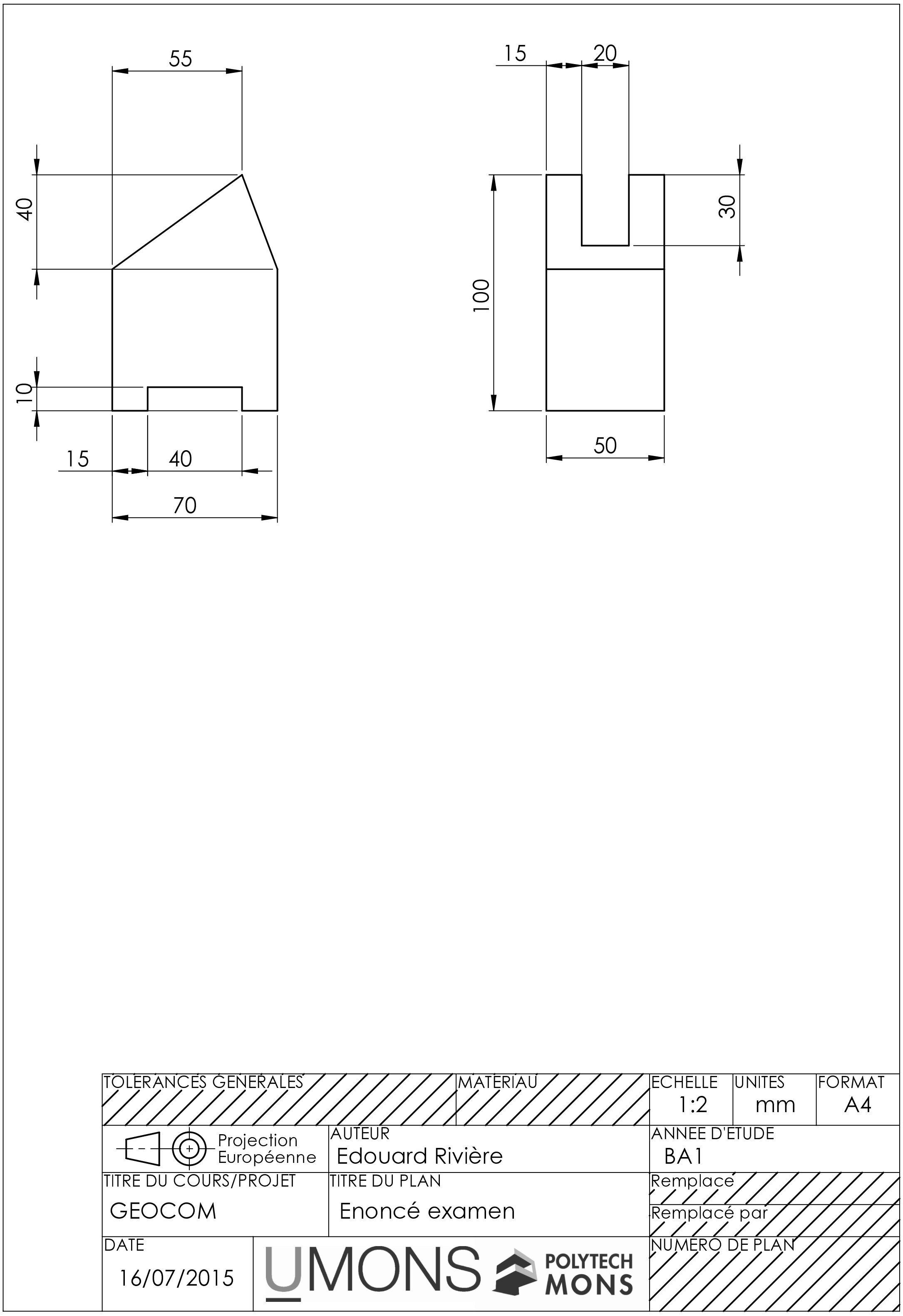


FIGURE 1.18 – Janvier 2019 : Question 1 – Plans techniques de la pièce

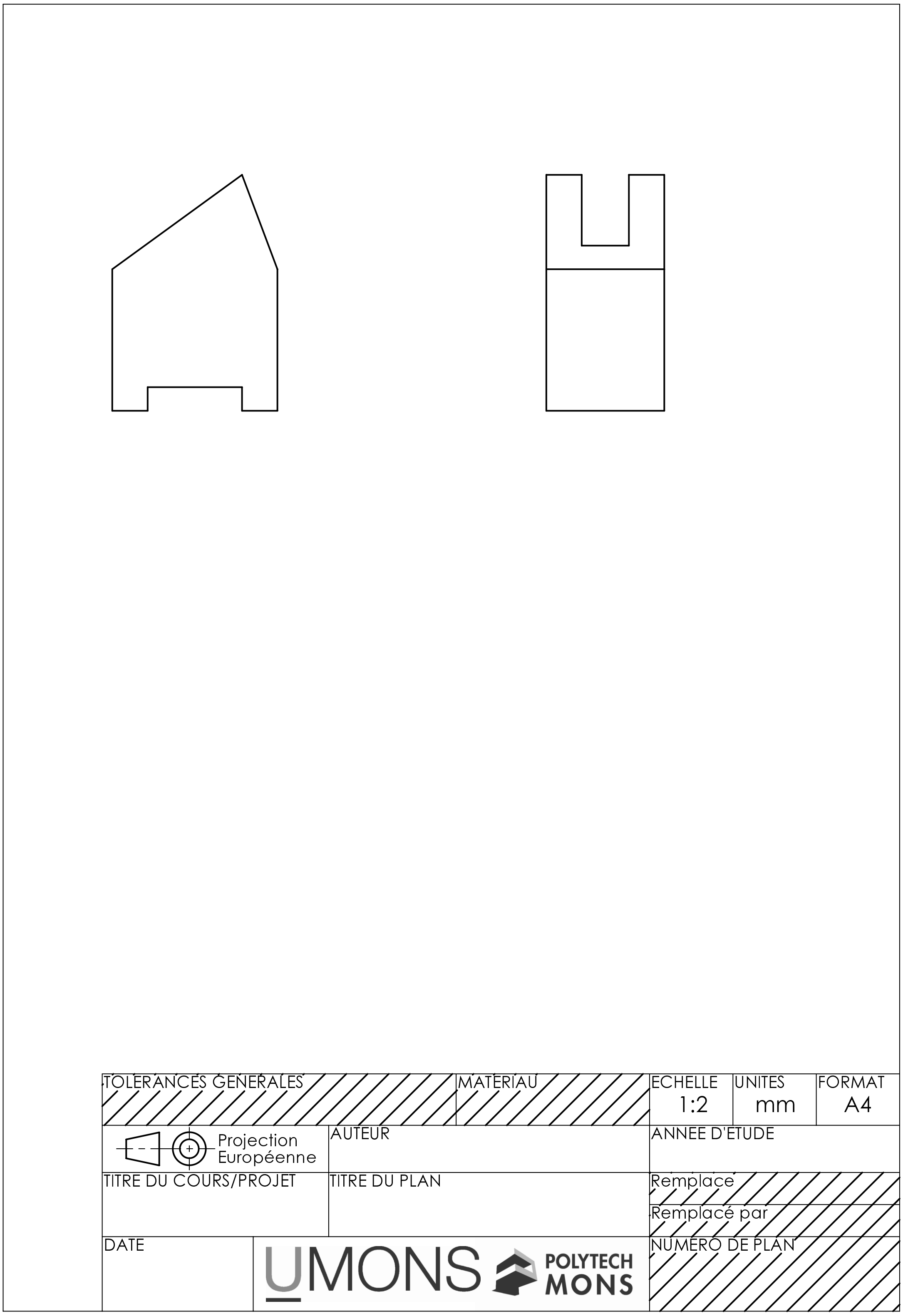


Figure 1.19 – Janvier 2019 : Question 1 – Plans à compléter

1.1.15 Novembre 2020 – Question 1

Énoncé

La vue de face et la vue de dessus d'une pièce sont renseignées sur le plan technique donné à la figure 1.20. Trois des cotes sont variables selon les paramètres $dim1$, $dim2$ et $dim3$ (reprises dans le tableau 1.3, le plan n'est donc pas strictement à l'échelle). On demande de représenter, sur la figure 1.21 ou 1.22 (selon votre variante), la vue en isométrie de cette pièce en employant **obligatoirement** une échelle normalisée que vous préciserez sur le plan. Veillez à respecter **impérativement** les conventions du cours concernant l'orientation de la pièce par rapport au système d'axes renseigné sur la figure de départ. Nous vous recommandons de représenter uniquement les arêtes vues.

variante	axes	dim1	dim2	dim3
0	120°	60	90	70
1	60°	60	90	70
2	120°	80	90	60
3	60°	80	90	60
4	120°	110	100	80

TABLE 1.3 – Données en fonction de la variante attribuée

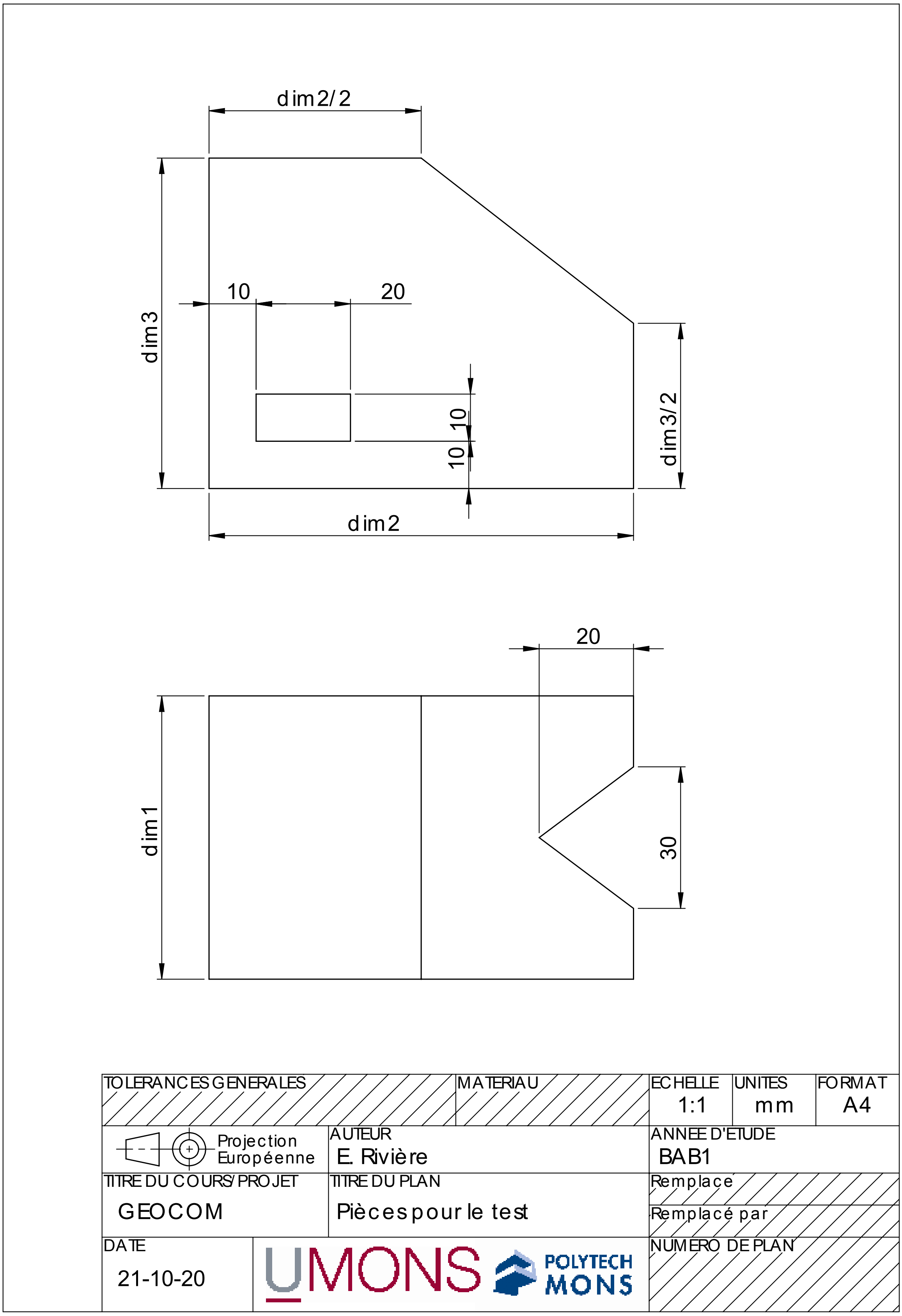


FIGURE 1.20 – Novembre 2020 – Question 1 : plans techniques de la pièce

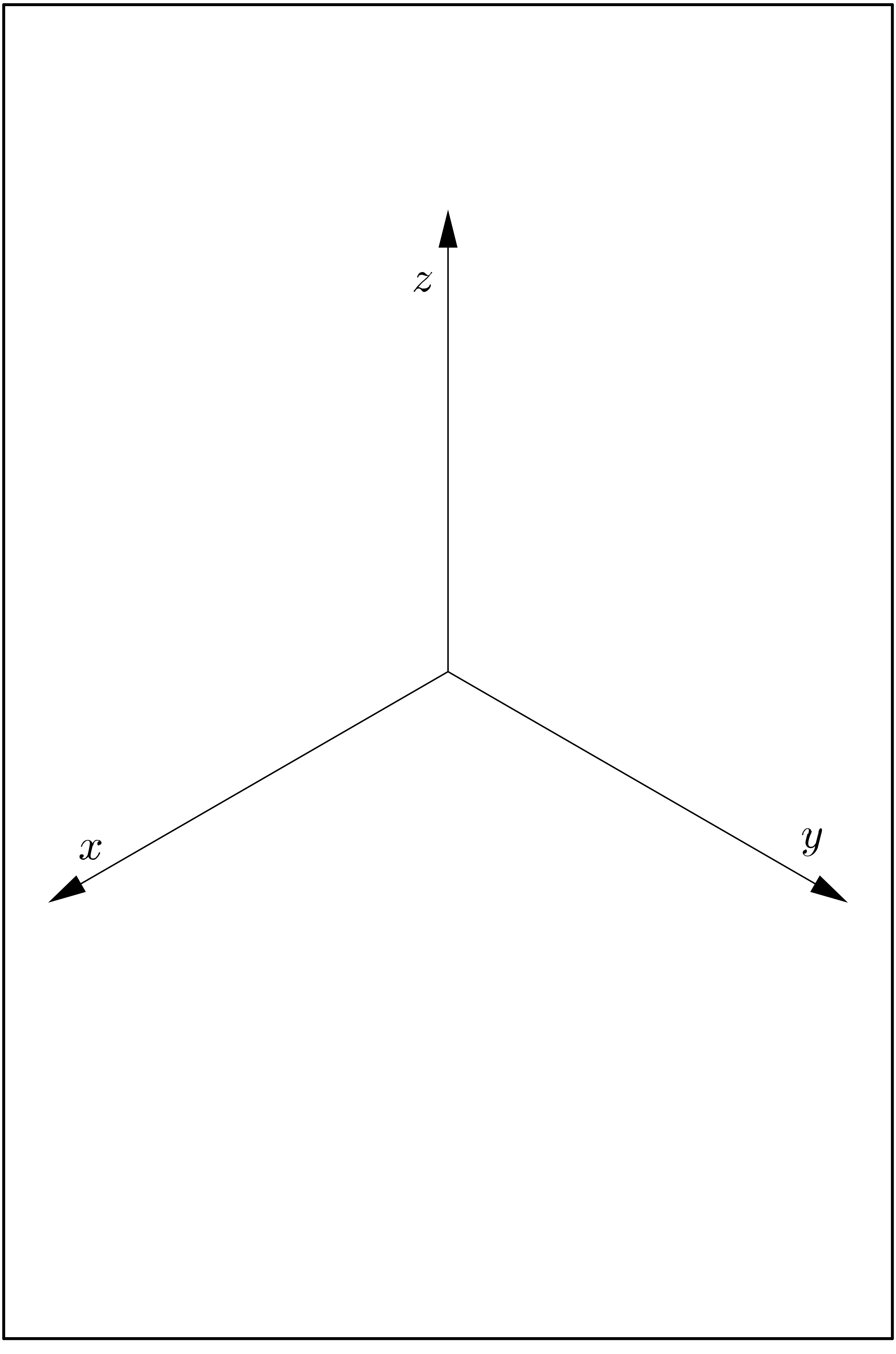


FIGURE 1.21 – Novembre 2020 – Question 1 : Axes à 120°

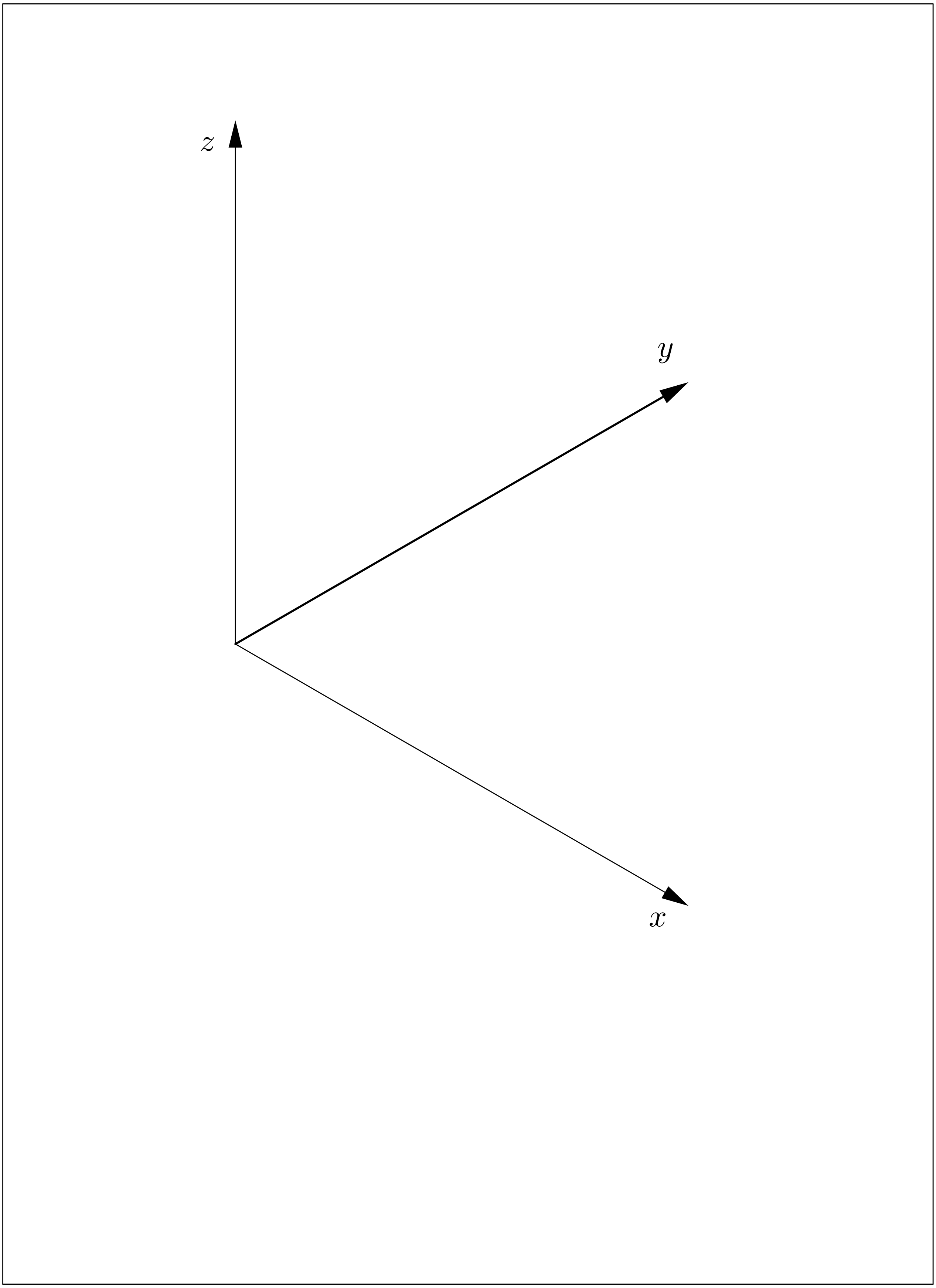


FIGURE 1.22 – Novembre 2020 – Question 1 : Axes à 60°

1.1.16 Novembre 2021 – Question 1

Énoncé

La vue de face et la vue de droite d'une pièce sont renseignées sur le plan technique donné à la figure 1.23. Une partie des cotes est calculée à partir d'une variable X (reprise dans le tableau 1.4, le plan n'est donc pas strictement à l'échelle). On demande de représenter, sur la figure 5.4, la vue en isométrie de cette pièce en employant **obligatoirement** une échelle normalisée que vous préciserez sur le plan.

Veillez à respecter **impérativement** les conventions du cours concernant l'orientation de la pièce par rapport au système d'axes renseigné sur la figure de départ. Nous vous recommandons de représenter uniquement les arêtes vues. Le numéro de votre variante est le reste de la division de votre numéro d'ordre par 5.

variante	X
0	50 mm
1	45 mm
2	40 mm
3	35 mm
4	30 mm

TABLE 1.4 – Données en fonction de la variante attribuée

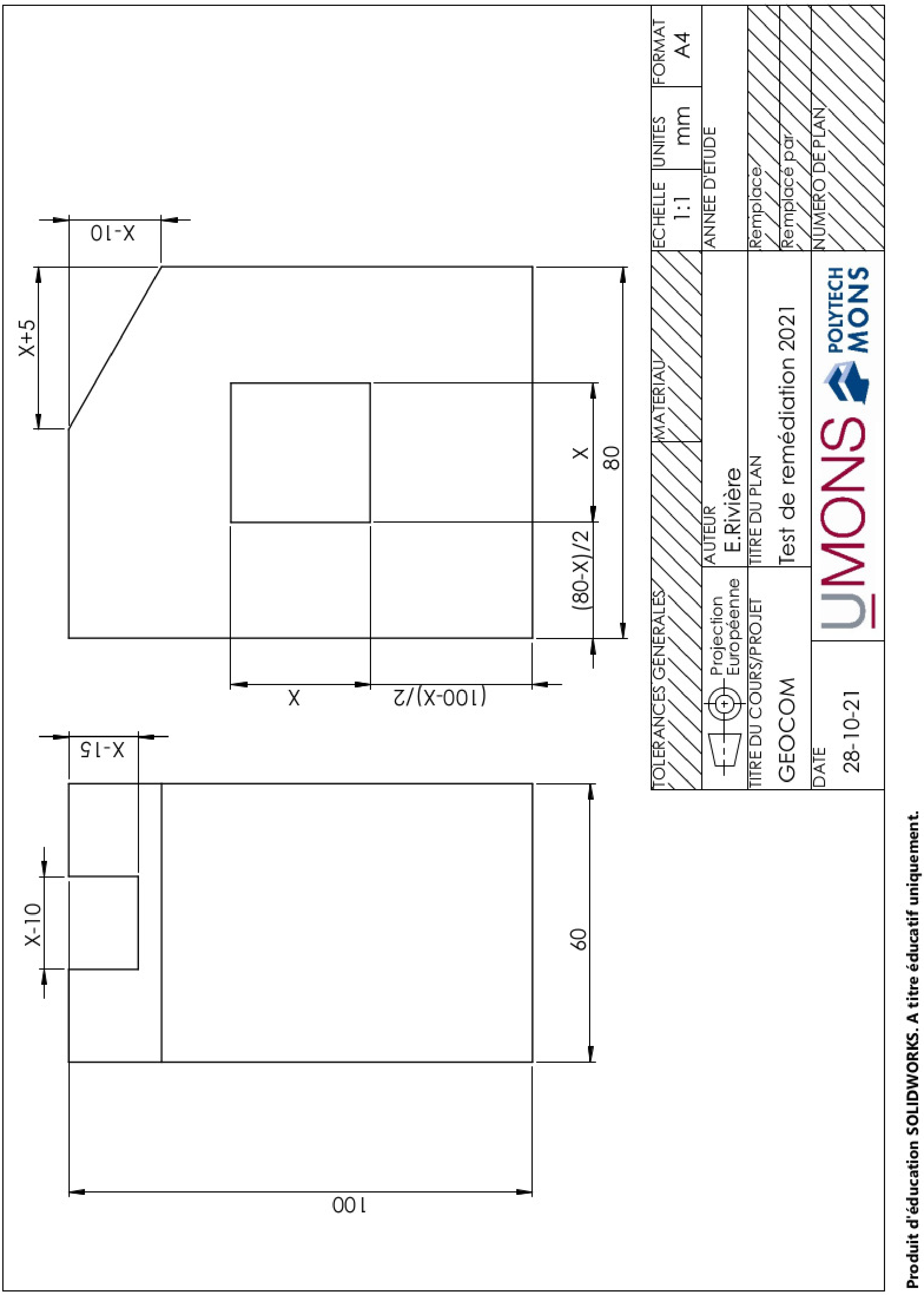


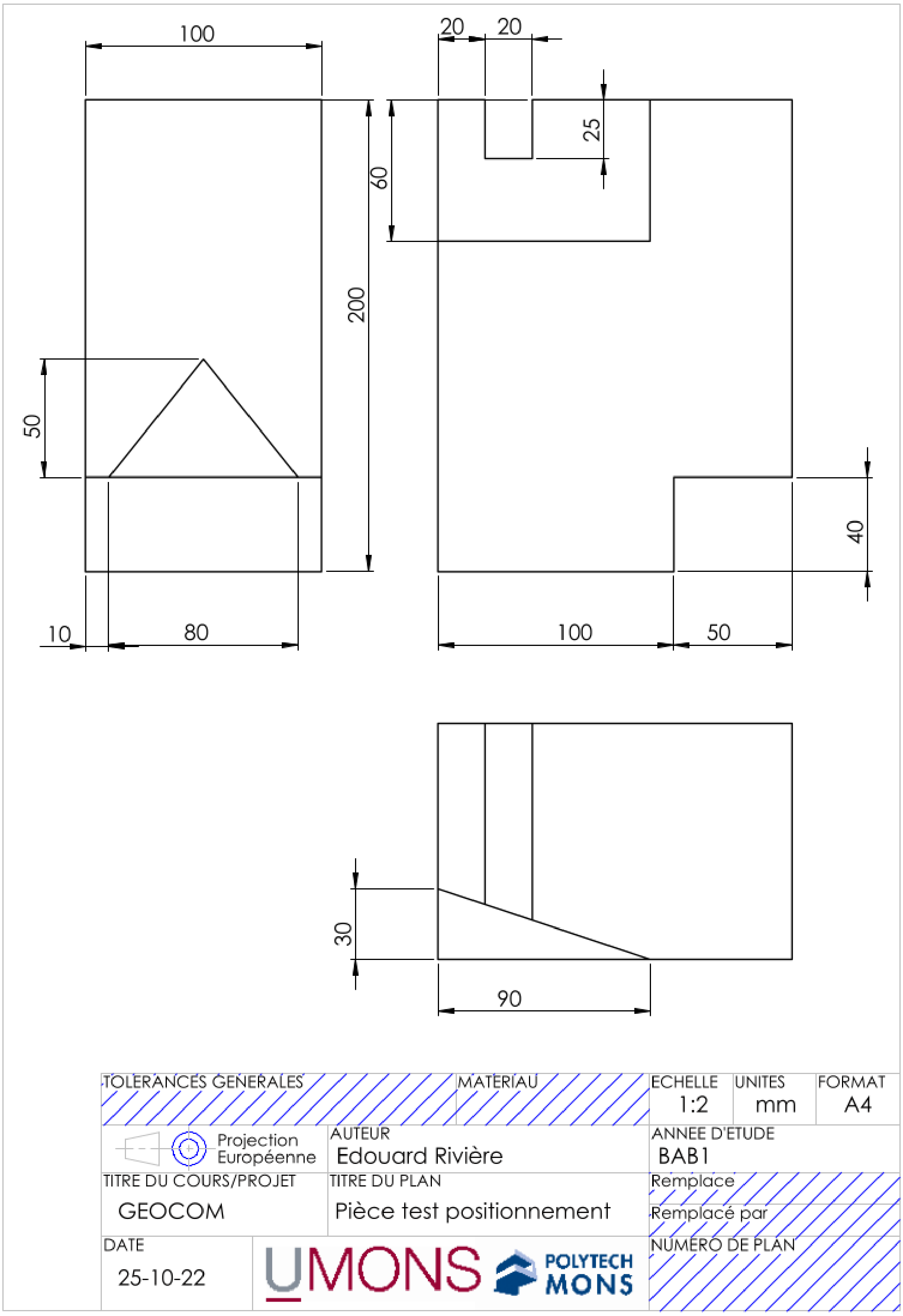
FIGURE 1.23 – Novembre 2021 – Question 1 : plans techniques de la pièce

1.1.17 Novembre 2022 – Question 1

Énoncé

Les trois vues standard (de face, de dessus et de droite) d'une pièce sont renseignées sur le plan technique donné à la figure 1.24. On demande de représenter, sur la figure 5.4, la vue en isométrie de cette pièce en employant **obligatoirement** une échelle normalisée que vous préciserez sur le plan.

Veillez à respecter **impérativement** les conventions du cours concernant l'orientation de la pièce par rapport au système d'axes renseigné sur la figure de départ. Nous vous recommandons de représenter uniquement les arêtes vues.



Produit d'éducation SOLIDWORKS – A titre éducatif uniquement.

FIGURE 1.24 – Novembre 2022 – Question 1 : plans techniques de la pièce

1.2 Isométrie vers plans

1.2.1 Exemple 1

Énoncé

La figure 1.25 est une vue isométrique d'une pièce mécanique. Il vous est demandé de réaliser une mise en plan de cette pièce sur la figure 5.21 ou sur la figure 5.27 en employant notamment une vue en coupe passant par le plan de symétrie de la pièce.

1.2.2 Exemple 2

Énoncé

La figure 1.26 représente la vue en isométrie d'une pièce. On demande de dessiner dans le cadre fourni en figure 5.21 ou en figure 5.27 la vue du « dessus », la coupe dans le plan de symétrie de la pièce ainsi que la coupe dans le plan vertical perpendiculaire au plan de symétrie passant par le milieu de la pièce (n'oubliez pas de compléter le cartouche !). Pour la mise en plan de la pièce, uniquement les arêtes vues seront représentées.

1.2.3 Novembre 2013 – Question 1

Énoncé

La vue isométrique d'une pièce est donnée à la figure 1.27. On demande de dessiner les six vues de cette pièce en respectant les conventions du dessin technique et de remplir le cartouche.

1.2.4 Janvier 2013 – Question 1

Énoncé

La vue isométrique d'une pièce est donnée à la figure 1.28. On demande de dessiner les six vues de cette pièce en respectant les conventions du dessin technique et de remplir le cartouche fourni en figure 5.21 ou en figure 5.27.

1.2.5 Janvier 2014 – Question 2

Énoncé

La figure 1.29 présente les dimensions d'un volume représenté en isométrie. On demande de dessiner les six vues standard de ce volume. Le choix du facteur d'échelle est libre (pour autant qu'il soit en accord avec la norme).

1.2.6 Janvier 2014 – Question 3

Énoncé

La figure 1.30 présente les dimensions d'un volume représenté en isométrie (les arrêtes cachées sont également dessinées. On demande de reproduire le plan de cette pièce (le choix du nombre de vues est à votre appréciation) en faisant obligatoirement une coupe passant par le plan de symétrie de la pièce. Le choix du facteur d'échelle est libre (pour autant qu'il soit en accord avec la norme). Le cartouche doit être complété.

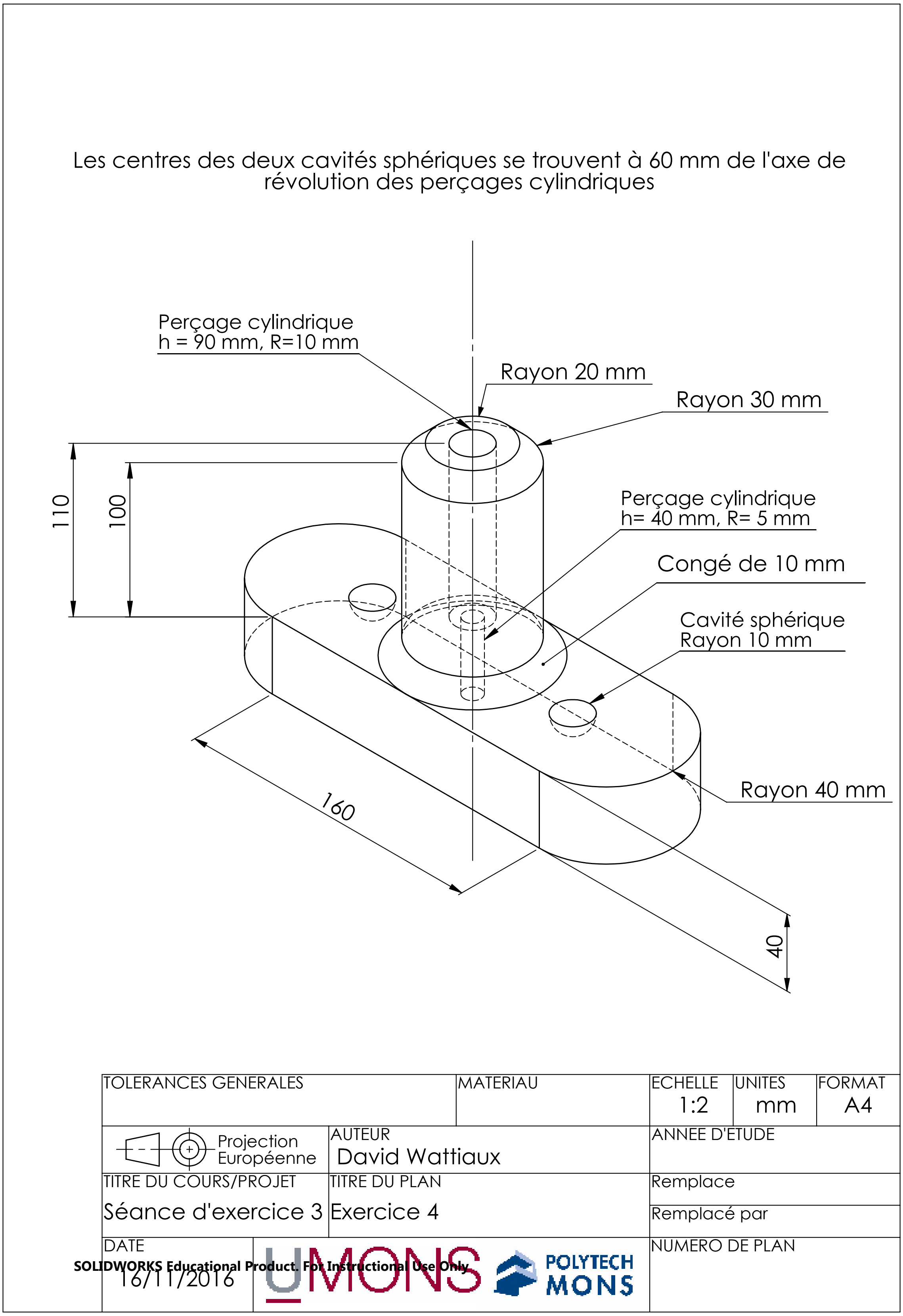


FIGURE 1.25 – Exemple 1 : vue en isométrie de la pièce

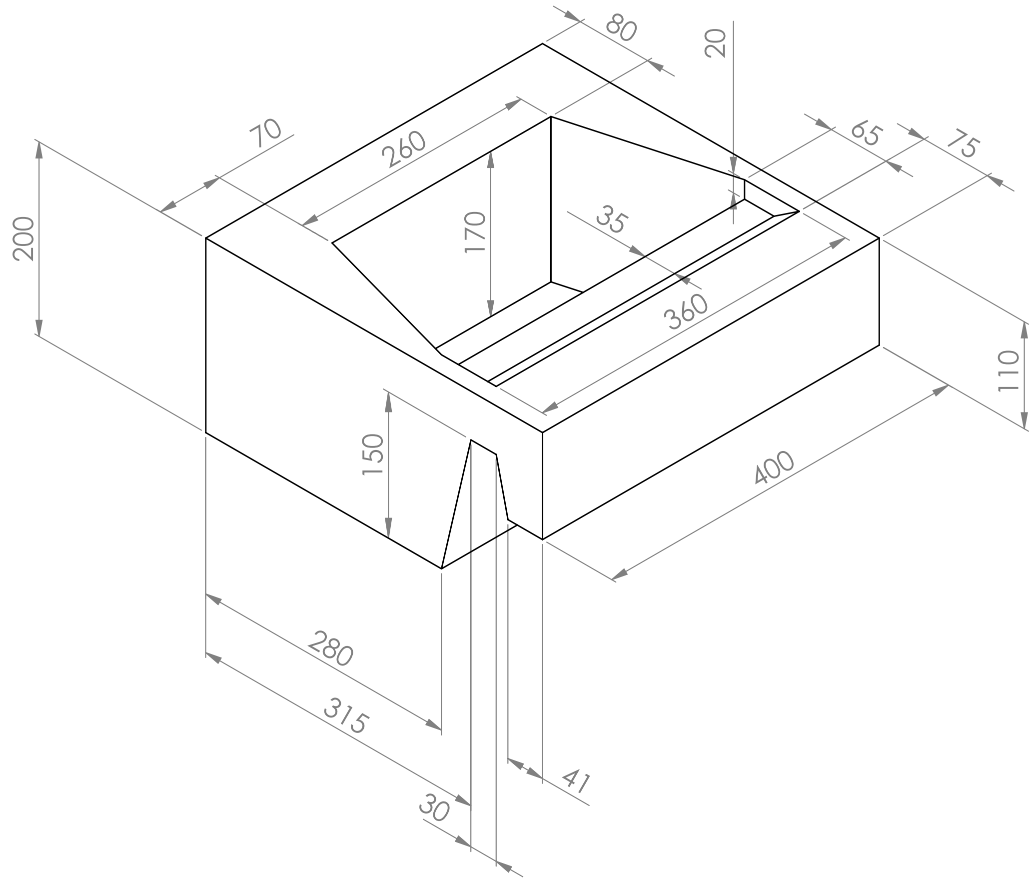


FIGURE 1.26 – Exemple 2 : vue en isométrie de la pièce

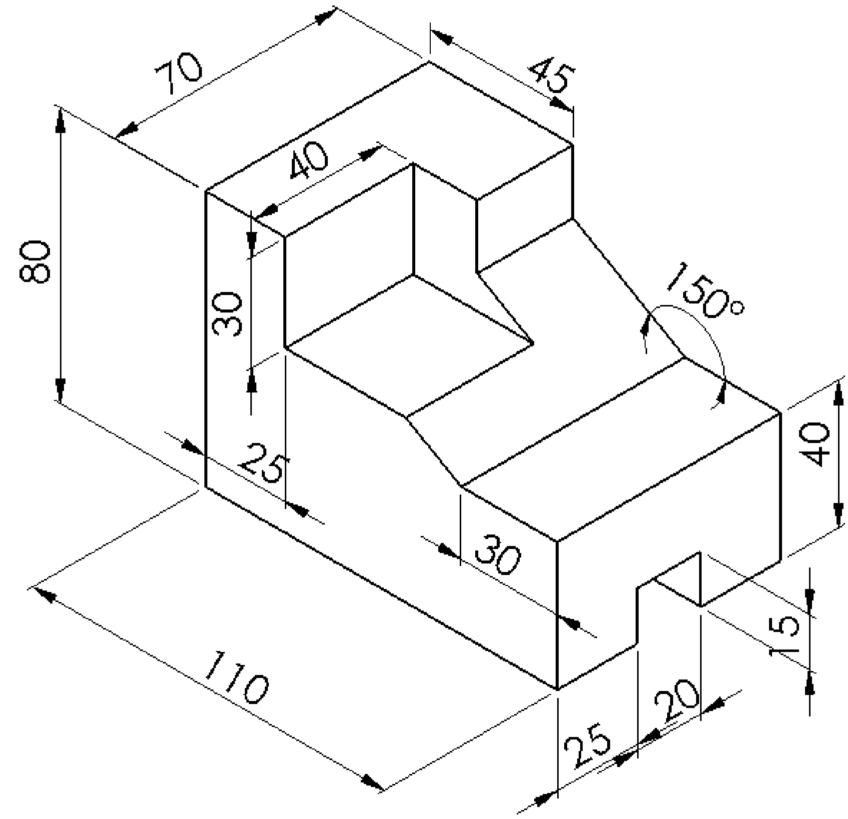


FIGURE 1.27 – Novembre 2013 – Question 1

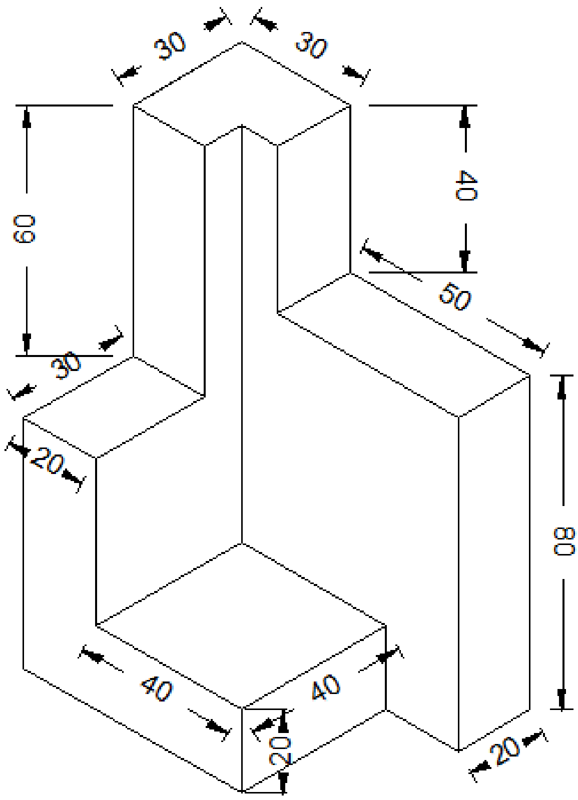


FIGURE 1.28 – Janvier 2013 – Question 1

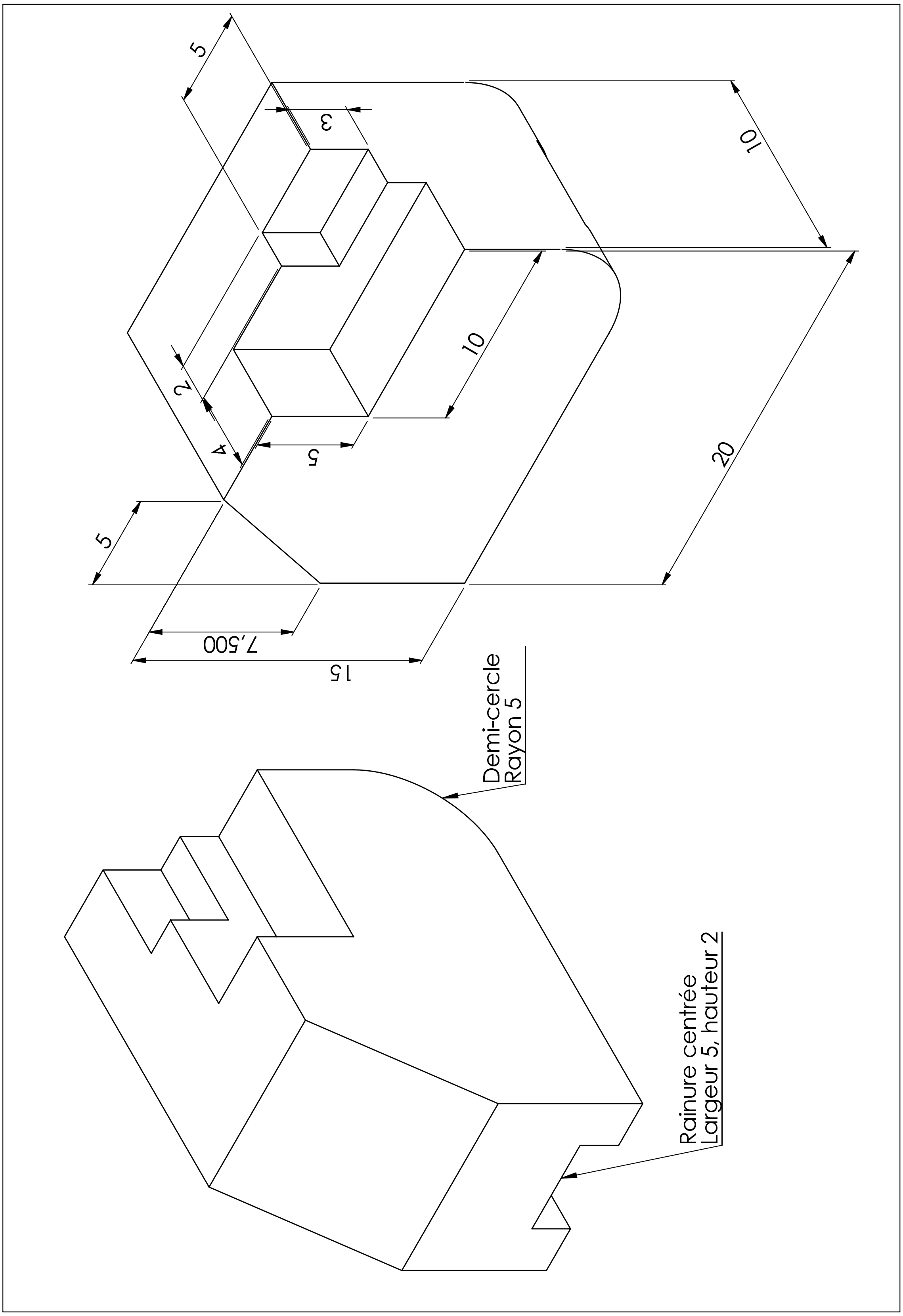


Figure 1.29 – Janvier 2014 – Question 2

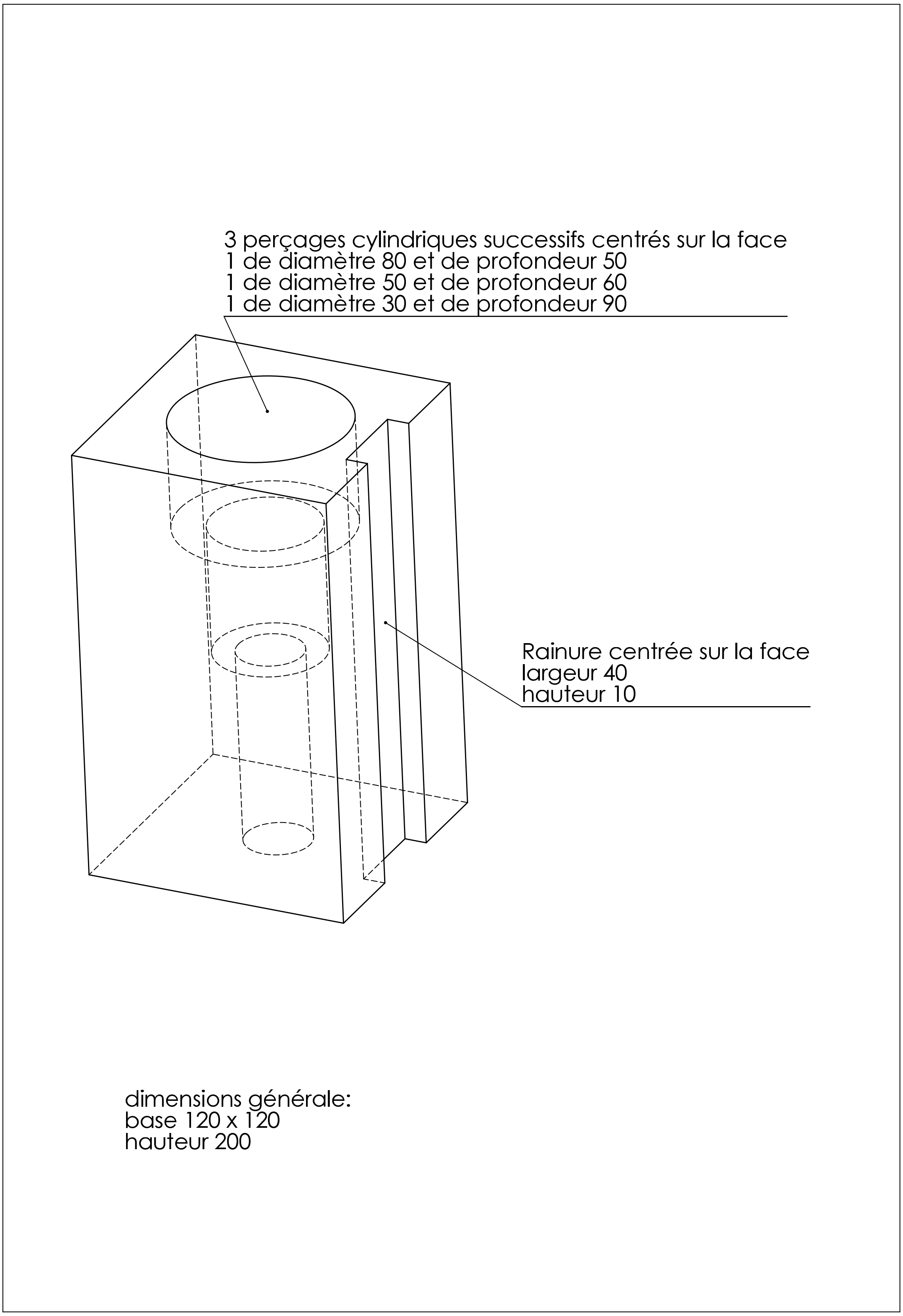


Figure 1.30 – Janvier 2014 – Question 3

1.2.7 Novembre 2014 – Question 1 (série 1)

Énoncé

La vue isométrique d'une pièce est donnée à la figure 1.31. On demande de dessiner (sur le plan fourni en figure 5.21 ou en figure 5.27) les vues et coupes de cette pièce que vous jugerez nécessaires pour sa représentation en plan. Veillez à respecter les conventions du dessin technique et remplissez le cartouche.

1.2.8 Janvier 2015 – Question 3

Énoncé

La vue isométrique d'une pièce est donnée à la figure 1.32. On demande de dessiner (sur le plan fourni en figure 5.21 ou en figure 5.27) les vues et/ou coupes de cette pièce pour sa représentation en plan (la cotation n'est pas demandée). Veillez à respecter les conventions du dessin technique et remplissez le cartouche.

1.2.9 Janvier 2016 – Question 2

Énoncé

La figure 1.33 est une vue isométrique d'une pièce mécanique. Il vous est demandé de réaliser une mise en plan de cette pièce sur la figure 5.21 ou sur la figure 5.27 en employant notamment une vue en coupe par le plan de symétrie de la pièce. Le soin et le respect des conventions du dessin technique interviendront pour une partie significative de la cotation.

1.2.10 Novembre 2016 – Question 2

Énoncé

La figure 1.34 présente la vue en isométrie d'une pièce avec mention de ses dimensions. Si on exclu l'encoche de 10x10x15, la pièce présente deux plans de symétrie. On demande de réprésenter en figure 5.27 le plan cette pièce. Veillez à respecter les conventions du dessin technique et n'oubliez pas de remplir le cartouche. La précision et le soin apportés au dessin feront partie des critères de cotation. Vous choisirez le nombre de vues que vous jugez nécessaire à la représentation de la pièce (il n'est donc pas nécessaire de représenter les six vues).

1.2.11 Janvier 2020 – Question 2

Énoncé

La figure 1.35 présente les dimensions du couvercle inférieur du sabre laser de Mace Windu représenté en isométrie. Ce volume présente une symétrie de révolution et trois perçages cylindriques de **rayon** 10, 15 et 20 *mm* successifs. Ils ont pour profondeur respective 10, 60 et 35 mm (les distances entre centres sont reprises sur la figure 1.35). La pièce présente aussi un chanfrein de 10x45° sur sa partie supérieure et un congé de rayon 10 *mm* sur sa partie inférieure. Le fond de la pièce est plat et sa hauteur totale est de 120 *mm*.

On demande de dessiner sur la figure 5.21 le nombre de vue minimal nécessaire pour représenter la pièce de façon explicite en réalisant obligatoirement une coupe. Le choix du facteur d'échelle est libre (pour autant qu'il soit en accord avec la norme). Le cartouche doit être complété à partir des informations reprises sur la figure 1.35.

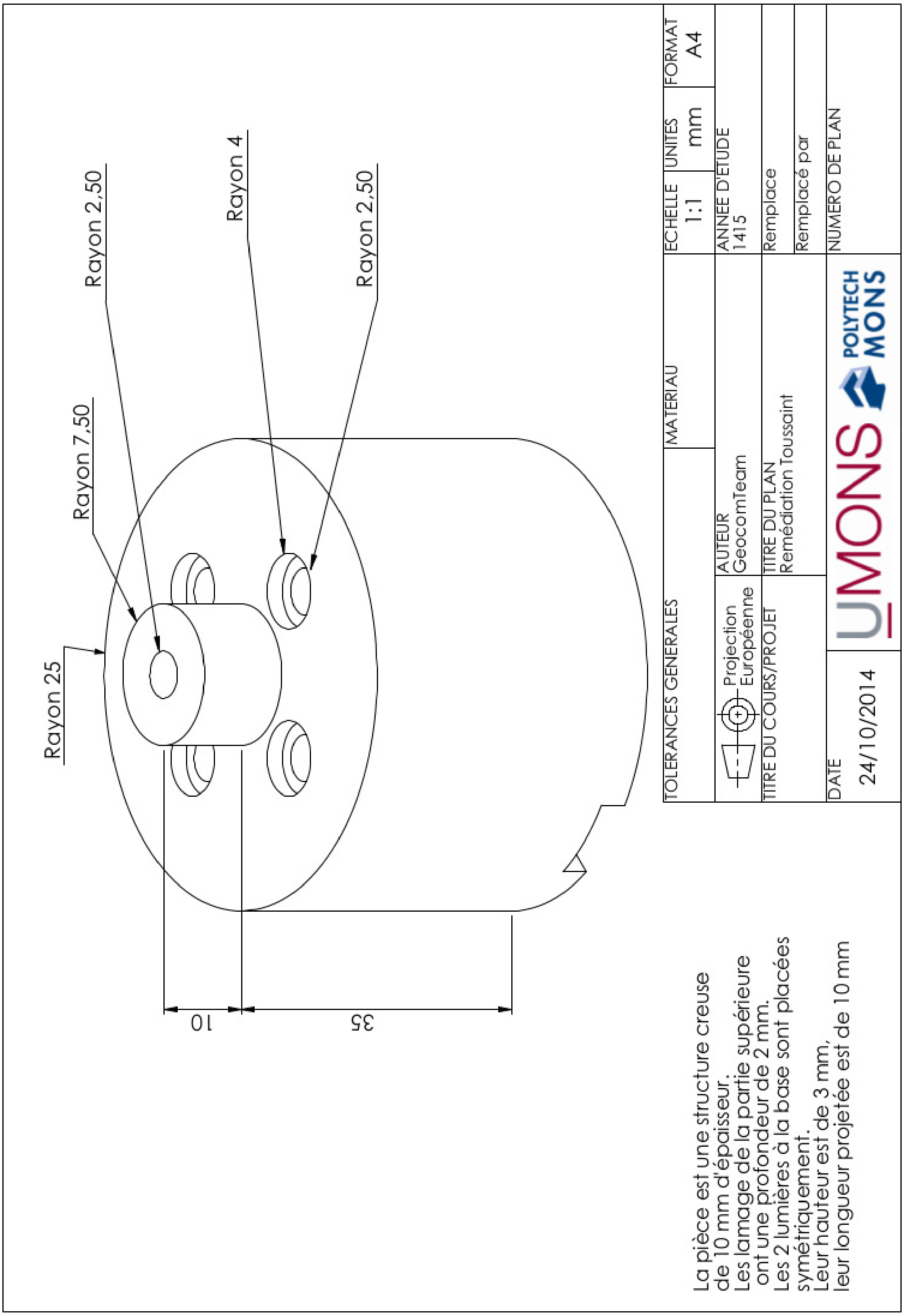
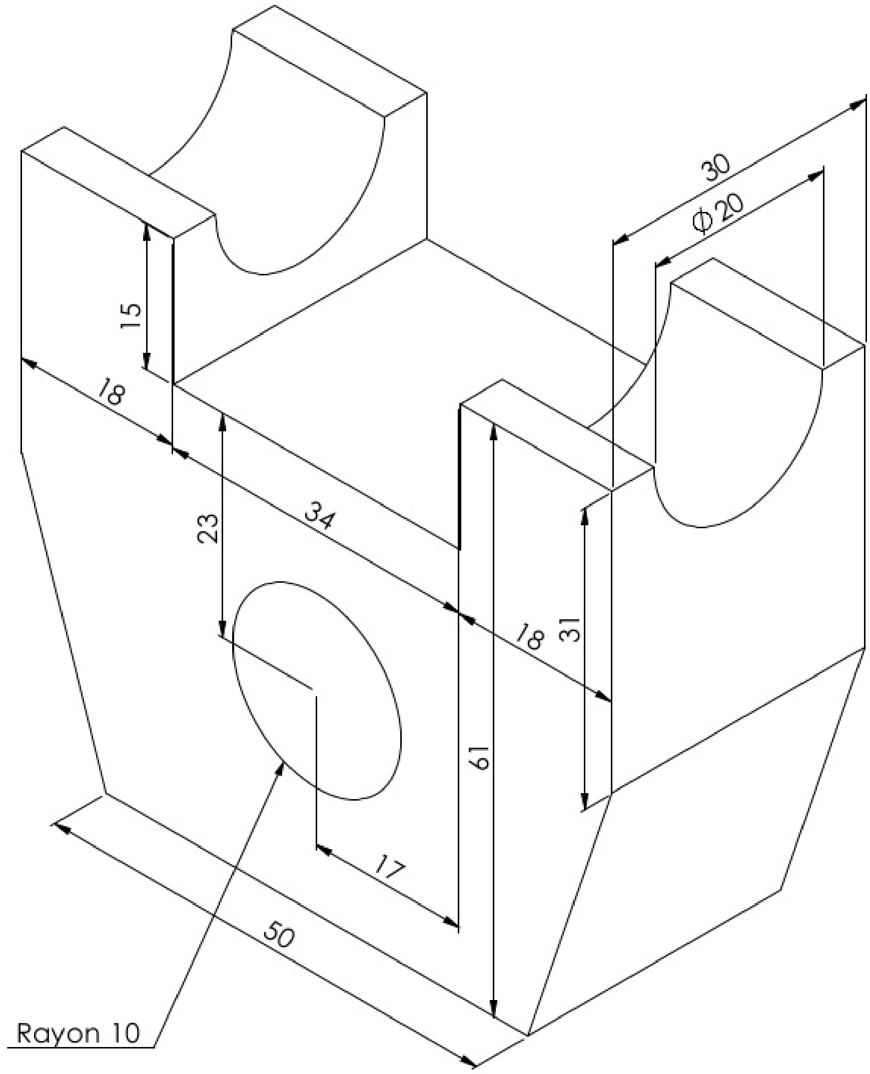


FIGURE 1.31 – Novembre 2014 – Question 1 (série 1)

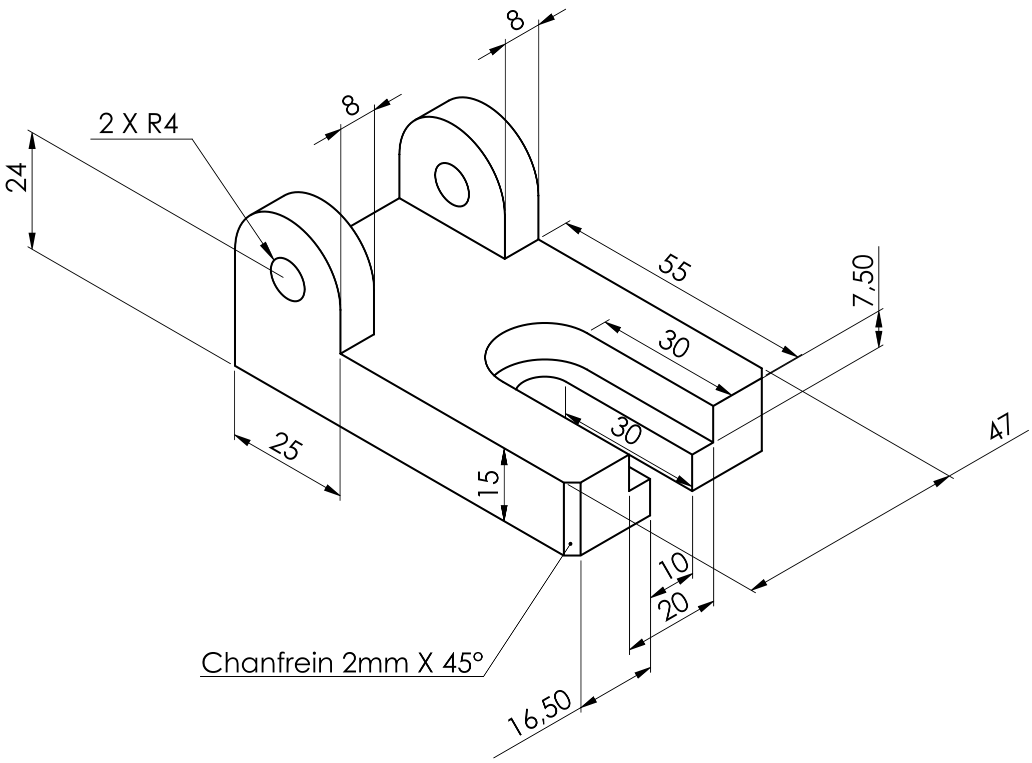
La pièce possède deux plans de symétrie



TOLERANCES GENERALES	MATERIAU	ECHELLE 1:1	UNITES mm	FORMAT A4
Projection Européenne	AUTEUR GeoCom Team	ANNEE D'ETUDE AA1415		
TITRE DU COURS/PROJET	TITRE DU PLAN Examen Janvier	Remplace		
		Remplacé par		
DATE 9/12/2014	UMONS POLYTECH MONS	NUMERO DE PLAN		

FIGURE 1.32 – Janvier 2015 – Question 3

Cette pièce possède un plan de symétrie



TOLERANCES GENERALES */		MATERIAU */	ECHELLE 1:1	UNITES mm	FORMAT A4
Projection Européenne	AUTEUR GeoComTeam		ANNEE D'ETUDE BAC1		
TITRE DU COURS/PROJET GeoCom	TITRE DU PLAN Examen de janvier		Remplace */ Remplacé par */		
DATE 6/01/2016	UMONS POLYTECH MONS		NUMERO DE PLAN */		

Figure 1.33 – Janvier 2016 – Question 2 : vue en isométrie d'une pièce

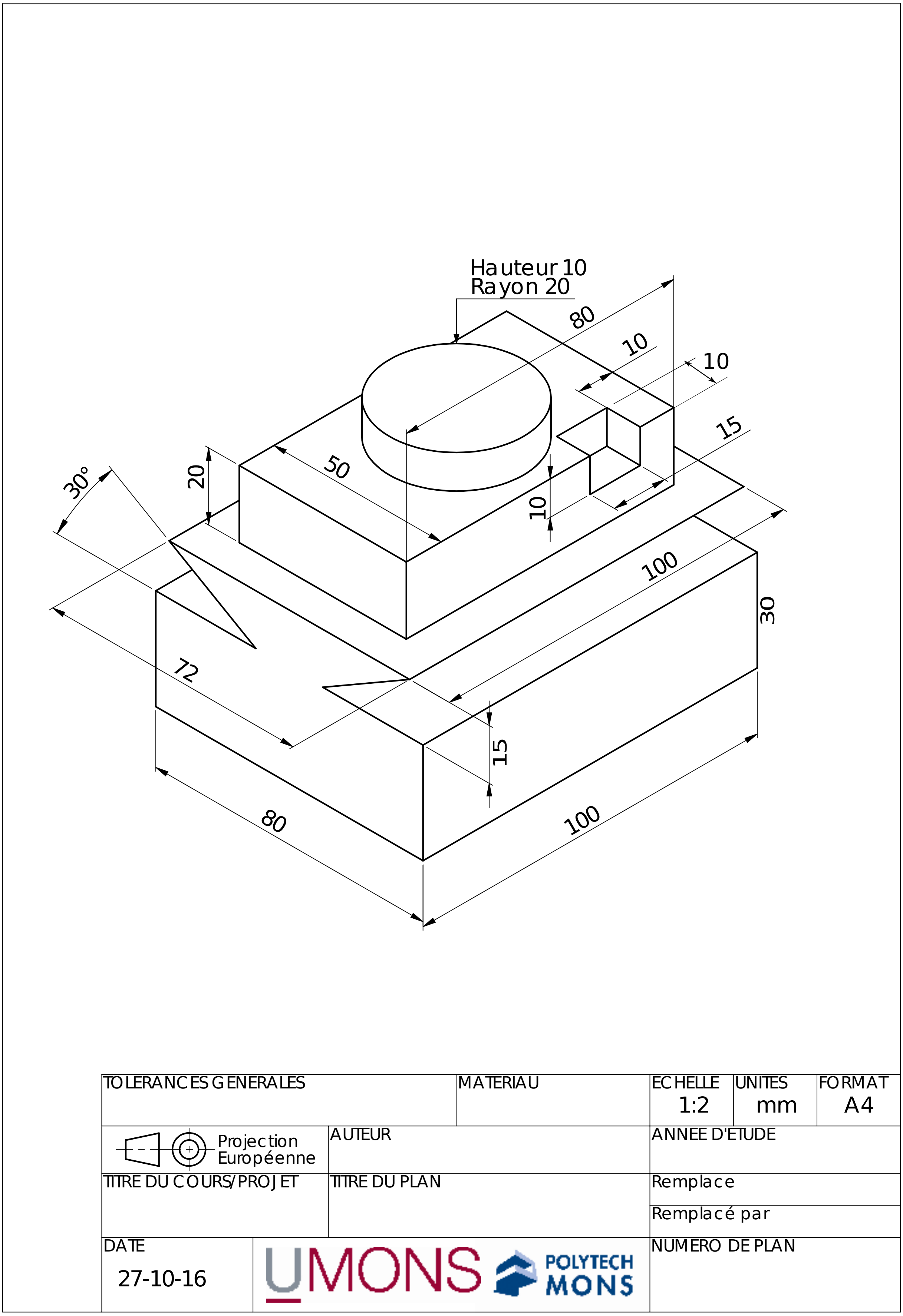
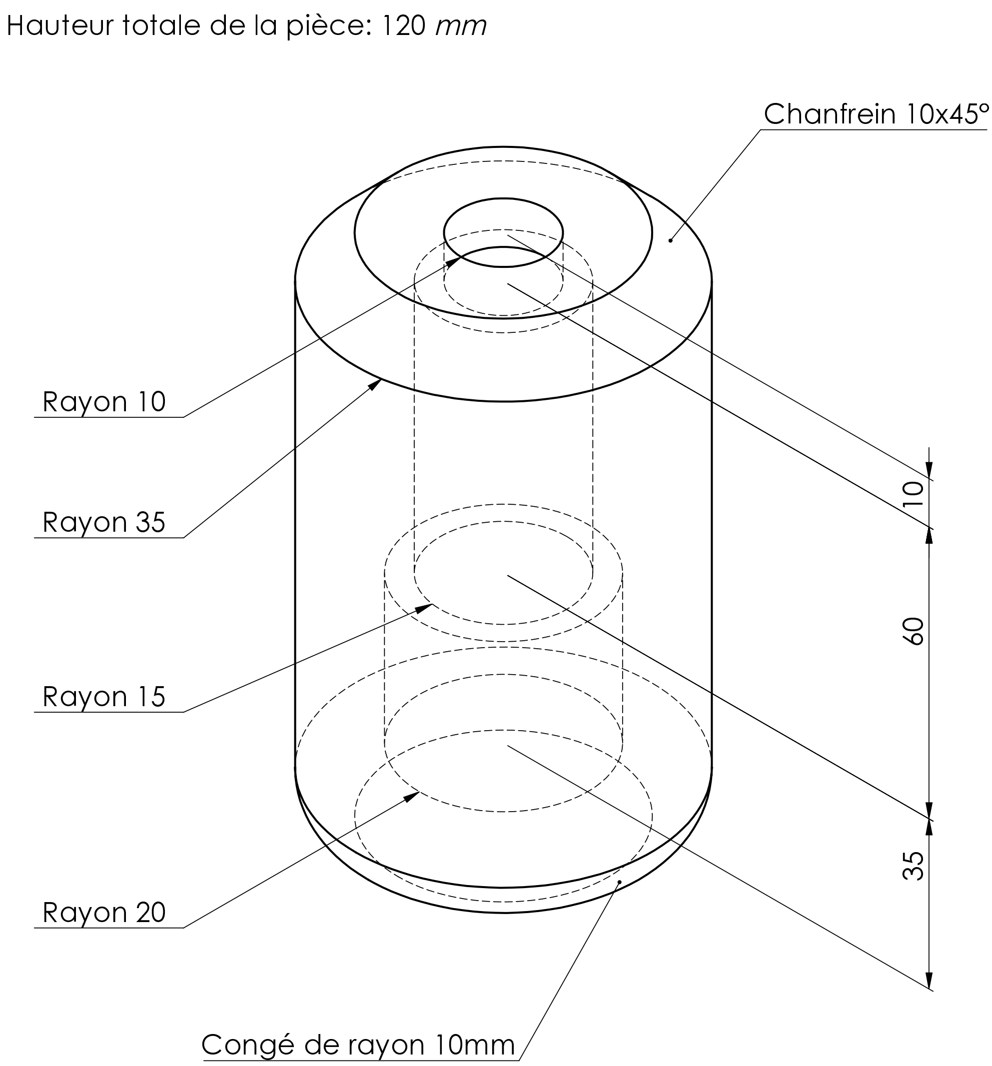


Figure 1.34 – Novembre 2016 – Question 2 : vue en isométrie d'une pièce



TOLERANCES GENERALES Norme du temple de Coruscant		MATERIAU Ti6Al4V	ECHELLE 1:1	UNITES mm	FORMAT A4
Projection Européenne	AUTEUR Maitre SPITAELS		ANNEE D'ETUDE 2019-2020		
TITRE DU COURS/PROJET Géocom	TITRE DU PLAN Couvercle inférieur sabre laser de Mace Windu		Remplace / Remplacé par /		
DATE 17-12-19	UMONS POLYTECH MONS		NUMERO DE PLAN /		

FIGURE 1.35 – Janvier 2020 – Question 2 : vue en isométrie de la pièce

1.2.12 Janvier 2021 – Question 1

Énoncé

On donne une représentation en axonométrie d'une pièce associée à un système d'axes xyz (figure 1.36). On demande de réaliser sur le plan donné en figure 5.27:

- la vue de face, de dessus et de profil droit de la pièce;
- la construction de la vraie grandeur de la face repérée par 'VG' sur la figure en employant obligatoirement la méthode de rotation.

Le cartouche doit être complété. Vous devrez bien entendu respecter obligatoirement les normes applicables au dessin technique telles qu'enseignées au cours (disposition et orientation des vues, choix des facteurs d'échelles,...).

1.2.13 Application 1 – Exo 2

Énoncé

On donne à la figure 1.37 la vue en isométrie d'une pièce.

On demander de représenter les vues de face, du dessus et de profil droit de cette pièce.

1.2.14 Janvier 2023 – Question 1

Énoncé

La figure 1.38 représente une vue isométrique d'un volume. Il vous est demandé de réaliser le plan de ce volume sur la figure 5.27. Veillez à respecter les conventions générales du dessin technique et à être précis et soigneux. N'oubliez pas de compléter le cartouche.

1.2.15 Novembre 2023 – Question 1

Énoncé

Un volume représenté en isométrie en figure 1.39, son orientation est imposée comme suit :

— pour la variante 1, prenez la face 1 comme vue de face et la face 2 comme vue de droite;
— pour la variante 2, prenez la face 2 comme vue de face et la face 1 comme vue de droite;
— pour la variante 3, prenez la face 1 comme vue de face et la face 2 comme vue de dessus.

On vous demande:

1. de représenter sur la figure 1.39 le système d'axes utilisé;
2. de représenter sur le cartouche fourni en figure 5.21 les trois vues principales (vue de face, vue de dessus et vue de droite) de ce volume.

Respectez bien entendu les normes en vigueur pour le dessin et remplissez le cartouche de manière adéquate.

1.2.16 Janvier 2024 – Question 1

Énoncé

La figure 1.40 présente les dimensions d'un volume avec le système d'axes qui lui est associé. Il est demandé de dessiner sur le cartouche fourni en figure 5.21 les vues standards : vue face, vue du dessus et vue de profil droit. Veillez à respecter les règles du dessin technique pour la représentation de ces différentes vues et n'oubliez pas de remplir le cartouche.

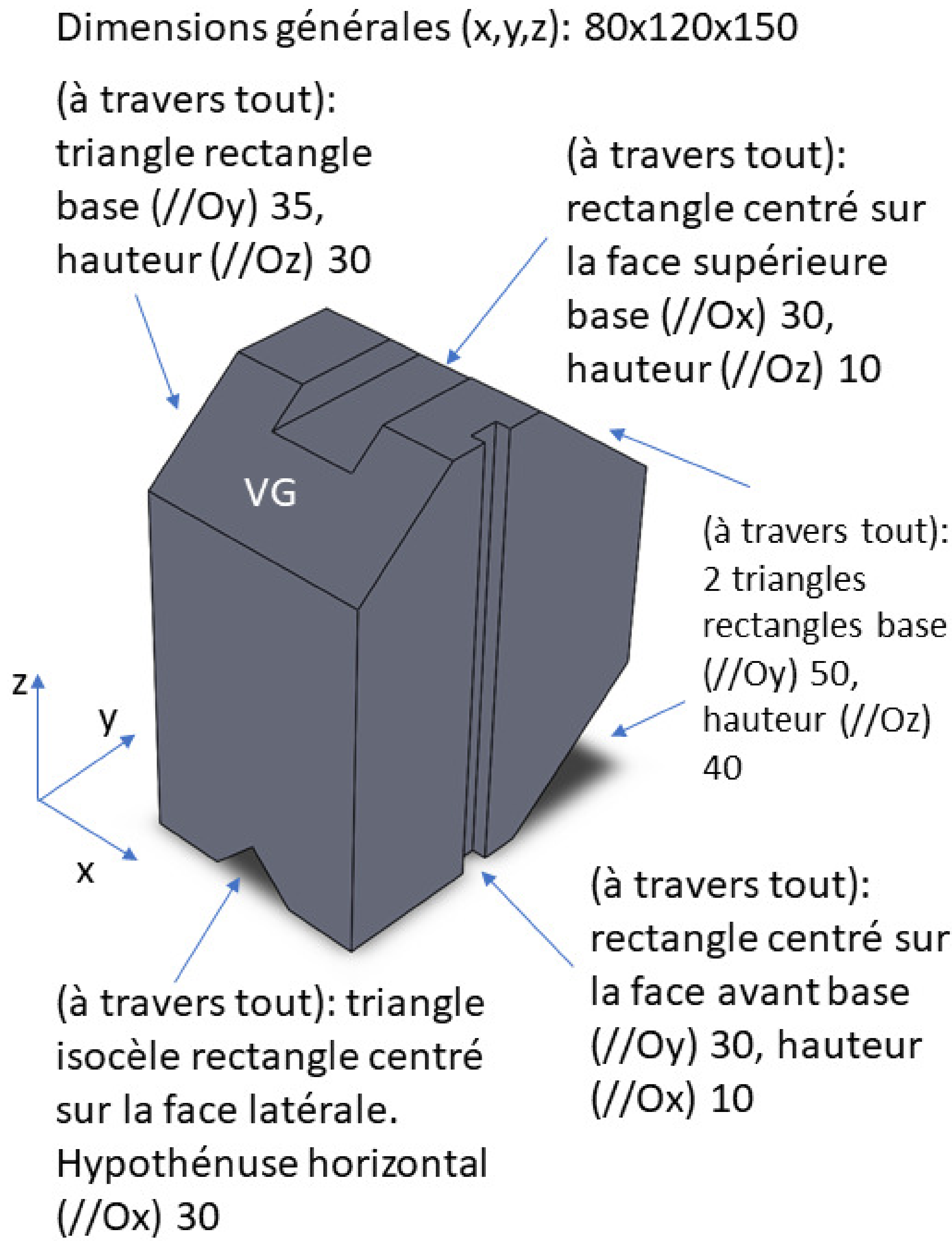


FIGURE 1.36 – Janvier 2021 – Question 1 : vue en axonométrie de la pièce

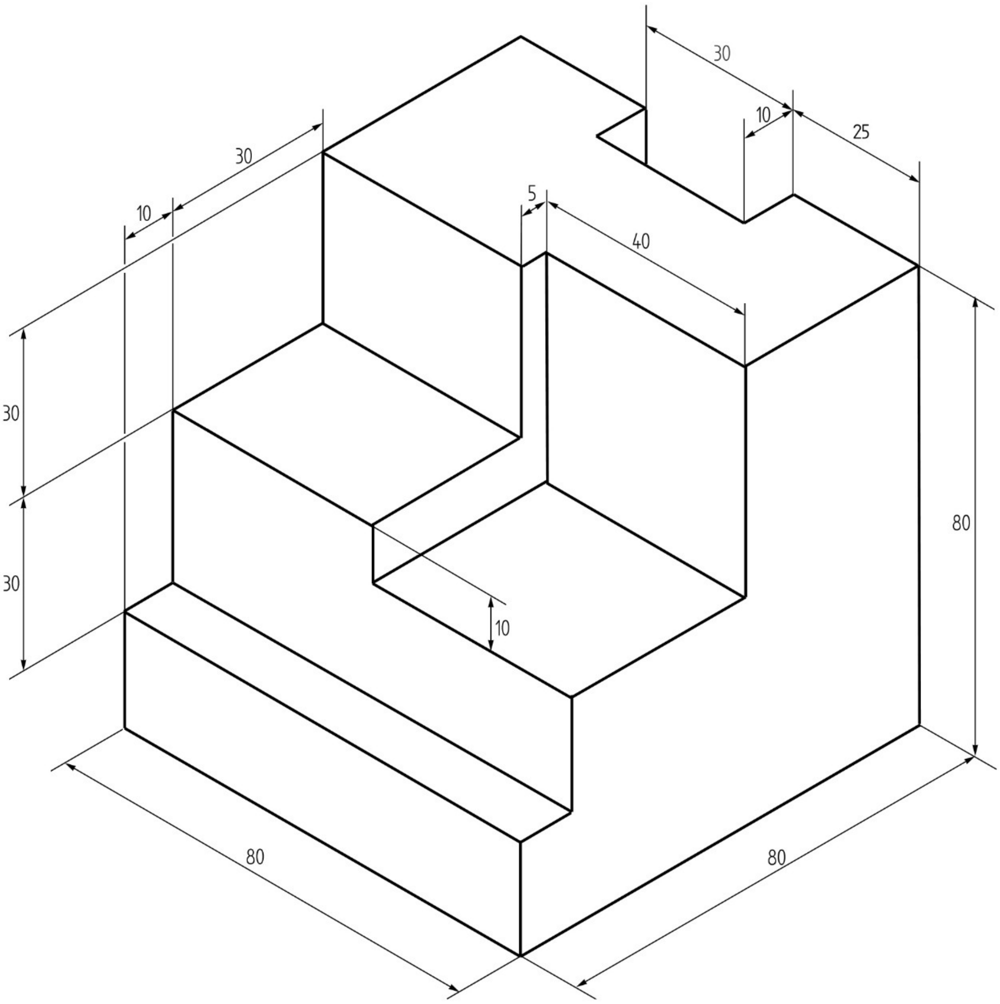


Figure 1.37 – Application 1 – Exercice 2 : énoncé (vue en isométrie de la pièce)

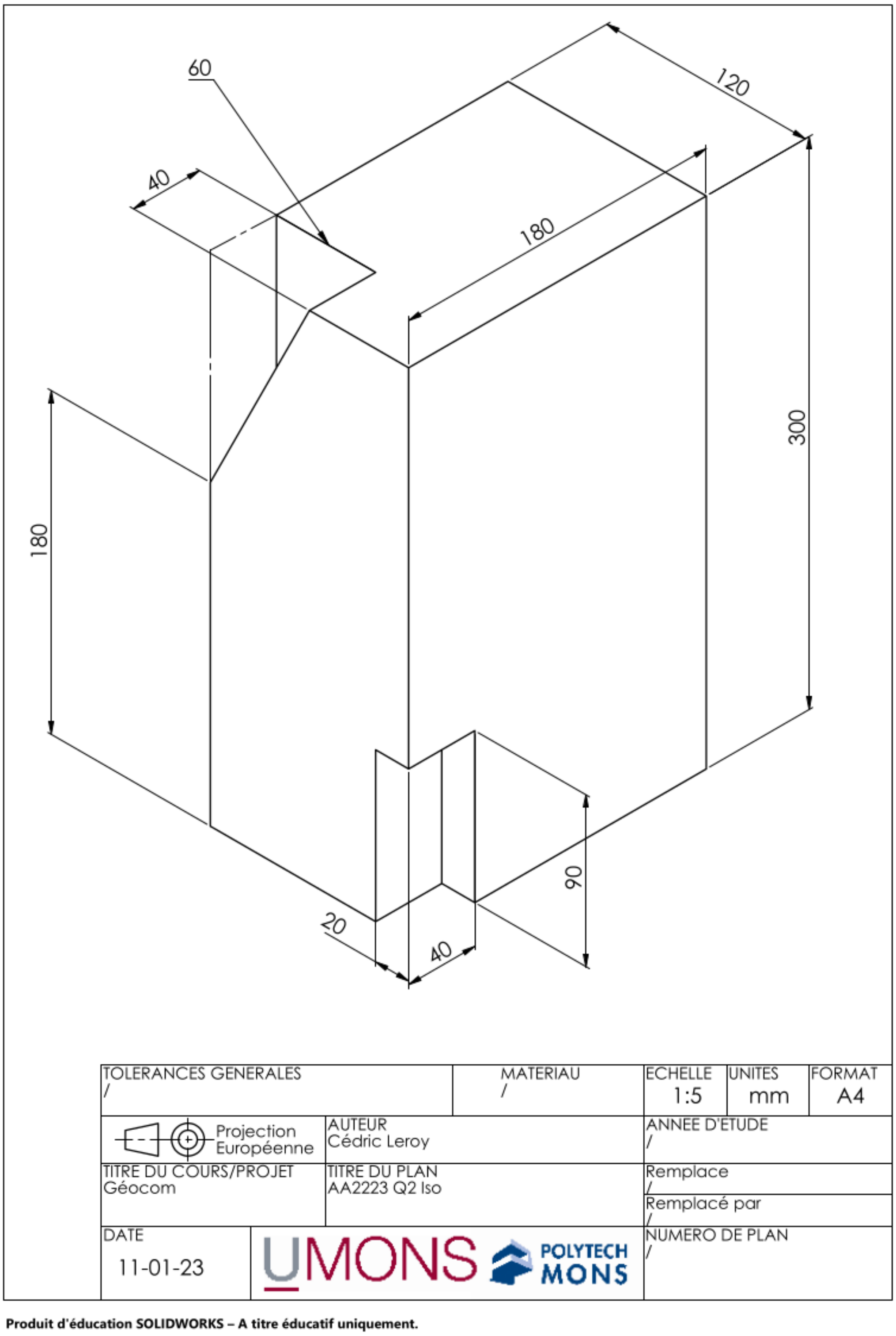
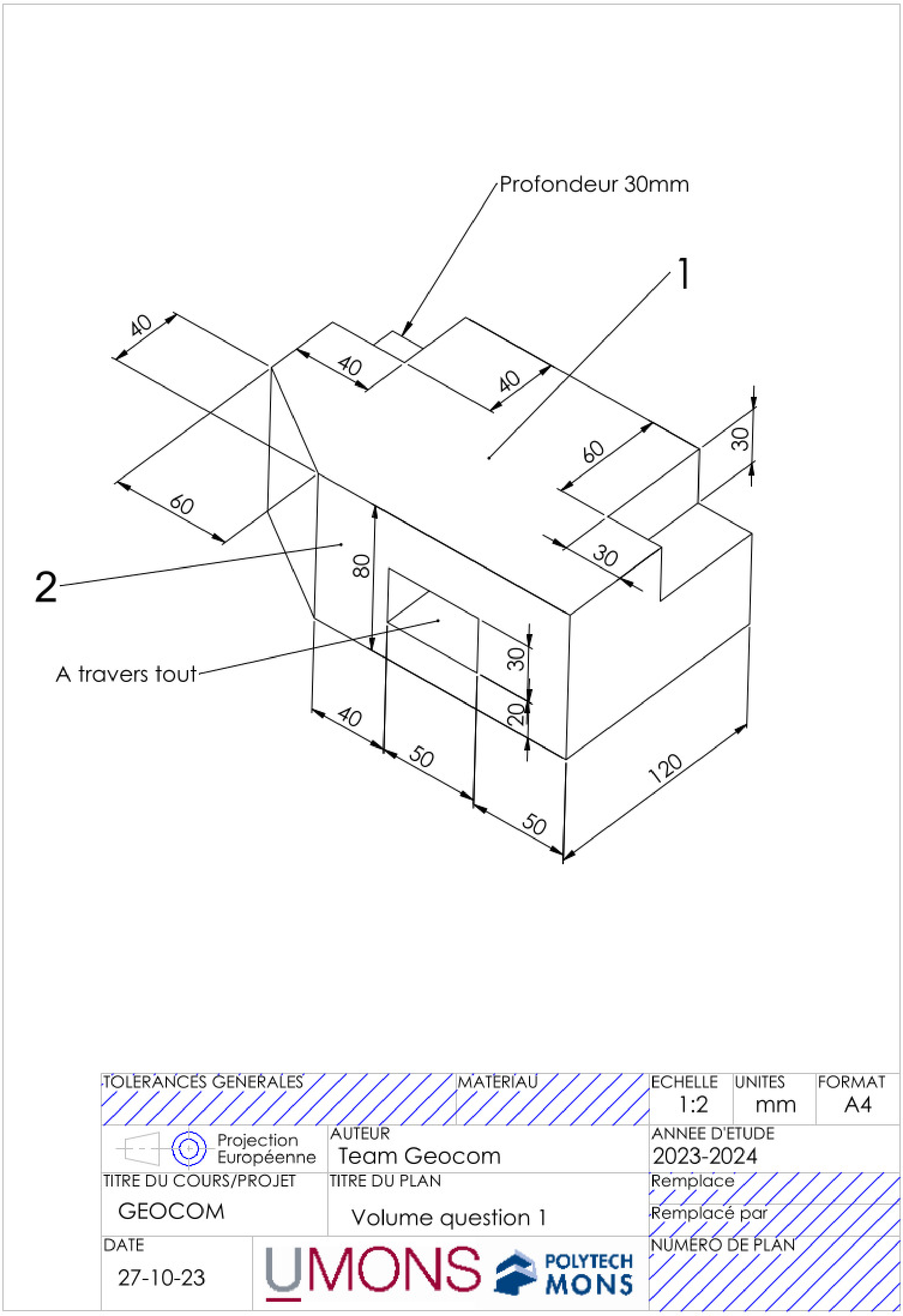


FIGURE 1.38 – Janvier 2023 – Question 1 : vue en isométrie du volume



Produit d'éducation SOLIDWORKS – A titre éducatif uniquement.

FIGURE 1.39 – Novembre 2023 – Question 1 : enoncé

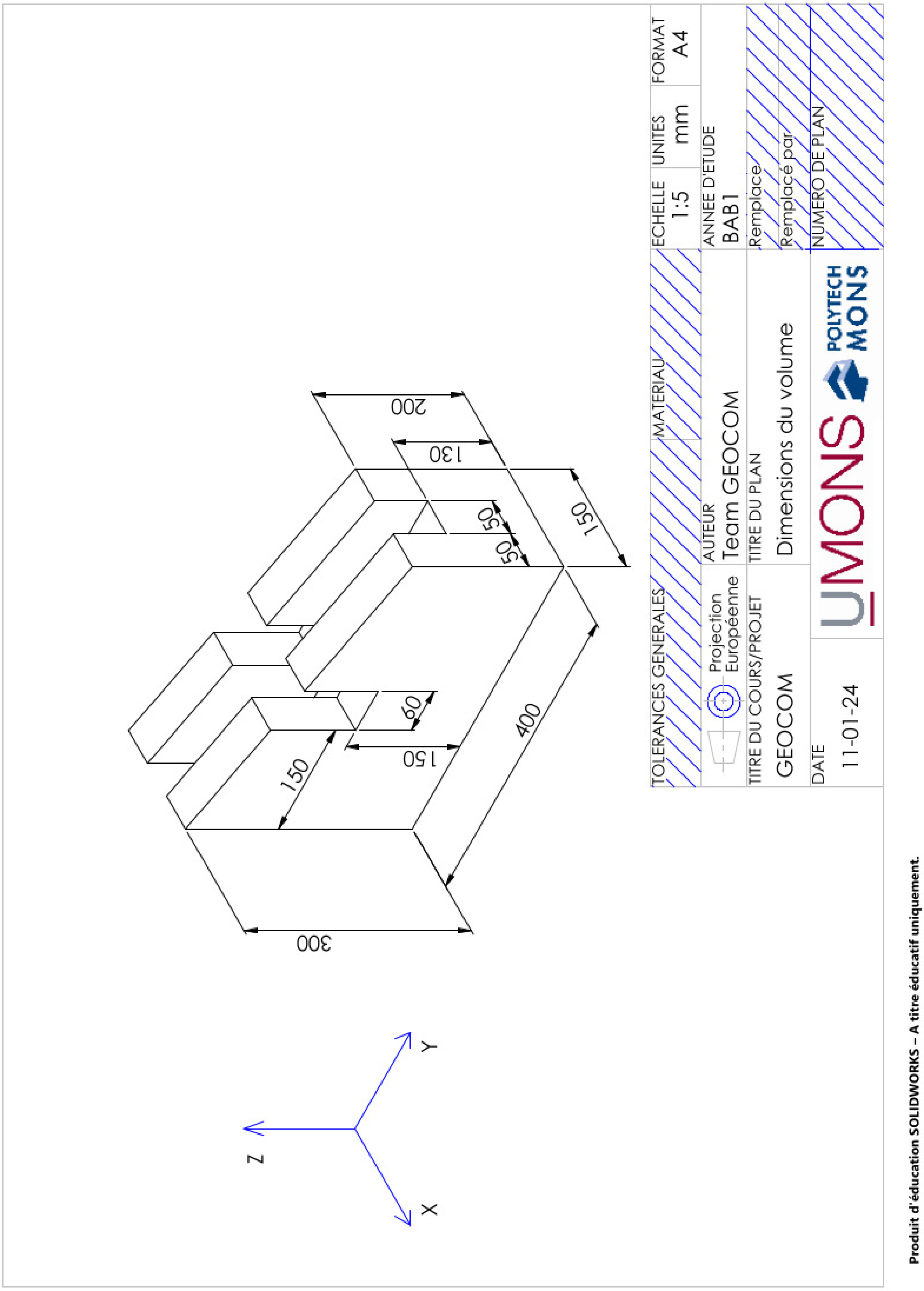


FIGURE 1.40 – Janvier 2024 – Question 1 : énoncé

1.2.17 Novembre 2024 – Question 1

Énoncé

Un volume est représenté en isométrie en figure 1.42. L'axe vertical Oz (représenté verticalement sur la figure) est commun à toutes les variantes, la vue de face (verticale pour toutes les variantes) est mentionnée par une flèche liée à votre variante.

On vous demande:

1. de représenter sur la figure 1.42 le système d'axes utilisé;
2. de représenter sur le cartouche fourni en figure 5.21 les trois vues principales (vue de face, vue de dessus et vue de droite) de ce volume compte tenu de l'orientation liée à votre variante.

Respectez bien entendu les normes en vigueur pour le dessin et remplissez le cartouche de manière adéquate.

La figure 1.41 rappelle ce qu'est un chanfrein.

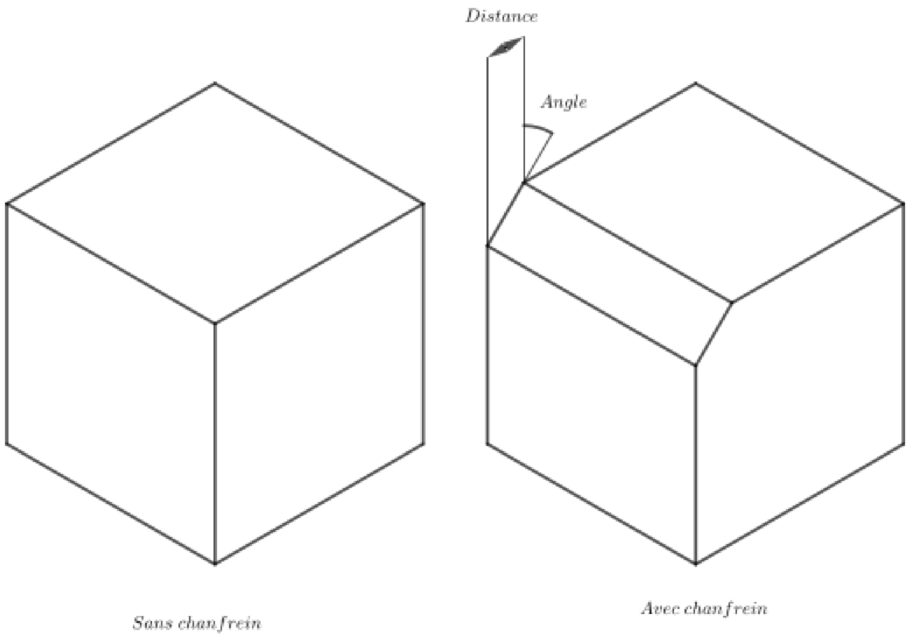


FIGURE 1.41 – Novembre 2024 – Question 1 : Un chanfrein est obtenu en découpant l'arête d'un volume selon un angle donné.

1.2.18 Janvier 2025 – Question 1

Énoncé

La figure 1.43 représente la vue en isométrie d'un volume avec ses dimensions et le système d'axes qui lui est associé. Ce volume possède **deux plans de symétrie**. On vous demande de dessiner sur le plan fourni en figure 5.27 la vue de face et la vue du dessus de ce volume. Veillez à respecter les règles du dessin technique pour la représentation de ces différentes vues et n'oubliez pas de remplir le cartouche.

Dimensions générales: 250 x 160 x 120
Les découpes sont sur toute la profondeur de la pièce

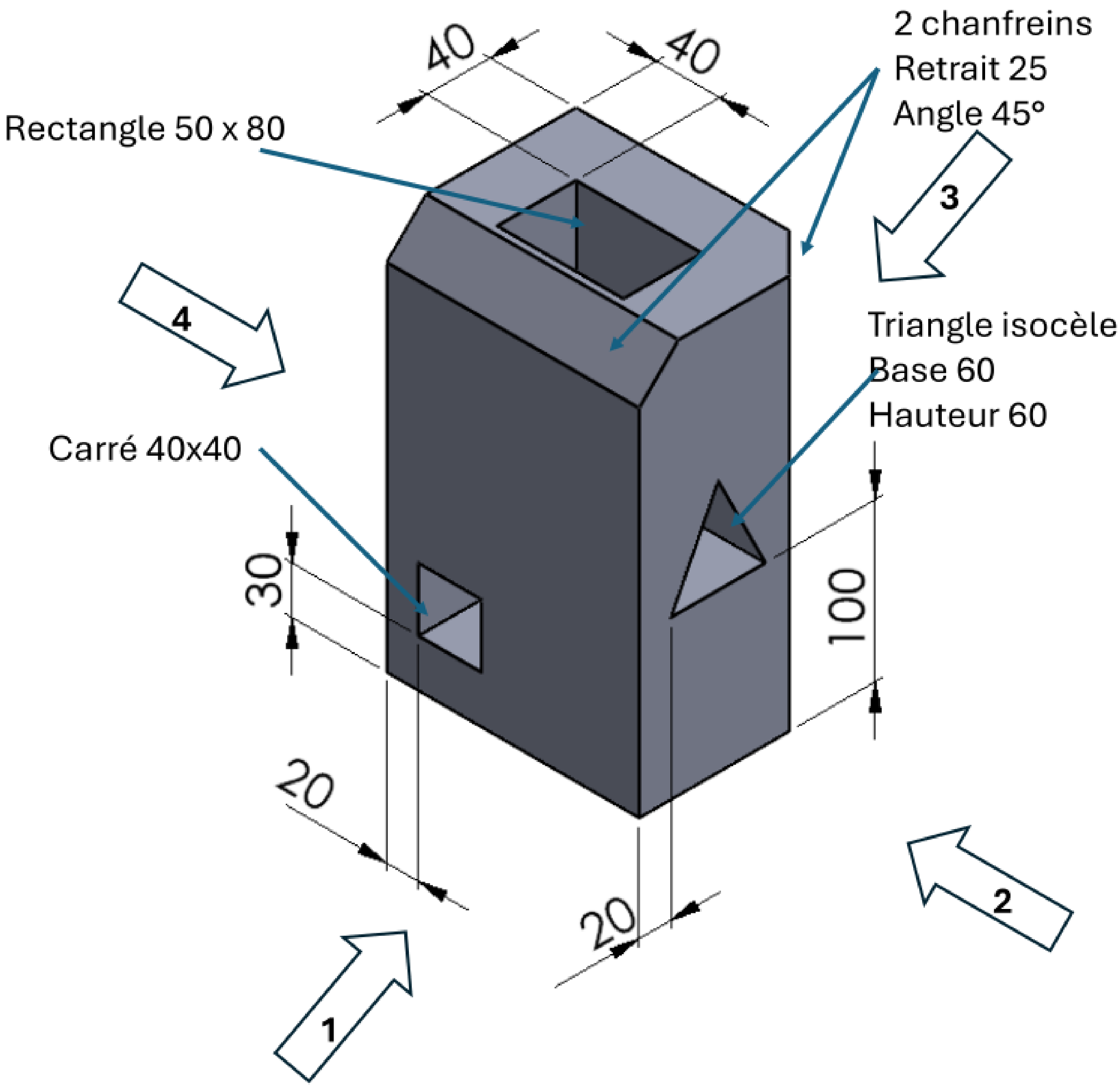


FIGURE 1.42 – Novembre 2024 – Question 1 : Vue en isométrie de la pièce

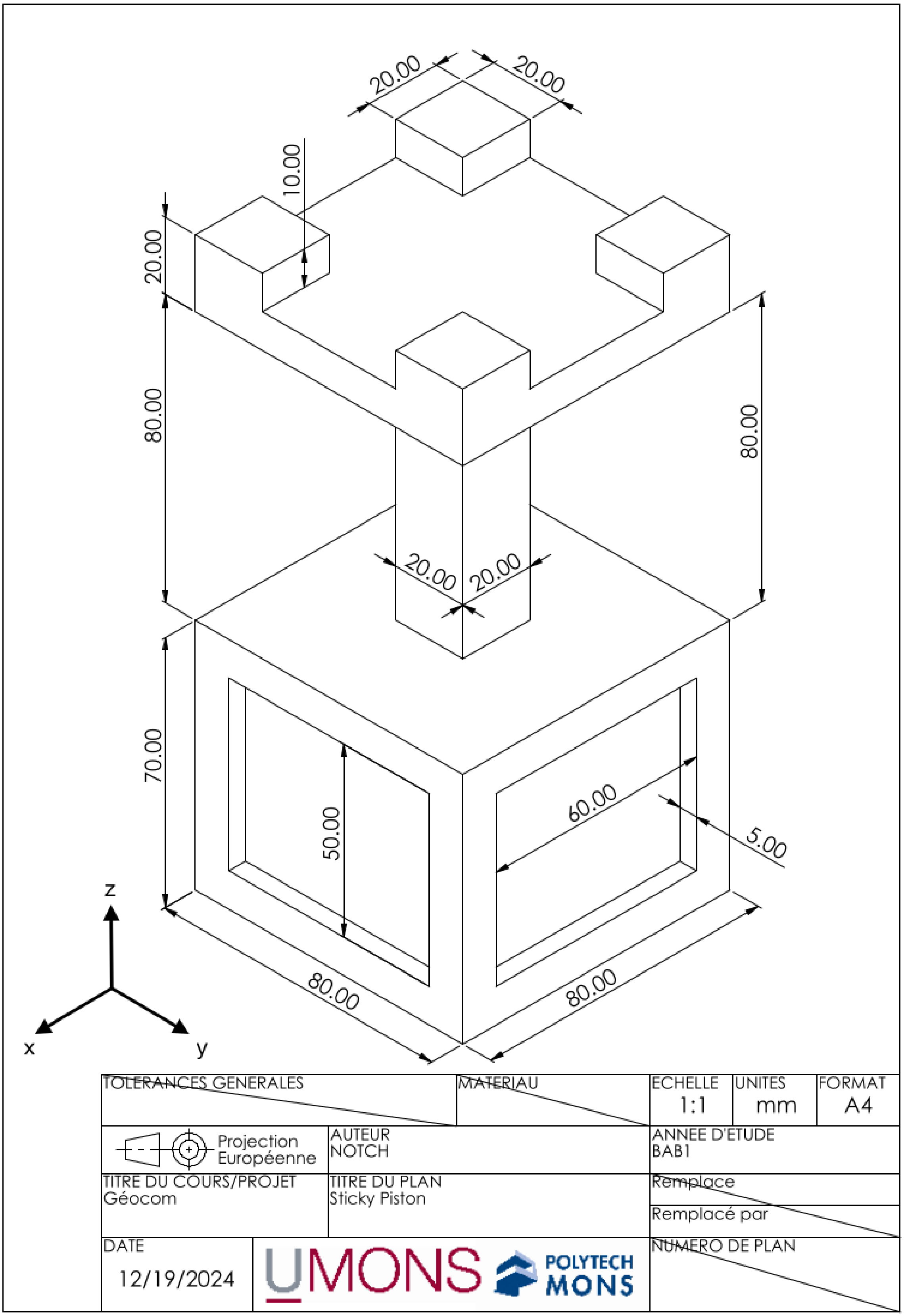


FIGURE 1.43 – Janvier 2025 – Question 1 : énoncé

Chapitre 2

Épure de Monge

2.1 Arrêtes vues et cachées

2.1.1 Polyèdres – arrêtes vues et cachées

Énoncé

On considère un polyèdre dont les projections horizontales et frontales de ses arrêtes est renseignées sur l'épure de la Figure 2.1. On demande de déterminer sur cette figure quelles sont les arêtes cachées et celles qui sont vues.

2.2 Section de polyèdres

2.2.1 Exemple 1 – Section d'un polyèdre

Énoncé

On donne à la figure 2.2 la vue en axonométrie d'un polyèdre.

On demander de réprésenter sur cette figure la section définie par l'intersection entre ce polyèdre et le plan défini par les points I, J et K.

2.2.2 Exemple 2 – Section d'un prisme

Énoncé

On donne à la figure 2.3 la vue en axonométrie d'un prisme.

On demander de réprésenter sur cette figure la section définie par l'intersection entre ce prisme et le plan défini par les points I, J et K.

2.2.3 Exemple 3 – Section d'une pyramide

Énoncé

On donne à la figure 2.4 la vue en axonométrie d'une pyramide.

On demander de réprésenter sur cette figure la section définie par l'intersection entre cette pyramide et le plan défini par les points E, F et G.

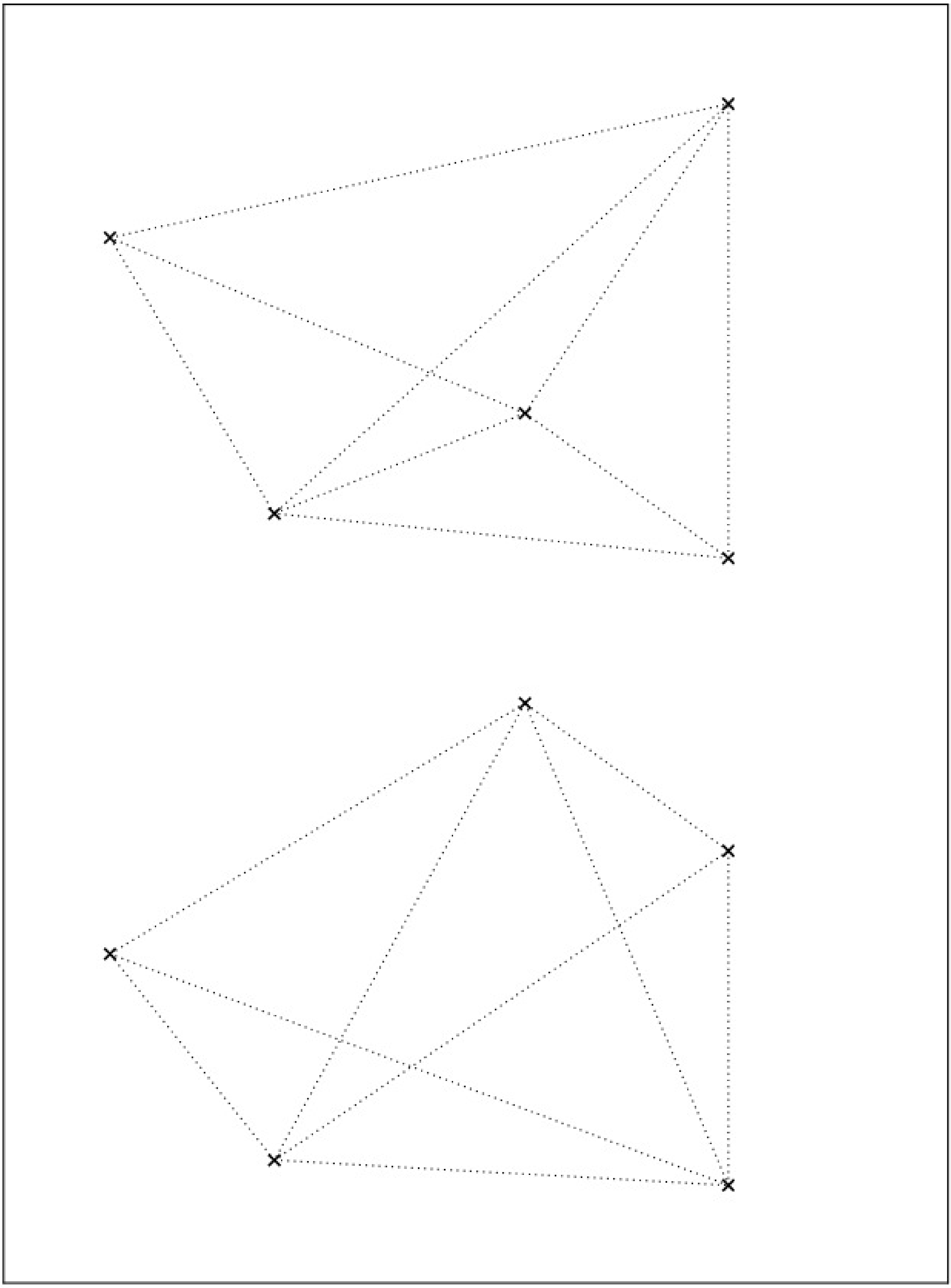


FIGURE 2.1 – Polyèdres – arrêtes vues et cachées : énoncé

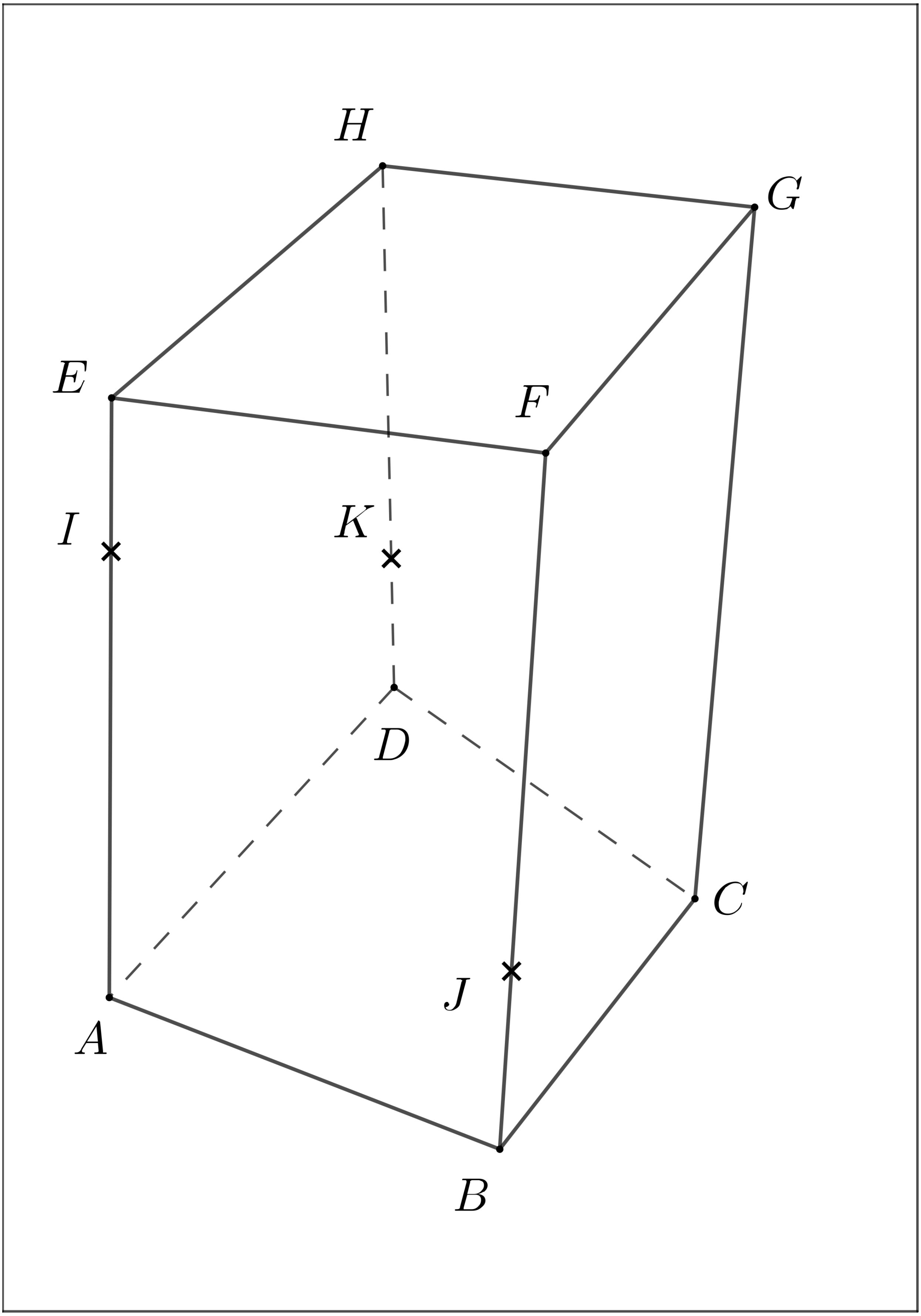


FIGURE 2.2 – Exemple 1 – Section d'un polyèdre : énoncé

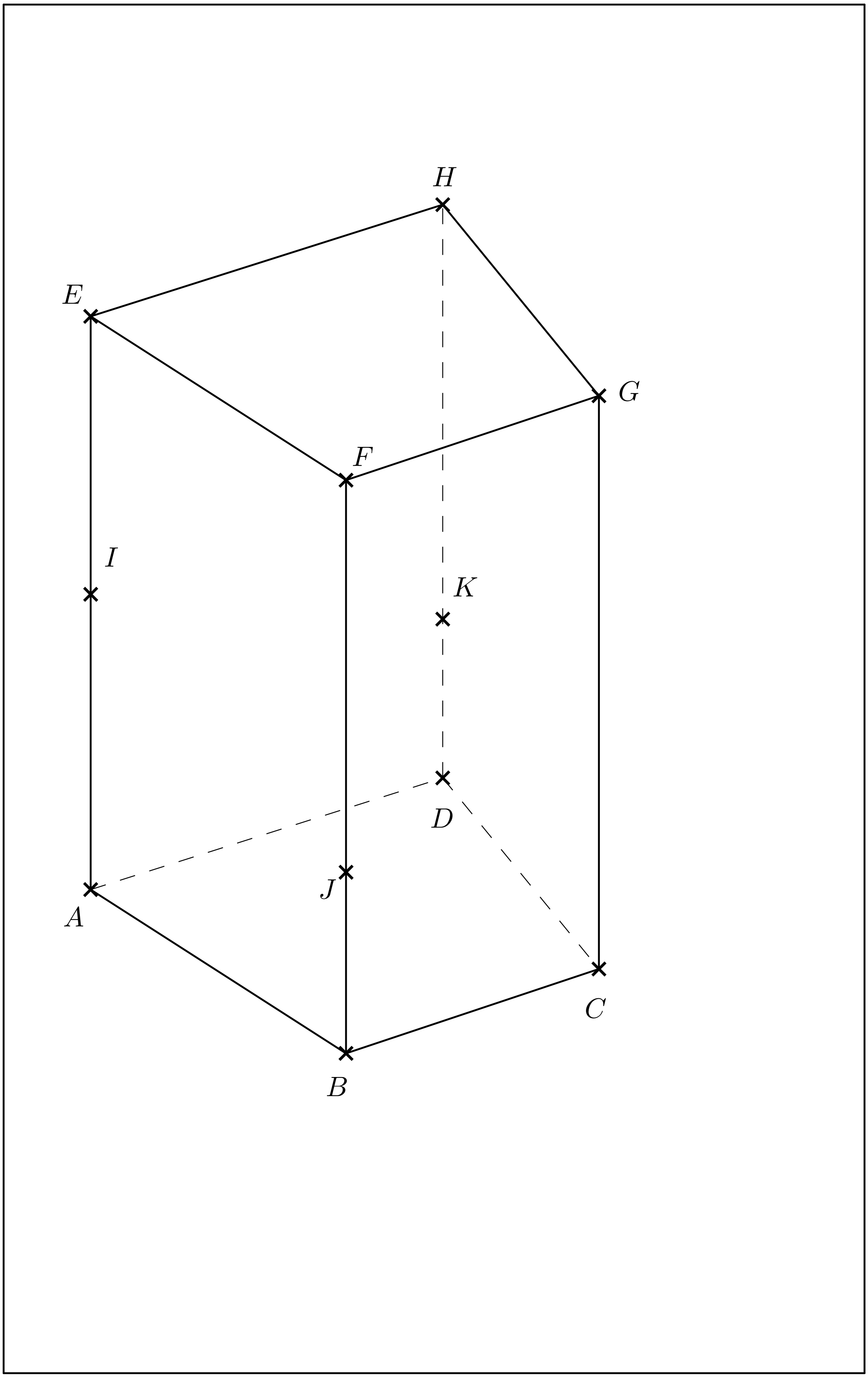


Figure 2.3 – Exemple 2 – Section d'un prisme : énoncé

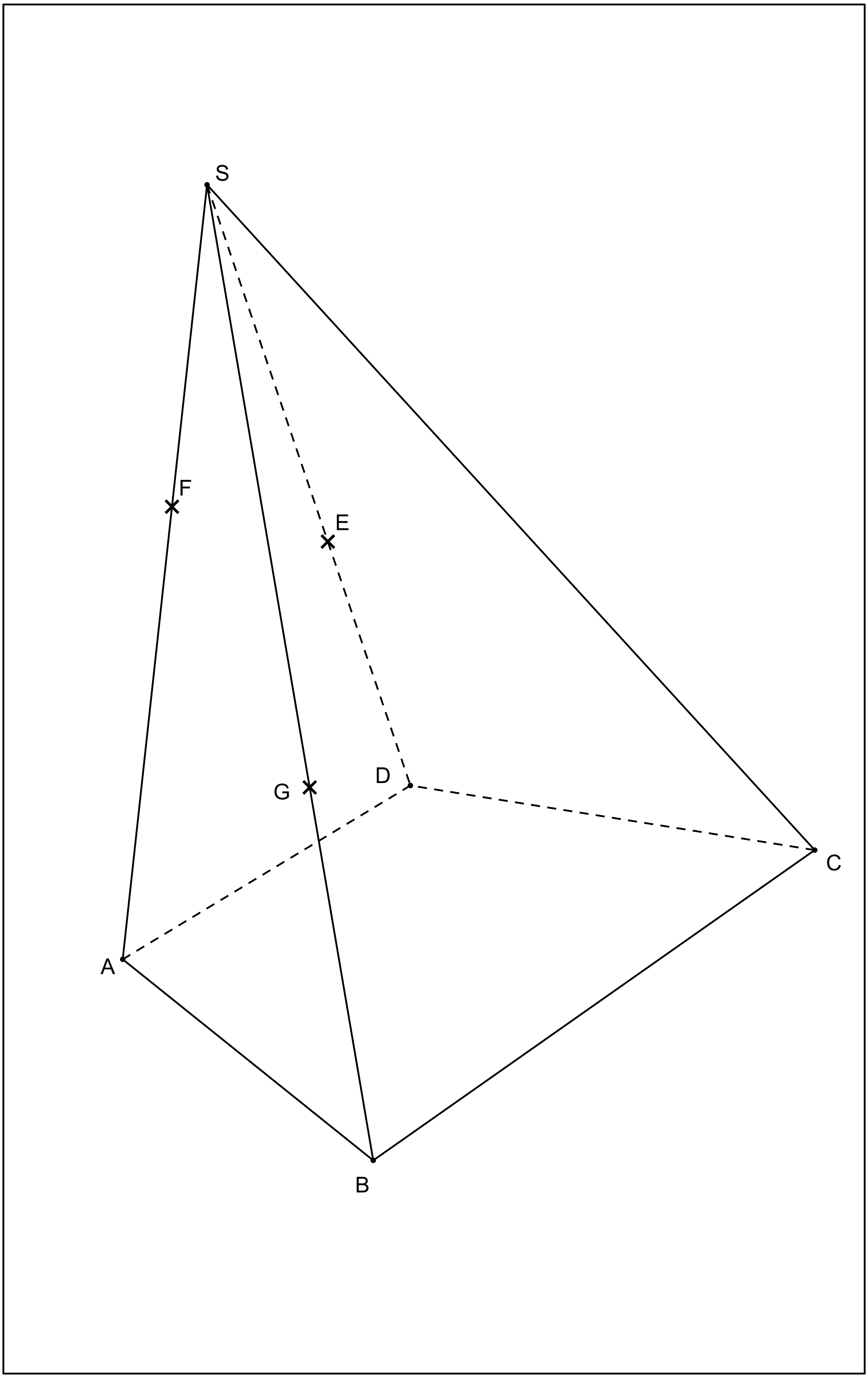


FIGURE 2.4 – Exemple 3 – Section d'une pyramide : énoncé

2.3 Représentation d'éléments géométriques

2.3.1 Exemple 1

Énoncé

Soient les points A, B, C et D dont les coordonnées dans le système de référence Oxyz sont les suivants :

- $A\,(-80\ \ 30\ \ -40)$ mm
- $B\,(80\ \ 60\ \ -50)$ mm
- $C\,(50\ \ 80\ \ 50)$ mm
- $D\,(0\ \ 130\ \ 0)$ mm

Le point E, quant à lui, à une cote de 100 mm, un éloignement de 120 mm et est situé à 150 mm du plan de profil gauche.

On demande de placer ces 5 points sur une épure de Monge (Figure 5.33) et sur un croquis spatial dessiné en isométrie (Figure 5.39).

2.3.2 Janvier 2012 : Question 1

Énoncé

On donne une épure de Monge représentant trois points A, B et C (figure 2.5, les cotes sont données en mm, l'épure n'est pas à l'échelle).

On demande de représenter en isométrie ces trois points, les segments joignant ces points ainsi que les projections horizontales et frontales de tous ces éléments (employez une échelle 1/2 pour la vue isométrique).

2.3.3 Janvier 2013 : Question 2

Énoncé

La figure 2.6 donne les projections des points J_a et J_b, traces frontales de deux droites de bout a et b et la projection horizontale d'une droite d. La droite d appartient au plan π (π est le plan défini par a et b). On demande :

1. de représenter sur la vue en isométrie fournie en figure 5.39 les droites a, b et d ainsi que leurs projections (employez une échelle 1/2 comme aux séances d'exercice);
2. de représenter sur cette même figure les traces du plan π;
3. de compléter la figure 2.6 pour faire apparaître les projections des droites a, b et d ainsi que les projections des traces du plan π.

2.3.4 Novembre 2012 : Question 1

Énoncé

La figure 2.7 donne les projections de deux droites a et b. On demande :

- de porter sur la figure 5.39 la représentation en isométrie de ces droites, ainsi que leurs projections horizontales et frontales (appliquer un facteur d'échelle de 1/2) ;

- de représenter sur cette même figure le point P d'intersection entre ces droites et le plan défini par les droites a et b ;
- de compléter l'épure de la figure 2.7 avec les projections du point P et des traces du plan π.

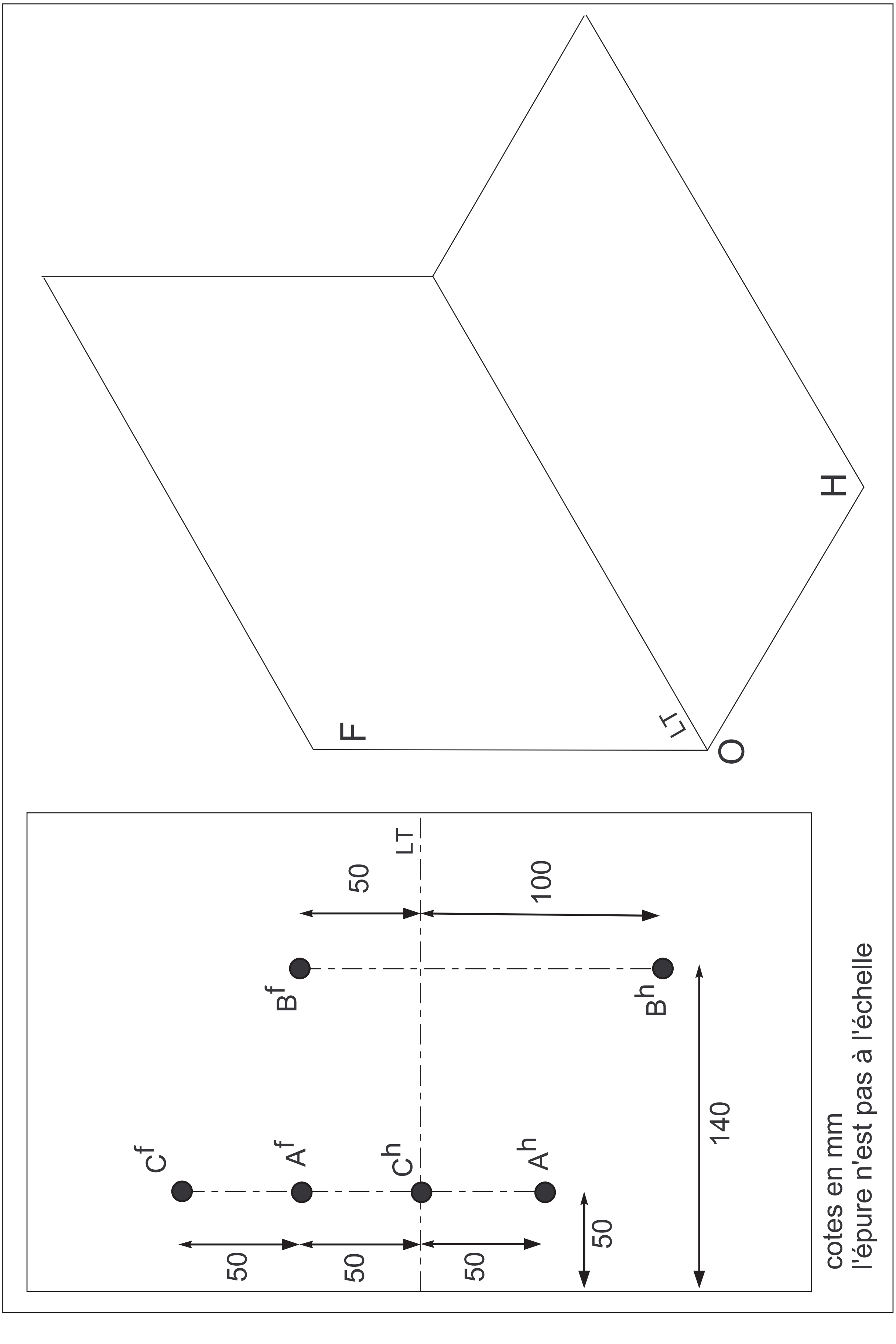


Figure 2.5 – Janvier 2012 – Question 1 : énoncé

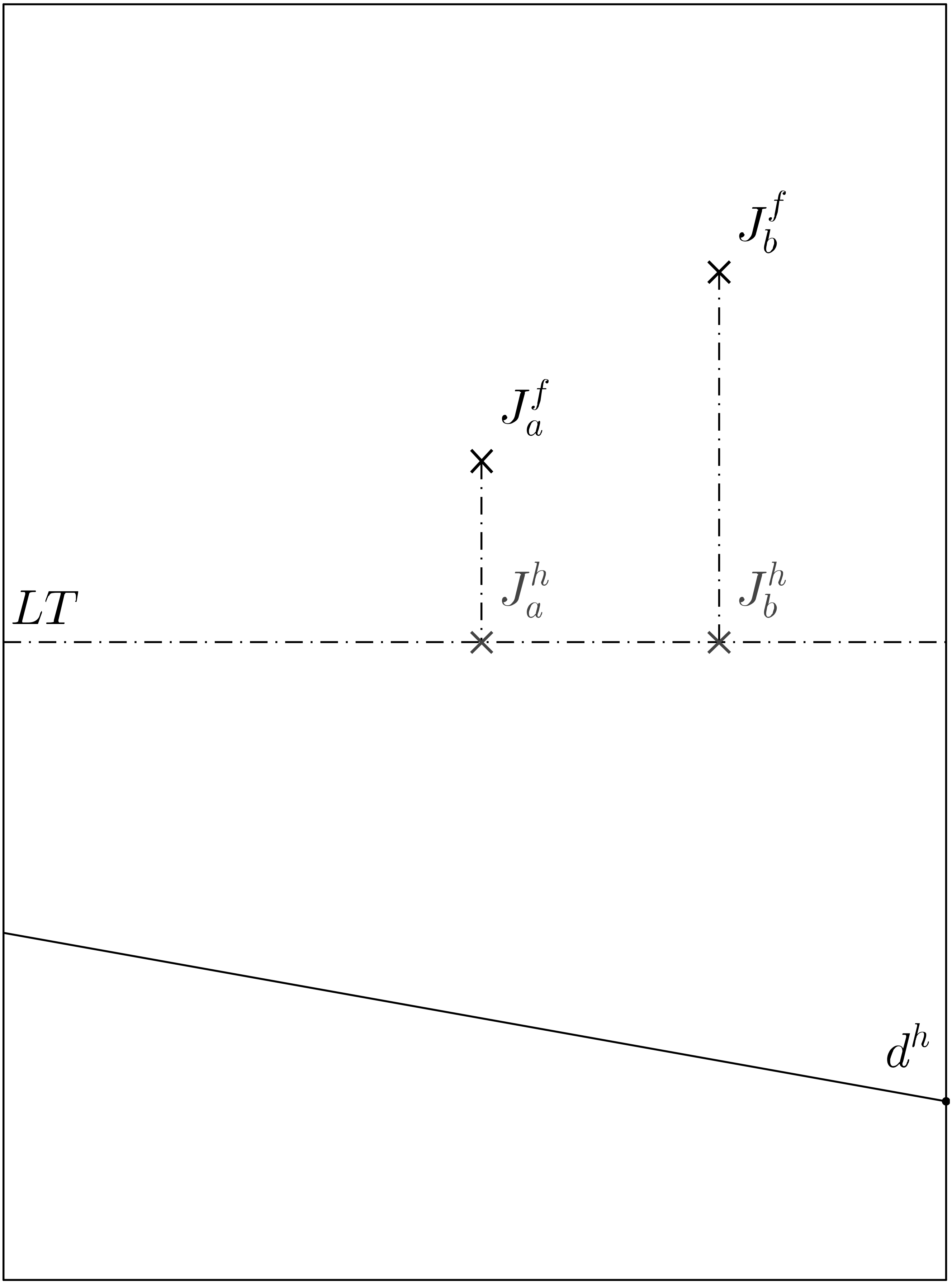


FIGURE 2.6 – Janvier 2013 – Question 2 : épure de Monge

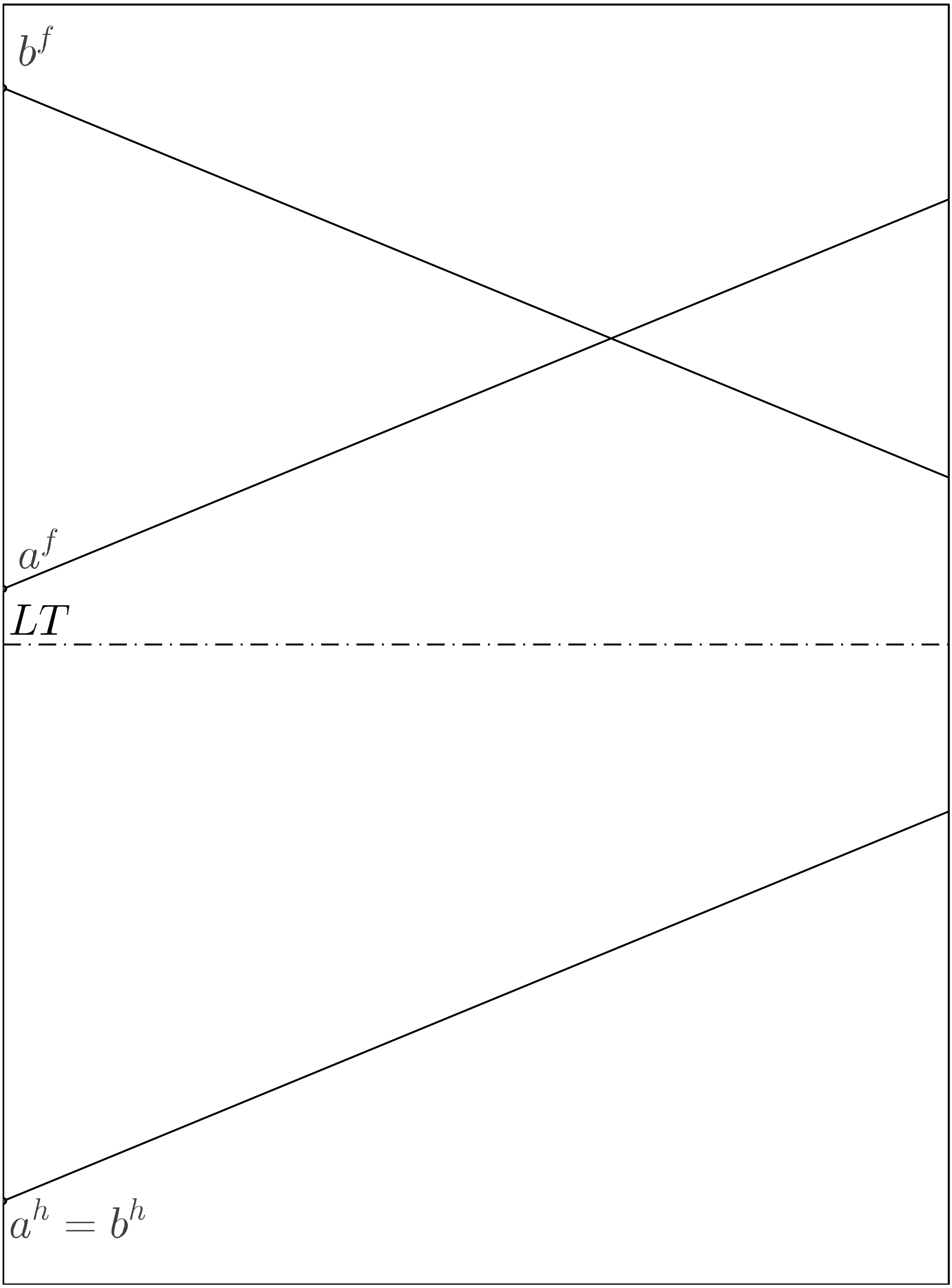


FIGURE 2.7 – Novembre 2012 – Question 1 : épure de Monge

2.4 Représentation de profil

2.4.1 Exemple 1 – Représentation de profil d'un quadrilatère

Énoncé

On donne à la figure 2.8 les projections horizontales et frontales des sommets A, B, C et D d'un quadrilatère.

On demander de réprésenter ce quadrilatère en vraie grandeur en utilisant la projection de profil.

2.4.2 Exemple 2 – Représentation de profil d'un quadrilatère (Variante)

Énoncé

On donne à la figure 2.8 les projections horizontales et frontales des sommets A, B, C et D d'un quadrilatère.

On demander de réprésenter ce quadrilatère en vraie grandeur en utilisant la projection de profil.

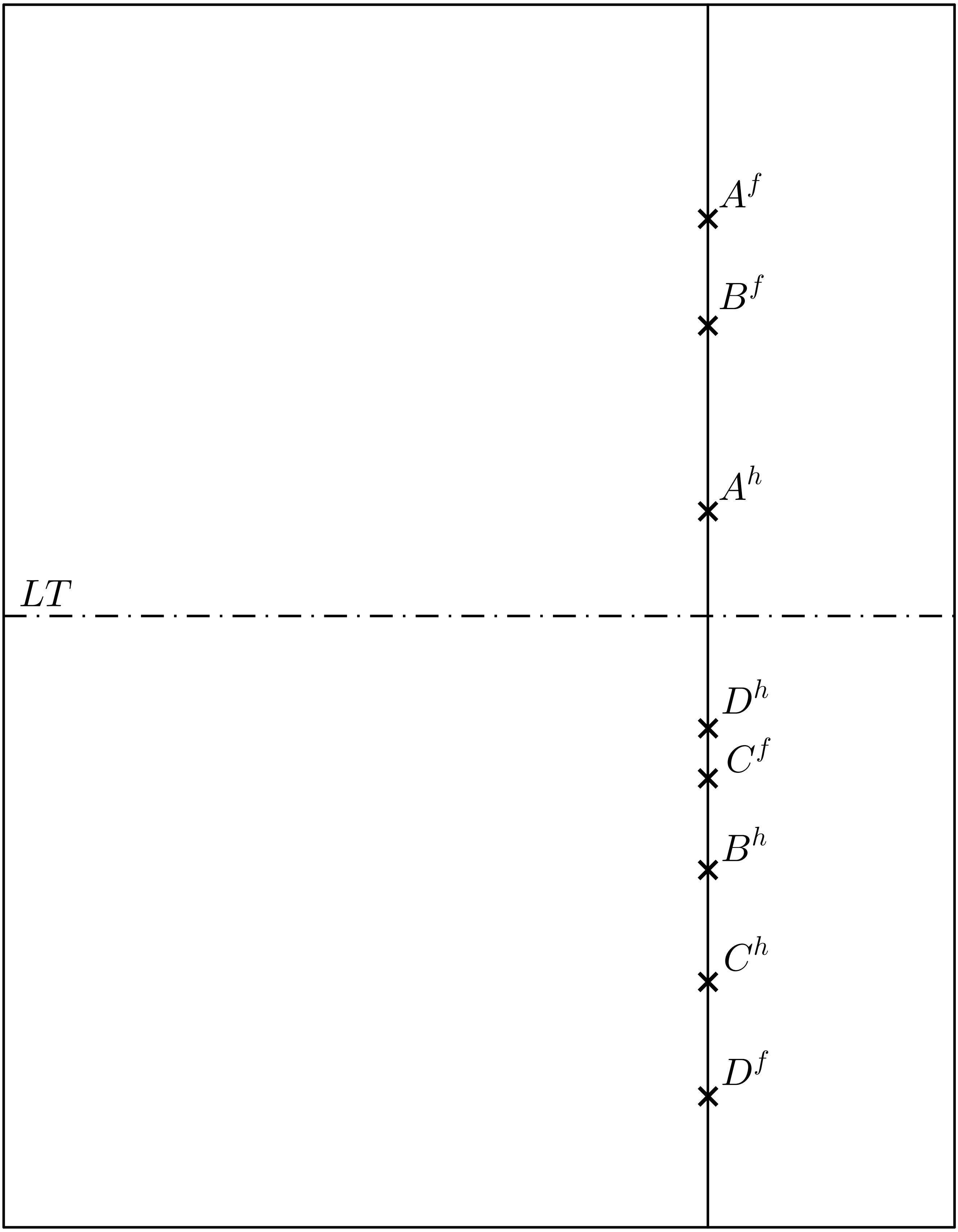


FIGURE 2.8 – Exemple 1 – Représentation de profil d'un quadrilatère : énoncé

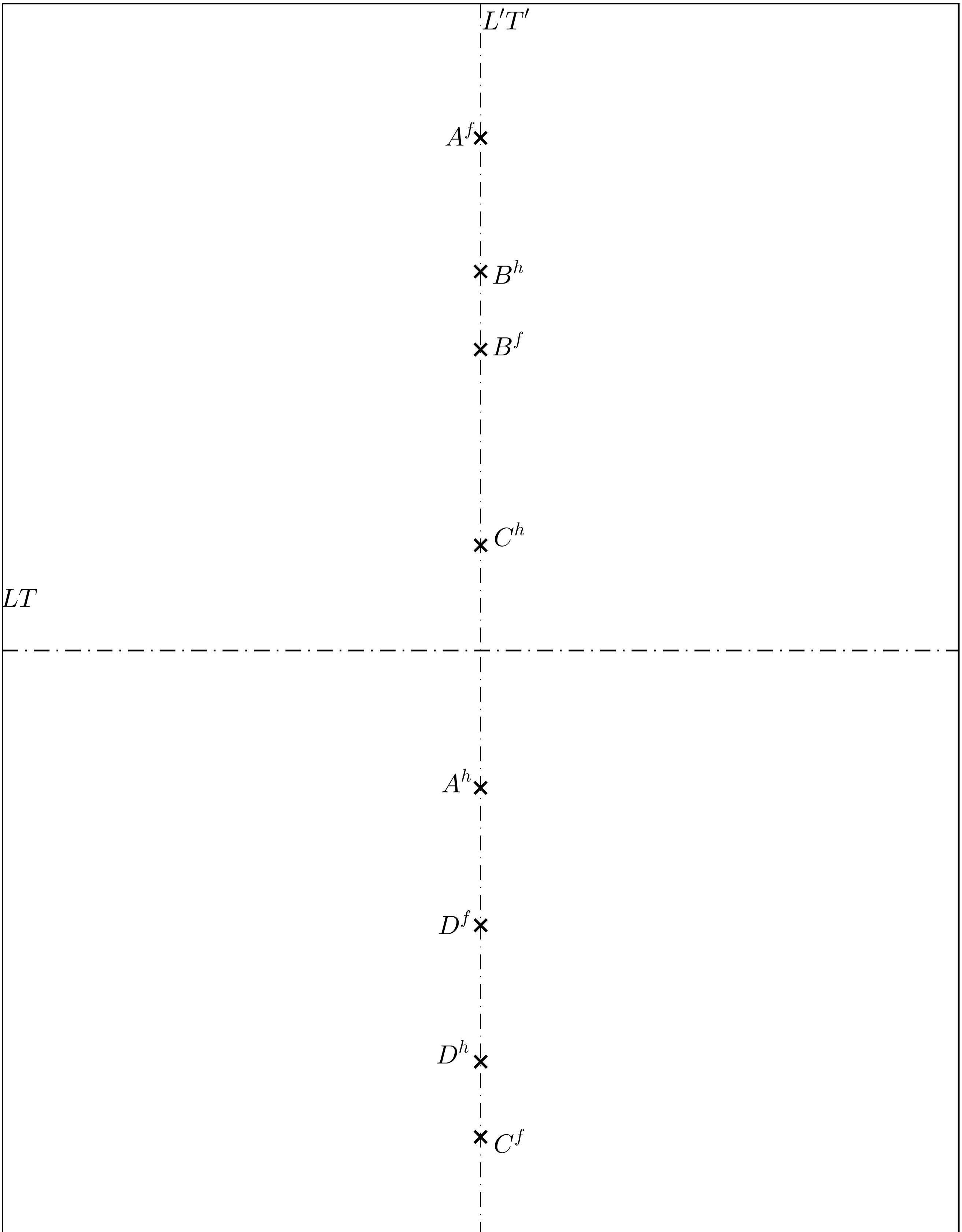


Figure 2.9 – Exemple 2 – Représentation de profil d'un quadrilatère (Variante) : énoncé

2.5 Appartenance d'un point à un plan

2.5.1 Novembre 2023 – Question 3

Énoncé

La figure 2.10 donne un plan π défini par ses traces et les projections de deux points A et B.

Lobjectif est:
— pour la variante 1, de déterminer la projection horizontale d'un point du plan π ayant la même projection frontale que A;
— pour la variante 2, de déterminer la projection frontale d'un point du plan π ayant la même projection horizontale que A;
— pour la variante 3, de déterminer la projection horizontale d'un point du plan π ayant la même projection frontale que B;
— pour la variante 4, de déterminer la projection frontale d'un point du plan π ayant la même projection horizontale que B;
On vous demande

1. d'expliquer la procédure que vous allez suivre en utilisant obligatoirement au moins un croquis en isométrie (figure 5.15).
2. de reporter la construction sur la figue 2.10 en respectant la nomenclature du cours;
3. de déduire de la construction si le point utilisé (A pour les variantes 1 et 2; B pour les variantes 3 et 4) est visible ou caché.

2.6 Recherche des traces d'un plan

2.6.1 Exemple 1 – Traces d'un plan défini par deux droites sécantes

Énoncé

On donne les projections horizontales et frontales de deux droites a et b sécantes en P (Figure 2.11).

On demande de déterminer les traces du plan α définies par les droites a et b.

2.6.2 Novembre 2012 – Question 2

Énoncé

On donne les projections de deux points B et C ainsi que la projection horizontale d'un point A (figure 2.12).

On demande:
— de placer la projection frontale du point A pour que la droite AB soit horizontale;
— de rechercher les traces du plan π contenant les points A, B et C.

2.6.3 Janvier 2013 – Question 2

Énoncé

La figure 2.13 donne les projections des points J_a et J_b, traces frontales de deux droites de bout a et b et la projection horizontale d'une droite d. La droite d appartient au plan π (π est le

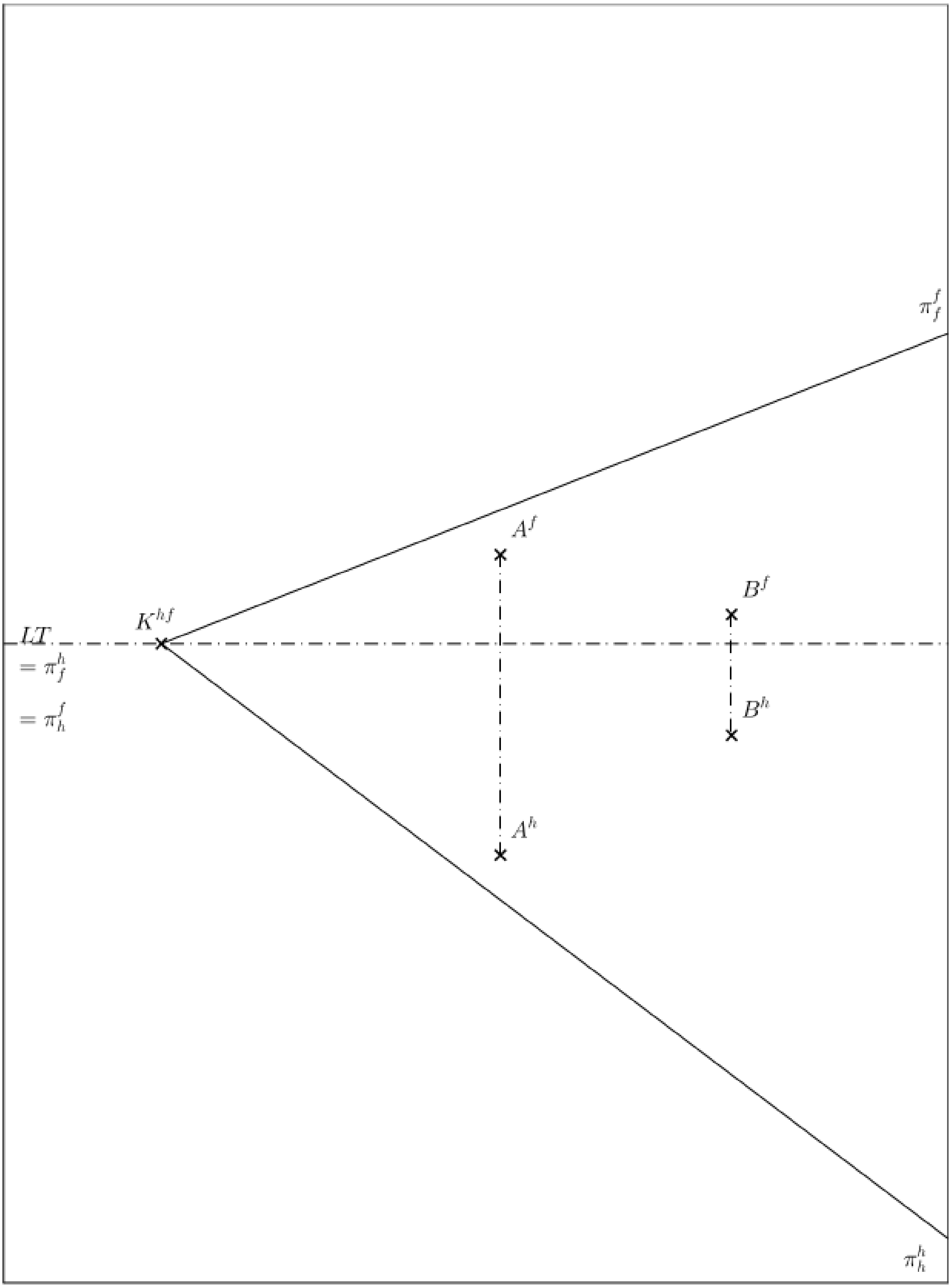


FIGURE 2.10 – Novembre 2023 – Question 3 : énoncé

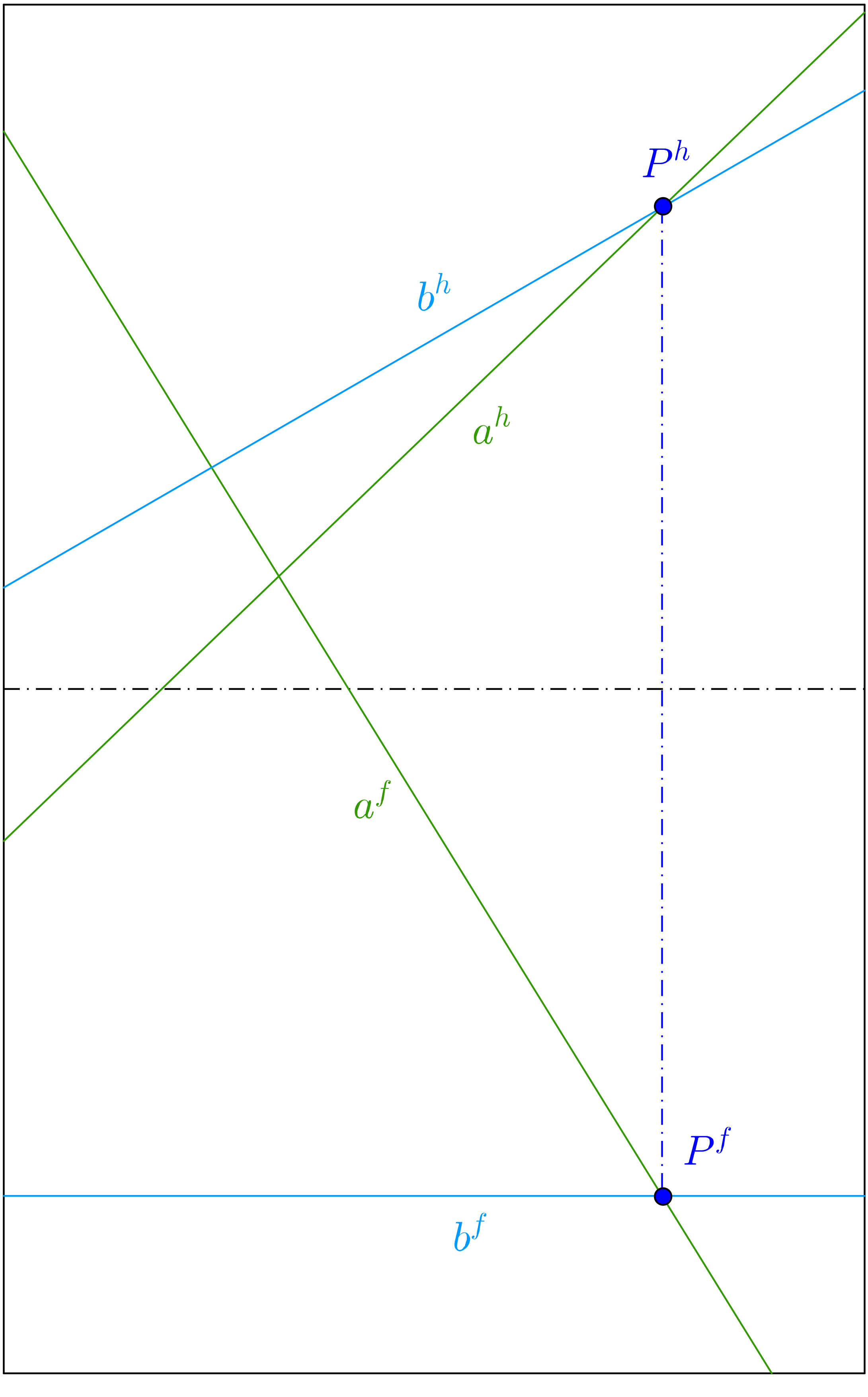


FIGURE 2.11 – Exemple 1 – Traces d'un plan défini par deux droites sécantes : énoncé

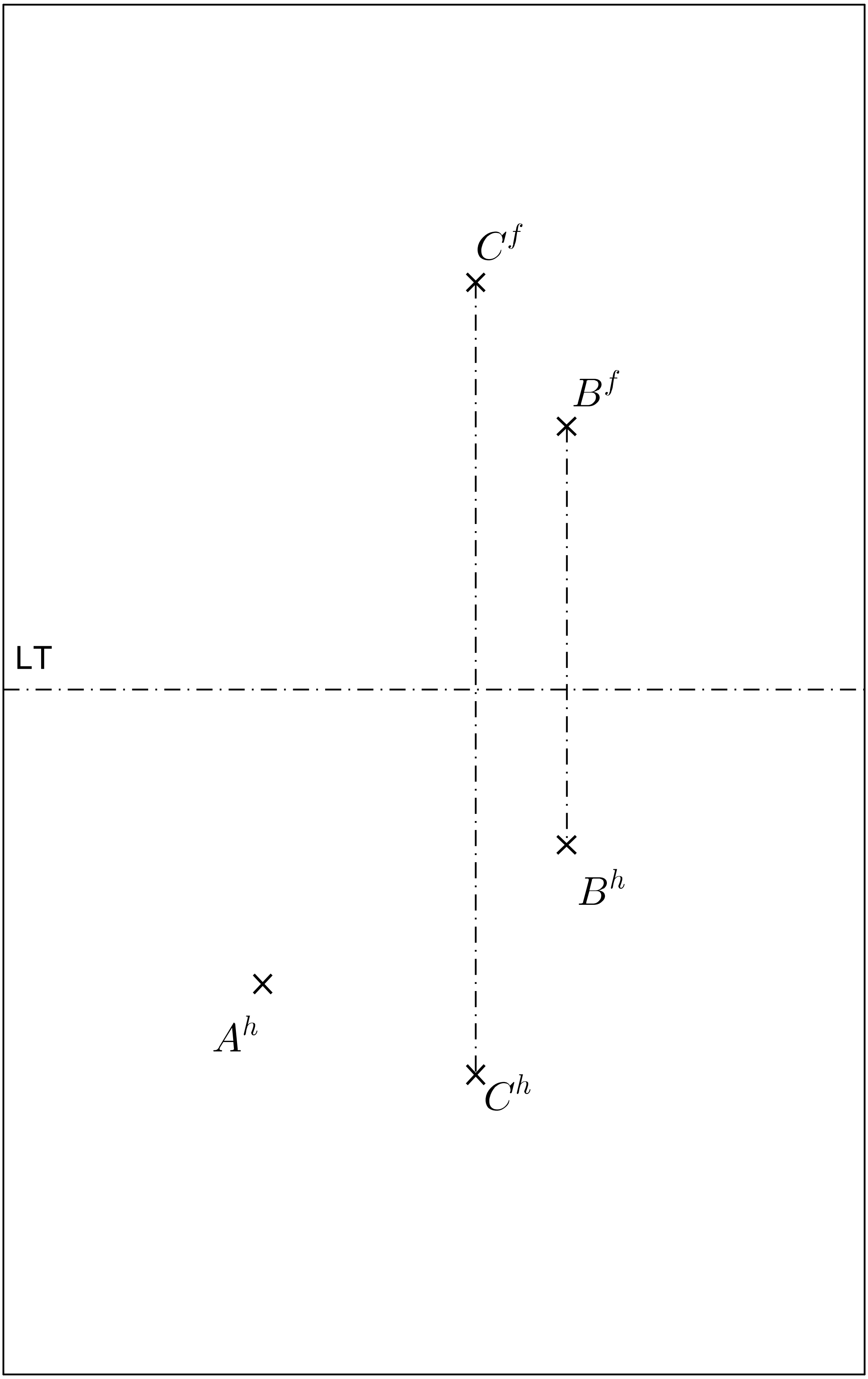


FIGURE 2.12 – Novembre 2012 – Question 2 : énoncé

plan défini par a et b).

On demande:
— de représenter sur la vue en isométrie fournie en figure 5.39 les droites a, b et d ainsi que leurs projections (employez une échelle 1/2 comme aux séances d'exercice);
— de représenter sur cette même figure les traces du plan π;
— de compléter la figure 2.13 pour faire apparaître les projections des droites a, b et d ainsi que les projections des traces du plan π.

2.6.4 Novembre 2013 – Question 2

Énoncé

L'épure donnée en figure 2.14 donne les projections de trois points A, B et C. On demande de représenter sur l'épure les projections des traces du plan contenant A, B et C.

2.6.5 Janvier 2014 – Question 7

Énoncé

Deux droites a et b, sécantes en P sont données par leurs projections (cf figure 2.15). On demande de trouver les projections des traces du plan π défini par a et b.

2.6.6 Application 1 – Exo 1

Énoncé

On donne les coordonnées cartésiennes de trois points A, B et C :
- A:(40 ; 30 ; 20) mm
- B:(80 ; 90 ; 80) mm
- C:(-10 ; 140 ; 30) mm

On demande de représenter sur une épure de Monge viegre les traces du plan π défini par ces trois points.

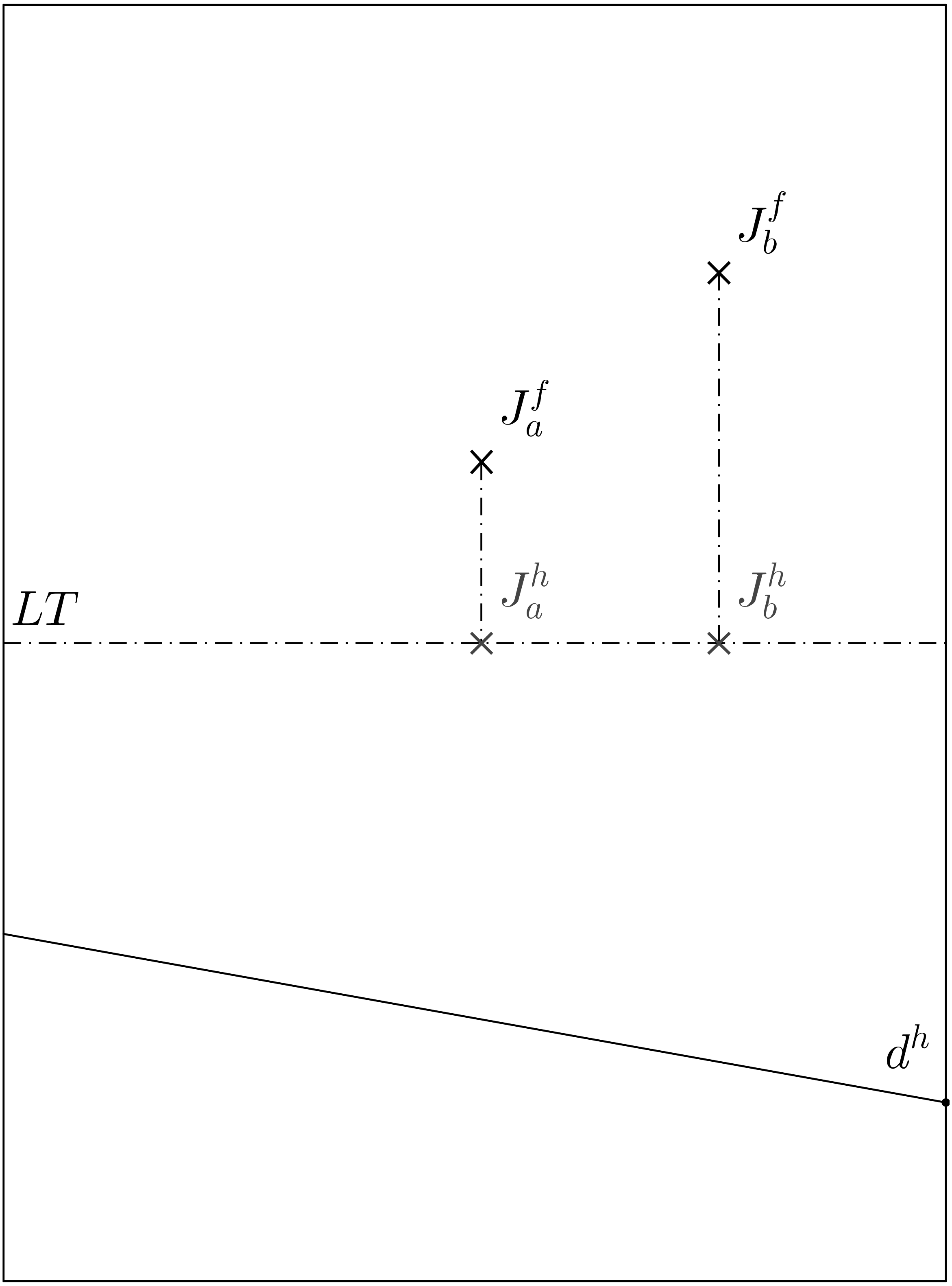


FIGURE 2.13 – Janvier 2013 – Question 2 : énoncé

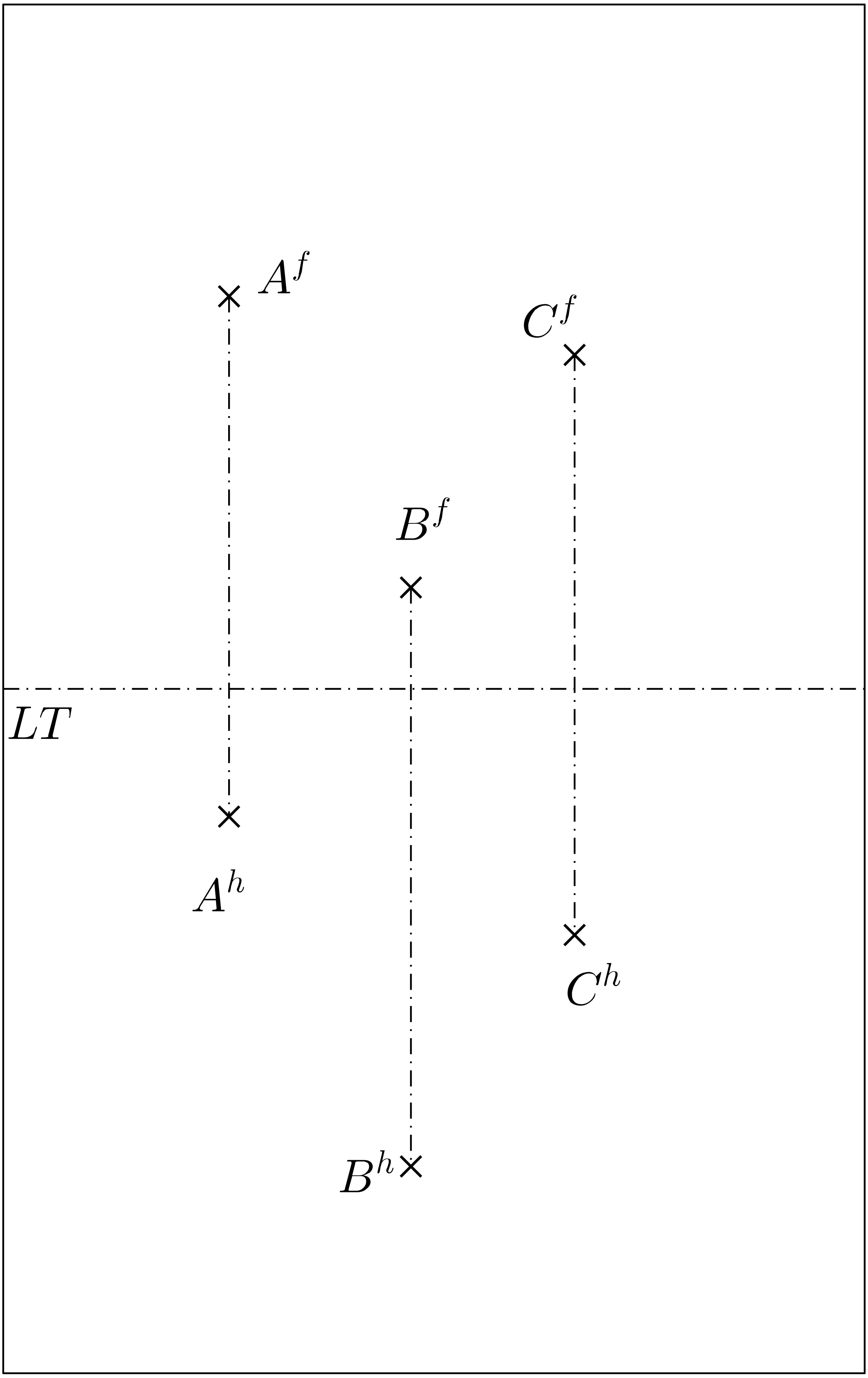


FIGURE 2.14 – Novembre 2013 – Question 2 : énoncé

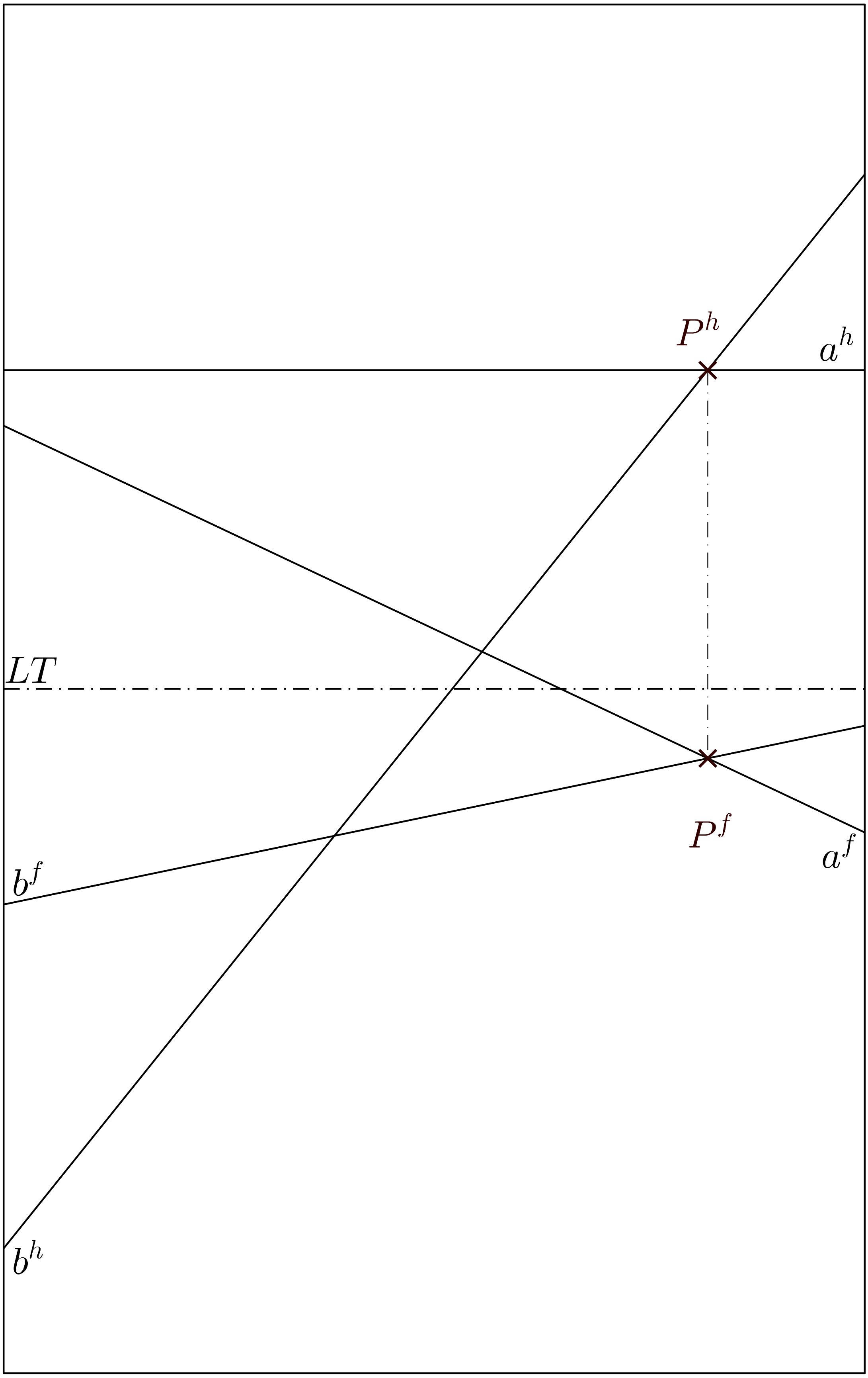


FIGURE 2.15 – Janvier 2014 – Question 7 : énoncé

2.7 Intersection entre éléments

2.7.1 Exemple 1 – Intersection droite/plan

Énoncé

Un plan π est défini par trois points A, B et C non alignés. Les coordonnées de ces trois points, exprimées par rapport au systèmes d'axes Oxyz, valent :

- A (60 ; 40 ; 100) mm
- B (50 ; 130 ; −50) mm
- A (−70 ; 90 ; −30) mm

On donne aussi les projections horizontale d^h et frontale d^f d'une droite d (Figure 2.16).

On demande de déterminer le point P d'intersection entre la droite d et le plan π.

2.7.2 Exemple 3 – Intersection entre plans

Énoncé

L'épure de Monge représentée à la figure 2.17 donne les projections des traces de deux plans **de bout**.

On demande de :

1. nommer correctement les projections des traces de ces deux plans;
2. de représenter en isométrie ces deux plans;
3. rechercher l'intersection entre ces deux plans (Monge et isométrie).

2.7.3 Exemple 4 – Intersection d'un plan et d'une droite de profil

Énoncé

Soit un plan α défini par ses traces horizontale α_h et frontale α_f et une droite d défini par sa trace horizontale I et sa trace frontale J (Figure 2.18).

On demande de déterminer le point P d'intersection entre le plan α et la droite d.

2.7.4 Novembre 2011 – Question 2

Énoncé

La figure 2.19 représente une droite a définie par les points A1 et A2 et une droite b définie par les points B1 et B2. On demande de rechercher les projections du point P d'intersection entre a et b.

2.7.5 Novembre 2012 – Question 4

Énoncé

La figure 2.20 représente un plan π défini par ses traces et les projections d'une droite d. On demande de rechercher le point P d'intersection entre la droite d et le plan π.

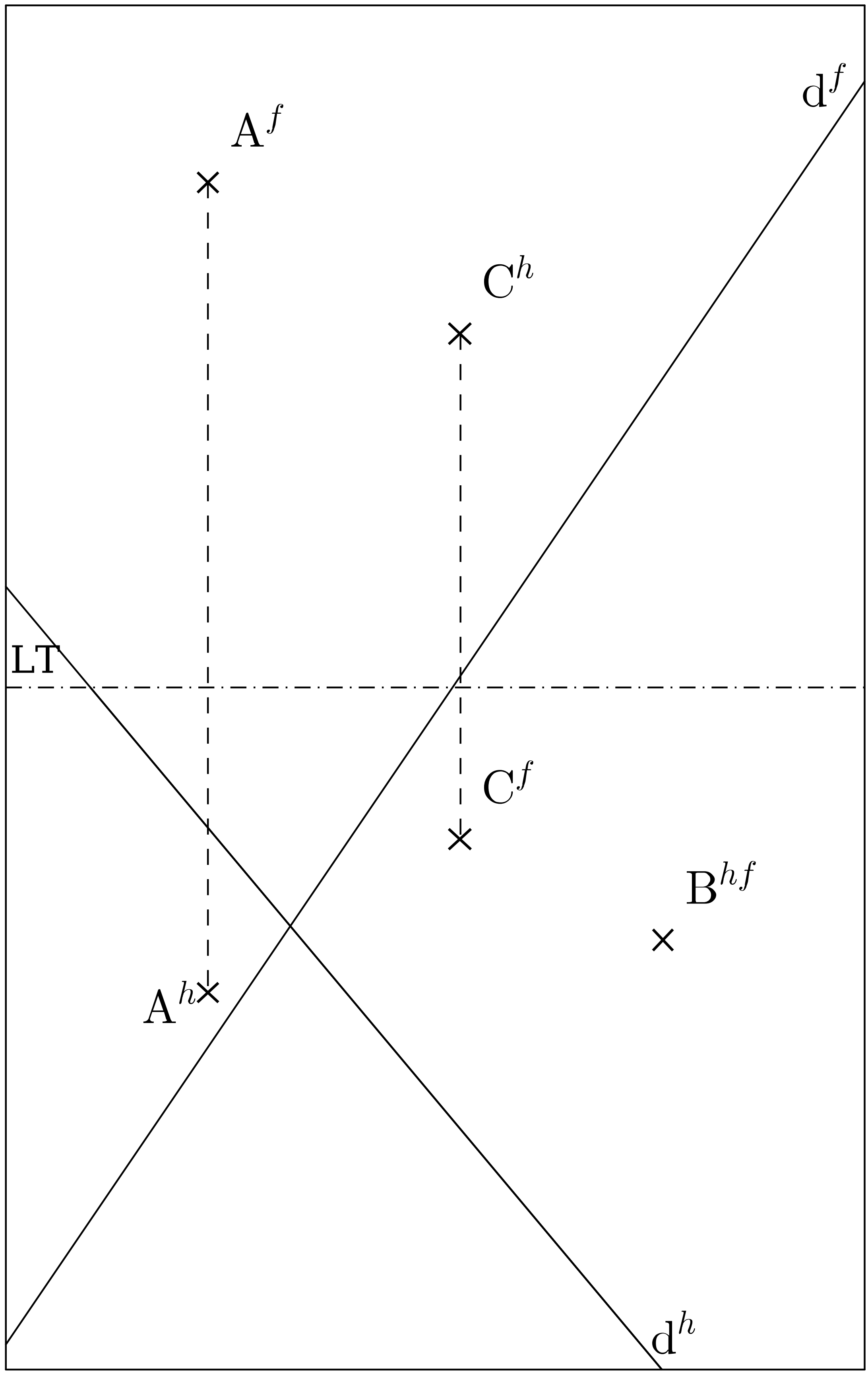


FIGURE 2.16 – Exemple 1 – Intersection droite/plan : énoncé

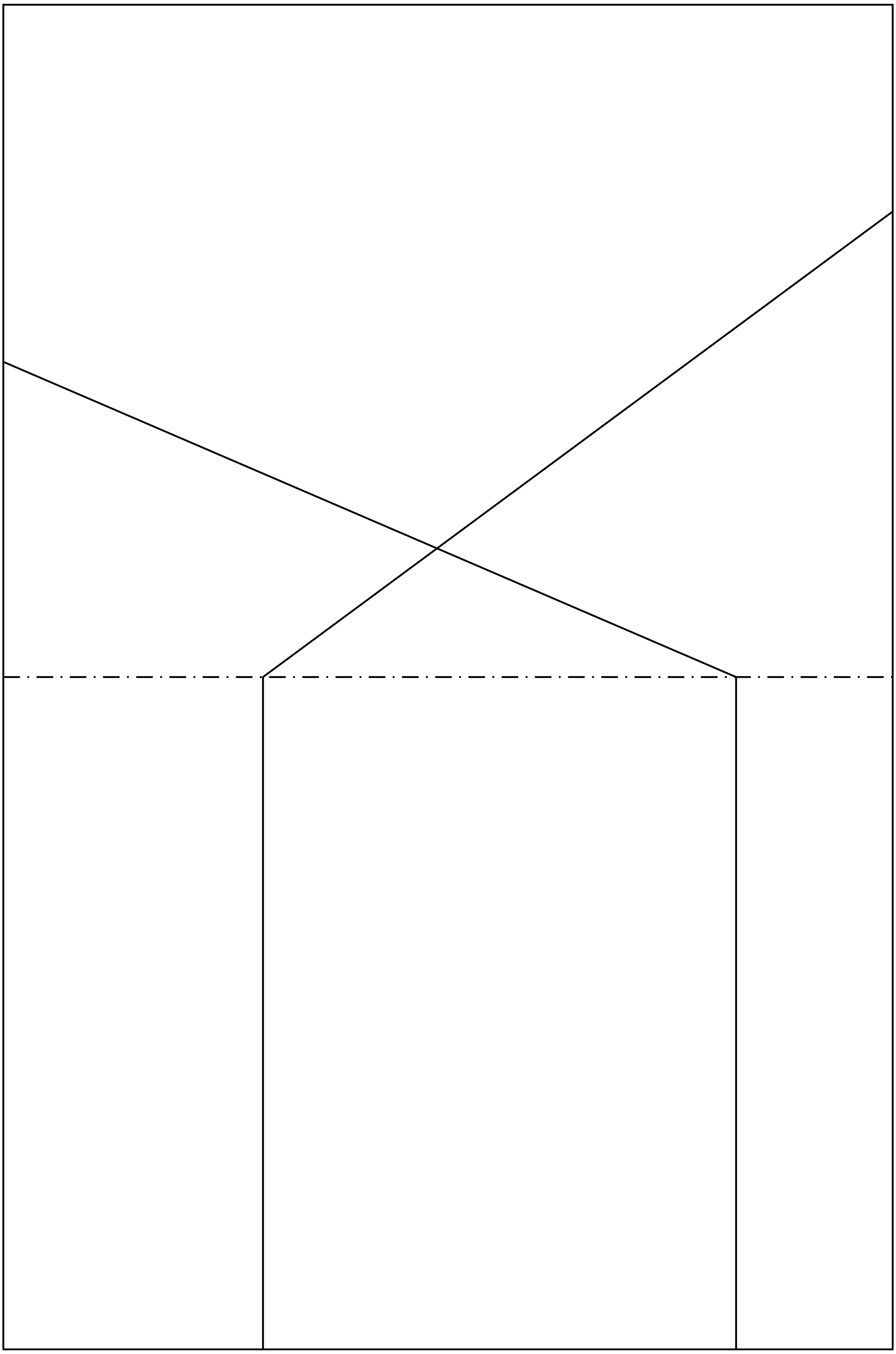


FIGURE 2.17 – Exemple 3 – Intersection entre plans : énoncé

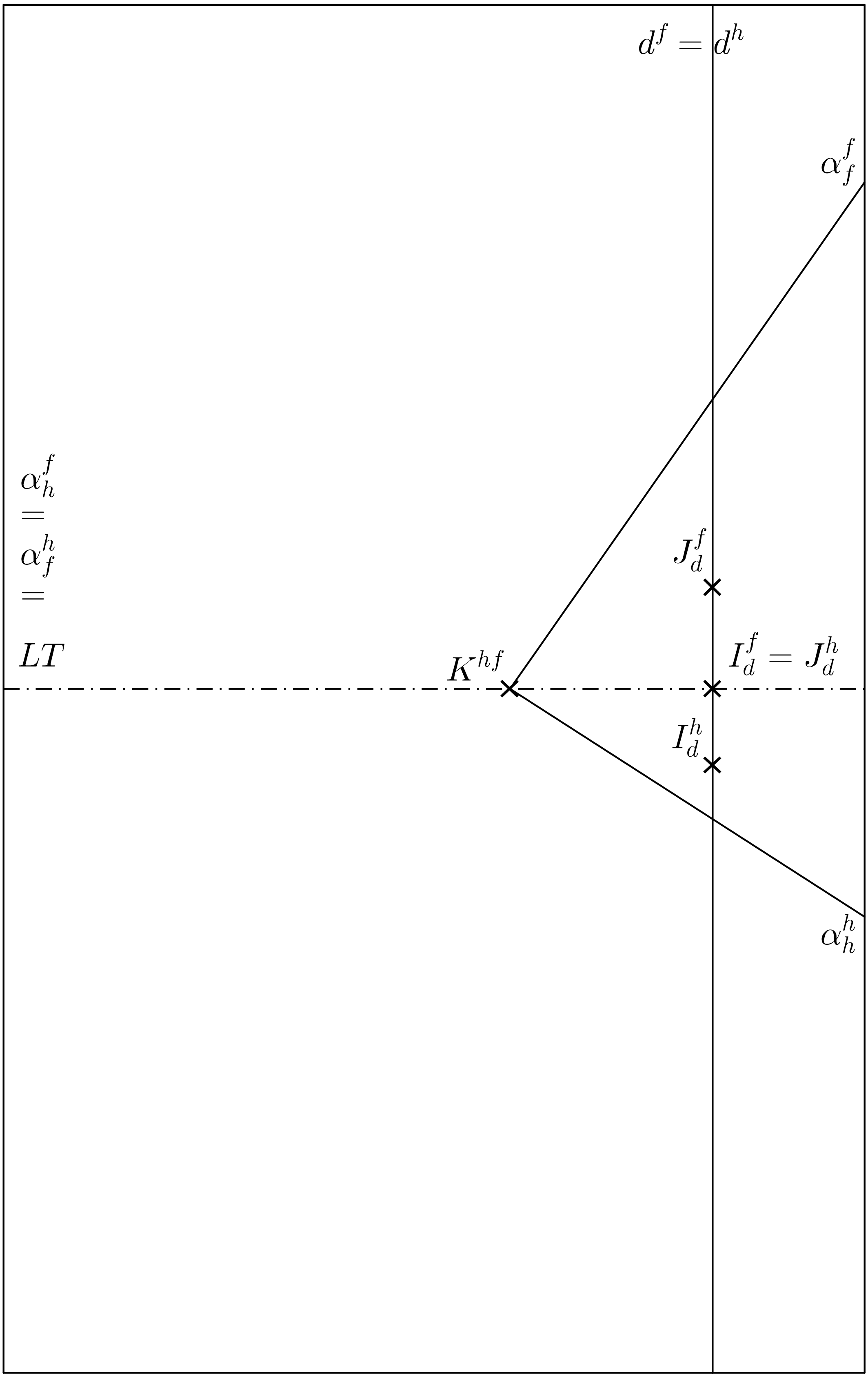


FIGURE 2.18 – Exemple 4 – Intersection d'un plan et d'une droite de profil : énoncé

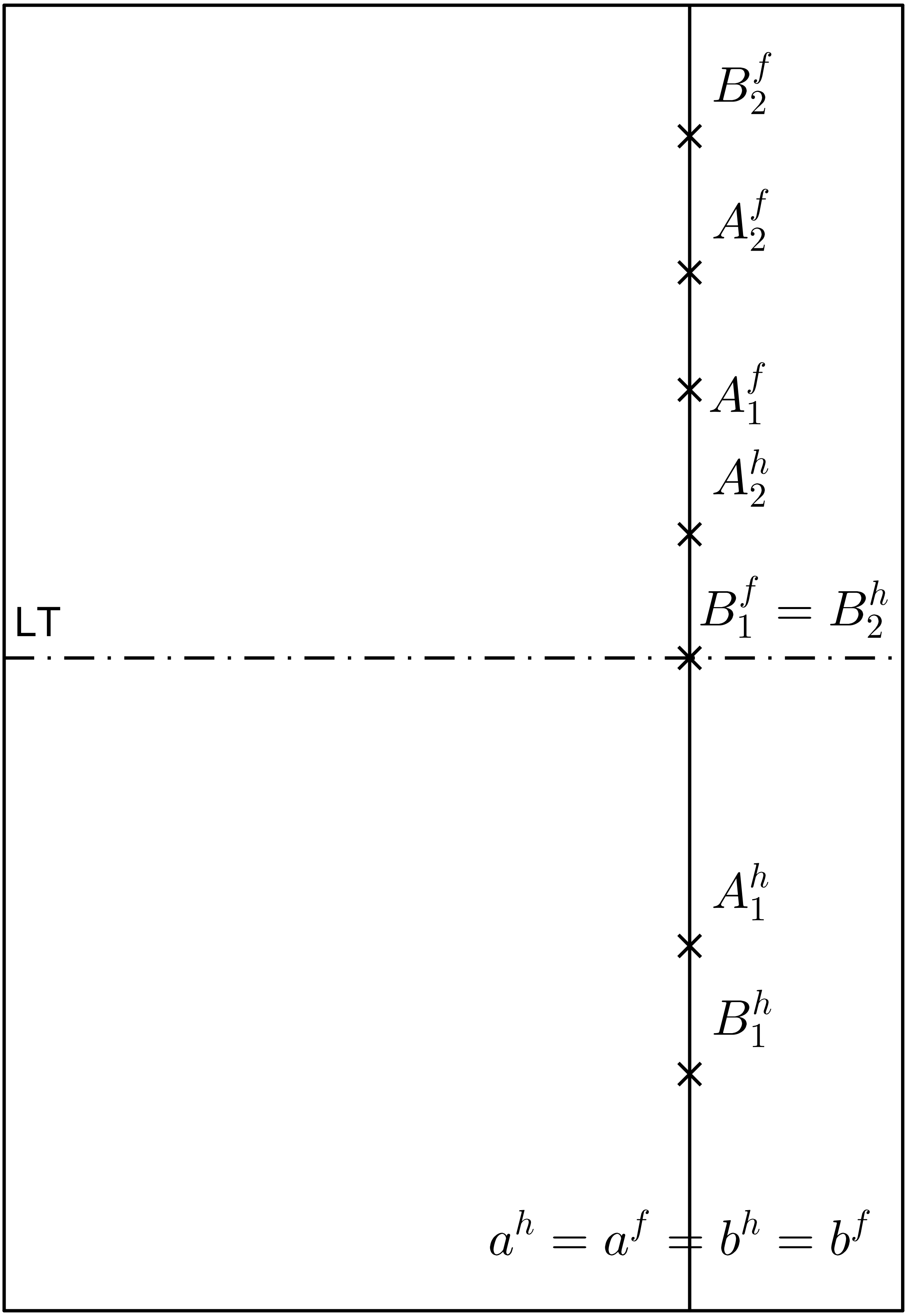


Figure 2.19 – Novembre 2011 – Question 2 : Énoncé

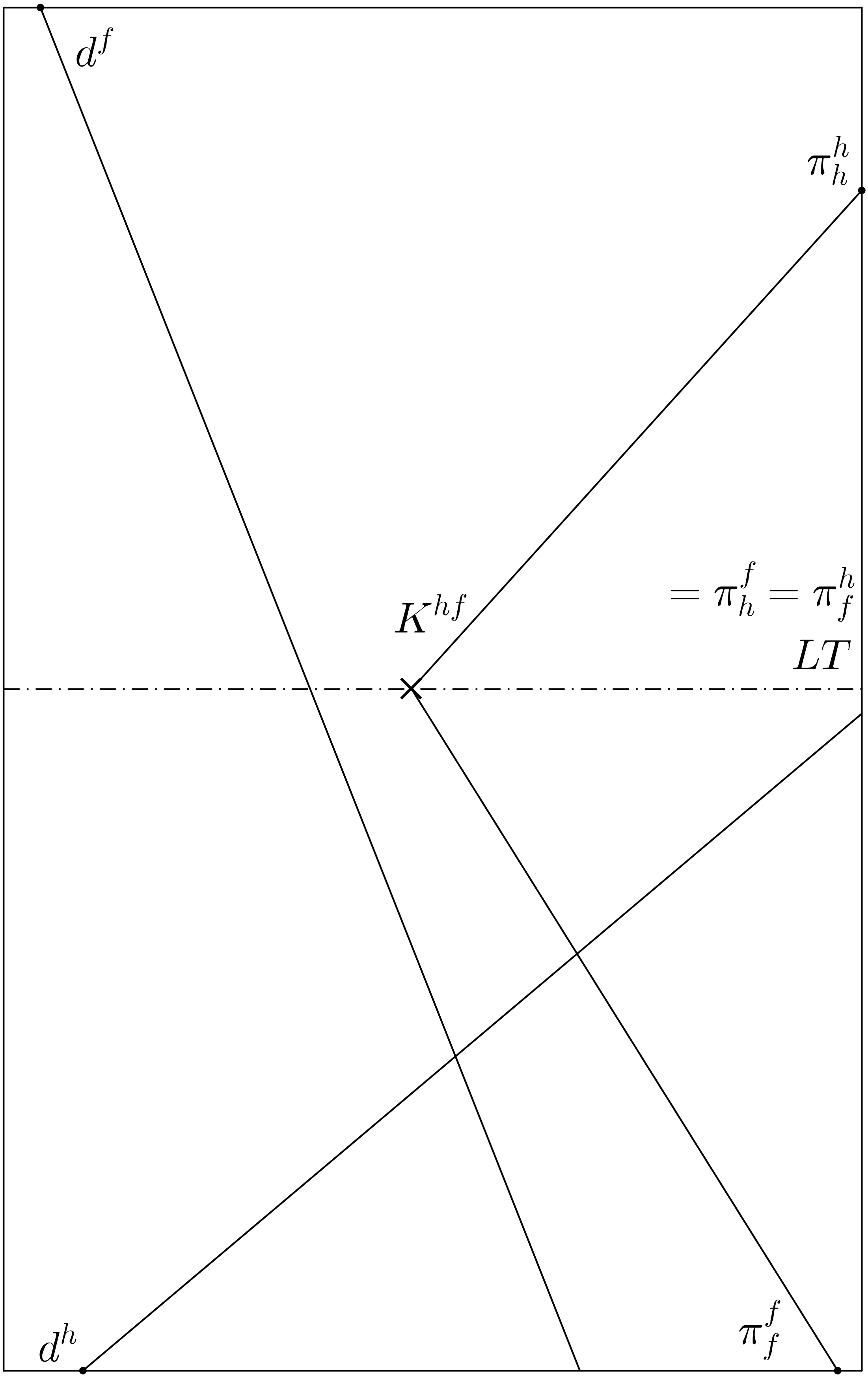


FIGURE 2.20 – Novembre 2012 – Question 4 : énoncé

2.7.6 Novembre 2013 – Question 3 (série 1)

Énoncé

La figure 2.21 représente un plan π défini par ses traces ainsi que les projections d'une droite d. On demande de rechercher le point P d'intersection entre la droite d et le plan π.

2.7.7 Novembre 2014 – Question 2 (série 1)

Énoncé

La figure 2.22 renseigne les projections de deux droites sécantes a et b ainsi que celles d'une droite d. On demande de déterminer les projections du point d'intersection entre la droite d et le plan défini par les droites a et b.

2.7.8 Novembre 2015 – Question 2

Énoncé

La figure 2.23 présente le plan π donné par ses traces ainsi que les projections de trois points A, B et C.

On demande de rechercher l'intersection d'une droite d avec le plan π suivant quatre variantes :

- **Variante** 0, $d = AB$;
- **Variante** 1, $d = AC$;
- **Variante** 2, $d = BC$;
- **Variante** 3, d est la droite de bout passant par le point B.

2.7.9 Novembre 2016 : Question 4

Énoncé

Soit un plan π défini par sa trace horizontale π_h et sa trace frontale π_f. On considère un point P appartenant à ce plan π dont uniquement la projection frontale P^f est renseignée sur l'épure (cf. Figure 2.24). On considère par ailleurs une droite d définie par sa projection horizontale d^h et sa projection frontale d^f.

On demande de déterminer :

1. la projection horizontale P^h du point P appartenant au plan π;
2. les projections horizontale et frontale du point Q d'intersection entre la droite d et le plan π (précisez dans quel dièdre se trouve le point Q);
3. en appliquant **obligatoirement** la méthode du triangle rectangle, la vraie grandeur du segment PQ et l'angle β que fait le segment PQ avec le plan frontal.

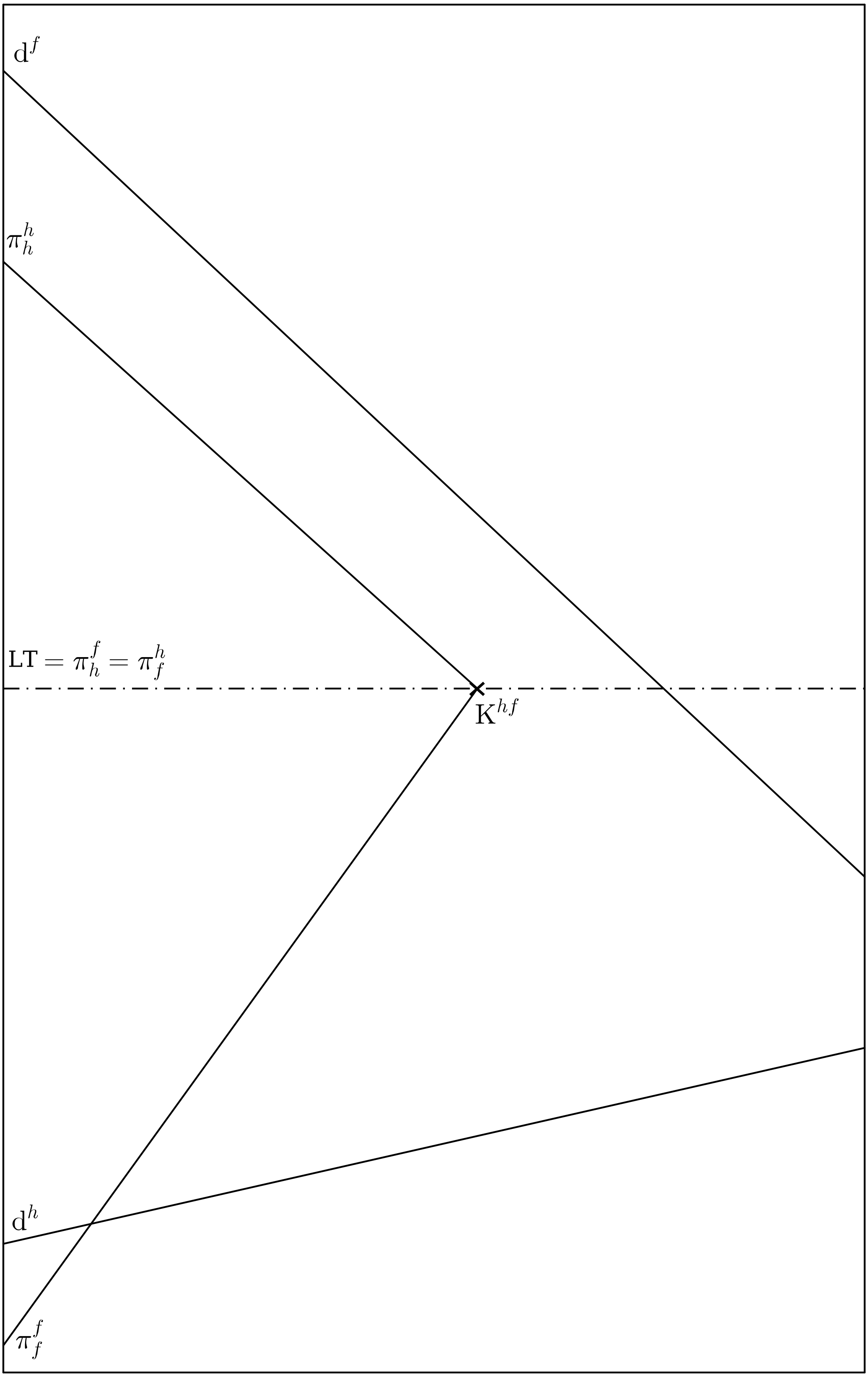


FIGURE 2.21 – Novembre 2013 – Question 3 : énoncé (série 1)

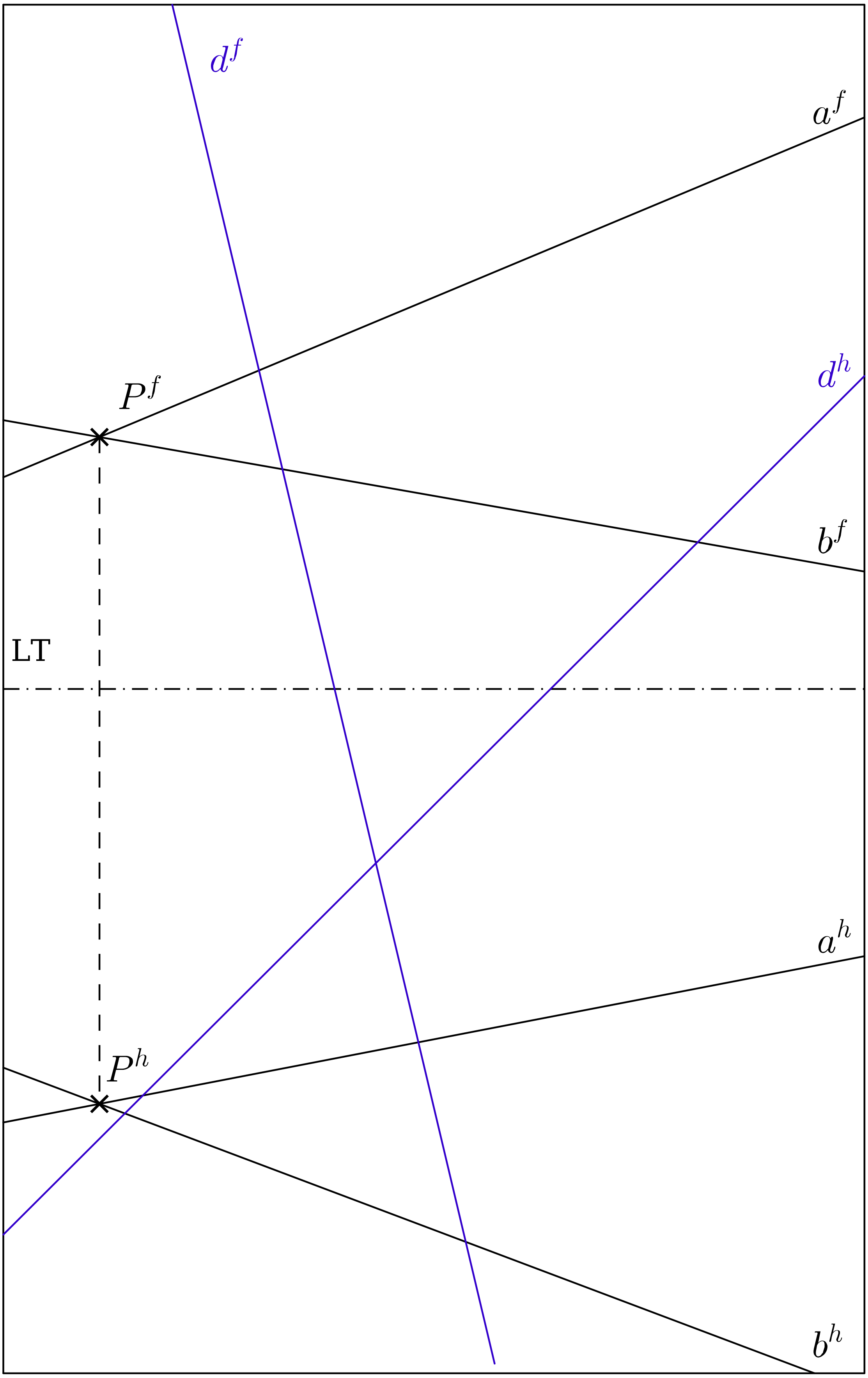


FIGURE 2.22 – Novembre 2014 – Question 2 (série 1) : énoncé

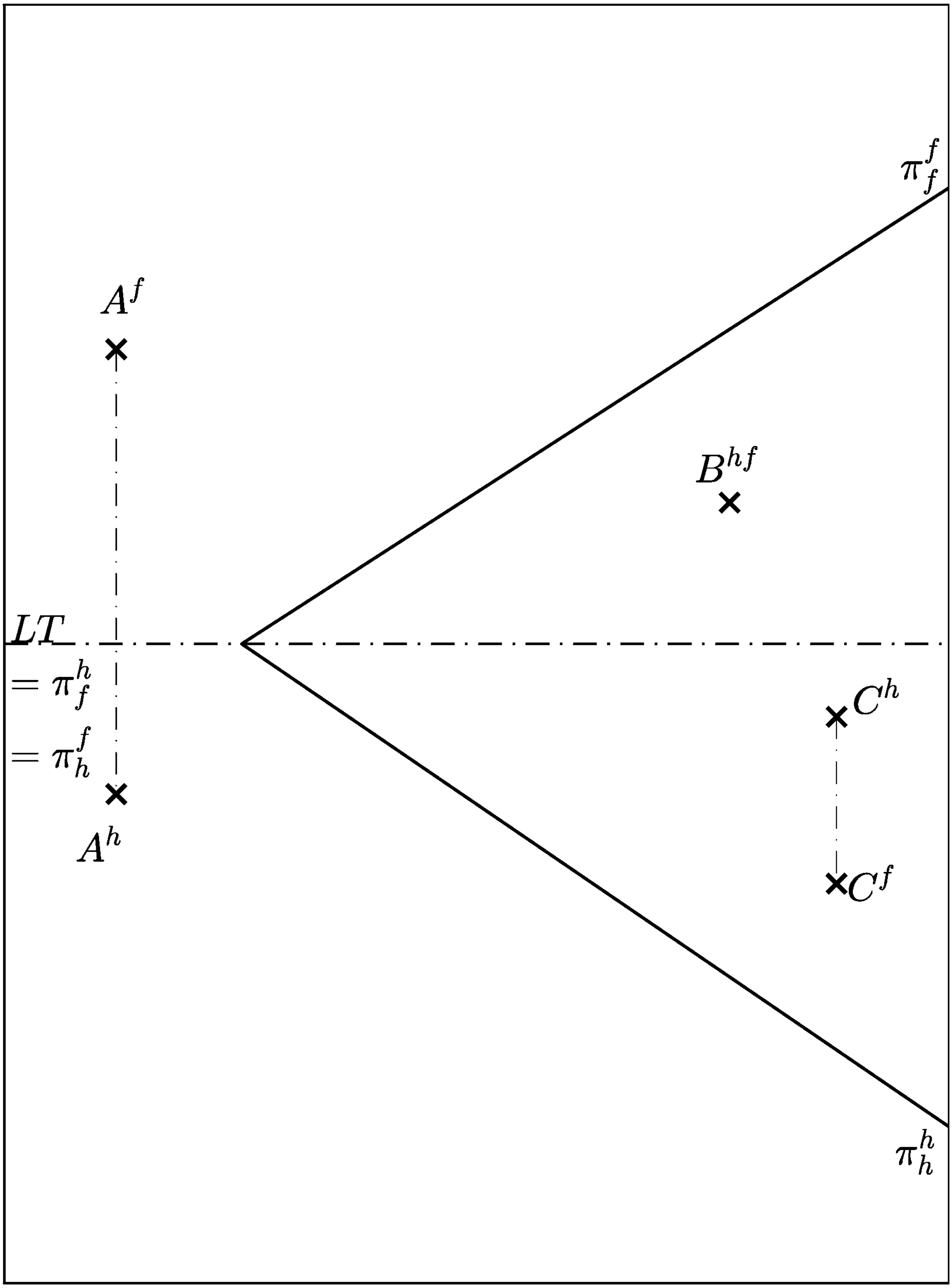


FIGURE 2.23 – Novembre 2015 – Question 2 : énoncé

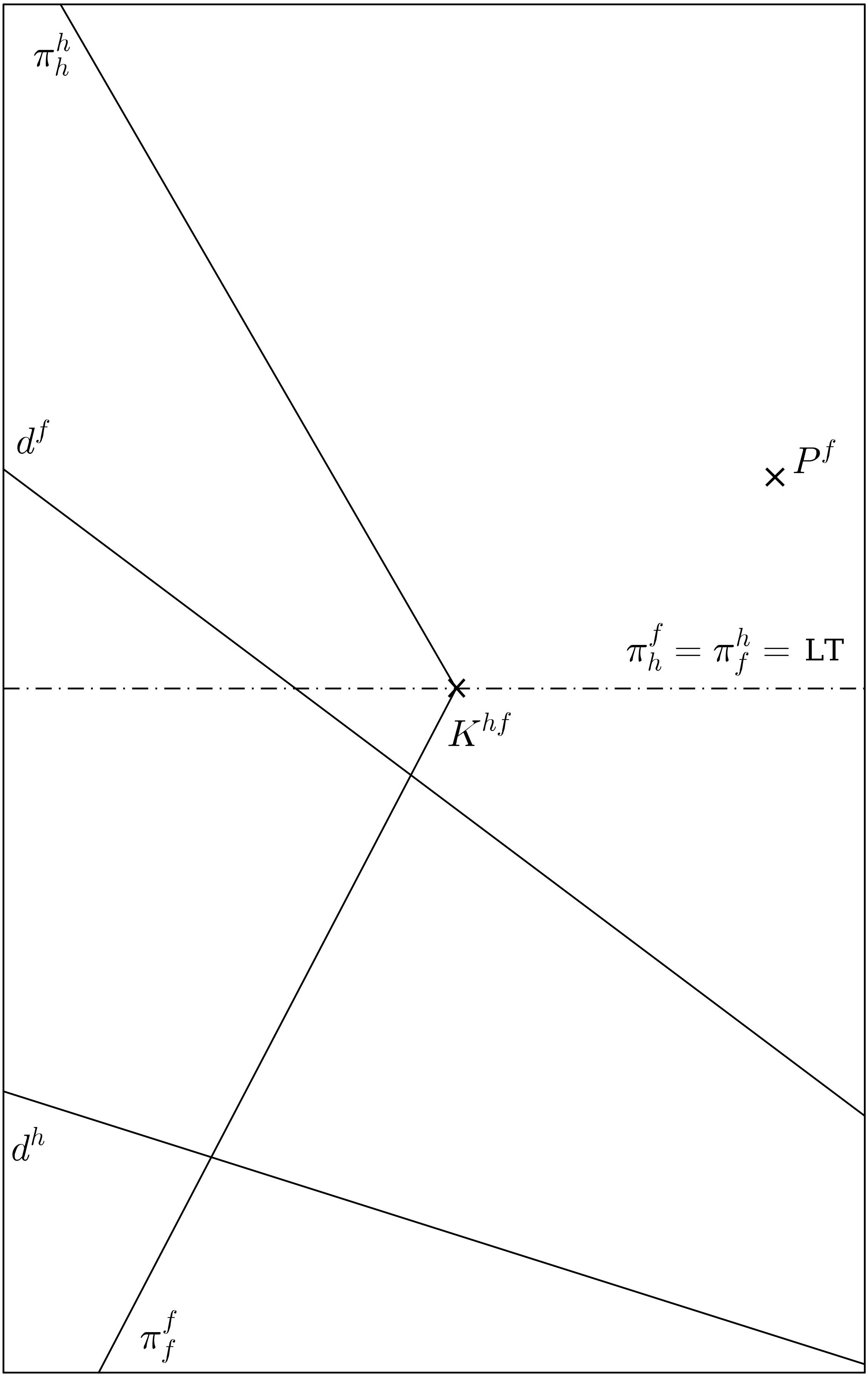


FIGURE 2.24 – Novembre 2016 : Question 4 – Énoncé

2.7.10 Janvier 2017 : Question 2

Énoncé

La figure 2.25 donne les projections horizontales et frontales de deux droites a et b sécantes en A. Ces droites forment un plan nommé π. On considère un point P appartenant à ce plan π dont uniquement la projection frontale P^f est renseignée sur l'épure. On considère par ailleurs une droite d définie par sa projection horizontale d^h et sa projection frontale d^f.

On demande de déterminer :

1. la projection horizontale P^h du point P appartenant au plan π;
2. les projections horizontale et frontale du point Q d'intersection entre la droite d et le plan π;
3. en appliquant **obligatoirement** la méthode du triangle rectangle, la vraie grandeur du segment PQ.

2.7.11 Novembre 2017 : Question 3

Énoncé

La figure 2.26 donne les projections des traces d'un plan π ainsi que les projections de quatre points A, B, C et D. On demande de rechercher le point P d'intersection entre le plan π et une droite s'appuyant sur les points:

- pour la variante 0, prenez la droite AB;
- pour la variante 1, prenez la droite AC;
- pour la variante 2, prenez la droite AD;
- pour la variante 3, prenez la droite AE;
- pour la variante 4, prenez la droite CE;

2.7.12 Janvier 2018 : Question 2

Énoncé

Les projections des traces d'un plan π sont renseignées à la Figure 2.27. On donne également les projections d'une droite d ainsi que la projection frontale P^f d'un point P. Sanchant que le point P appartient au plan π, on demande de déterminer :

1. la projection horizontale P^h du point P;
2. les projections horizontale et frontale de la droite d'intersection w entre le plan π et le plan ρ défini par la droite d et le point P.

2.7.13 Janvier 2019 : Question 2

Énoncé

La projection horizontale du point A et les projections horizontales et frontales des points B et C sont renseignées à la figure 2.28. On donne également les projections d'une droite d. On demande de déterminer

1. la projection frontale du point A en sachant que la droite AB est une horizontale du plan;
2. le point de percée P de la droite d dans le plan formé par A, B et C.

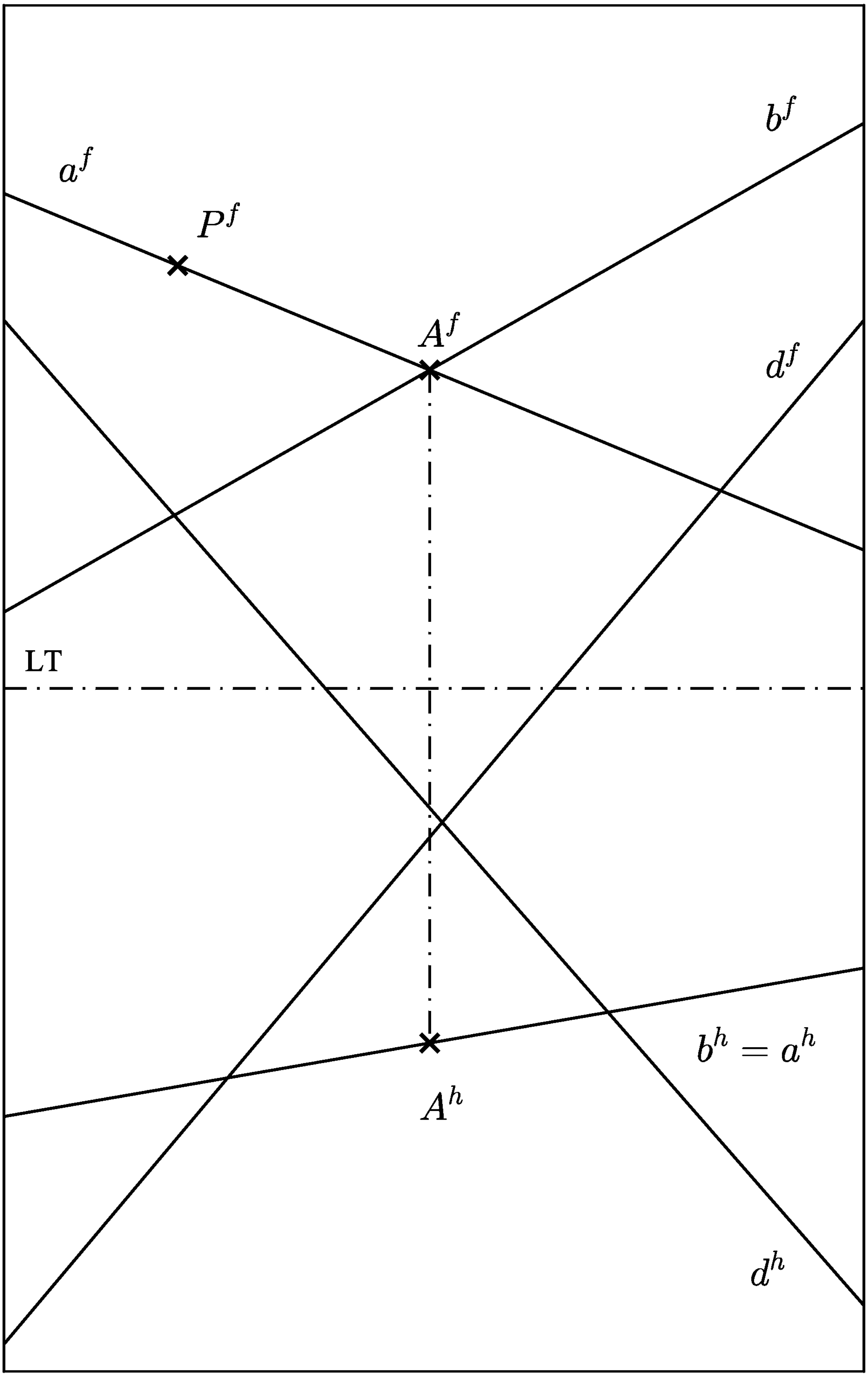


FIGURE 2.25 – Janvier 2017 : Question 2 – Énoncé

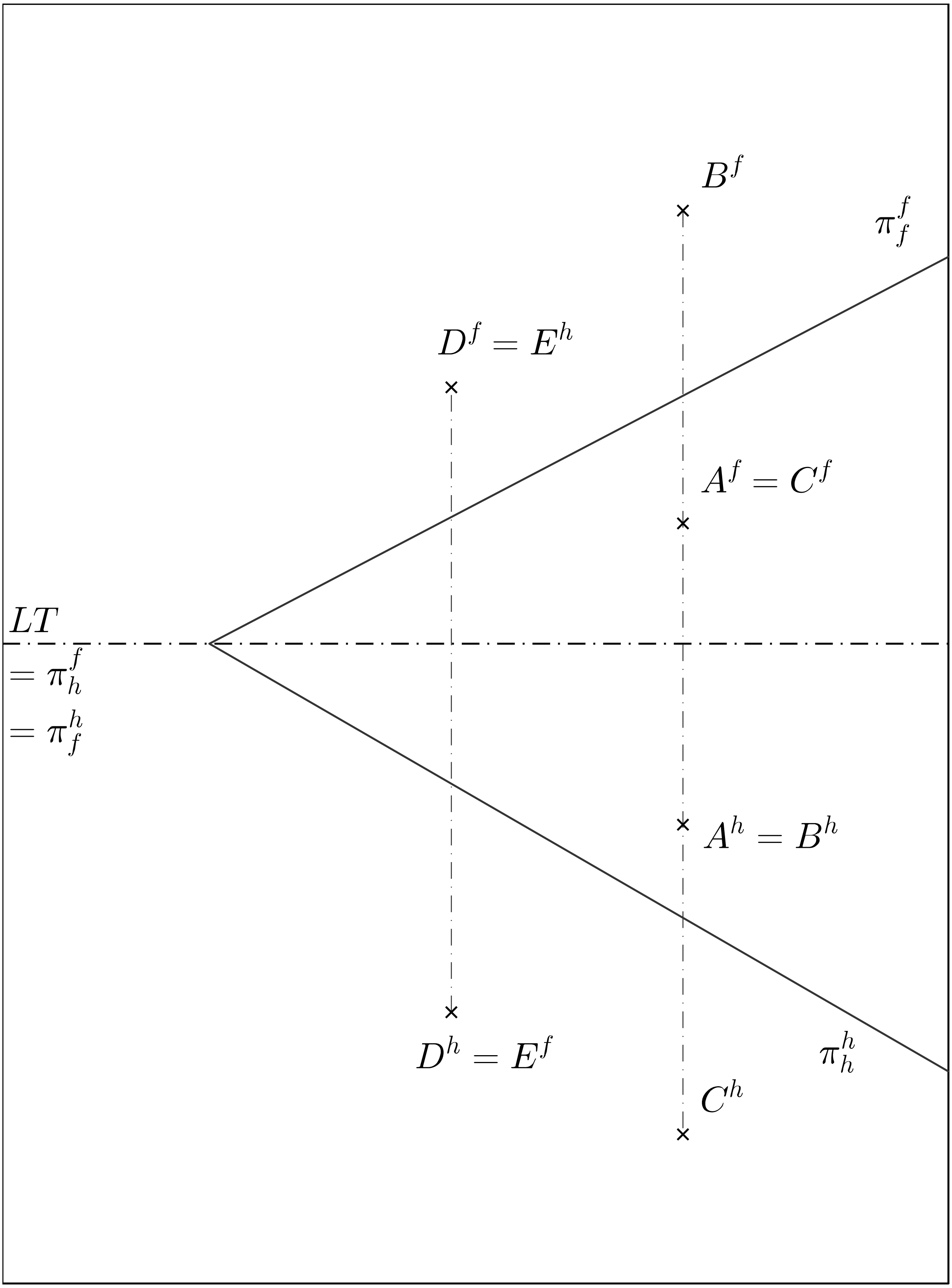


FIGURE 2.26 – Novembre 2017 : Question 3 – Énoncé

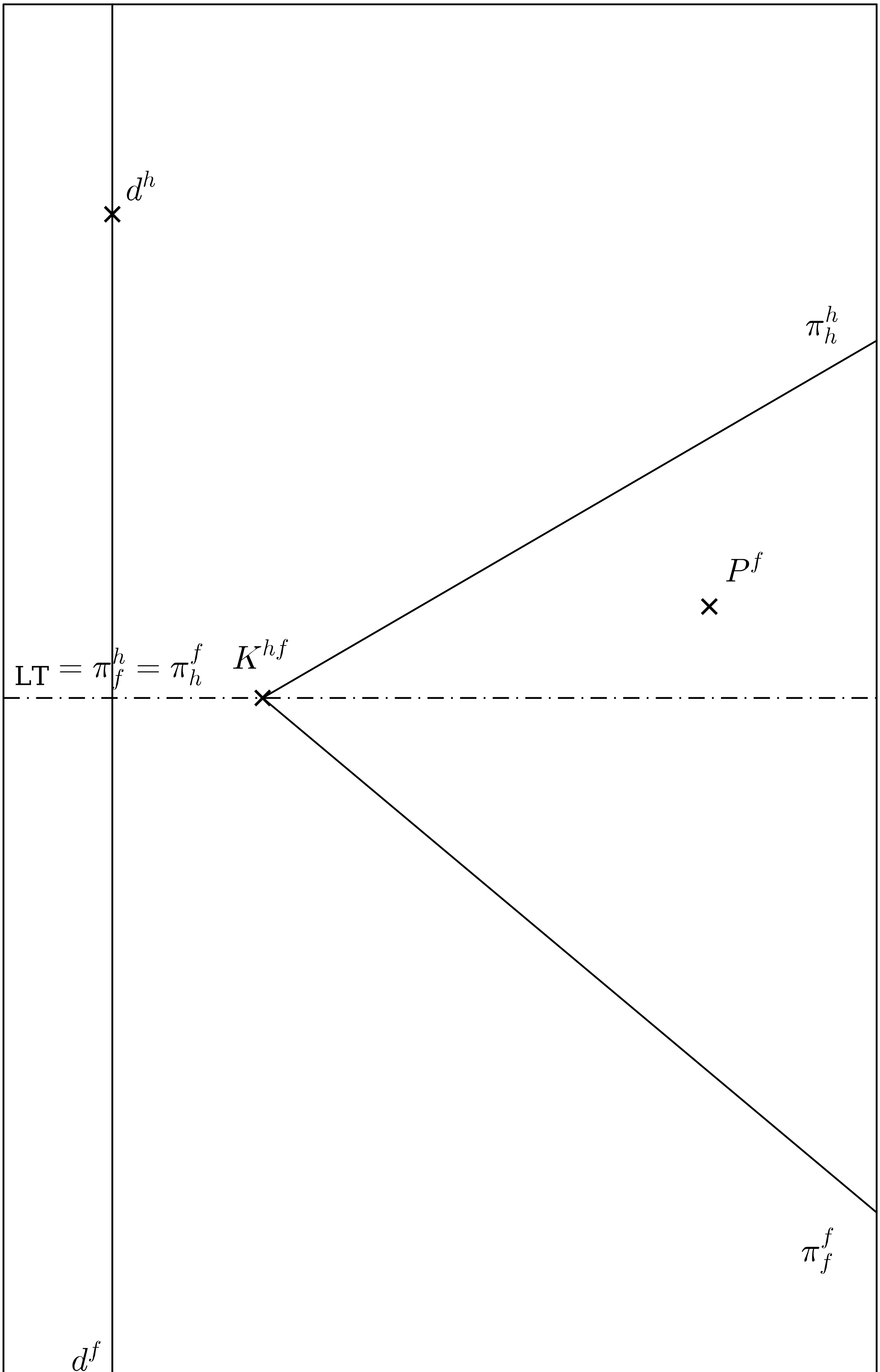


FIGURE 2.27 – Janvier 2018 : Question 2 – Énoncé

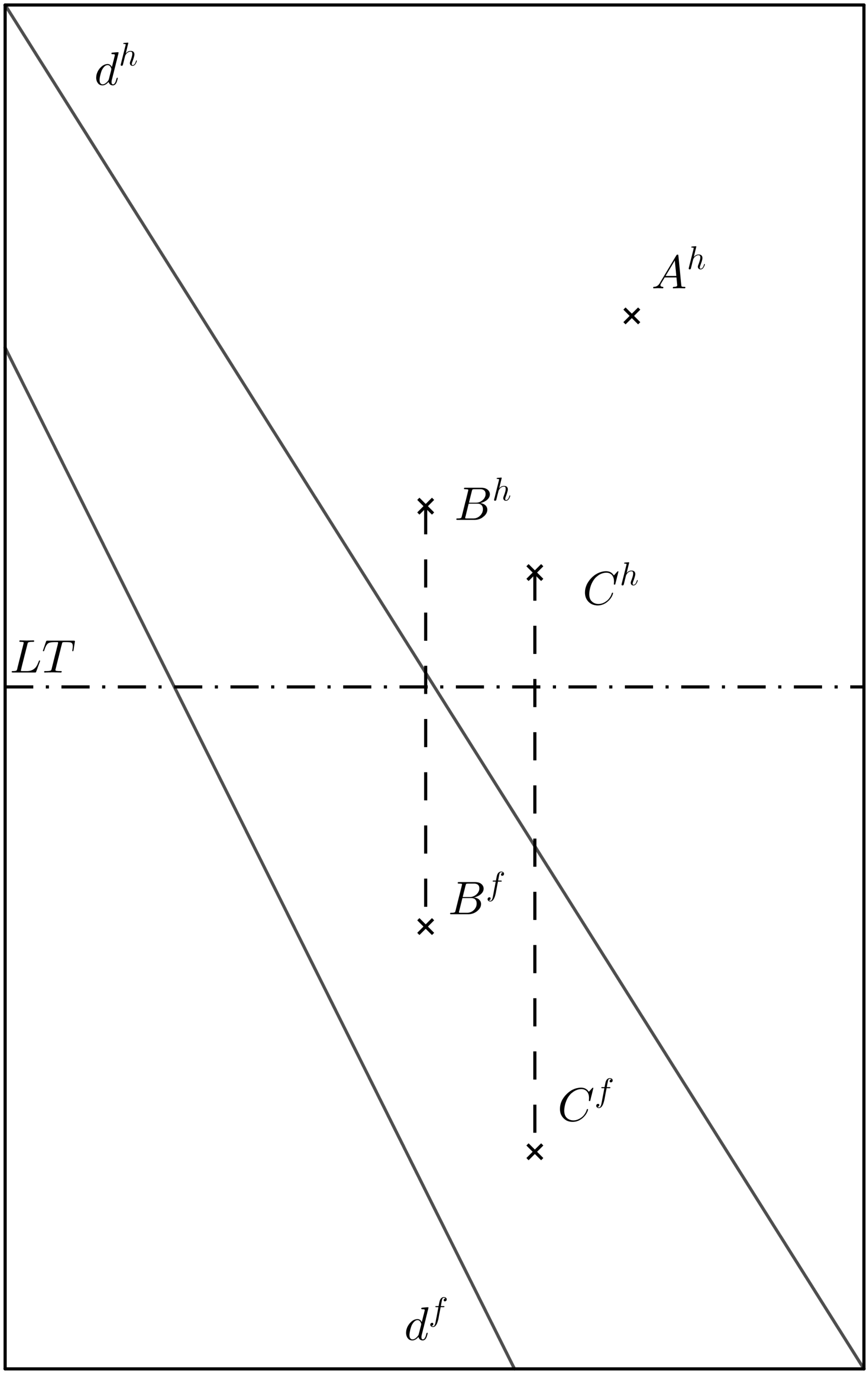


FIGURE 2.28 – Janvier 2019 : Question 2 – Énoncé

2.7.14 Novembre 2021 : Question 2

Énoncé

Dans le plan donné en figure 2.29, on donne les projections de deux droites a et b et d'un point P. On demande:

— si votre numéro d'ordre est pair, de rechercher l'intersection entre la droite a et le plan formé par la droite b et le point P;

— si votre numéro d'ordre est impair, de rechercher l'intersection entre la droite b et le plan formé par la droite a et le point P;

2.7.15 Janvier 2023 : Question 2

Énoncé

On donne les projections de deux droites a et b et d'un point P (figure 2.30).

On demande de rechercher :

1. les traces du plan π défini par a et P;
2. le point d'intersection entre le plan π et la droite b.

2.7.16 Novembre 2024 : Question 3

Énoncé

La figure 2.31 donne un plan π défini par ses traces et les projections de trois points A, B et C.

On demande de déterminer :

- pour la variante 1, le point P d'intersection entre le plan π avec la droite AB;
- pour la variante 1, le point P d'intersection entre le plan π avec la droite AC;
- pour la variante 3, le point P d'intersection entre le plan π avec la droite BC;

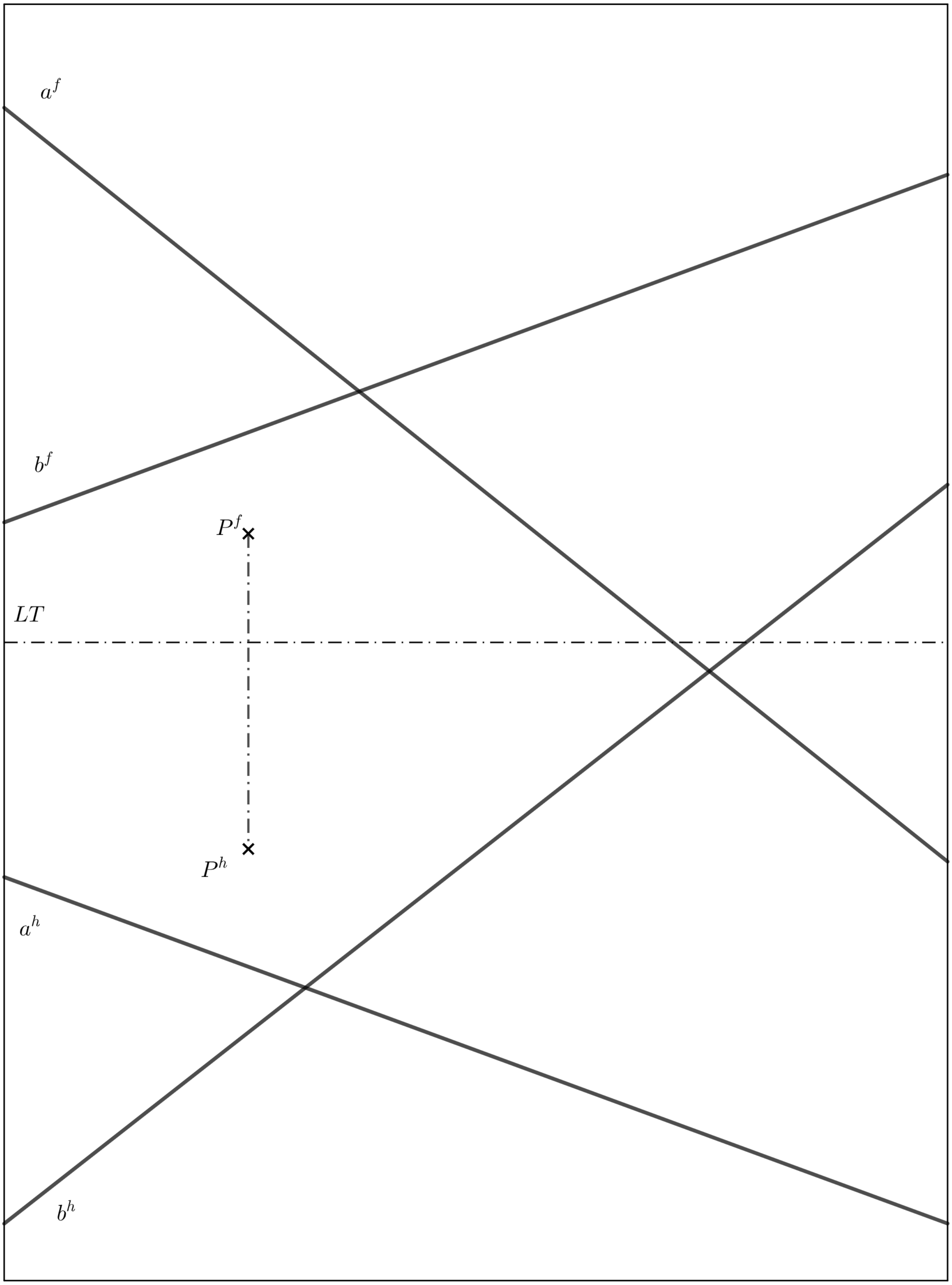


FIGURE 2.29 – Novembre 2021 – Question 2 : énoncé

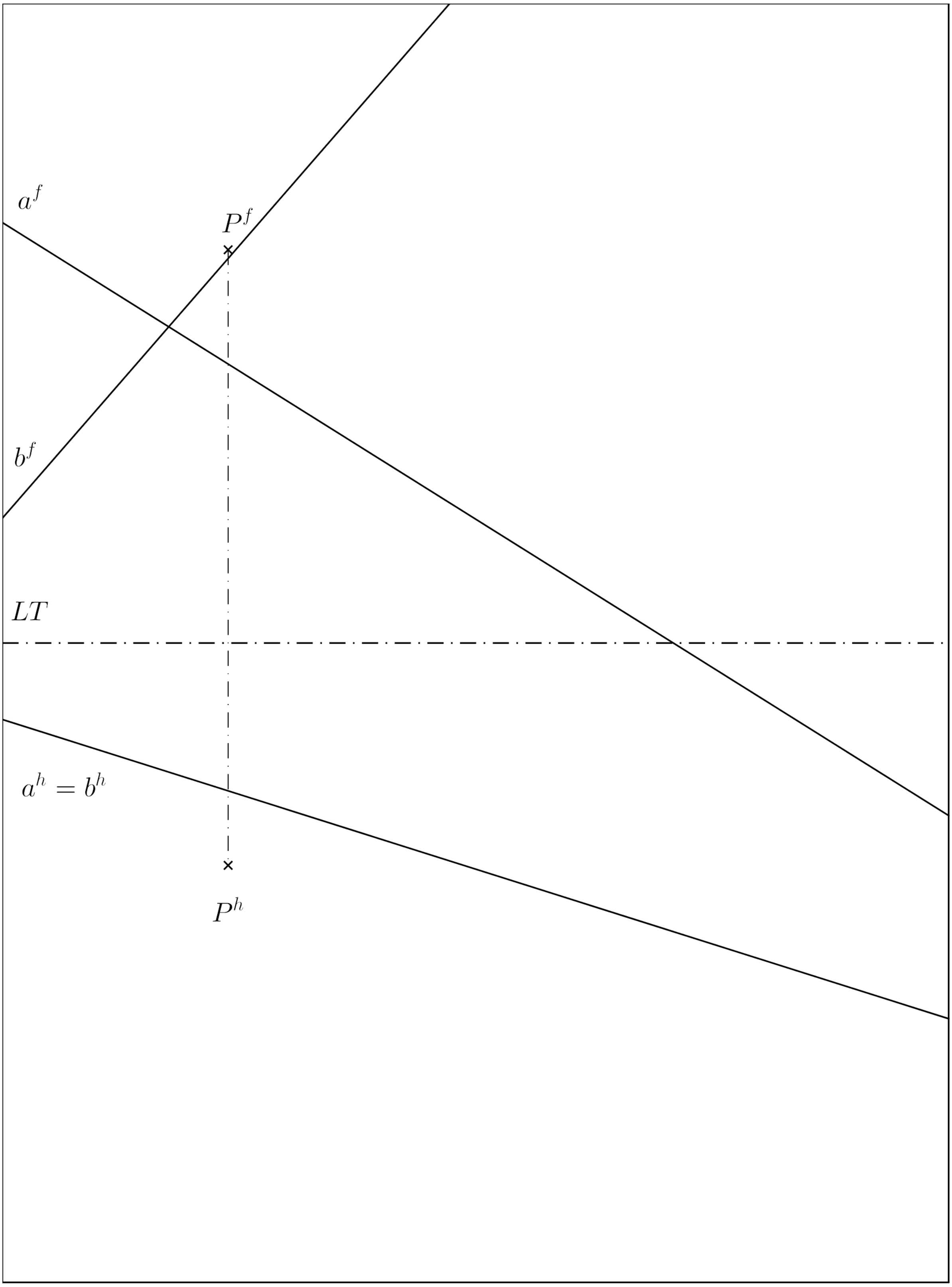


FIGURE 2.30 – Janvier 2023 : Question 2 – Énoncé

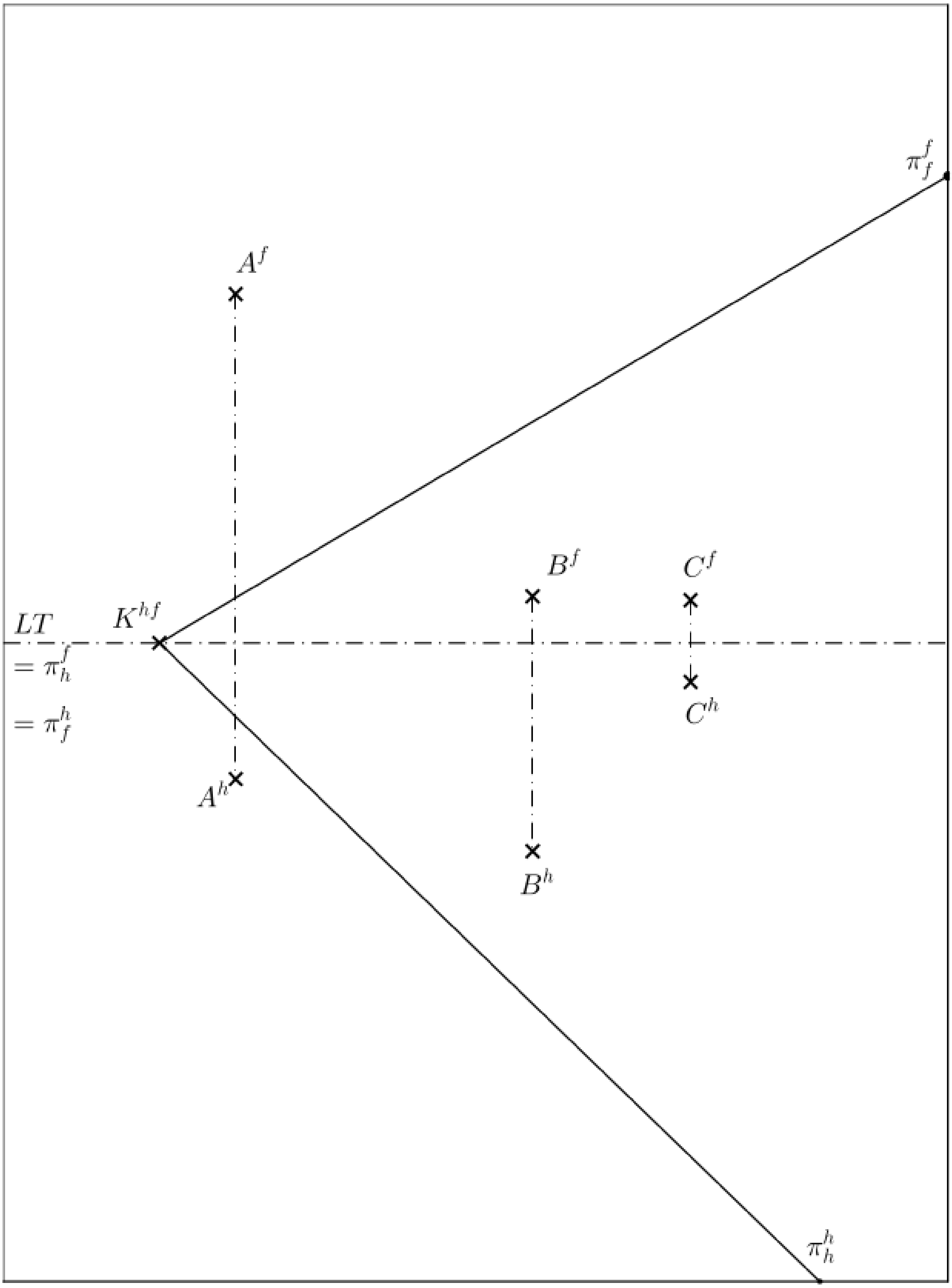


FIGURE 2.31 – Novembre 2024 – Question 3 : énoncé

2.8 Mise en vraie grandeur

2.8.1 Exemple 1

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère deux points A et B dont les coordonnées cartésiennes exprimées en millimètres valent :

- A $(50; 40; 30)$ mm
- B $(80; 100; 90)$ mm

On demande :

1. de représenter dans une épure de Monge les projections horizontales et frontales des points A et B;
2. de déterminer la vraie grandeur du segment AB;
3. de déterminer l'angle que fait le segment AB avec le plan horizontal;
4. de déterminer les projections horizontale P^h et frontale P^f d'un point P localisé à une distance de 30 mm du point A à l'intérieur du segment AB;
5. de vérifier vos résultats de manière analytique.

2.8.2 Exemple 2

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère deux points A et B dont les coordonnées cartésiennes exprimées en millimètres valent :

- A $(60; 20; 50)$ mm
- B $(-90; 125; -35)$ mm

On demande :

1. de représenter dans une épure de Monge les projections horizontales et frontales des points A et B;
2. de déterminer la vraie grandeur du segment AB par :
   - la méthode du triangle rectangle;
   - la méthode des rotations;
   - un calcul analytique.
3. de déterminer l'angle que fait le segment AB avec le plan horizontal.

2.8.3 Exemple 3

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère un triangle dont les sommets A, B et C ont pour coordonnées :

- A (70 ; 60 ; 50) mm
- B (100 ; 110 ; 80) mm
- C (50 ; 130 ; 10) mm

On demande :

1. de représenter dans une épure de Monge les projections horizontale et frontale du triangle ABC;

2. de déterminer les projections horizontale et frontale du point D défini par les caractéristiques suivantes :
   - le point D est localisé à l'intérieur du triangle ABC;
   - le point D se trouve à une distance de 40 mm du point A;
   - le point D se trouve à une distance de 30 mm du point B.

2.8.4 Novembre 2014 – Question 2 (série 2)

Énoncé

La figure 2.32 donne les projections de deux points A et C. On demande:

1. de représenter les projections des traces du plan de bout π contenant A et C;
2. de tracer les projections des point B et D tels que $ABCD$ soit un carré dessiné dans π dont AC est une diagonale;
3. de tracer les projections des point E, F, G et H tels que $ABCDEFGH$ définisse un cube (E est à une cote supérieure à celle de A, F à une cote supérieure à celle de B,...).

2.8.5 Novembre 2016 – Question 3

Énoncé

La figure 2.33 donne les projections des traces d'un plan vertical π ainsi que les projections frontales de trois points A, B et C. On demande:

1. de rechercher les projections horizontales des points A, B et C sachant qu'ils appartiennent au plan π;
2. de rechercher les projections d'un point D respectant les conditions suivantes:
   - D est coplanaire avec A, B et C;
   - D est situé à 100 mm de A et à 60 mm de C;
   - la cote de D est inférieure à celle de C.

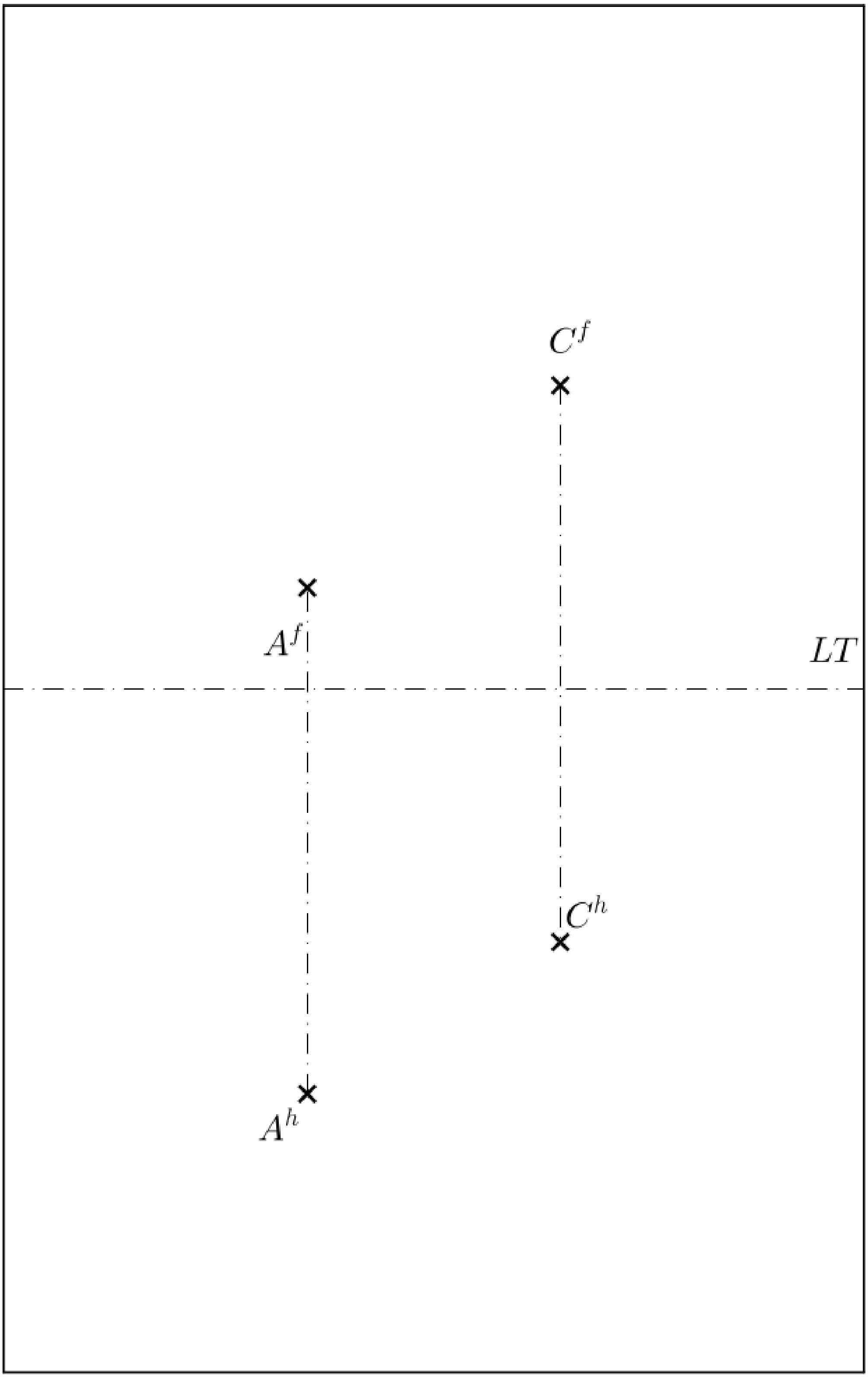


FIGURE 2.32 – Novembre 2014 – Question 2 (série 2) : énoncé

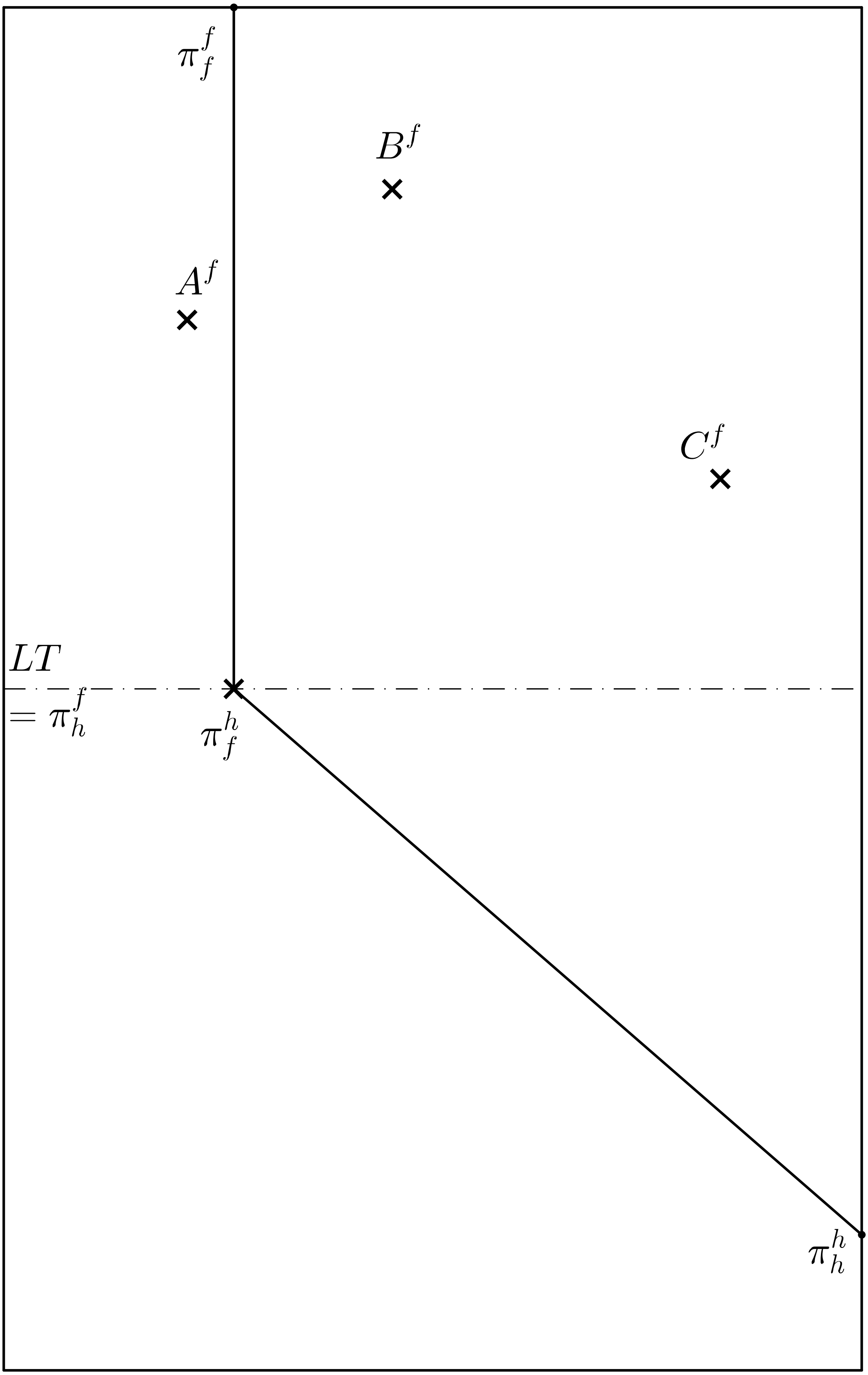


FIGURE 2.33 – Novembre 2016 – Question 3 : énoncé

2.8.6 Novembre 2018 – Question 2

Énoncé

La figure 2.34 donne les projections horizontales et frontales de deux points A et B définissant une droite d. On demande :

- pour la variante 0 de trouver les points C et D tels que $ACBD$ soit un carré dessiné dans le plan vertical contenant d dont la diagonale est AB (la cote de C est supérieure à celle de D);
- pour la variante 1 de trouver les points C et D tels que $ABCD$ soit un carré dessiné dans le plan vertical contenant d dont AB est un des côtés (les cotes de C et D sont supérieures à celle de B);
- pour la variante 2 de trouver les points C et D tels que $ACBD$ soit un carré dessiné dans le plan de bout contenant d dont la diagonale est AB (l'éloignement de D est supérieur à celui de C);
- pour la variante 3 de trouver les points C et D tels que $ABCD$ soit un carré dessiné dans le plan de bout contenant d dont AB est un des côtés (les éloignements de C et D sont supérieurs à celui de B);
- pour la variante 4 de trouver les points C et G tels que ABC soit un triangle équilatéral dessiné dans le plan vertical contenant d (la cote de C est supérieure à celle de B) dont G est le centre de gravité.

2.8.7 Novembre 2019 – Question 2

Énoncé

La figure 2.35 renseigne les projections horizontales et frontales de 4 points A, B, C et D.

On demande, en employant la méthode des rotations, de dessiner en **vraie grandeur** :

- pour la **variante 0**, le triangle ABC;
- pour la **variante 1**, le triangle ABD;
- pour la **variante 2** le triangle BCD;
- pour la **variante 3**, le triangle ACD.

2.8.8 Aout 2016 – Question 2

Énoncé

Soit un plan π défini par une droite d et un point P. Les projections horizontales et frontales de la droite d et du point P sont renseignées sur l'épure de la figure 2.36.

On demande de déterminer les projections horizontales et frontales des sommets $ABCD$ d'un carré appartenant au plan π dont le centre est le point P, dont le coté AD est parallèle à la trace horizontale π_h du plan π, et dont la longueur du coté est donnée et est indiquée sur l'épure de la figure 2.36). Les sommets du carré seront disposés sur l'épure de telle manière que le point A corresponde au sommet dont l'éloignement est le plus faible et le point C corresponde au sommet dont l'éloignement est le plus élevé.

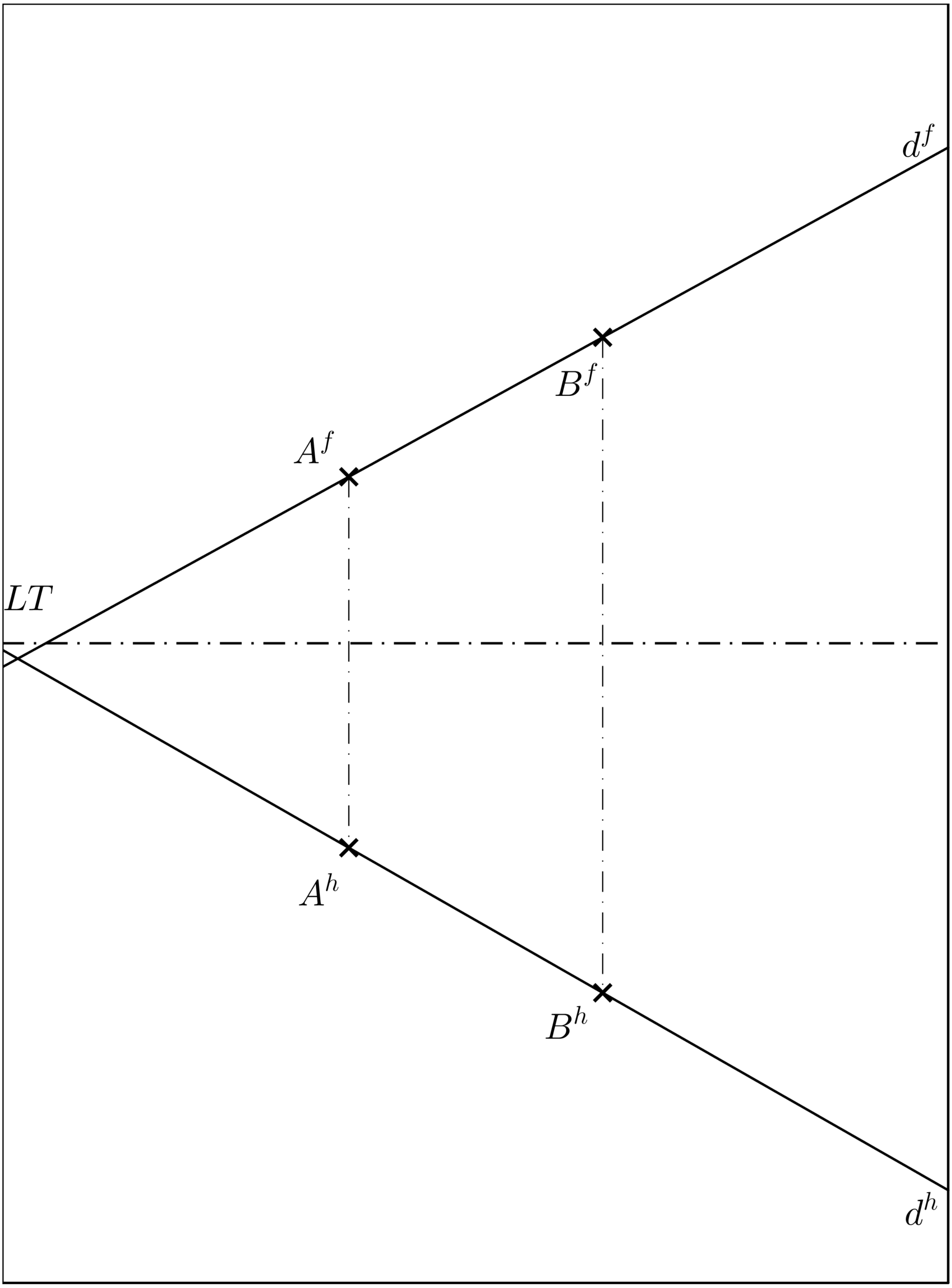


FIGURE 2.34 – Novembre 2018 – Question 2 : énoncé

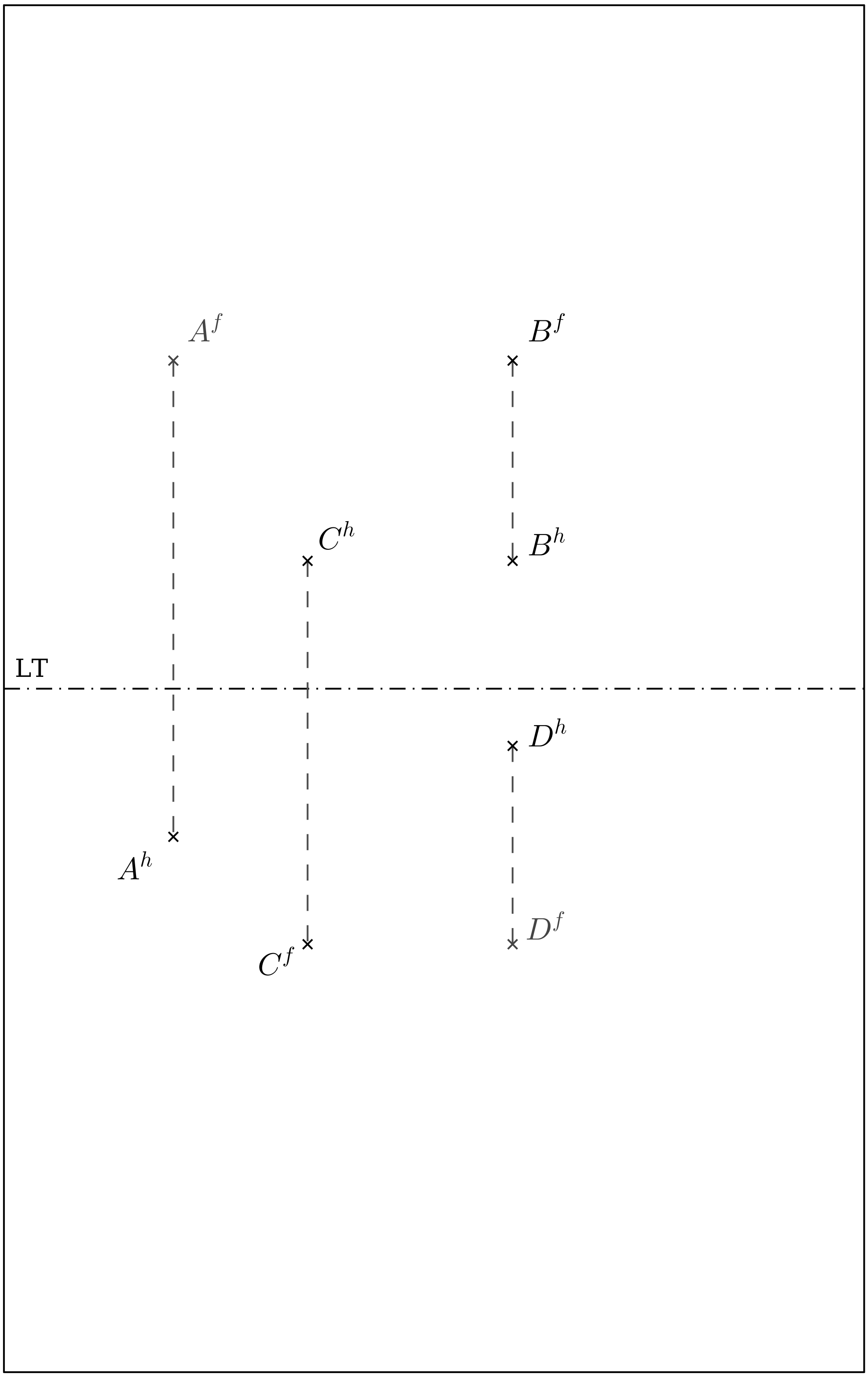


FIGURE 2.35 – Novembre 2019 – Question 2 : énoncé

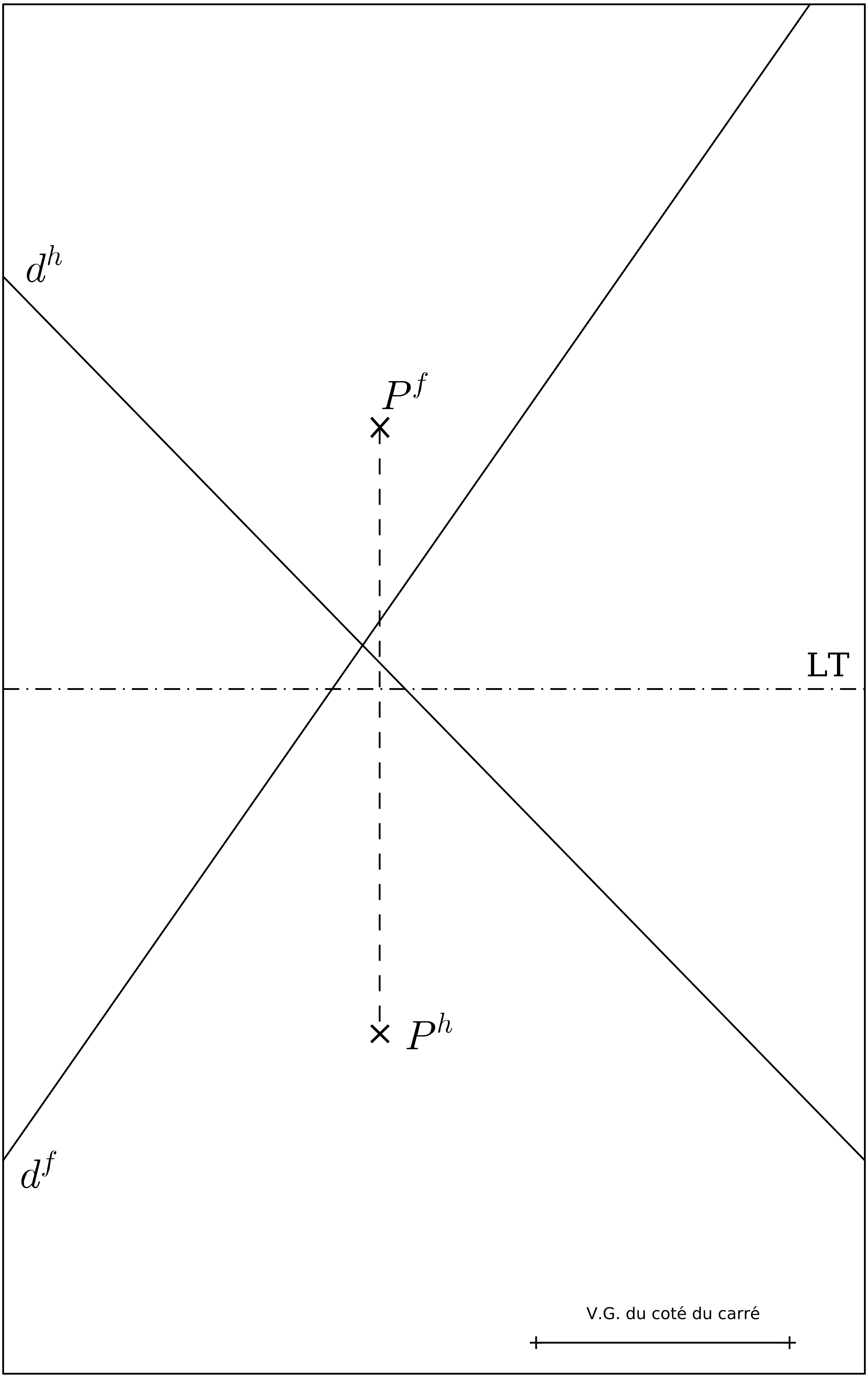


FIGURE 2.36 – Aout 2016 – Question 2 : énoncé

2.8.9 Janvier 2012 – Question 4

Énoncé

Deux points A et B sont donnés (figure 2.37). On demande de rechercher la vraie grandeur du segment AB en employant les deux méthodes suivantes :

- méthode du triangle rectangle;
- rotation autour d'un axe de bout.

2.8.10 Janvier 2013 – Question 3

Énoncé

La figure 2.38 donne les projections de deux points A et B. On demande de représenter:

1. la vraie grandeur du segment AB par la méthode du triangle rectangle;
2. la vraie grandeur du segment AB par la méthode des rotations.

2.8.11 Janvier 2013 – Question 6

Énoncé

La figure 2.39 donne les projections d'un segment frontal AB et d'un point P. On demande de dessiner un triangle ABC ayant les caractéristiques suivantes :

- ABC est un triangle isocèle ($|AC| = |BC| = 0,8 \cdot |AB|$);
- ABC est contenu dans le plan défini par A, B et P;
- la cote de C est inférieure à la cote de A.

2.8.12 Janvier 2020 – Question 1

Énoncé

Soit un plan π défini par les projections de ses traces (cf. Figure 2.40). On donne, par ailleurs, la projection horizontale P^h d'un point P.

On demande de tracer :

1. la projection frontale P^f du point P sachant que ce point P appartient au plan π;
2. les projections (horizontale et frontale) de la droite **horizontale** h du plan π passant par le point P;
3. les projections (horizontales et frontales) des sommets $ABCD$ du carré appartenant au plan π et de centre P sachant que :
   - le coté AB est une droite **horizontale**,
   - la vraie grandeur du coté du carré est connue et est renseignée à la Figure 2.40,
   - le point A est en-dessous du point C et derrière le point B.

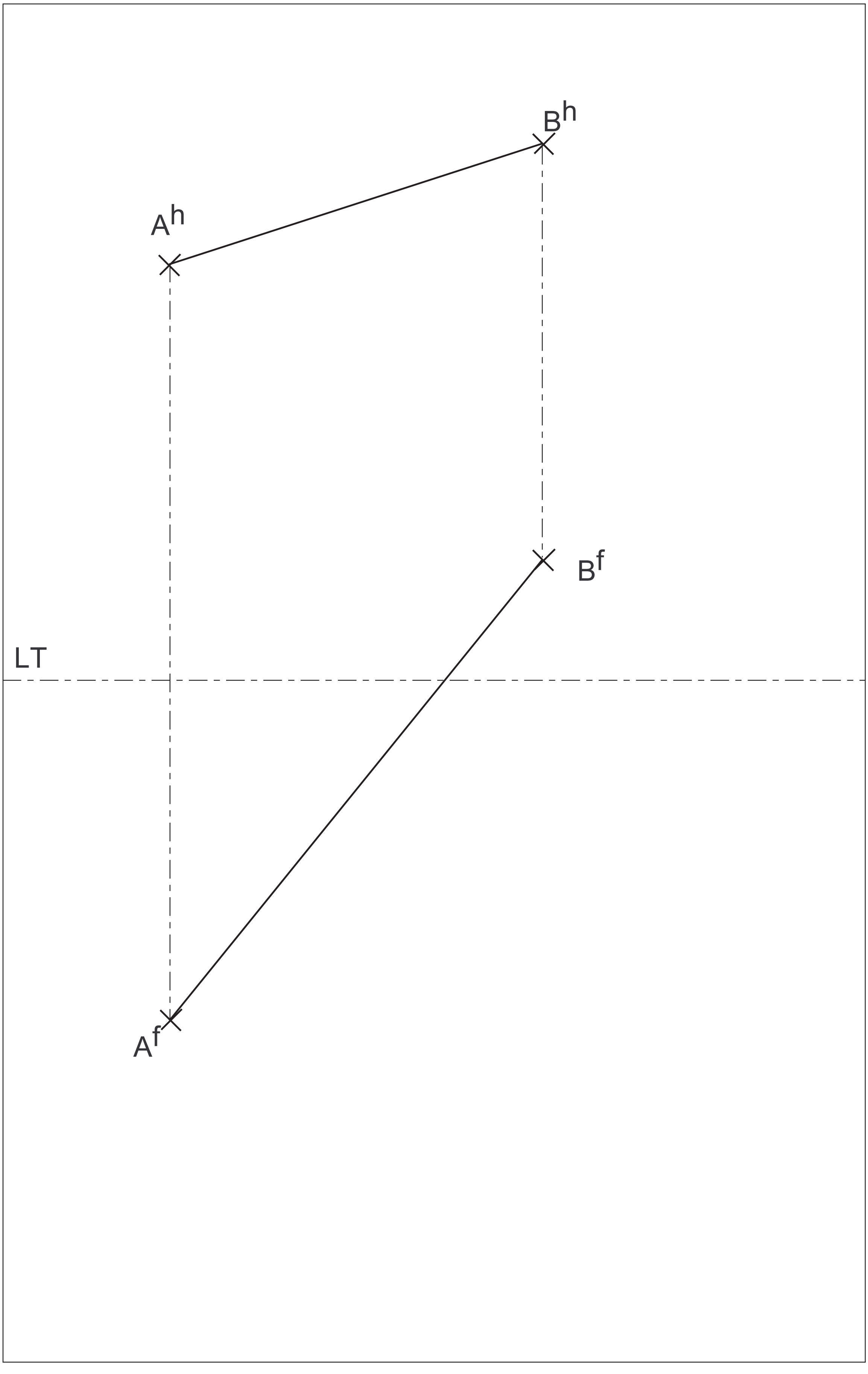


FIGURE 2.37 – Janvier 2012 – Question 4 : énoncé

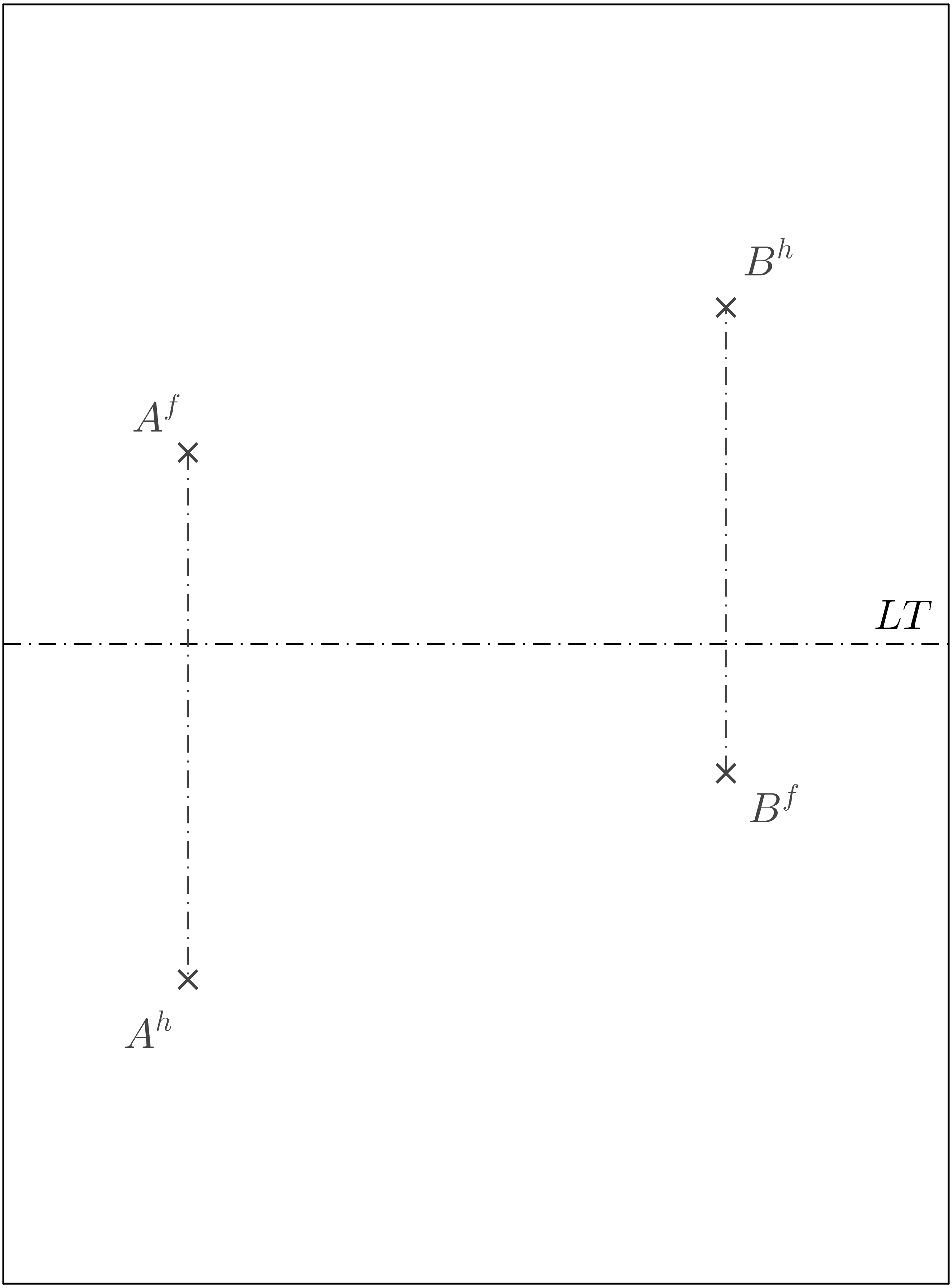


FIGURE 2.38 – Janvier 2013 – Question 3 : énoncé

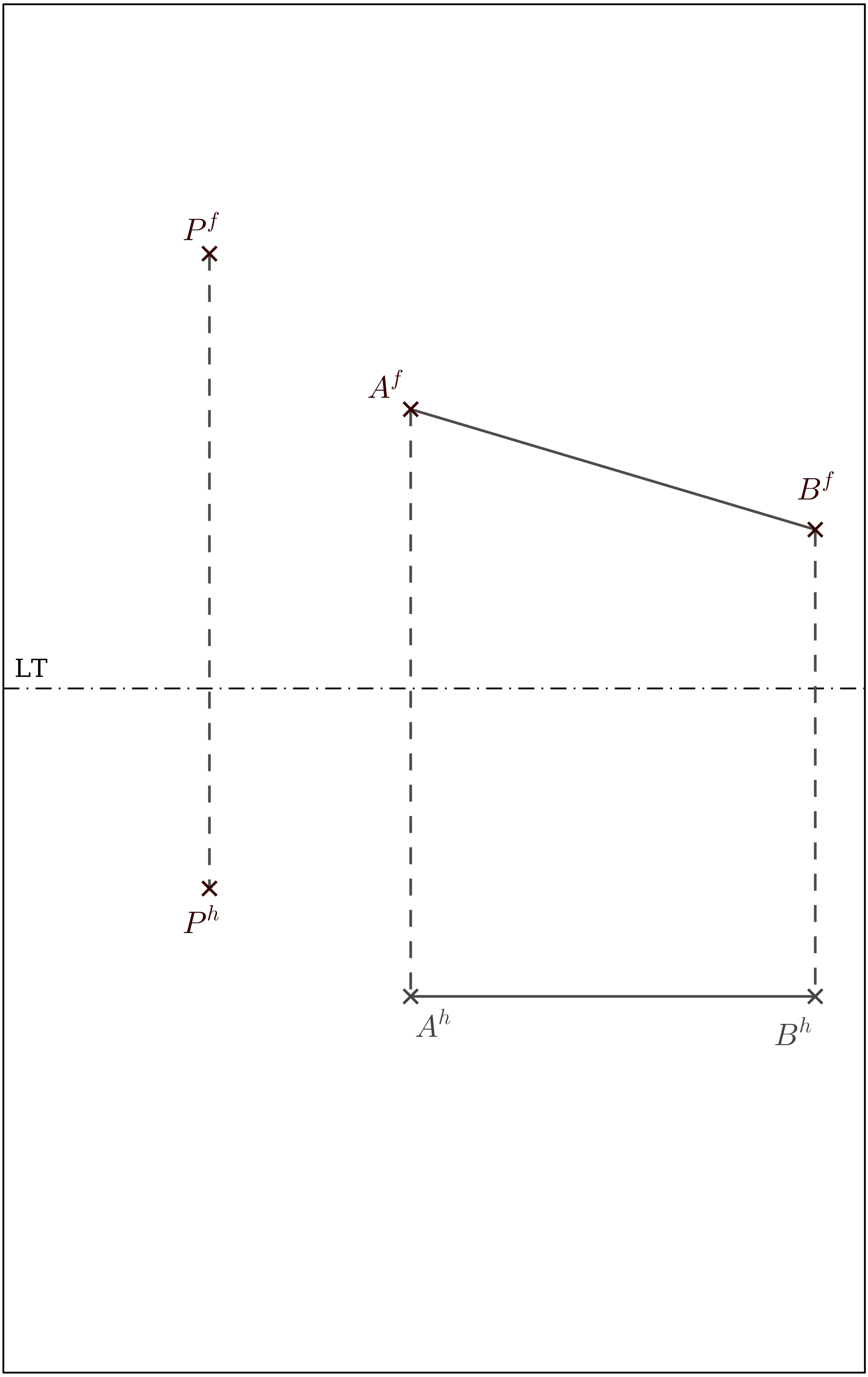


Figure 2.39 – Janvier 2013 – Question 6 : énoncé

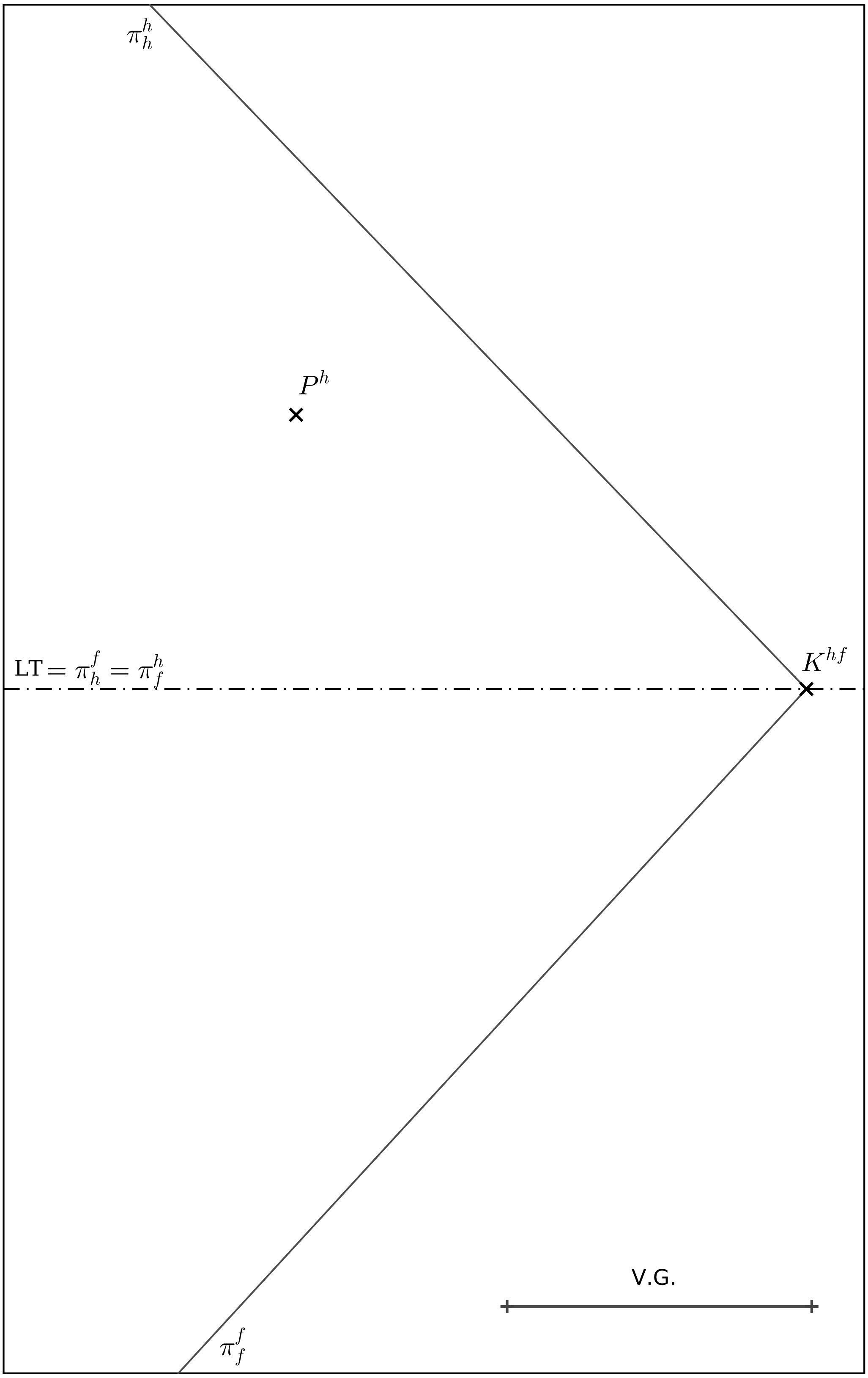


FIGURE 2.40 – Janvier 2020 – Question 1 : énoncé

2.8.13 Novembre 2020 – Question 2

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée $Oxyz$, on considère un plan de **profil** donné par son équation cartésienne $\pi \equiv y = k$. Par ailleurs, on considère une droite d définie par deux points A et B. La définition du plan π et de la droite d dépend de votre variante et est renseignée au Tableau 2.1.

Variantes	**plan** π	Coordonnées du point A	Coordonnées du point B
variante 0	$k = 100$ mm	A(60;70;50) mm	B(100;130;-40) mm
variante 1	$k = 100$ mm	A(60;70;50) mm	B(100;130;-40) mm
variante 2	$k = 80$ mm	A(80;40;90) mm	B(50;140;-80) mm
variante 3	$k = 80$ mm	A(80;40;90) mm	B(50;140;-80) mm
variante 4	$k = 90$ mm	A(40;130;30) mm	B(100;70;20) mm
variante 5	$k = 90$ mm	A(40;130;30) mm	B(100;70;20) mm

TABLE 2.1 – Novembre 2020 – Question 2 : Définition du plan π et de la droite d en fonction de la variante.

Dans une épure de Monge vierge (Figure 5.33 dont les dimensions sont reprises en bas de page. [1]), on demande de :

1. représenter les projections des traces horizontale et frontale du plan π;
2. représenter les projections horizontales et frontales des points A et B ;
3. rechercher par constructions géométriques :
   — **Pour les variantes paires (0,2,4)**
   - le point d'intersection P entre la droite d et le plan π;
   - la vraie gandeur du segment AB et l'angle β que fait ce segment avec la plan frontal.

   — **Pour les variantes impaires (1,3,5)**
   - le point d'intersection P entre la droite d et le plan π;
   - les projections horizontale et frontale d'un point Q vérifiant les conditions suivantes :
     - ⋆ La droite PQ est une droite de **profil**;
     - ⋆ la longeur du segment PQ est égale à 50 mm;
     - ⋆ le segment PQ fait un angle de 45° avec le plan horizontal (pente **positive**);
     - ⋆ le point Q appartient au $4^{\text{ème}}$ dièdre.

2.8.14 Application 1 – Exo 4

Énoncé

On donne les coordonnées cartésiennes de quatre points A, B, C et D :
- A:(40 ; 20 ; 0) mm
- B:(0 ; 20 ; 60) mm
- C:(60 ; 20 ; 40) mm
- D:(-20 ; 20 ; 20) mm

1. Feuille A4 tenue en mode d'orientation « portrait » avec un cadre à 1 cm du bord de la feuille. La ligne de terre est tracée au milieu de ce cadre en trait mixte. Par convention l'origine est sur le bord gauche du cadre.

Ces quatre points définissent un quadrilatère. On demande de représenter sur une épure de Monge viegre la vraie grandeur de ce quadrilatère en utilisant les projections de profil. La ligne de terre secondaire sera placée à 100 mm du bord gauche de l'épure.

2.8.15 Janvier 2022 – Question 1

Énoncé

On donne à la figure 2.41 les projections horizontale et frontale de trois points A, B et P.

On demande de déterminer :

1. les projections des traces horizontale et frontale du plan π défini par les points A, B et P;

2. les projections des points C et D appartenant à π tels que:

   - le triangle BCD soit isocèle (la vraie grandeur des côtés BC et BD est donnée sur l'épure de la figure 2.41);

   - le segment BC soit porté par une droite frontale (la cote du point C est inférieure à celle du point B);

   - le segment BD soit porté par une droite horizontale (l'éloignement du point D est supérieur à celui du point B);

3. la vraie grandeur du segment CD.

2.8.16 Novembre 2022 – Question 3

Énoncé

La figure 2.42 donne un plan π défini par ses traces, les projections d'un point A et la projection frontale d'un point B. On demande:

1. de déterminer la projection horizontale de B pour que ce point appartienne au plan π;
2. de tracer une droite horizontale qui appartient au plan π et qui passe par la point B;
3. de déterminer la vraie grandeur du segment AB par rotation.

On vous demande dans un premier temps d'expliquer la procédure que vous allez suivre en utilisant obligatoirement un ou deux croquis en isométrie (figures 2.43 et 2.44).

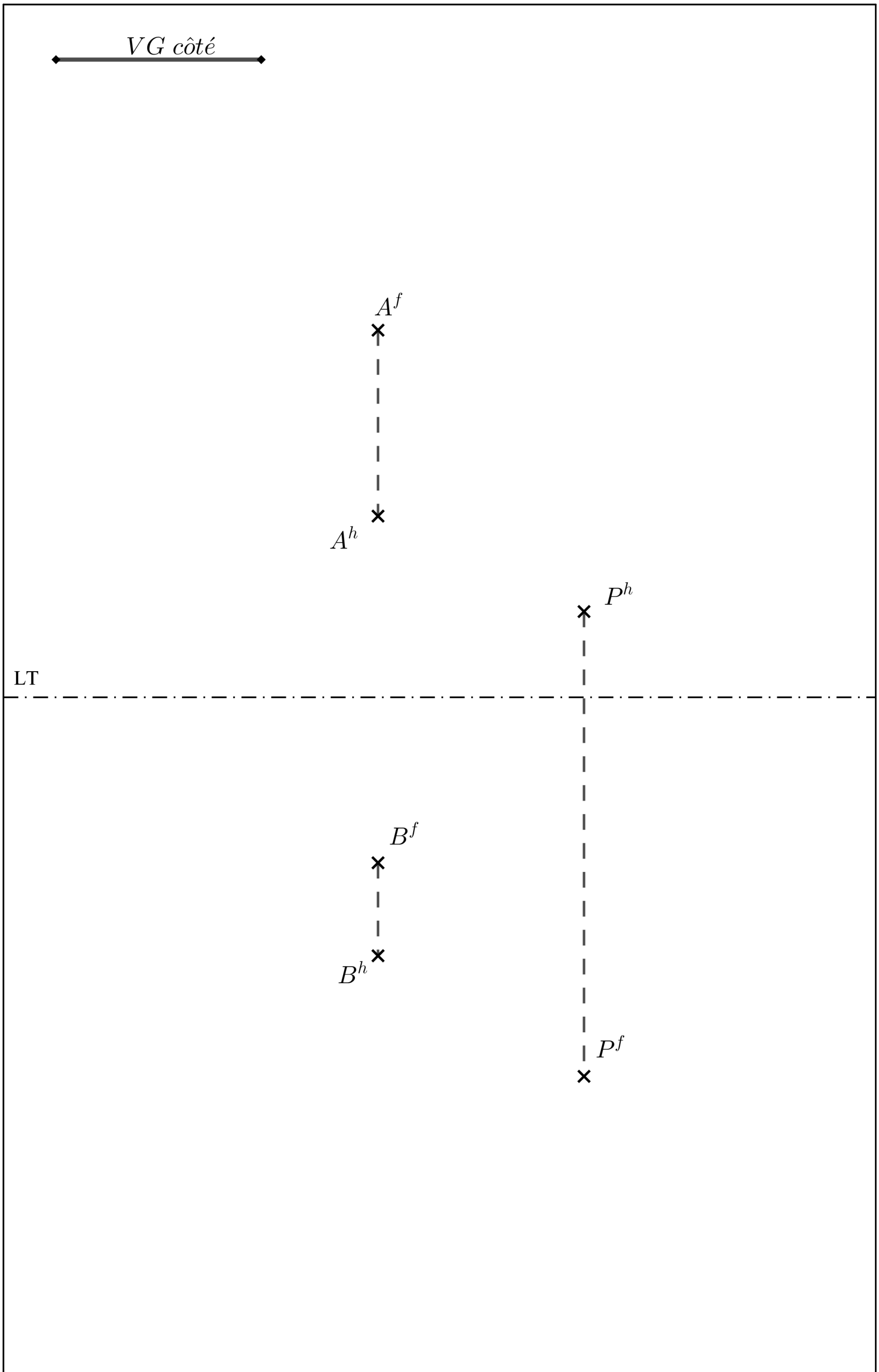


FIGURE 2.41 – Question 1 – Épure de Monge (énoncé)

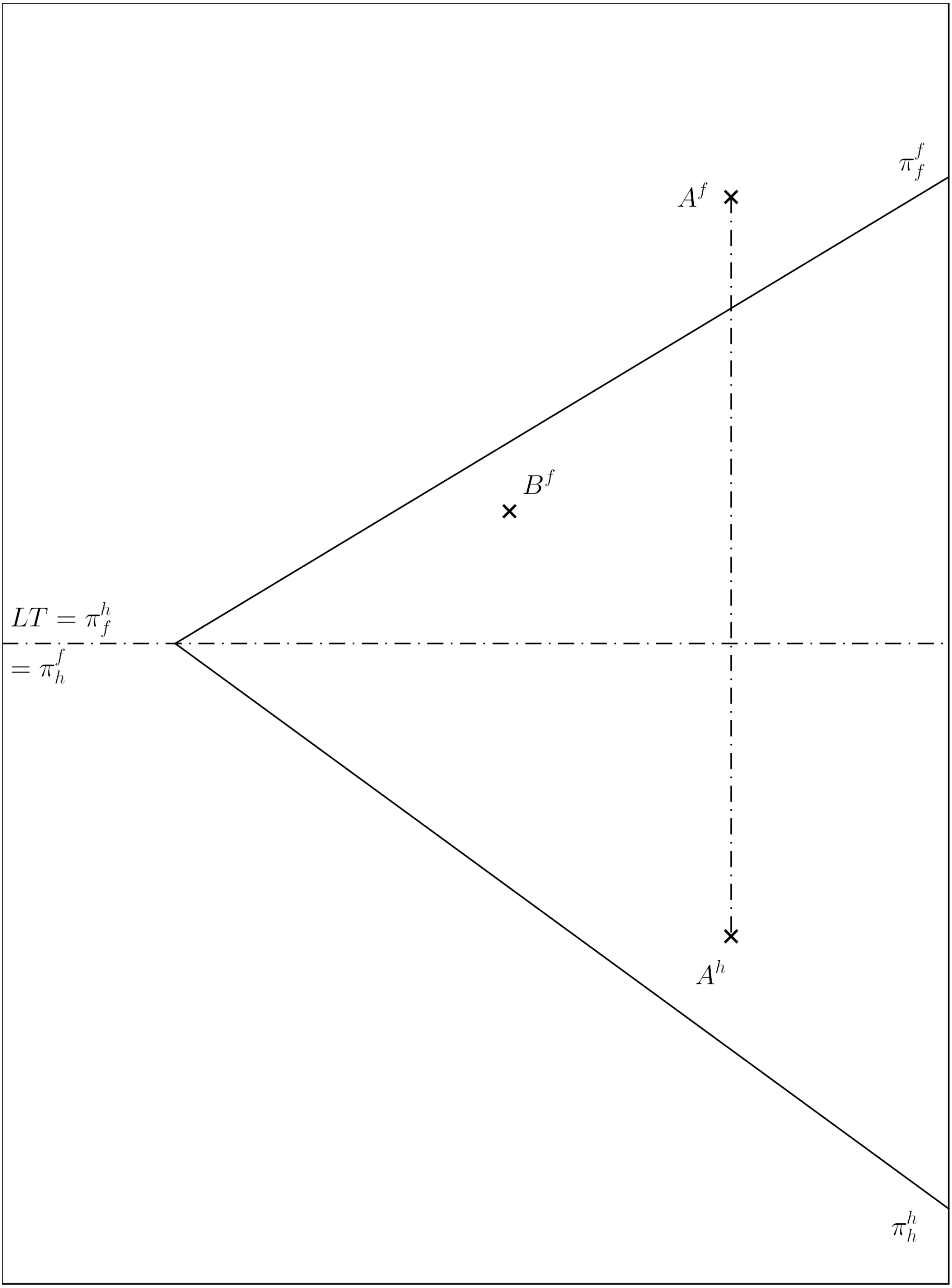


FIGURE 2.42 – Novembre 2022 – Question 3 : Epure de départ

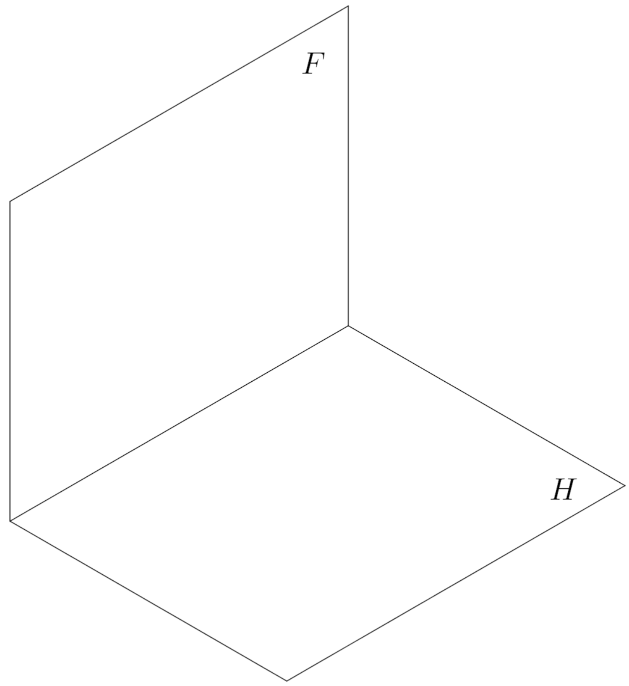


FIGURE 2.43 – Novembre 2022 – Question 3 : Axes en isométrie pour croquis explicatif

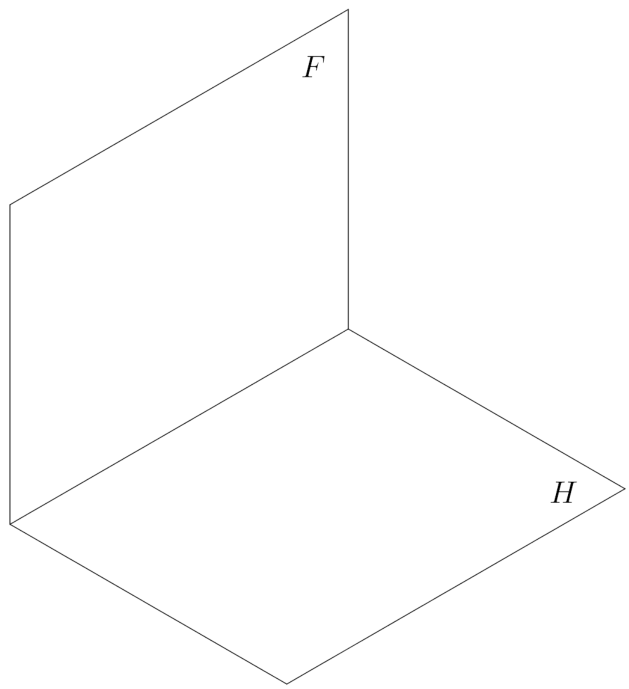


FIGURE 2.44 – Novembre 2022 – Question 3 : Axes en isométrie pour croquis explicatif

2.8.17 Janvier 2024 – Question 2

Énoncé

L'épure donnée en figure 2.45 donne les projections de deux droites horizontales a et b. On demande:

1. de tracer la droite verticale d qui est sécante à a et à b;
2. de dessiner le triangle rectangle ABC tel que
   - le point A est l'intersection des droites a et d;
   - le point B est l'intersection des droites b et d;
   - le point C (sommet de l'angle droit) est dans le plan formé par les droites a et d;
   - $|BC| = |AB|/2$;
   - l'éloignement du point C est supérieur à celui de A.

N'oubliez pas de décrire la méthode de résolution que vous allez employer, en vous basant obligatoirement sur (au moins) un croquis en isométrie (figure 5.15).

2.8.18 Janvier 2025 – Question 2

Énoncé

La figure 2.46 donne les projections horizontales et frontales de deux points A et B qui sont inclus dans un plan de bout π.

On demande:

1. de représenter les traces horizontale et frontale du plan π;
2. de déterminer les projections d'un point C tel que les points ABC forment un triangle équilatéral contenu dans le plan π (C a un éloignement supérieur à celui de A);
3. *Bonus de 5 points* de dessiner les projections d'un point D tel que les points $ABCD$ forment un tétraèdre dont la hauteur issue de D corresponde à la longueur AB (la cote de D est supérieure à celle de A) et le point D est sur une même verticale que le centre de gravité G du triangle ABC).

N'oubliez pas de décrire la méthode de résolution que vous allez employer (sous forme par exemple d'une liste à puces), en vous basant obligatoirement sur (au moins) un croquis en isométrie (figure 5.15).

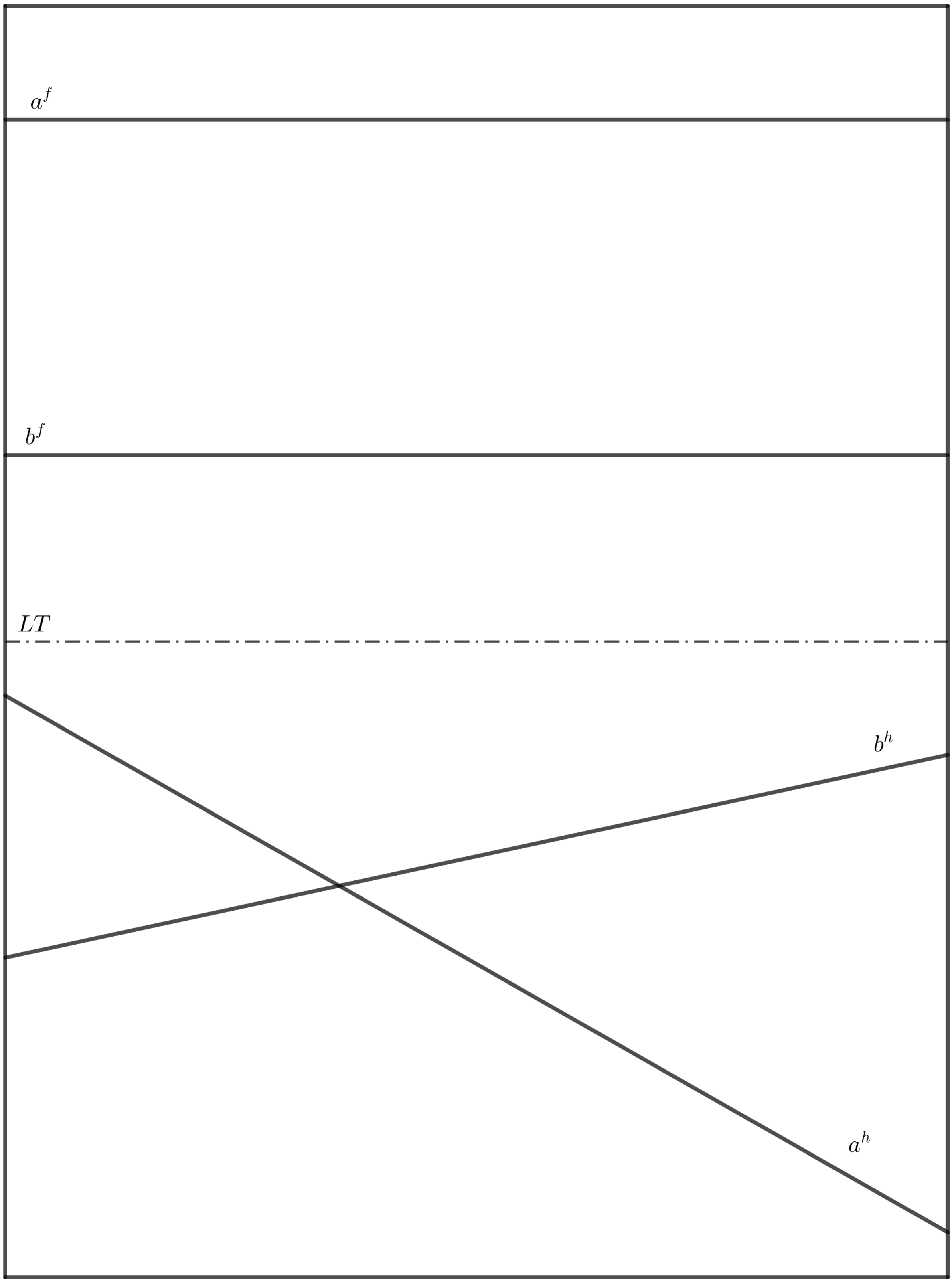


FIGURE 2.45 – Janvier 2024 – Question 2 : Épure de Monge (énoncé)

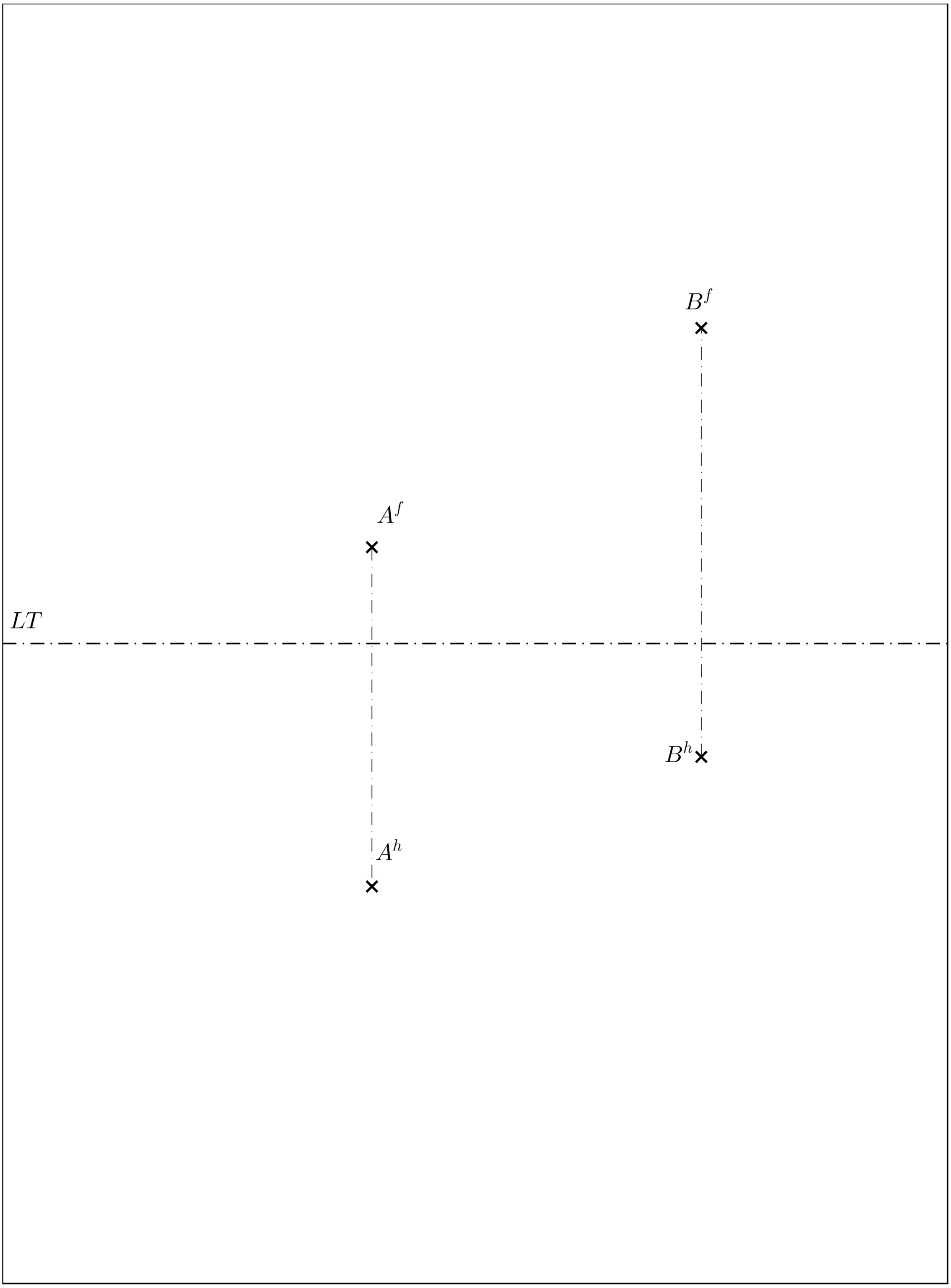


FIGURE 2.46 – Janvier 2025 – Question 2 : Épure de Monge (énoncé)

Chapitre 3

Courbes planes

3.1 Coniques

3.1.1 Parabole

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^2$, rapporté à la base orthonormée Oxy, on considère la conique d'équation :

$$F(x,y) \equiv \frac{1}{4}x^2 + -\frac{\sqrt{3}}{2}xy + c\,y^2 + \left(1 - 2\sqrt{3}\right)x + \left(-10 - \sqrt{3}\right)y + \left(29 - 4\sqrt{3}\right) = 0$$

On demande de :

1. rechercher la valeur du paramètre c pour obtenir une parabole;
2. déterminer l'inclinaison θ de l'axe focal de la parabole par rapport à l'axe Ox;
3. exprimer l'équation de la parabole sous sa forme réduite;
4. calculer les coordonnées $(x_S; y_S)$ du sommet S de la parabole.

Réponses finales

1. Pour avoir une parabole, le discriminant Δ doit être nul : $\Delta \equiv b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow c = \frac{3}{4}$;
2. L'angle d'inclinaison de la parabole est obtenu à l'aide de l'équation :
$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{b}{a-c}\right) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$
3. Équation réduite de la parabole : $\left(Y - \left(1+2\sqrt{3}\right)\right)^2 = 8\left(X - \left(2-\sqrt{3}\right)\right)$
4. À partir de l'équation canonique, on peut identifier facilement les coordonnées du sommet S de la parabole dans le repère OXY: S$(2-\sqrt{3}; 1+2\sqrt{3})$. Pour déterminer ses coordonnées dans le repère initial Oxy, il faut procéder au changement de base suivant :
$$\begin{cases} x_{\mathrm{S}} = X_{\mathrm{S}}\cos\theta - Y_{\mathrm{S}}\sin\theta \\ y_{\mathrm{S}} = X_{\mathrm{S}}\sin\theta + Y_{\mathrm{S}}\cos\theta \end{cases}$$
Dans le repère orthonormé Oxy, les coordonnées cartésiennes du sommet S sont égales à $(-2; 4)$.

3.1.2 Hyperbole

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^2$, rapporté à la base orthonormée Oxy, on considère une conique d'équation :

$$F(x,y) \equiv 3\,x^2 + 10\,xy + 3\,y^2 - 4\,x + 4\,y - 12 = 0$$

On demande de :

1. vérifier que cette conique est une hyperbole;
2. établir la forme canonique de l'hyperbole;
3. déterminer les coordonnées $(x_c; y_c)$ du centre C de l'hyperbole;
4. établir les équations cartésiennes des deux asymptotes obliques.

Réponses finales

1. Le signe du discriminant Δ est positif : $\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 36 = 64 > 0 \rightarrow$ la conique est donc une **hyperbole**;
2. L'équation réduite de l'hyperbole a pour expression :
$$4\,X^2 - Y^2 + 2\sqrt{2}\,Y - 6 = 0$$
Cette équation peut encore se mettre sous la forme canonique suivante :
$$\frac{(X)^2}{1} - \frac{(Y-\sqrt{2})^2}{4} - 1 = 0$$
3. À partir de l'équation canonique, on peut facilement identifier les coordonnées du centre C de l'hyperbole dans le repère OXY : C$(0;\sqrt{2})$. Pour déterminer ses coordonnées dans le repère initial Oxy, il faut procéder au changement de base suivant :
$$\begin{cases} x_{\mathrm{C}} = X_{\mathrm{C}}\cos\theta - Y_{\mathrm{C}}\sin\theta \\ y_{\mathrm{C}} = X_{\mathrm{C}}\sin\theta + Y_{\mathrm{C}}\cos\theta \end{cases}$$
où θ représente l'angle formé par les axes Ox et OX et est égal à $\frac{\pi}{4}$. Dans le repère orthonormé Oxy, les coordonnées cartésiennes du centre C sont donc égales à $(-1; 1)$.
4. Les équations cartésiennes des deux asymptotes obliques de l'hyperbole dans le repère OXY sont données par :
$$\begin{cases} D_1 \equiv Y = \sqrt{2} + 2\,X \\ \\ D_2 \equiv Y = \sqrt{2} - 2\,X \end{cases}$$
Pour repasser dans la base Oxy, il faut procéder au changement de base suivant :
$$\begin{cases} X = x\cos\theta + y\sin\theta \\ Y = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$
Les deux asymptotes obliques ont pour expression dans le repère Oxy :
$$\begin{cases} D_1 \equiv 3x + y + 2 = 0 \\ D_2 \equiv x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

3.1.3 Ellipse

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^2$, rapporté à la base orthonormée Oxy, on demande d'établir l'équation cartésienne d'une ellipse ayant les propriétés suivantes :

- le centre C de l'ellipse a pour coordonnées (-1;1);
- le demi-grand axe a vaut 2;
- le demi-petit axe b vaut 1;
- le grand axe fait un angle de 60° avec l'axe Ox.

Réponses finales

Dans la base orthonormée Oxy, l'équation cartésienne de l'ellipse a pour expression :

$$F(x,y) \equiv \frac{13}{4}\,x^2 - \frac{3}{2}\,\sqrt{3}\,xy + \frac{7}{4}\,y^2 + \left(\frac{13}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\,x - \left(\frac{7}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\,y + \left(1 + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$$

3.2 Courbes planes dans l'espace

3.2.1 Janvier 2017 : Question 4

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère une ellipse présentant les caractéristiques suivantes:

- elle est incluse dans un plan vertical qui contient l'axe Oz;
- son centre est le point $C = (5, -5, 10)$
- son grand axe (a=4) est porté par une droite horizontale;
- son petit axe ($b = 3$) est porté par une droite verticale

On vous demande d'écrire les équations paramétriques de cette ellipse.

Réponses finales

Les équations paramétriques de l'ellipse ont pour expression :

$$\begin{cases} x = 5 + 2\sqrt{2}\cos(\phi) \\ y = -5 - 2\sqrt{2}\cos(\phi) \\ z = 10 + 3\sin(\phi) \end{cases}$$

3.2.2 Equations d'une ellipse dans l'espace – Variante 2

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère une ellipse présentant les caractéristiques suivantes :

- l'ellipse appartient à un plan **vertical** d'équation $\pi \equiv 2x - y - 2 = 0$;
- dont le centre C appartient à une droite d **perpendiculaire** au plan π et passant par l'origine;
- le grand axe a pour vecteur directeur $\vec{n}$: $\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}} ; \frac{2}{\sqrt{10}} ; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;
- la longueur du grand axe vaut 8 et la longueur du petit axe vaut 4.

On demande de déterminer :

1. les équations paramétriques de cette ellipse;
2. les équations cartésiennes de cette ellipse.

Réponses finales

Les équations paramètriques de l'ellpise sont données par :

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{10}}{10}\,(4\cos\theta) - \frac{\sqrt{10}}{10}\,(2\sin\theta) + \frac{4}{5}; \\ \\ y = \frac{\sqrt{10}}{5}\,(4\cos\theta) - \frac{\sqrt{10}}{5}\,(2\sin\theta) - \frac{2}{5} \\ \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(4\cos\theta) + \frac{\sqrt{2}}{2}\,(2\sin\theta) \end{cases}$$

Les équations cartésiennes de l'ellipse ont pour expression :

$$\text{Ellipse} \equiv \begin{cases} 2x \; - \; y \; - \; 2 \; = \; 0 \\ \dfrac{\left(\frac{\sqrt{10}}{10}x + \frac{\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{10}}{5}y\right)^2}{16} \; + \; \dfrac{\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}x + \frac{\sqrt{2}}{2}z - \frac{\sqrt{10}}{5}y\right)^2}{4} \; - \; 1 \; = \; 0 \end{cases}$$

3.2.3 Janvier 2018 : Question 4

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée $Oxyz$, on considère une hyperpole **équilatère** définie par les foyers $F_1(-4\,;\,0.6\,;\,-1.2)$ et $F_2(-4\,;\,-2.6\,;\,1.2)$. Sachant que cette hyperbole appartient à un plan π **de bout**, on demande :

1. de calculer les coordonnées cartésiennes du centre C de l'hyperbole équilatère et la distance $2c$ entre les foyers F_1 et F_2;
2. d'établir l'équation cartésienne du plan π;
3. d'établir les équations cartésiennes de l'hyperbole équilatère.

Rappels : la relation qui lie les différents paramètres dimensionnels d'une hyperbole est donnée par l'expression suivante : $c^2 = a^2 + b^2$

Réponses finales

1. Les coordonnées cartésiennes du centre C de l'hyperbole :

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} \; = \; (-4\,;\,-1\,;\,0)$$

2. L'équation cartésienne du plan π :

$$\pi \; \equiv \; 4z + 3y + 3 \; = \; 0$$

3. Les équations cartésiennes de l'hyperbole équilatère :

$$\text{Hyperbole équilatère} \begin{cases} \left(-\,\frac{4}{5}y \; + \frac{3}{5}\,z \; - \; \frac{4}{5}\right)^2 - (x+4)^2 - 2 \; = \; 0 \\ \frac{3}{5}\,y \; + \; \frac{4}{5}\,z \; + \; \frac{3}{5} \; = \; 0 \end{cases}$$

3.2.4 Janvier 2019 – Question 4

Énoncé

Soit la courbe dont les équations paramétriques sont données par:

$$\begin{cases} x = 5\cos^2\theta + \tan\theta \\ y = 2\cos(2\theta) + \tan\theta + 3 \\ z = \sin^2\theta \end{cases} \tag{3.1}$$

1. Déterminez les équations cartésiennes et paramétriques de la droite joignant les points en $\theta = 0$ et $\theta = \pi/4$;
2. déterminez l'équation cartésienne du plan contenant la courbe;

Réponses finales

1. **Équations cartésiennes et paramétriques de la droite joignant les points en $\theta = 0$ et $\theta = \pi/4$**
   Les équations paramétriques ont pour expression :

$$\begin{cases} x = 5 - 1,5 \cdot \lambda \\ y = 5 - \lambda \\ z = 0,5\lambda \end{cases}$$

   Pour obtenir les équations cartésiennes, il faut trouver l'équation de deux plans contenant la droite. On peut par exemples les obtenir en éliminant le paramètre λ entre les différentes équations du système. On trouve donc par exemple:

$$\begin{cases} x + 6 \cdot z - 5 = 0 \\ y + 2 \cdot z - 5 = 0 \end{cases}$$

2. **Équation cartésienne du plan contenant la courbe**
   La courbe appartient au plan d'équation :

$$\pi \equiv x - y + z = 0$$

   .

3.2.5 Janvier 2020 – Question 5

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère une courbe dont les équations paramétriques sont:

$$C \equiv \begin{cases} x &= 3.sin(2\theta).sin(\theta) + 1 \\ y &= 6.sin(2\theta).cos(\theta) + 2 \\ z &= 3\sqrt{3}.sin(2\theta).sin(\theta) + 3 \end{cases} \tag{3.2}$$

On vous demande de vérifier le caractère plan de cette courbe et d'écrire l'équation cartésienne du plan qui la contient.

Réponses finales

La courbe est plane et est contenue dans le plan d'équation cartésienne :

$$-\sqrt{3}x + z + (\sqrt{3} - 3) = 0 \tag{3.3}$$

3.2.6 Application 5 – Exercice 3

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère une courbe définie par ses équations cartésiennes

$$\begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta + 5\sin\theta \\ y = -1 + 2\cos\theta - \sin\theta \\ z = 3 - \cos\theta + 2\sin\theta \end{cases}$$

On demander de vérifier que cette courbe est une courbe plane.

Réponses finales

La courbe est plane et appartient au plan π d'équation :

$$\pi \equiv \ x - 3y - 4z + 7 = 0$$

3.2.7 Janvier 2023 – Question 7

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée $Oxyz$, on considère une ellipse d'excentricité $e = 1/2$ située dans un plan **vertical** dont les foyers F_1 et F_2 ont pour coordonnées:

$$\begin{cases} F_1 \ : \ (4; -2; -4) \\ F_2 \ : \ (-2; 6; -4) \end{cases}$$

On demande de

1. démontrer que la valeur du demi-grand axe a est égale à 10 et que celle du demi-petit axe b est égale à $5\sqrt{3}$;
2. rechercher l'équation cartésienne du plan vertical dans lequel est contenu cette ellipse;
3. déterminer les équations cartésiennes de l'axe focal;
4. établir dans $\mathbb{R}^3$ les équations cartésiennes de l'ellipse.

Réponses finales

— L'équation cartésienne du plan π a pour expression :

$$\pi \ \equiv \ 4x + 3y - 10 \ = \ 0$$

— Les équations cartésiennes de l'axe focal ont pour expression :

$$d \ \equiv \ \begin{cases} 8x + 6y - 20 \ = \ 0 \\ z + 4 \ = \ 0 \end{cases}$$

— Les équations cartésiennes de l'ellipse ont pour expression

$$\begin{cases} \frac{4}{5}\,x + \frac{3}{5}\,y - 2 \ = \ 0 \\ \\ \frac{\left(-\frac{3}{5}\,x + \frac{4}{5}\,y - 1\right)^2}{100} + \frac{(z+4)^2}{75} - 1 \ = \ 0 \end{cases}$$

Chapitre 4

Matrices de transformation homogène

4.1 Opérateurs

4.1.1 Juin 2010 – Question 3

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^2$, rapporté à la base orthonormée $\mathrm{O}xy$, on donne les coordonnées d'un point P : $\mathrm{P}(\mathrm{P}_x; \mathrm{P}_y; \mathrm{P}_z)$. On demande de déterminer l'expression analytique de la matrice de transformation homogène permettant de réaliser la symétrie orthogonale (opérateur de réflexion) de ce point P par rapport à un plan quelconque π d'équation cartésienne :

$$\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$$

Application numérique

- Coordonnées du point P : $\mathrm{P}(1; -1; -1)$
- Équation cartésienne du plan de symétrie : $\pi \equiv -x + y + z - 9 = 0$

On demande de contrôler votre réponse par une approche **vectorielle** en vérifiant que la transformation résultante correspond à **deux fois** le vecteur de translation perpendiculaire au plan π de norme égale à la distance entre le point P et le plan π.

4.1.2 Juin 2012 – Question 3

Énoncé

Construire une matrice qui permet de faire tourner de $\pi/3$ radians les points de l'espace autour de la droite d définie par les équations :

$$\mathrm{d} \equiv \begin{cases} 2x + 3y + 6z - 1 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Cet exercice peut être résolu en utilisant trois approches différentes :

1. le formalisme des matrices de transformation homogène;
2. le formalisme des cosinus directeurs;
3. l'approche générale se basant sur l'algèbre vectorielle.

Réponse finale

La matrice de transformation homogène a pour expression finale :

$$M = \begin{bmatrix} 0,6731 & -0,0609 & 0,7371 & 1,4518 \\ -0,4006 & 0,8077 & 0,4326 & 1,4216 \\ -0,6217 & -0,5864 & 0,5192 & 1,3490 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.1.3 Janvier 2019 – Question 7

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère un carré OABC dont les coordonnées des sommets sont données par :

- O : (0 ; 0 ; 0)
- A : (1 ; 0 ; 0)
- B : (1 ; 0 ; 1)
- C : (0 ; 0 ; 1)

On demande de déterminer les coordonnées des sommets du carré après que celui-ci ait subi une rotation d'un angle de $\pi/4$ radians autour de la diagonale OB.

Réponses finales

Les coordonnées des quatre sommets du carré après rotation valent :

- coordonnées du point O$'$: (0 ; 0 ; 0)
- coordonnées du point A$'$: (0.854 ; 1/2 ; 0.146)
- coordonnées du point B$'$: (1 ; 0 ; 1)
- coordonnées du point C$'$: (0.146 ; $-1/2$; 0.854)

4.1.4 Janvier 2021 – Question 3

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère une surface cylindrique de référence S_0 définie par l'équation cartésienne suivante :

$$S_0 \equiv x^2 + y^2 - 1 = 0$$

On souhaite construire, à partir de ce cylindre de référence S_0, l'équation cartésienne d'un cylindre à base **elliptique** S dont l'axe d est défini par les équations cartésiennes suivantes :

$$d \equiv \begin{cases} x = 1 \\ 3y - 4z + 1 = 0 \end{cases}$$

Les dimensions géométriques de l'ellipse de base de ce cylindre elliptique S sont données par le demi-grand axe $a = 1/2$ et le demi-petit axe $b = 1/4$. Par ailleurs, ce cylindre à base elliptique S est orienté par rapport à son axe d de telle manière que le demi-grand axe de l'ellipse est **parallèle** au **plan horizontal**.

Pour rechercher l'équation cartésienne de cette surface S, on vous demande de suivre **obligatoirement** les deux étapes décrites ci-dessous :

1. La première étape consiste à déformer le cylindre de référence S_0 par une opération de mise à l'échelle (opération de « scaling ») pour obtenir un surface ayant la même morphologie (c'est-à-dire les mêmes caractéristiques géométriques) que le cylindre elliptique S. On vous demande de construire la matrice de transformation homogène associée à cette opération de « scaling » et de déterminer ensuite l'équation cartésienne de cette surface intermédiaire, baptisée S', obtenue après la déformation du cylindre de référence S_0.
2. La deuxième étape va consister à déplacer la surface intermédiaire S' trouvée à l'étape précédente de telle manière que son axe coïncide avec celui de la surface cylindrique S. Pour cette étape, on vous demande de construire la matrice de transformation homogène qui permet d'effectuer cette transformation et d'écrire l'équation cartésienne de la surface finale S.

Réponses finales

L'équation cartésienne d'un cylindre à base **elliptique** S a pour expression :

$$S \equiv 4\,(x-1)^2 \,+\, 16\left[\frac{3}{5}y \,-\, \frac{4}{5}z \,+\, \frac{1}{5}\right]^2 - 1 \,=\, 0$$

4.1.5 Application 4 – Exercice 1

Énoncé

On demande de construire une matrice de changement de repères pour que le plan π défini par son équation cartésienne :

$$\pi \equiv 3x - 4y - z + 2 = 0$$

devienne un plan **horizontal**.

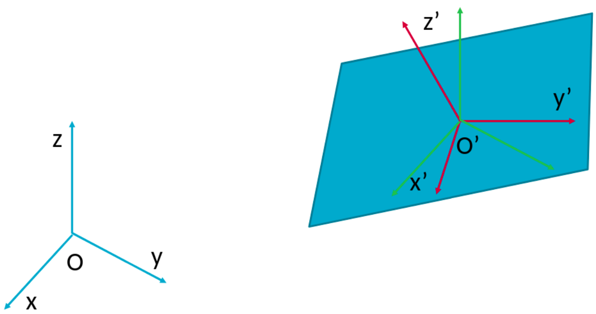


FIGURE 4.1 – Changement de repère

Réponses finales

Une matrice de changement de repères possible est donnée par :

$$M \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ \frac{3}{5\sqrt{26}} & -\frac{4}{5\sqrt{26}} & \frac{5}{\sqrt{26}} & \frac{10}{\sqrt{26}} \\ \frac{3}{\sqrt{26}} & -\frac{4}{\sqrt{26}} & -\frac{1}{\sqrt{26}} & \frac{2}{\sqrt{26}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.1.6 Application 4 – Exercice 3

Énoncé

On donne les équations cartésiennes d'une droite d :

$$d \equiv \begin{cases} 2x + 4y + z - 7 = 0 \\ x + 5y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$$

on demande, en utilisant le formalisme des matrices de transformation homogène, de transformer cette droite en l'axe OZ.

Réponses finales

La matrice de transformation homogène a pour expression :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Chapitre 5

Représentation cartésienne et paramétrique de surfaces

5.1 Surfaces réglées

5.1.1 Exemple 1 – Surface réglée définie par deux directrices et un plan directeur

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère une surface réglée définie par les éléments suivants :

$$\mathrm{C}_1 \equiv \begin{cases} x^2 = 16y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{C}_2 \equiv \begin{cases} x^2 = 16\,(z-4) \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\pi \equiv x = 0$$

On demande de rechercher d'établir les équations paramétriques de cette surface réglée.

Indication : le premier paramètre à utiliser est l'abscisse μ du point A courant sur la directrice C_1, le second sera baptisé λ.

Réponses finales

$$\mathrm{S} \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = \frac{\mu^2}{16}\,(1-\lambda) \\ z = \lambda \left(\frac{\mu^2}{16} + 4\right) \end{cases}$$

5.1.2 Juin 2011 – Question 2

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère une surface réglée S définie par :

- Une droite d1 qui passe par les points A et B de coordonnées :

$$A(8;16;0) \text{ et } B(0;4;8)$$

- une branche d'une hyperbole équilatère d2 : $d2 \equiv \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - z^2 = 16 \end{cases}$ (avec $x > 0$)

- Un plan directeur π : $\pi \equiv z = 0$

On demande de déterminer les équations **paramétriques** et l'équation **cartésienne** de cette surface réglée.

Réponses finales

Choix des paramètres : Le premier paramètre sera baptisé μ et définira la position du point P courant sur la droite d_1 tel que : $\mu = 0$ si P=A et $\mu = 4$ si P=B ; le second paramètre sera baptisé λ.

Les équations paramétriques de la surface réglée S sont données par les relations suivantes :

$$S \equiv \begin{cases} x = [(8 - 2\mu)\ (1 - \lambda)] + 2\lambda\sqrt{4 + \mu^2} \\ \\ y = (16 - 3\mu)\ (1 - \lambda) \\ \\ z = 2\mu \end{cases}$$

L'équation cartésienne de la surface réglée S a pour expression :

$$S \equiv [x\,(32 - 3z) - 2y\,(8 - z)]^2 - (32 - 3z - 2y)^2 \left(16 + z^2\right) = 0$$

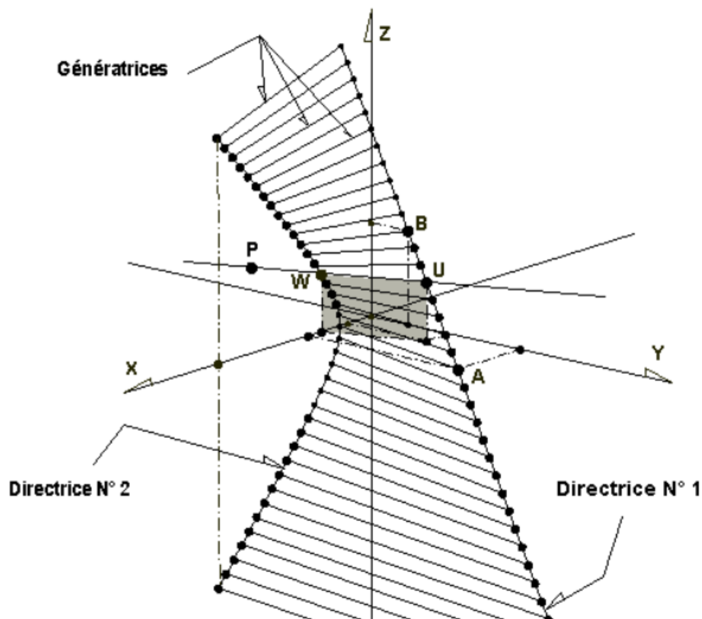


FIGURE 5.1 – Surface réglée : Juin 2011 – Question 2

5.1.3 Juin 2012 - Question 5

Énoncé

Soient C1 et C2 deux courbes de $\mathbb{R}^3$ telles que:
- C1 est une ellipse située dans un plan parallèle à Oyz distant de 5R par rapport à Oyz (du côté des x positifs); son centre est sur Ox; son demi grand axe $//Oz$ vaut 4R, son demi petit axe $//$ Oy vaut 2R;
- C2 est un ellipse située dans un plan parallèle à Oyz distant de 5R par rapport à Oyz (du côté des x négatifs); son centre est sur Ox; son demi grand axe $//Oy$ vaut 2R, son demi petit axe $//$ Oz vaut R;

On demande:

1. d'écrire les équations cartésiennes de C1 et de C2;
2. d'écrire les équations paramétriques de C1 et de C2;
3. de rechercher l'équation cartésienne de la surface réglée dont les génératrices sont parallèles à Oxz et passent par C1 et C2 (les génératrices coupent C1 et C2 en des points situés du même côté de Oxy);
4. de déterminer l'ordre de la surface réglée ainsi obtenue.

Réponses finales

L'équation cartésienne de la surface réglée a pour expression :

$$F(x,y,z) \equiv \left(4R^2 - y^2\right) \frac{(1,5x - 12,5R)^2}{100R^2} - z^2 = 0$$

Il s'agit d'une surface algébrique d'ordre 4.

5.1.4 Juin 2013 – Question 5

Énoncé

On souhaite établir les équations d'une rampe d'accès à un parking à trois étages. Il s'agit d'une surface réglée s'appuyant d'une part sur l'axe Oz et d'autre part sur une hélice d'axe vertical (diamètre 6m, distance entre les étages 3,5m). Les génératrices sont horizontales. On demande :

- d'établir les équations paramétriques de l'hélice (pour rappel, un trajet hélicoïdal est la superposition d'un mouvement circulaire uniforme autour de l'axe et d'un mouvement de translation uniforme selon l'axe);
- d'établir les équations paramétriques de la surface et de donner les limites de variation des paramètres pour décrire la portion utile de la surface;
- d'établir l'équation cartésienne de la surface;
- de déterminer les points d'intersection de la surface avec une droite d dont les équations cartésiennes sont:

$$d \equiv \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

Réponses finales

Les équations paramétriques de la surface ont pour expression :

$$\begin{cases} x = 3\mu \cos \frac{2\pi\lambda}{3,5} \\ y = 3\mu \sin \frac{2\pi\lambda}{3,5} \\ z = \lambda \end{cases} \tag{5.1}$$

Le domaine de variation des paramètres va de 0 à 10,5 pour λ (3 fois le pas) et de 0 à 1 pour μ (utilisation uniquement de la portion entre Oz et l'hélice).

L'équation cartésienne de la surface a pour expression :

$$f(x,y,z) \equiv x \cdot \sin \frac{2\pi z}{3,5} - y \cdot \cos \frac{2\pi z}{3,5} = 0$$

5.1.5 Juin 2014 – Question 4

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère deux courbes planes C_1 et C_2, et un plan π dont les équations sont:

$$\mathrm{C}_1 \equiv \begin{cases} \dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{9} - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{C}_2 \equiv \begin{cases} y - 3 = 0 \\ z - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\pi \equiv x = 0$$

On demande de rechercher:

1. les équations paramétriques de la surface réglée qui a C_1 et C_2 pour directrices et π pour plan directeur. Le premier paramètre s'appelera θ et définira la position d'un point courant sur la directrice C_1. Le second paramètre s'appelera λ et définira la position d'un point courant le long d'une génératrice;
2. l'équation cartésienne implicite de cette même surface mise sous forme algébrique (pas de racine ou de dénominateur);
3. les équations paramétriques du plan tangent au point de coordonnées cartésiennes $(2, 1.5, 2.5)$;
4. calculer les composantes du vecteur normal à cette surface au point de coordonnées paramétriques $\theta = \frac{3\pi}{2}$ et $\lambda = 0.5$.

Réponses finales

Les équations paramétriques ont pour expression:

$$\begin{cases} x = 2 + 2\cos(\theta) \\ y = 3 + 3(1-\lambda)\sin(\theta) \qquad \lambda \in \mathbb{R}, 0 \leq \theta < 2\pi \\ z = 5\lambda \end{cases}$$

L'équation cartésienne a pour expression :

$$2.25(x-2)^2.(1-0.2z)^2 + (y-3)^2 - 9.(1-0.2z)^2 = 0$$

Les équations paramétriques du plan tangent sont de la forme :

$$\begin{cases} x = 2 - 2\beta \\ y = 1.5 - 3\alpha \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ z = 2.5 + 5\alpha \end{cases}$$

Le vecteur normal $\vec{n}$ a pour composantes :

$$\overrightarrow{n} = (0, -10, 6)$$

5.1.6 Janvier 2015 – Question 6

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère deux plans π et ρ, et une courbe C_1. Le premier plan (π) est caractérisé par l'équation suivante :

$$\pi \equiv y = 0$$

Le deuxième plan (ρ) est définis par 3 points :

$$A = (0, 0, 0)$$

$$B = (4, 0, 3)$$

$$C = (0, 3, 0)$$

La courbe est caractérisée par son équation polaire et se situe dans le plan Oxy:

$$C_1 \equiv \rho = \sin(3\theta)$$

On demande de rechercher les équations paramétriques de la surface réglée qui a π et ρ pour plans directeurs et C_1 pour courbe directrice.

Réponses finales

Les éqauations paramétriques de la surface réglée ont pour expression :

$$\begin{cases} x = \sin(3\theta)\cos(\theta) + 12\mu \\ y = \sin(3\theta)\sin(\theta) + 0\mu \qquad \mu, \theta \in \mathbb{R} \\ z = 0 + 9\mu 9 \end{cases}$$

5.1.7 Janvier 2016 – Question 4

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère deux courbes planes C_1 et C_2 et un plan π.

- C_1 est une parabole du plan Oxy, dont le sommet est en $(4; 10; 0)$ et le foyer en $(8; 10; 0)$.
- C_2 est une conique du plan Oyz d'équation $f(y, z) \equiv y^2 - 20y - z + 106 = 0$.
- π est un plan de bout passant par les points (0;5;20) et (0;10;10).

On demande de rechercher:

1. les équations cartésiennes de C_1 (sous forme de courbe spatiale);
2. les équations cartésiennes réduites de C_2 et de spécifier le type de conique (sous forme de courbe spatiale);
3. l'équation cartésienne de π;
4. les équations paramétriques de la surface réglée admettant C_1 et C_2 pour directrices et dont les génératrices sont parallèles à π.

Remarque: Il est intéressant de travailler avec une paramétrisation cartésienne des directrices.

Réponses finales

1. Équations cartésiennes de C_1 (sous forme de courbe spatiale).

$$C_1 \equiv \begin{cases} (y-10)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (x-4) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

2. Équations cartésiennes réduites de C_2 et de spécifier le type de conique (sous forme de courbe spatiale).

$$C_2 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ (y-10)^2 - (z-6) = 0 \end{cases}$$

3. Équation cartésienne du plan π.

$$\pi \equiv 0x + 2y + z - 30 = 0$$

4. Équations paramétriques de la surface réglée admettant C_1 et C_2 pour directrices et dont les génératrices sont parallèles à π.

$$\begin{cases} x = \left[\frac{(0.5\mu^2 - 9\mu + 53 - 10)^2}{16} + 4\right].(1-\lambda) \\ y = (0.5\mu^2 - 9\mu + 53) \cdot (1-\lambda) + \lambda.\mu \qquad \mu, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda(\mu - 10)^2 + 6 \end{cases}$$

5.1.8 Janvier 2017 – Question 7

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère les équations paramétriques de 2 courbes (C_1, C_2) et d'un plan (π):

$$C_1 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \mu \qquad\qquad \mu \in \mathbb{R} \\ z = 3\mu^2 + 2\mu + 5 \end{cases}$$

$$C_2 \equiv \begin{cases} x = 6 \\ y = \nu \qquad\qquad \nu \in \mathbb{R} \\ z = -2\nu^2 + 5\nu - 2 \end{cases}$$

$$\pi \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ z = \beta \end{cases}$$

On vous demande d'établir les équations paramétriques de la surface admettant C_1 et C_2 comme directrice et π comme plan directeur.

Réponses finales

Les équations paramétriques de la surface réglée ont pour expression :

$$\begin{cases} x = 6\lambda \\ y = \mu + 6\lambda \qquad\qquad \mu, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3\mu^2 + 2\mu + 5 + \lambda(-5\mu^2 - 21\mu - 49) \end{cases}$$

5.1.9 Surface conoïde

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère une surface réglée S définie par :

- une droite d1 : d1 $\equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$
- un cercle $\mathcal{C}$: $\mathcal{C} \equiv \begin{cases} x = 8 \\ y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$
- Un plan directeur π : $\pi \equiv z = 0$

On demande de déterminer :

1. les équations **paramétriques** de cette surface réglée;
2. l'équation **cartésienne** de cette surface réglée;
3. l'ordre de la surface.

Réponses finales

Choix des paramètres : Le premier paramètre à utiliser sera l'angle θ du point A courant sur le cercle $\mathcal{C}$; le second paramètre sera baptisé λ.

Les équations paramétriques de la surface réglée S sont données par les relations suivantes :

$$\mathrm{S} \equiv \begin{cases} x = 2\left[\sin\theta + \lambda\,(4 - \sin\theta)\right] \\ \\ y = 2\left[\sin\theta + \lambda\,(\cos\theta - \sin\theta)\right] \\ \\ z = 2\sin\theta \end{cases}$$

L'équation cartésienne de la surface réglée S a pour expression :

$$\mathrm{S} \equiv \left[(y-z)\,(8-z) + z\,(x-z)\right]^2 - (x-z)^2\,\left(4 - z^2\right) = 0$$

5.1.10 Surface conoïde avec noyau

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère une surface réglée S définie par :

- une directrice d1 : d1 $\equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$
- un plan directeur π : $\pi \equiv z = 0$
- un noyau S : S $\equiv (x - 12)^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0$

On demande de déterminer :

1. les équations **paramétriques** de cette surface réglée;
2. l'équation **cartésienne** de cette surface réglée;
3. l'ordre de la surface.

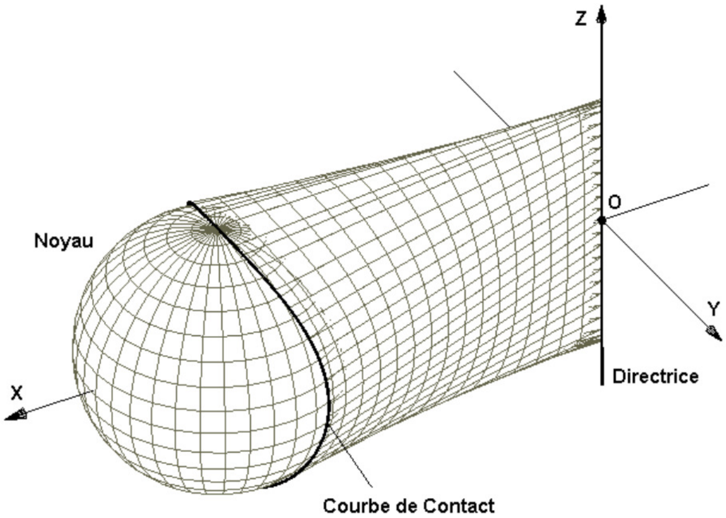


FIGURE 5.2 – Surface réglée : Conoïde avec noyau

Réponses finales

Choix des paramètres : Le premier paramètre à utiliser sera la cote ν du point A courant sur la directrice d1; le second paramètre sera baptisé λ.

Les équations paramétriques de la surface réglée S sont données par les relations suivantes :

$$\mathrm{S} \equiv \begin{cases} x = \pm\frac{\lambda}{12}\sqrt{128+k^2} \\ \\ y = \pm\frac{\lambda}{12}\sqrt{16-k^2} \\ \\ z = k \end{cases}$$

L'équation cartésienne de la surface réglée S a pour expression :

$$\mathrm{S} \equiv y^2\left(128+z^2\right) - x^2\left(16-z^2\right) = 0$$

5.1.11 Janvier 2019 – Question 5

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère un ellipsoïde (5.2), une droite (5.3) et un plan (5.4) dont les équations cartésiennes sont:

$$S \equiv \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \tag{5.2}$$

$$d \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 5 \end{cases} \tag{5.3}$$

$$\Pi \equiv x = 0 \tag{5.4}$$

On vous demande d'établir les équations paramétriques de la surface réglée qui admet d comme directrice, Π comme plan directeur et S comme noyau.

Réponses finales

Les équations paramétriques de la surface sont donc:

$$E \equiv \begin{cases} x &= k + \lambda.0 \\ y &= 0 + \lambda. \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{36k^2+256}{3600}} \\ z &= 5 + \lambda. \pm \sqrt{\frac{36k^2+256}{1600}} \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Une condition d'existence doit être imposée sur k:

$$\frac{1}{9} - \frac{36k^2+256}{3600} \geq 0 \Rightarrow k \in [-2, 2]$$

5.1.12 Janvier 2020 – Question 6

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère un ellipsoïde (5.5), une droite (5.6) et un plan (5.7) dont les équations cartésiennes sont:

$$E \equiv \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1 \tag{5.5}$$

$$d \equiv \begin{cases} x &= 10 \\ z &= 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

$$\Pi \equiv y = 0 \tag{5.7}$$

On vous demande d'établir les équations paramétriques de la surface réglée qui admet d comme directrice, Π comme plan directeur et E comme noyau.

Réponses finales

Les équations paramétriques de la surface réglée sont :

$$S \equiv \begin{cases} x &= 10 + \lambda.1 \\ y &= k + \lambda.0 \\ z &= 0 + \lambda.\{\pm\sqrt{\frac{16-k^2}{384+k^2}}\} \end{cases} \tag{5.8}$$

Une condition d'existence doit être imposée sur k:

$$k \in [-4, 4] \tag{5.9}$$

5.1.13 Janvier 2021 – Question 5

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère une droite d, un ellispsoïde E et un plan Π dont les équations sont:

$$d \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 10 \end{cases} \tag{5.10}$$

$$E \equiv \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0 \tag{5.11}$$

$$\Pi \equiv x = 0 \tag{5.12}$$

On vous demande:

1. d'écrire les équations paramétriques de la surface réglée qui admet d comme directrice, E comme noyau et Π comme plan directeur;
2. de rechercher les deux points d'intersection entre la surface ellipsoïde et la normale à cette surface au point de coordonnées $\left(2, \sqrt{2}, 1\right)$.

Réponses finales

1. Les équations paramétriques de la surface réglée qui admet d comme directrice, E comme noyau et Π comme plan directeur ont pour expression :

$$S \equiv \begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{16\nu^2-384}{1+\nu^2}} \\ y = 0 + \lambda.1 \\ z = 10 + \lambda.\nu \end{cases} \qquad \lambda, \nu \in \mathbb{R}$$

   Une condition d'existence doit être imposée sur ν:

$$\nu \notin \left[-\sqrt{24}, +\sqrt{24}\right]$$

2. Points d'intersection entre la surface ellipsoïde et la normale à cette surface au point de coordonnées $\left(2, \sqrt{2}, 1\right)$:

$$\begin{array}{lcl} P_1 & : & \left(2; \sqrt{2}; 1\right) \\ P_2 & : & (-1,49\ldots; -1,46\ldots; -1,03\ldots) \end{array}$$

5.1.14 Application 3 – Exercice 2

Énoncé

On demande

1. de rechercher les équations paramétriques d'une surface réglée dont toutes les génératrices passent par les droites d_1 et d_2 et sont parallèles au plan π;
2. de vérifier que le point de coordonnées $(13\,;\,-3\,;\,6)$ appartient à cette surface réglée.

$$d_1 \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 7 - 2\lambda \end{cases}$$

$$d_2 \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = 3 \\ z = \mu \end{cases}$$

$$\pi \equiv 2x - y - 5z + 3 = 0$$

Réponses finales

Les équations paramétriques de la surface réglée ont pour expression :

$$\begin{cases} x = 3 + 2\lambda - \alpha\frac{\lambda+40}{7} \\ y = -2 + \lambda + \alpha\,(5 - \lambda) \\ z = 7 - 2\lambda + \alpha\frac{(\lambda-23)}{7} \end{cases}$$

5.2 Surfaces coniques

5.2.1 Exemple 1

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée $\mathrm{O}xyz$, on considère la courbe plane du plan $\mathrm{O}xy$ définie par :

$$\mathrm{C}_1 \equiv \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$$

et le point P de coordonnées $(0\,;\,2\,;\,2)$.

On demande d'établir les équations paramétriques du cône admettant la courbe C_1 comme directrice et le point P comme sommet.

Réponses finales

$$\mathrm{S} \equiv \begin{cases} x = 3\cos\theta\ (\lambda - 1) \\ y = 2\,[\sin\theta\ (1-\lambda) + \lambda] \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

5.2.2 Surface conique

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée $\mathrm{O}xyz$, on considère une surface **conique** :

- admettant comme sommet le point S de coordonnées $(0\,;b;\ b)$
- admettant comme directrice la courbe définie par les équations cartésiennes suivantes :

$$\begin{cases} z = 0 \\ \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

On demande de déterminer les équations **paramétriques** et l'équation **cartésienne** de cette surface conique.

Réponses finales

Choix des paramètres : Le premier paramètre sera baptisé θ et définira la position du point P courant sur la directrice; le second paramètre sera baptisé λ.

Les équations paramétriques de la surface conique S sont données par les relations suivantes :

$$\mathrm{S} \equiv \begin{cases} x = \lambda\, a\, \cos\theta \\ \\ y = b\, [1 + \lambda\,(\sin\theta - 1)] \\ \\ z = b\,(1 - \lambda) \end{cases}$$

L'équation cartésienne de la surface conique S a pour expression :

$$\mathrm{S} \equiv b^2x^2 + a^2\,(y-z)^2 - a^2\,(b-z)^2 = 0$$

5.2.3 Janvier 2018 : Question 5

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée $Oxyz$, on considère un point P, de coordonnées (0;0;10) et une sphère d'équation cartésienne:

$$\mathbb{S} \equiv x^2 + (y-2)^2 + z^2 - 25 = 0$$

On vous demande d'établir les équations paramétriques du cône admettant P comme sommet et la sphère $\mathbb{S}$ comme noyau.

Réponses finales

Les équations paramétriques du cône ont pour expression :

$$\begin{cases} x = 0 \pm \lambda\sqrt{1 - b^2 - (\frac{4b\pm\sqrt{316}}{20})^2} \\ y = 0 + \lambda b \\ z = 10 + \lambda\frac{4b\pm\sqrt{316}}{20} \end{cases}$$

5.2.4 Application 3 – Exercice 3

Énoncé

On donne

— deux points $S : (6\,;\,2\,;\,-1)$ et $C : (3\,;\,2\,;\,0)$

— une droite d passant par l'origine et de vecteur directeur $(1\,;\,1\,;\,1)$

On demande de déterminer :

1. le rayon du cercle dessiné dans le plan Oxy et de centre C tel que l'un des points d'intersection entre le cône (de sommet S et admettant ce cercle comme base) et la droite d ait pour coordonnées $(1\,;\,1\,;\,1)$;
2. les coordonnées du deuxième point d'intersection entre la droite d et le cône.

Réponses finales

Le rayon R du cercle de base est égale à $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Les coordonnées du deuxième point d'intersection entre la droite d et le cône valent $\left(\frac{25}{33}\,;\,\frac{25}{33}\,;\,\frac{25}{33}\right)$

5.3 Surfaces cylindrique

5.3.1 Exemple 1 – surface extrudée

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère une courbe définie par :

$$\mathrm{C}_1 \equiv \begin{cases} x = 2\theta\cos\theta \\ y = 2\theta\sin\theta \\ z = 0 \end{cases}$$

On demande d'établir les équations paramétriques du cylindre admettant cette courbe comme directrice et dont toutes les génératrices sont parallèles :

- **cas 1** : l'axe de référence Oz
- **cas 2** : à la droite d définie par les équations cartésiennes suivantes :

$$\mathrm{d} \equiv \begin{cases} z \ - \ 30x \ = \ 20 \\ y = 0 \end{cases}$$

Indication : le premier paramètre à utiliser est l'abscisse θ du point A courant sur la directrice C_1, le second sera baptisé λ.

Réponses finales

- **Cas 1**

$$\mathrm{S} \equiv \begin{cases} x = 2\theta\cos\theta \\ y = 2\theta\sin\theta \\ z = \lambda \end{cases}$$

- **Cas 2**

$$\mathrm{S} \equiv \begin{cases} x = 2\theta\cos\theta \ + \ \lambda \\ y = 2\theta\sin\theta \\ z = 30\lambda \end{cases}$$

5.3.2 Surface extrudée

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère une surface **cylindrique** admettant comme directrice la courbe du plan Oxz définie par l'équation polaire suivante :

$$\rho(\theta) \ = \ 10\sin\theta\cos\theta$$

L'axe d du cylindre est parallèle à la droite définie par les équations cartésiennes suivantes :

$$\mathrm{d} \ \equiv \begin{cases} 3\,x \ - 5\,z \ + \ 4 = 0 \\ \\ 2\,x \ + \ z \ - \ 2 = 0 \end{cases}$$

On demande de déterminer les équations **paramétriques** et l'équation **cartésienne** de cette surface cylindrique.

Réponses finales

Choix des paramètres : Le premier paramètre sera baptisé θ et définira la position du point P courant sur la directrice; le second paramètre sera baptisé λ.

Les équations paramétriques de la surface cylindrique S sont données par les relations suivantes :

$$\mathrm{S} \equiv \begin{cases} x \;=\; 10\sin\theta\cos^2\theta \\ \\ y \;=\; \lambda \\ \\ z \;=\; 10\sin^2\theta\cos\theta \end{cases}$$

L'équation cartésienne de la surface conique S a pour expression :

$$\mathrm{S} \equiv \left(x^2+z^2\right)^3 - 100\,(xz)^2 = 0$$

5.3.3 Equation d'un cylindre incliné

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère une surface cylindrique à base circulaire (rayon R du cercle égal à 5) dont l'axe d est défini par les équations cartésiennes suivantes :

$$d \equiv \begin{cases} x \;=\; 0 \\ 3x + 5y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

Réponses finales

L'équation cartésienne du cylindre aura pour expression :

$$29x^2 + (5y - 2z + 3)^2 - 725 = 0$$

5.3.4 Application 4 – Exercice 2

Énoncé

On demande de déterminer les équations **paramétriques** d'un cylindre à base circulaire (R=3) dont l'axe est porté par une droite frontale passant par le point de coordonnées (3 ; 5 ; 7) et faisant un angle de 30° par rapport au plan horizontal.

On demande aussi d'en déduire l'équation **cartésienne** de ce cylindre.

Réponses finales

Les équations paramétriques du cylindre ont pour expression :

$$\begin{cases} x = 3\cos\theta + 3 \\ y = \frac{3}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda + 5 \\ z = -\frac{3\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \frac{\lambda}{2} + 7 \end{cases}$$

L'équation cartésienne de ce cylindre est donné par :

$$F(x,y,z) \equiv \left(\frac{y-\sqrt{3}z+7\sqrt{3}-5}{6}\right)^2 + \left(\frac{x-3}{3}\right)^2 = 0$$

5.3.5 Janvier 2022 – Question 4

Dans un repère orthonormé $Oxyz$, on donne les coordonnées de deux points $A = (2;0;2)$ et $B = (2+3\sqrt{3};3;2)$. On vous demande:

1. d'écrire les équations cartésiennes et les équations paramétriques de la droite AB;
2. d'écrire les équations paramétriques d'un cylindre à base elliptique dont les caractéristiques sont les suivantes:
   - son axe est porté par la droite AB,
   - son demi-grand axe est vertical et mesure 4 unités de longueur,
   - son demi-petit axe est horizontal et mesure 3 unités de longueur.

Réponses finales

1. les équations cartésiennes et les équations paramétriques de la droite AB ont pour expression :
   - **équations cartésiennes**
   $$\begin{cases} x - \frac{\sqrt{3}}{3}y - 2 = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$
   - **équations paramétriques**
   $$\begin{cases} x = 2 + \sqrt{3}\alpha \\ y = 3\alpha \\ z = 2 \end{cases}$$
2. Les équations paramétriques du cylindre ont pour expression :
$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}\lambda}{2} - \frac{3}{2}\sin\phi + 2 \\ y = -\frac{\lambda}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos\phi \\ z = 4\cos\phi + 2 \end{cases}$$

5.3.6 Janvier 2024 – Question 5

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère un cylindre droit à base elliptique dont l'axe est défini par les points A et B de coordonnées :

- A = $(1\,;\,-1\,;\,2)$
- B = $(4\,;\,-5\,;\,2)$

La base elliptique de ce cylindre droit présente les caractéristiques suivantes :

- le demi-grand axe a vaut 5 unités et est supporté par une droite verticale
- le demi-petit axe b vaut 2 unités.

On demande d'établir :

1. les équations paramétriques de l'axe du cylindre;
2. les équations paramétriques du cylindre;
3. l'équation cartésienne du cylindre.

Réponses finales

1. les équations paramétriques de l'axe du cylindre ont pour expression :

$$d \equiv \begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = -1 - 4k \\ z = 2 \end{cases}$$

2. les équations paramétriques du cylindre ont pour expression :

$$\begin{cases} x = \frac{3}{5}\lambda + \frac{8}{5}\cos(\theta) + 1 \\ \\ y = -\frac{4}{5}\lambda + \frac{6}{5}\cos(\theta) - 1 \\ \\ z = 5\sin(\theta) + 2 \end{cases}$$

3. l'équation cartésienne du cylindre a pour expression :

$$\frac{(z-2)^2}{25} + \frac{\left(\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{1}{5}\right)^2}{4} - 1 = 0$$

5.4 Surfaces de révolution

5.4.1 Juin 2011 – Question 1

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère une surface de révolution engendrée par la rotation autour de l'axe Oy d'une génératrice g du plan Oyz. Cette génératrice g est une ellipse ayant les caractéristiques suivantes :

— coordonnées du centre C de l'ellipse : C(0;0;8);
— la longueur de son demi-axe aligné selon l'axe Oy est égale à 4;
— la longueur de son demi-axe aligné selon l'axe Oz est égale à 6.

On demande de déterminer les équations **paramétriques** et l'équation **cartésienne** de cette surface de révolution.

Réponses finales

Choix des paramètres : Le premier paramètre sera baptisé θ et définira la position du point P courant sur la directrice; le second paramètre sera baptisé ϕ et représentera l'angle de rotation autour de l'axe de révolution.

Les équations paramétriques de la surface de révolution S sont données par les relations suivantes :

$$\mathrm{S} \equiv \begin{cases} x = (8 + 6\sin\theta)\sin\phi \\ y = 4\cos\theta \\ z = (8 + 6\sin\theta)\cos\phi \end{cases}$$

L'équation cartésienne de la surface de révolution S a pour expression :

$$\mathrm{S} \equiv \left[9y^2 + 4\left(x^2+z^2\right) + 112\right]^2 - 64^2\left(x^2+z^2\right) = 0$$

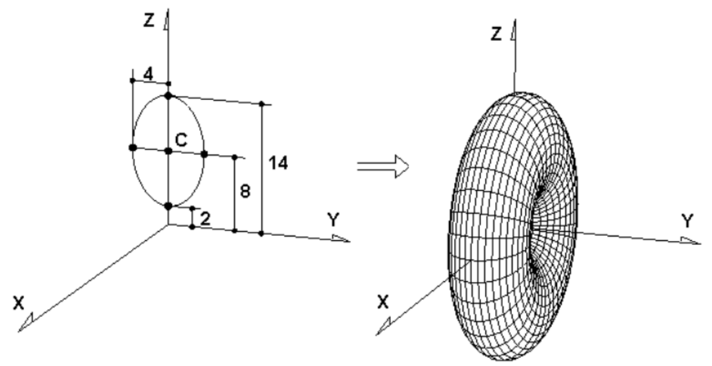


FIGURE 5.3 – Surface de révolution : Juin 2011 – Question 1

5.4.2 Juin 2013 – Question 6

Énoncé

On donne les équations d'une courbe plane:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(x-2)^2}{5^2} + \frac{(y-3)^2}{3^2} - 1 = 0 \\ z = 3 \end{array} \right. \tag{5.13}$$

On demande de rechercher l'équation cartésienne de la surface obtenue par la révolution de cette courbe autour d'un axe a d'équations:

$$a \equiv \left\{ \begin{array}{l} y = -2 \\ z = 3 \end{array} \right. \tag{5.14}$$

Cette surface est une surface algébrique, indiquez son ordre.

Réponses finales

L'équation cartésienne de la surface de révolution a pour expression :

$$-\frac{100}{81}\left[(y+2)^2 + (z-3)^2\right] + \left[\frac{(x-2)^2}{5^2} + \frac{(y+2)^2}{3^2} + \frac{(z-3)^2}{3^2} + \frac{16}{3^2}\right]^2 = 0$$

Il s'agit donc d'une surface du quatrième ordre.

5.4.3 Janvier 2017 – Question 6

Énoncé

On donne les équations d'une courbe plane:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-3)^2 + (y-4)^2 - 4 = 0 \\ z = 1 \end{array} \right. \tag{5.15}$$

On demande de rechercher l'équation cartésienne de la surface obtenue par la révolution de cette courbe autour d'un axe a d'équations:

$$a \equiv \left\{ \begin{array}{l} y = 2 \\ z = 1 \end{array} \right. \tag{5.16}$$

Cette surface est algébrique, précisez son ordre.

Réponses finales

L'équation cartésienne de la surface de révolution a pour expression :

$$\left[(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2\right]^2 - 16\ (y-2)^2 + (z-1)^2 = 0 \tag{5.17}$$

Il s'agit donc d'une surface du quatrième ordre.

5.4.4 Janvier 2018 – Question 6

Énoncé

On donne les équations d'une courbe plane:

$$\begin{cases} z - \dfrac{x^2}{10} - 10 = 0 \\ y = 3 \end{cases} \tag{5.18}$$

On demande de rechercher l'équation cartésienne de la surface obtenue par la révolution de cette courbe autour d'un axe a d'équations cartésiennes :

$$a \equiv \begin{cases} y = 3 \\ z = 5 \end{cases} \tag{5.19}$$

Cette surface est une surface algébrique, indiquez son ordre.

Réponses finales

L'équation cartésienne de cette surface de révolution a pour expression :

$$(y-3)^2 + (z-5)^2 = \frac{x^4}{100} + x^2 + 25$$

Il s'agit donc d'une surface du quatrième ordre.

5.4.5 Janvier 2020 – Question 7

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère un cylindre de **révolution** dont le cercle de base a un rayon R égal à 5 ($R = 5$) et dont l'axe d de ce cylindre est défini par les équations cartésiennes suivantes :

$$d \equiv \begin{cases} 4z - 3x + 6 \ = \ 0 \\ y - 1 \ = \ 0 \end{cases}$$

On demande de :

1. rechercher les coordonnées cartésiennes de la trace horizontale I de la droite d;
2. représenter dans une vue en isométrie la droite d ainsi que sa trace horizontale I;
3. déterminer l'équation cartésienne du cylindre de révolution.

Réponses finales

Les coordonnées de la trace horizontale I de la droite d ont pour expression : $I = (2\,;\,1\,;\,0)$.

L'équation cartésienne du cylindre a pour expression :

$$S \equiv \left(\frac{3}{5}x_{Q'} - \frac{4}{5}z_{Q'} - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y_{Q'} - 1\right)^2 - 25 \ = \ 0$$

5.4.6 Application 3 – Exercice 3

Énoncé

Soit une ellipse du plan Oyz présentant les caractéristiques suivantes :
- centrée en $y = 0$ et $z = 4$;
- dont l'axe focal est parallèle à Oy;
- dont le grand axe mesure 6 et le petit axe 4.

On demande :

1. de déterminer les équations paramétriques et l'équation cartésienne de la surface de révolution obtenue en faisant tourner l'ellipse autour de l'axe Oy;
2. de préciser l'ordre de la surface;
3. de déterminer l'équation cartésienne de la surface obtenue en faisant tourner l'ellipse autour de l'axe Oz et de vérifier qu'il s'agit bein d'une ellipsoïde;
4. de rechercher la valeur du paramètre p tel que la droite d suivante soit tangente à l'ellipsoïde :

$$d \begin{cases} x = p\lambda \\ y = 2p\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

5. de rechercher les coordonnées du point de tangence.

Réponses finales

L'équation de la surface obtenue par la révolution de l'ellipse autour de l'axe Oy a pour expression :

$$F(x,y,z) \equiv \left(9x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 108\right)^2 - 72^2\left(x^2 + z^2\right) = 0$$

C'est une surface d'ordre 4.

L'équation de la surface obtenue par la révolution de l'ellipse autour de l'axe Oz a pour expression :

$$F(x,y,z) \equiv \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} + \frac{(z-4)^2}{4} - 1 = 0$$

C'est bien l'équation d'une ellipsoïde.

Le paramètre p pour que la droite d soit tangente à l'ellipsoïde doit être égale à : $p = \pm\sqrt{0.15}$.

5.4.7 Application 4 – Exercice 4

Énoncé

On demande, en utilisant le formalisme des matrices de changement de repère, de rechercher l'équation cartésienne d'une surface de révolution présentant les caractéristiques suivantes :
- d'axe normal au plan d'équation $3x + 2y - z + 1$ et passant par le point de coordonnées $(1; 1; 6)$;
- de section elliptique :
  — axe focal perpendiculaire à l'axe de rotation;

— $a = 3$ et $b = 2$;
— dont le centre est à une distance de 5 par rapport à l'axe de révolution.

Réponses finales

L'équation cartésienne de cette surface de révolution a pour expression :

$$F(x,y,z) \equiv \left(4x'^2 + 4y'^2 + 9z'^2 + 64\right)^2 - 1600\left(x'^2 + y'^2\right) = 0$$

avec,

$$\begin{cases} x' = \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{1}{\sqrt{13}}\right) \\ y' = \left(\frac{3}{\sqrt{182}}x + \frac{2}{\sqrt{182}}y + \frac{13}{\sqrt{182}}z - \frac{83}{\sqrt{182}}\right) \\ z' = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}x + \frac{2}{\sqrt{14}}y - \frac{1}{\sqrt{14}}z + \frac{1}{\sqrt{14}}\right) \end{cases}$$

5.4.8 Janvier 2024 – Question 6

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère la quadrique S_1 et le plan π d'équations :

- $S_1 \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\sqrt{u}\,\sin(v) \\ y = u \\ z = \sqrt{u}\,\cos(v) \end{cases} \qquad u, v \in \mathbb{R}$
- $\pi \equiv y = 3$

Pour cet exercice, il vous faudra:

1. Identifier le type de quadrique auquel appartient la surface S_1 et de donner les coordonnées de son centre ou son sommet le cas échéans ainsi que la direction de son axe (x ou y ou z) ;
2. Rechercher les équations paramétriques de l'ellipse c qui résulte de l'intersection entre la quadrique S_1 et le plan π. Donnez les dimensions de ses demi axes ainsi que la position de son centre;
3. Rechercher l'équation cartésienne de la surface S_3 engendrée par révolution de la courbe c autour d'un axe a d'équations: $a \equiv \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$ Précisez ensuite l'ordre de la surface obtenue.

Réponses finales

1. La quadrique S_1 est un paraboloïde elliptique de sommet (5;0;0) et dont l'axe principal est parallèle à l'axe OY.
2. Les équations cartésiennes de l'ellipse ont pour expression :

$$c = S_1 \cap \pi \equiv \begin{cases} (x-5)^2 + 4z^2 = 12 \\ y = 3 \end{cases}$$

3. L'équation cartésienne de la surface de révolution a pour expression :

$$S_3 \equiv (x-5)^2 + (y-3)^2 + 4z^2 = 12$$

La surface de révolution est une surface d'ordre 2.

5.4.9 Janvier 2025 – Question 5

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée $Oxyz$, on considère un cône de **révolution** présentant les caractéristiques suivantes :

- Le sommet S passe par le point de coordonnées $S = (1\,;\,-1\,;\,1)$
- L'axe d du cône est défini par les équations cartésiennes suivantes :

$$d \equiv \begin{cases} 4x - 3z - 1 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$$

- Le demi-angle au sommet ϕ est égal à 45°

On demande de

1. donner l'équation cartésienne et les équations paramétriques du cône de **référence** ayant le même angle de demi-ouverture ϕ, mais dont le sommet est situé à l'origine du système d'axes et l'axe de révolution est aligné avec l'axe de référence Oz;
2. d'établir les équations paramétriques de l'axe de révolution d du cône;
3. de représenter dans une vue en isométrie l'axe de révolution d du cône;
4. de construire la matrice de transformation homogène qui permet de faire coïncider l'axe de référence Oz du cône de référence avec l'axe d du cône étudié;
5. déterminer les équations paramétriques du cône correspondant à la configuration décrite dans l'énoncé.

5.5 Surfaces quadrique

5.5.1 Janvier 2016 – Question 6

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère une **quadrique** définie par l'équation cartésienne suivante :

$$\mathrm{F}(x, y, z) \equiv 9x^2 - 4y^2 + 36z^2 + 18x + 16y - 72z + 29 = 0$$

Par ailleurs, on considère une droite d qui passe par les points A et B dont les coordonnées cartésiennes valent :

- A : $(5\,;\,-7\,;\,3)$
- B : $(-3\,;\,5\,;\,-1)$

On demande :

1. d'identifier le type de quadrique;
2. d'établir les équations **cartésiennes** et **paramétriques** de la droite d;
3. de rechercher le(s) point(s) d'intersection entre la droite d et la quadrique (dans la suite de l'énoncé, le point d'intersection ayant la cote la plus élevée sera baptisé le point P);
4. de déterminer l'équation **cartésienne** et les équations **paramétriques** du plan π tangent à la quadrique passant par le point P;
5. de calculer l'angle θ que fait la droite d avec le plan tangent π.
6. d'établir dans $\mathbb{R}^2$ l'équation **cartésienne** de la courbe d'intersection entre la quadrique et un plan ρ d'équation $2x - 3y - 5 = 0$.

Réponses finales

1. **Identification de la quadrique** :

   La quadrique est un cône base elliptique d'axe $\vec{\mathrm{u}}_y$ et de sommet $(-1; 2; 1)$.

2. **Équations de la droire d**
   - Équations cartésiennes

   $$\mathrm{d} \equiv \begin{cases} x - 2z + 1 = 0 \\ y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

   - Équations paramétriques

   $$\mathrm{d} \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -7 - 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

3. **Point P d'intersection entre la droite d et la quadrique** : P : $(1\,;\,-1\,;\,1)$
4. **Équations du plan tangent π**
   - Équation cartésienne

   $$\pi \equiv 3x + 2y - 1 = 0$$

- Équations paramétriques

$$\pi \equiv \begin{cases} x = \nu \\ y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\nu \\ z = \mu \end{cases}$$

5. **Angle θ que fait la droite d avec le plan tangent** π : $\theta = 0$
6. **Équation cartésienne de la courbe d'intersection entre la quadrique et le plan ρ dans $\mathbb{R}^2$**

$$f(x,z) \equiv 5x^2 + 12\sqrt{13}\,x + 36z^2 = 0$$

5.5.2 Janvier 2017 – Question 5

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère une surface **quadrique** définie par l'équation cartésienne suivante :

$$\mathrm{F}(x,y,z) \equiv 16\,x^2 - 48\,y^2 + 3\,z^2 - 48\,x - 192\,y + 30\,z - 129 = 0$$

On demande de :

1. identifier le type de quadrique;
2. exprimer les équations paramétriques de cette quadrique;
3. déterminer l'équation **cartésienne** et les équations **paramétriques** du plan π tangent à la quadrique au point P de coordonnées P $(3\,;\,-2\,;\,-3)$.

Réponses finales

1. **Identification de la quadrique**

   La quadrique est une **hyperboloïde à une nappe** d'axe $\vec{u}_y$ et de centre $(3/2; -2; -5)$.

2. **Équations paramétriques de la quadrique**

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} + \sqrt{3}\cosh u\,\cos v \\ y = -2 + \sinh u \\ z = -5 + 4\cosh u\,\sin v \end{cases}$$

3. **Équations du plan tangent**

   Le plan tangent π a pour équation cartésienne :

$$\pi \equiv 4x + z - 9 = 0$$

   Les équations paramétriques du plan π peuvent donc s'écrire :

$$\pi \equiv \begin{cases} x = \lambda_1 \\ y = \lambda_2 \\ z = 9 - 4\lambda_1 \end{cases}$$

5.5.3 Janvier 2019 – Question 6

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée $\mathrm{O}xyz$, on considère une surface **quadrique** définie par l'équation cartésienne suivante :

$$\mathrm{F}(x, y, z) \equiv 9\,x^2 - 36\,y^2 + 4\,z^2 + 18\,x + 144\,y + 24\,z - 63 = 0$$

On demande :

1. d'identifier le type de quadrique;
2. d'écrire les équations paramétriques de cette quadrique;
3. de rechercher les coordonnées cartésiennes des points de la quadrique pour lesquels la normale est parallèle à la droite d définie par les équations cartésiennes suivantes :

$$d \equiv \begin{cases} x + 1 = 0 \\ y - 9z + 17 = 0 \end{cases}$$

Réponses finales

1. **Identification de la quadrique**

   La quadrique est une **hyperboloïde à deux nappes** de centre $(-1; 2; -3)$ et dont l'axe est parallèle au vecteur de référence $\vec{\mathrm{u}}_y$.

2. **Équations paramétriques de la quadrique**

   Les équations paramétriques de la quadrique ont pour expression :

$$\begin{cases} x = -1 + 2\,\sinh u\,\cos v \\ y = 2 \pm \cosh u \\ z = -3 + 3\,\sinh u\,\sin v \\ 0 \end{cases}$$

3. **Coordonnées cartésiennes des points de la quadrique pour lesquels la normale est parallèle à la droite d**

   Les coordonnées P_1 et P_2 des points de la quadrique dont la normale est parallèle à la droite d ont pour expression :

$$\begin{cases} P_1 : \left(-1\,;\,2 + \frac{3}{4}\sqrt{2}\,;\,\frac{3}{4}\sqrt{2} - 3\right) \\ \\ P_2 : \left(-1\,;\,2 - \frac{3}{4}\sqrt{2}\,;\,-\frac{3}{4}\sqrt{2} - 3\right) \end{cases}$$

5.5.4 Application 3 – Exercice 1

Énoncé

Une quadrique est donnée par son équation cartésienne :

$$F(x, y, z) \equiv 9x^2 - 54x - 16y^2 - 64y + 144z^2 - 288z + 305 = 0$$

On demande de déterminer

1. le type de quadrique;
2. les équations paramétriques de cette quadrique;
3. les points d'intersection de cette quadrique avec la droite d définie par ses équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

Réponses finales

La quadrique est une hyperboloïde à deux nappes. Ses équations paramétriques ont pour expression :

$$\begin{cases} x = 3 + 4 \sinh u \sin v y = -2 \pm 3 \cosh u z = 1 + \sinh u \cos v \end{cases}$$

La droite d et la quadrique présentent deux points d'intersection : P_1 : (0.828 ; 1.414 ; 1) et P_2 : (19.572 ; 10.786 ; 1).

5.5.5 Application 5 – Exercice 1

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère une surface quadrique donnée par son équation cartésienne :

$$F(x, y, z) \equiv 3x^2 + z^2 - 6x - 2y + 2z + 4 = 0$$

et un plan π dont l'équation cartésienne est donnée par :

$$\pi \equiv 2x + y - 6 = 0$$

On demande de déterminer :

1. les équations cartésiennes de la coubre d'intersection entre la quadrique et le plan π;
2. les équations paramétriques de la coubre d'intersection entre la quadrique et le plan π;
3. l'équation cartésienne, dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^2$ de la coubre d'intersection entre la quadrique et le plan π (trouver l'équation cartésienne sous la forme d'un $f(x, y) = 0$).

Réponses finales

Les équations cartésiennes de la courbe d'intersection ont pour expression :

$$\begin{cases} 3x^2 + z^2 - 6x - 2y + 2z + 4 = 0 \\ 2x + y - 6 = 0 \end{cases}$$

Les équations paramétriques de la courbe d'intersection ont pour expression :

$$\begin{cases} x = 3 - \frac{u}{2} \\ y = u \\ \\ z = 1 + \sqrt{2u} \sin\left(\pm \arccos\left(\frac{4-u}{2\sqrt{\frac{2u}{3}}} \right) \right) \\ \\ \end{cases}$$

L'équation cartésienne, dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^2$ de la coubre d'intersection a pour expression :

$$f(x,y) \equiv \frac{3}{5}x^2 + z^2 + \frac{62}{5\sqrt{5}}x + 2z + \frac{112}{25} = 0$$

5.5.6 Application 5 – Exercice 2

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère une surface quadrique donnée par son équation cartésienne :

$$F(x,y,z) \equiv 3x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 3xy + 4xz + 2yz + x + 3y - 4 = 0$$

On demande de déterminer :

1. les coordonnées du point de la quadrique le plus haut à la verticale de l'origine;
2. l'équation cartésienne du plan tangent à la quadrique en ce point;
3. les équations de la normale à la quadrique en ce point;
4. les coordonnées du deuxième point d'intersection entre la quadrique et la droite normale.

Réponses finales

L'équation cartésienne du plan tangent à la quadrique au point de coordonnées $(0;0;1)$ a pour expression :

$$\pi \equiv 5x + 5y + 8z - 8 = 0$$

Les équations paramétriques de la droite normale s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} x = 5\lambda \\ y = 5\lambda z = 1 + 8\lambda \end{cases}$$

Les coordonnées du deuxième point d'intersection entre la quadrique et la droite normale sont donnée par : $(-0.208\,;\,-0.208\,;\,-0.670)$

5.5.7 Application 5 – Exercice 3

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on donne les équations paramétriques d'une surface :

$$\begin{cases} x = 2 + 3u\cos v \\ y = 4 + 3u\sin v \\ z = -1 + 3u^3\cos(3v) \end{cases}$$

On demande de déterminer :

1. les équations paramétriques de la normale à la surface au point caractérisé par $u = 1$ et $v = \pi/2$;
2. les coordonnées cartésiennes des éventuels autres points d'intersection entre cette droite normale et la surface.

Réponses finales

Les équations paramétriques de la normale ont pour expression :

$$\begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 7z = -1 + \lambda \end{cases}$$

5.5.8 Janvier 2022 – Question 4

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère une quadrique S d'équation:

$$S \equiv -9x + 9y^2 - z^2 + 2z - 10 = 0$$

On vous demande :

1. de mettre sous forme réduite l'équation de la quadrique, d'identifier son type et ses paramètres;
2. d'établir les équations paramétriques de la quadrique S (si vous utilisez le formulaire, considérez que le paramètre c vaut 1);
3. de déterminer l'équation cartésienne du plan tangent à la quadrique, parallèle au plan π d'équation: $\pi \equiv -x + 2y - \frac{4}{3}z + 174 = 0$. Vous devez pour cette dernière question trouver les coordonnées du point de tangence.

Réponses finales

1. L'équation cartésienne de la quadrique a pour expression :

$$S \equiv y^2 - \frac{(z-1)^2}{3^2} - (x+1) = 0$$

   La quadrique est donc un paraboloïde hyperbolique de centre (-1,0, 1) et de paramètres a=1 et b=3 dont l'axe est parallèle à Ox.
2. Les équations paramétriques de la quadrique ont pour expression :

$$S \equiv \begin{cases} y = u \\ z = v \\ x = u^2 - \dfrac{(v-1)^2}{9} - 1 \end{cases}$$

3. L'équation cartésienne du plan tangent est donné par :

$$\pi_t \equiv 2(y-1) + (-\frac{4}{3})(z-7) - 1(x+4) = 0$$

5.5.9 Janvier 2023 – Question 6

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère l'équation cartésienne d'une quadrique (5.20).

$$4y^2 + z^2 - 24y - 10z - 16x + 93 = 0 \tag{5.20}$$

On demande:

1. d'identifier cette quadrique en déterminant sa forme cartésienne réduite;
2. de schématiser cette quadrique dans un système d'axes;
3. d'écrire les équations paramétriques de cette quadrique;
4. d'écrire l'équation cartésienne du plan tangent au point $(6; 3; 13)$;
5. de relever l'orientation particulière de ce plan tangent;
6. d'écrire les équations paramétriques de ce même plan en travaillant IMPÉRATIVEMENT à partir des équations paramétriques de la quadrique.

Réponses finales

— La quadrique est un paraboloïde elliptique d'axe OX dont la forme réduite a pour expression :
$$\frac{(y-3)^2}{4} + \frac{(z-5)^2}{16} - (x-2) = 0$$

— Les équations paramétriques de cette quadrique a pour expression :

$$\begin{cases} x = 2 + u \\ y = 3 + 2\sqrt{u}\cos(v) \qquad \textit{avec } u \in \mathbb{R}^+ \textit{ et } v \in \mathbb{R} \\ z = 5 + 4\sqrt{u}\sin(v) \end{cases}$$

— l'équation cartésienne du plan tangent π a pour expression :

$$\pi \equiv x - z + 7 = 0$$

— les équations paramétriques de ce plan tangent π ont pour expression :

$$\begin{cases} x = 6 + \lambda + \\ y = 3 + \lambda - 4\mu \qquad \textit{avec } \lambda \textit{ et } \mu \ \in \mathbb{R} \\ z = 13 + \lambda \end{cases}$$

5.5.10 Janvier 2025 – Question 6

On donne l'équation cartésienne d'une surface quadrique S:

$$S \equiv x^2 - 3y^2 + z^2 + 3xy + 2yz + 4x + y - 2z - 12 = 0$$

On définit également les points $A(1, 2, 3)$ et $B(-3, 0, 5)$.

On demande:
1. de déterminer les équations paramétriques de la droite AB;
2. de déterminer les coordonnées du point P, intersection entre la droite AB et la quadrique S (si plusieurs solutions sont possibles, retenir le point ayant la coordonnée z la plus grande);
3. de déterminer l'équation cartésienne du plan tangent à la quadrique S en P;
4. de calculer l'angle entre la droite AB et la normale à la quadrique S en P

5.6 Intersection entre surfaces

5.6.1 Intersection entre un cône et un plan

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$,rapporté à la base orthonormée $Oxyz$, on considère un cône de révolution d'axe $\vec{\mathbf{u}}_z$, dont le sommet passe par l'origine O et dont le demi-angle au sommet est égal à ϕ.

On demande :

1. d'établir l'équation cartésienne de la surface conique;
2. de déterminer, dans le cas où le demi-angle au sommet ϕ est égal à $\pi/4$, les équations **cartésiennes** et les équations **paramétriques** de la courbe d'intersection entre la surface conique et le plan défini par l'équation cartésienne suivante :

$$\pi \equiv x + z - 4 = 0$$

3. d'identifier la courbe d'intersection et d'en donner ses principales caractéristiques.

Réponses finales

— L'équation cartésienne de la surface a pour expression :

$$F(x,y,z) \equiv x^2 + y^2 - \tan^2\phi\, z^2 = 0$$

— Les équations cartésiennes de la courbe d'intersection ont pour expression :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{cases}$$

— Les relations qui permettent de déterminer les équations paramétriques de la courbe d'intersection ont pour expression :

$$\begin{aligned} \lambda h \cos\theta &= 4 + k_1 \\ \lambda h \sin\theta &= k_2 \\ \lambda h &= -k_1 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{k_1 = -\frac{16 + k_2^2}{8}}$$

— Les équations paramétriques de la courbe d'intersection ont pour expression :

$$\begin{cases} x = 4 - \frac{16+k_2^2}{8} \\ y = k_2 \\ z = \frac{16+k_2^2}{8} \end{cases}$$

— la courbe d'intersection est une parabole dont l'équation cartésienne exprimée dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^2$ a pour expression :

$$f(x,y) \equiv y^2 = -4\sqrt{2}\, x$$

5.6.2 Intersection entre un cône et une sphère : courbe de Viviani

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$,rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère deux surfaces :

1. un cône de révolution d'axe $\vec{\mathbf{u}}_z$, dont le sommet passe par l'origine O et dont le demi-angle au sommet est égal à $\pi/4$;
2. une sphère de rayon R égal à 4 et dont le centre C se trouve sur l'axe de référence $\vec{\mathbf{u}}_x$ à une distance de 4 de l'origine O.

On demande d'établir les équations paramétriques de la courbe d'intersection entre le cône et la sphère et de préciser si cette courbe d'intersection est plane.

Réponses finales

Les relations qui permettent de déterminer les équations paramétriques de la courbe d'intersection ont pour expression :

$$\begin{aligned}
\lambda h \cos\theta &= R + R\cos\alpha\sin\phi \\
\lambda h \sin\theta &= R\sin\alpha\sin\phi \\
\lambda h &= R\cos\phi
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{\lambda h \;=\; R\cos\theta}$$

Les équations paramétriques de la courbe d'intersection ont pour expression :

$$\begin{cases} x &= R\cos^2\theta \\ y &= R\cos\theta\sin\theta \\ z &= R\cos\theta \end{cases}$$

Cette courbe, appelée courbe de *Viviani*, n'est évidemment pas une courbe plane.

5.6.3 Juin 2012 – Question 6

Énoncé

Soit un tore de rayon majeur R, de rayon mineur r d'axe Oz. Ses équations paramétriques sont:

$$\begin{cases} x = (R + r\cos\phi)\cos\theta \\ y = (R + r\cos\phi)\sin\theta \\ z = r\sin\phi \end{cases} \tag{5.21}$$

Soit un plan π parallèle à Oz et passant par les points de coordonnées $(0{,}R+r{,}0)$ et $(R+r{,}0{,}0)$ dans $\mathbb{R}^3$.

1. Quelle est la condition que doit respecter r pour n'avoir qu'une seule courbe d'intersection entre π et le tore ?
2. Dans le cas particulier où R=10 et r=4 (qui respecte la condition d'unicité de l'intersection), recherchez les équations paramétriques de la courbe d'intersection entre le tore et la plan π.

Réponses finales

La condition que doit respecter r pour n'avoir qu'une seule courbe d'intersection entre le plan π et le tore est la suivante :

$$R - r < \frac{\sqrt{2}}{2}(R+r) \Leftrightarrow r > 0,1716R$$

Les équations paramétriques de la courbe sont donc:

$$\begin{cases} x = \dfrac{(R+r)\cos\theta}{\cos\theta + \sin\theta} \\ y = \dfrac{(R+r)\sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} \\ z = \pm\dfrac{r}{(\cos\theta + \sin\theta)}\sqrt{(r^2 - R^2)(1+\sin 2\theta) - (R+r)^2 + 2R(R+r)(\cos\theta + \sin\theta)} \end{cases}$$

5.6.4 Juin 2013 – Question 7

Énoncé

Soit une surface S_1 hyperboloïde à une nappe et un paraboloïde hyperbolique S_2 d'équations paramétriques:

$$S_1 \equiv \begin{cases} x = 2 \cdot \cosh w \cdot \cos\theta \\ y = 3 \cdot \cosh w \sin\theta \\ z = \sinh w \end{cases} \qquad S_2 \equiv \begin{cases} x = 10u \\ y = 15v \\ z = 3(u^2 - v^2) \end{cases} \tag{5.22}$$

On demande:

1. de rechercher les équations paramétriques de la courbe d'intersection entre ces deux surfaces;
2. de calculer les équations paramétriques du plan tangent à l'hyperboloïde pour le point w=1, $\theta = \pi/3$.

Réponses finales

les équations paramétriques de la courbe d'intersection ont pour expression :

$$\begin{cases} x = 2 \cdot \cosh w \cdot \cos\left(0,5 \arccos \dfrac{100 \sinh w}{12 \cosh^2 w}\right) \\ y = 3 \cdot \cosh w \cdot \sin\left(0,5 \arccos \dfrac{100 \sinh w}{12 \cosh^2 w}\right) \\ z = \sinh w \end{cases}$$

Les équations paramétriques du plan tangent à l'hyperboloïde pour le point w=1, $\theta = \pi/3$ sont données par :

$$\begin{cases} x = 1,54 + 1,18\lambda - 2,67\mu \\ y = 4,01 + 3,05\lambda + 2,31\mu \\ z = 1,18 + 1,54\lambda \end{cases}$$

5.6.5 Juin 2014 – Question 5

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapportée à la base orthonormée Oxyz, on considère une surface engendrée par la révolution d'une hyperbole **equilatère** du plan Oyz autour de son axe focal (droite reliant les foyers). Les deux foyers F_1 et F_2 de cette hyperbole **equilatère** ont pour coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} F_1 &= (0\,;0\,;4) \\ F_2 &= (0\,;4\,;8) \end{aligned}$$

On demande :

1. de représenter dans le plan Oyz, le graphe de cette hyperbole équilatère en y indiquant clairement les deux foyers, le centre de la conique ainsi que les deux asymptotes obliques (on rappelle que pour une hyperbole, la relation fondamentale est $c^2 = a^2 + b^2$);
2. d'établir les équations paramétriques de cette hyperbole;
3. d'établir les équations paramétriques de la surface de révolution;
4. d'établir les équations paramétriques de la courbe d'intersection entre la surface de révolution et le plan π perpendiculaire à l'axe focal et passant par le foyer F_2;
5. de déterminer les principales caractéristiques de cette courbe d'intersection.

Réponses finales

Les équations paramétriques de la surface de révolution ont pour expresion :

$$\begin{cases} x_s(\theta,\omega) \;=\; 2\sin\theta\sinh\omega \\ y_s(\theta,\omega) \;= 2 \,\pm\, \sqrt{2}\cosh\omega \,-\, \sqrt{2}\cos\theta\sinh\omega \\ z_s(\theta,\omega) \;= 6 \,+\, \sqrt{2}\cos\theta\sinh\omega \,\pm\, \sqrt{2}\cosh\omega \end{cases}$$

Cette surface de révolution est une hyperboloïde à deux nappes.

les équations paramétriques de la courbe d'intersection entre la surface de révolution et le plan π ont pour expression :

$$\begin{cases} x \;=\; 2\sin\theta \\ y \;=\; 4 - \sqrt{2}\cos\theta \\ z \;=\; 8\sqrt{2}\cos\theta \end{cases}$$

La courbe d'intersection est un cercle de rayon 2.

5.6.6 Juin 2015 – Question 5

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapportée à la base orthonormée $Oxyz$, on considère une quadrique définie par l'équation cartésienne suivante :

$$F(x,y,z) \;\equiv\; z^2 + 4y^2 - 2z + 8y - 4x + 13 \;=\; 0$$

Par ailleurs, on considère un plan π qui est parallèle à l'axe $\vec{u}_x$ et qui contient la droite d définie par les équations cartésiennes suivantes :

$$d \equiv \begin{cases} x - 12 = 0 \\ 4y - 3z + 7 = 0 \end{cases}$$

On demande :

1. d'identifier le type de quadrique;
2. d'établir l'équation cartésienne et les équations paramétriques du plan π;
3. d'établir les équations paramétriques de la courbe d'intersection entre le plan π et la surface quadratique;
4. d'identifier la courbe d'intersection et d'en donner ses principales caractéristiques.

Réponses finales

La quadrique est une **paraboloïde elliptique** d'axe $\vec{u}_x$ et de centre $(2; -1; 1)$.

Les équations paramétriques de cette paraboloïde elliptique ont pour expression (cf. formulaire) :

$$\begin{cases} x = u + 2 \\ y = \sqrt{u}\cos(v) - 1 \\ z = 2\sqrt{u}\sin(v) + 1 \end{cases}$$

L'équation cartésienne du plan π a donc pour expression :

$$\pi \equiv -4y + 3z - 7 = 0$$

Les équations paramétriques du plan π peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\pi \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = \nu \\ z = \frac{4}{3}\nu + \frac{7}{3} \end{cases}$$

Les équations paramétriques de la courbe d'intersection ont pour expression :

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 2 + \frac{13}{9}(\nu + 1)^2 \\ y = \nu \\ z = \frac{4}{3}\nu + \frac{7}{3} \end{cases}$$

La courbe d'intersection est une parabole qui passe par le sommet de la quadrique.

5.6.7 Juin 2015 – Question 7

Énoncé

On définit les courbes C_1 et C_2 comme suit:

— C_1 est une ellipse dessinée dans le plan Oyz dont le centre est en $(0, 3, 2)$, dont le grand axe est parallèle Oz et dont les paramètres a et b valent respectivement 2 et 3;

— C_2 est un cercle dessiné dans le plan Oxz de centre $(5, 0, 2)$ et de rayon 2.

On demande:

1. de rechercher les équations paramétriques de la surface engendrée par la révolution de C_1 autour de Oy;
2. de rechercher les équations paramétriques de la surface cylindrique dont C_2 est la base et dont l'axe est Oy;
3. de rechercher les équations paramétriques de la courbe d'intersection entre C_1 et C_2.

Réponses finales

Les équations paramétriques de la surface de révolution ont pour expression :

$$\begin{cases} x = (2 + 3\sin\phi)\cos\theta \\ y = 3 + 2\cos\phi \\ z = (2 + 3\sin\phi)\sin\theta \end{cases}$$

Les équations paramétriques de la surface cylindrique ont pour expression :

$$\begin{cases} x = 5 + 2\cos\alpha \\ y = \kappa \\ z = 2 + 2\sin\alpha \end{cases}$$

5.6.8 Janvier 2016 – Question 5

Énoncé

Dans une repère orthonormé Oxyz, on définit deux surfaces:

- S_1 est une surface cylindrique dont l'axe est parallèle à Ox; sa base est une ellipse dessinée dans le plan Oyz centrée en $y_c = 3$, $z_c = -1$; son axe focal est parallèle à Oz ($a = 3$), le demi petit axe vaut $b = 2$;
- S_2 est une surface définie par l'équation cartésienne $F(x, y, z) \equiv 16x^2 + 6y^2 + 144z = 0$.

On demande :

1. de rechercher les équations cartésiennes de la courbe d'intersection entre S_1 et S_2;
2. de déterminer si cette courbe est une courbe plane;
3. de rechercher les équations paramétriques de S_1 et de S_2;
4. de déterminer les équations paramétriques de la surface d'intersection entre S_1 et S_2;
5. d'écrire la ou les relations qui permettent de trouver le domaine de définition du paramètre de cette courbe d'intersection (la résolution de ces relations n'est pas demandée).

Réponses finales

Équations cartésiennes de la courbe d'intersection

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) \equiv \dfrac{(y-3)^2}{2^2} + \dfrac{(z+1)^2}{3^2} - 1 = 0 \\ F_2(x, y, z) \equiv 16x^2 + 6y^2 + 144z = 0 \end{cases} \tag{5.23}$$

Équations paramétriques des surfaces

$$\begin{cases} x = \kappa \\ y = 3 + 2\sin\theta \\ z = -1 + 3\cos\theta \end{cases} \tag{5.24}$$

Courbe d'intersection

Pour établir les équations paramétriques, il faut combiner les équations des deux surfaces pour faire disparaître les inconnues :

$$\left\{\begin{array}{l} 3\sqrt{u}\cos v = \kappa \\ 2\sqrt{6}\sqrt{u}\sin v = 3 + 2\sin\theta \\ u = -1 + 3\cos\theta \end{array}\right. \tag{5.25}$$

Les équations paramétriques de la courbe d'intersection sont données par :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 3\sqrt{u}\cos\left[\arcsin\left(\frac{9\pm\sqrt{36-4(u+1)^2}}{6\sqrt{6}\sqrt{u}}\right)\right] \\ y = 2\sqrt{6}\sqrt{u}\left(\dfrac{9\pm\sqrt{36-4\left(u+1\right)^2}}{6\sqrt{6}\sqrt{u}}\right) \\ z = u \end{array}\right. \tag{5.26}$$

Domaine de définition de u

On a les éléments suivants à prendre en compte:
— $u \geq 0$ (racine carrée);
— $36 - 4\left(u+1\right)^2 \geq 0$ (racine carrée);
— $u \neq 0$ (dénominateur);
— $-1 \leq \left(\dfrac{9\pm\sqrt{36-4\left(u+1\right)^2}}{6\sqrt{6}\sqrt{u}}\right) \leq 1$ (fonction arcsinus).

5.6.9 Janvier 2017 – Question 8

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère une surface **réglée** S_1 définie par les équations paramétriques suivantes :

$$S_1 \equiv \begin{cases} x = u\ \cos v \\ y = u\ \sin v \\ z = \sin(2v) \end{cases}$$

Cette surface est connue sous le nom de *conoïde de Plücker*.

On considère par ailleurs, un cylindre de révolution S_2 dont les équations paramétriques ont pour expression :

$$S_2 \equiv \begin{cases} x = \sqrt{2}\ \cos\theta\ +\ 1 \\ y = \sqrt{2}\ \sin\theta\ +\ 1 \\ z = \lambda \end{cases}$$

On demande :

1. d'établir les équations paramétriques de la courbe d'intersection entre la conoïde S_1 et le cylindre S_2 ;
2. de vérifier si la courbe d'intersection est une courbe plane;
3. les équations cartésiennes de la courbe d'intersection.

Réponses finales

Les équations paramétriques de la courbe d'intersection ont pour expression :

$$\begin{cases} x = 2\left(\cos v + \sin v\right) \cdot \cos v \\ y = 2\left(\cos v + \sin v\right) \cdot \sin v \\ z = \sin\left(2v\right) \end{cases}$$

La courbe est donc une courbe plane appartenant au plan d'équation $\pi \equiv x + y - 2z + 2 = 0$.

5.6.10 Janvier 2018 – Question 7

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la $Oxyz$, on donne la surface quadrique définie par l'équation cartésienne suivante:

$$F(x, y, z) \equiv 9x^2 - 4y^2 - 36z^2 - 54x - 8y + 77 = 0 \tag{5.27}$$

On donne également l'équation cartésienne d'un plan:

$$3x + 2y - 5z + 2 = 0 \tag{5.28}$$

On demande:

1. d'identifier la quadrique définie par cette équation;
2. de donner ses équations paramétriques;
3. de donner la forme cartésienne de la courbe d'intersection entre la quadrique et le plan;
4. de donner la forme paramétrique de la courbe d'intersection entre la quadrique et le plan.

Réponses finales

- Idendifcation de la quadrique : cône à base elliptique d'axe Ox
- Équations paramétriques de la quadrique :

$$\begin{cases} x = 3 + 2u \\ y = -1 + 3u \sin v \\ z = u \cos v \end{cases}$$

- Équations cartésiennes de la courbe d'intersection :

$$\begin{cases} -\frac{(x-3)^2}{2^2} + \frac{(y+1)^2}{3^2} + z^2 = 0 \\ 3x + 2y - 5z + 2 = 0 \end{cases}$$

- Équations paramétriques de la courbe d'intersection :

$$\begin{cases} x = 3 + \frac{6}{5\cos v + 6\sin v + 6} \\ y = -1 + \frac{9\sin v}{5\cos v + 6\sin v + 6} \\ z = \frac{3\cos v}{5\cos v + 6\sin v + 6} \end{cases}$$

5.6.11 Janvier 2020 – Question 4

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on définit le paraboloïde elliptique d'équation cartésienne:

$$\frac{(x-3)^2}{2^2} + \frac{(y+1)^2}{3^2} - z = 0 \tag{5.29}$$

et le plan d'équation cartésienne:

$$2x + y - z + 4 = 0 \tag{5.30}$$

On demande d'établir les équations paramétriques de la courbe d'intersection entre ces deux surfaces et de donner le domaine de définition du paramètre retenu.

Réponses finales

Les équations paramétriques de la courbe peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{cases} x = 7 \pm \sqrt{\dfrac{529 - 4\left(\beta - 7/2\right)^2}{9}} \\ y = \beta \\ z = \pm 2\sqrt{\dfrac{529 - 4\left(\beta - 7/2\right)^2}{9}} + \beta + 18 \end{cases} \tag{5.31}$$

Le domaine de définition du paramètre β est tel que:

$$\begin{aligned} 529 - 4\left(\beta - 7/2\right)^2 \quad &\geq \quad 0 && (5.32)\\ 529 \quad &\geq \quad 4\left(\beta - 7/2\right)^2 && (5.33)\\ \left(\beta - 7/2\right)^2 \quad &\leq \quad \frac{529}{4} && (5.34)\\ |\beta - 7/2| \quad &\leq \quad \sqrt{\frac{529}{4}} && (5.35)\\ \to 7/2 - \sqrt{\frac{529}{4}} \quad &\leq \beta \leq \quad 7/2 + \sqrt{\frac{529}{4}} && (5.36) \end{aligned}$$

5.6.12 Janvier 2021 – Question 4

Énoncé

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère un ellipsoïde (S_1) et un paraboloïde hyperbolique (S_2) dont les équations sont données ci-dessous:

$$S_1 \equiv \begin{cases} x = 20 \cdot \cos(u) \cdot \cos(v) \\ y = 12 + 60 \cdot \cos(u) \cdot \sin(v) \\ z = 6 + 40 \cdot \sin(u) \end{cases} \qquad S_2 \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = 12 + \theta \\ z = 6 + 0,1(\alpha^2 - \theta^2) \end{cases}$$

On vous demande de:

1. déterminer les équations **paramétriques** de la courbe d'intersection entre les surfaces S_1 et S_2;
2. déterminer l'équation **cartésienne** du plan tangent à la surface S_1 en un point P de coordonnées (a, b, c).

Réponses finales

1. Les équations **paramétriques** de la courbe d'intersection entre les surfaces S_1 et S_2 ont pour expression :

$$S_1 \cap S_2 \equiv \begin{cases} x = 20 \cdot cos(arcsin(\dfrac{-1+\sqrt{1+4\cdot(cos^2(v)-9\cdot sin^2(v))^2}}{2\cdot(cos^2(v)-9\cdot sin^2(v))})) \cdot cos(v) \\ y = 12 + 60 \cdot cos(arcsin(\dfrac{-1+\sqrt{1+4\cdot(cos^2(v)-9\cdot sin^2(v))^2}}{2\cdot(cos^2(v)-9\cdot sin^2(v))})) \cdot sin(v) \\ z = 6 + 40 \cdot (\dfrac{-1+\sqrt{1+4\cdot(cos^2(v)-9\cdot sin^2(v))^2}}{2\cdot(cos^2(v)-9\cdot sin^2(v))}) \end{cases}$$

2. L'équation **cartésienne** du plan tangent à la surface S_1 au point P de coordonnées (a, b, c) est donnée par :

$$\pi \equiv \frac{2(a-0)}{20^2} \cdot (x-a) + \frac{2(b-12)}{60^2} \cdot (y-b) + \frac{2(c-6)}{40^2} \cdot (z-c) = 0$$

5.6.13 Janvier 2022 – Question 5

On donne les équations paramétriques de deux surfaces S_1 (cylindre à base circulaire) et S_2 (conoïde de Plucker):

$$S_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\cos\theta \\ y = \kappa & \kappa \in \mathbb{R}, 0 \leq \theta < 2\pi \\ z = 2 + 2\sin\theta \end{cases}$$

$$S_2 \equiv \begin{cases} x = 1 + u\cos\nu \\ y = \cos(2v) & u \in \mathbb{R}, 0 \leq v < 2\pi \\ z = 2 + u\sin\nu \end{cases}$$

On demande de déterminer :

1. les équations cartésiennes de la courbe d'intersection entre ces deux surfaces;
2. les équations paramétriques de la courbe d'intersection entre ces deux surfaces;
3. si la courbe d'intersection est une courbe plane (à partir des équations cartésiennes ou paramétriques déterminées ci-dessus) et, si c'est le cas, de donner l'équation cartésienne du plan contenant cette courbe d'intersection.

Réponses finales

1. les équations cartésiennes de la courbe d'intersection entre ces deux surfaces ont pour expression :

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (z-2)^2 - 4 = 0 \\ y = \dfrac{(x-1)^2 - (z-2)^2}{(x-1)^2 + (z-2)^2} \end{cases}$$

2. les équations paramétriques de la courbe d'intersection entre ces deux surfaces ont pour expression :

$$\begin{cases} x = 1 + 2\cos\theta \\ y = \cos 2v & 0 \leq v < 2\pi \\ z = 2 + 2\sin\theta \end{cases}$$

3. La courbe d'intersection n'est pas une courbe plane.

5.6.14 Janvier 2023 – Question 5

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ rapporté à la base orthonormée Oxyz, on considère deux surfaces avec pour équations les expressions suivantes :

$$S_1(x,y,z) \equiv \frac{x^2}{15^2} + \frac{(y-12)^2}{15^2} - z - 10 = 0$$

$$S_2(x,y,z) \equiv \begin{cases} x = 0 + 2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \cos(\theta) \\ y = 12 + 2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \sin(\theta) \\ z = 6 - \alpha \end{cases} \quad \text{avec } \theta \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}$$

On demande de :

1. trouver la forme paramétrique canonique de la surface S_1;
2. préciser le type des surfaces S_1 et S_2 (ellipsoïde, cône à base elliptique, ...) ;
3. établir les équations **paramétriques** de la courbe d'intersection entre S_1 et S_2.

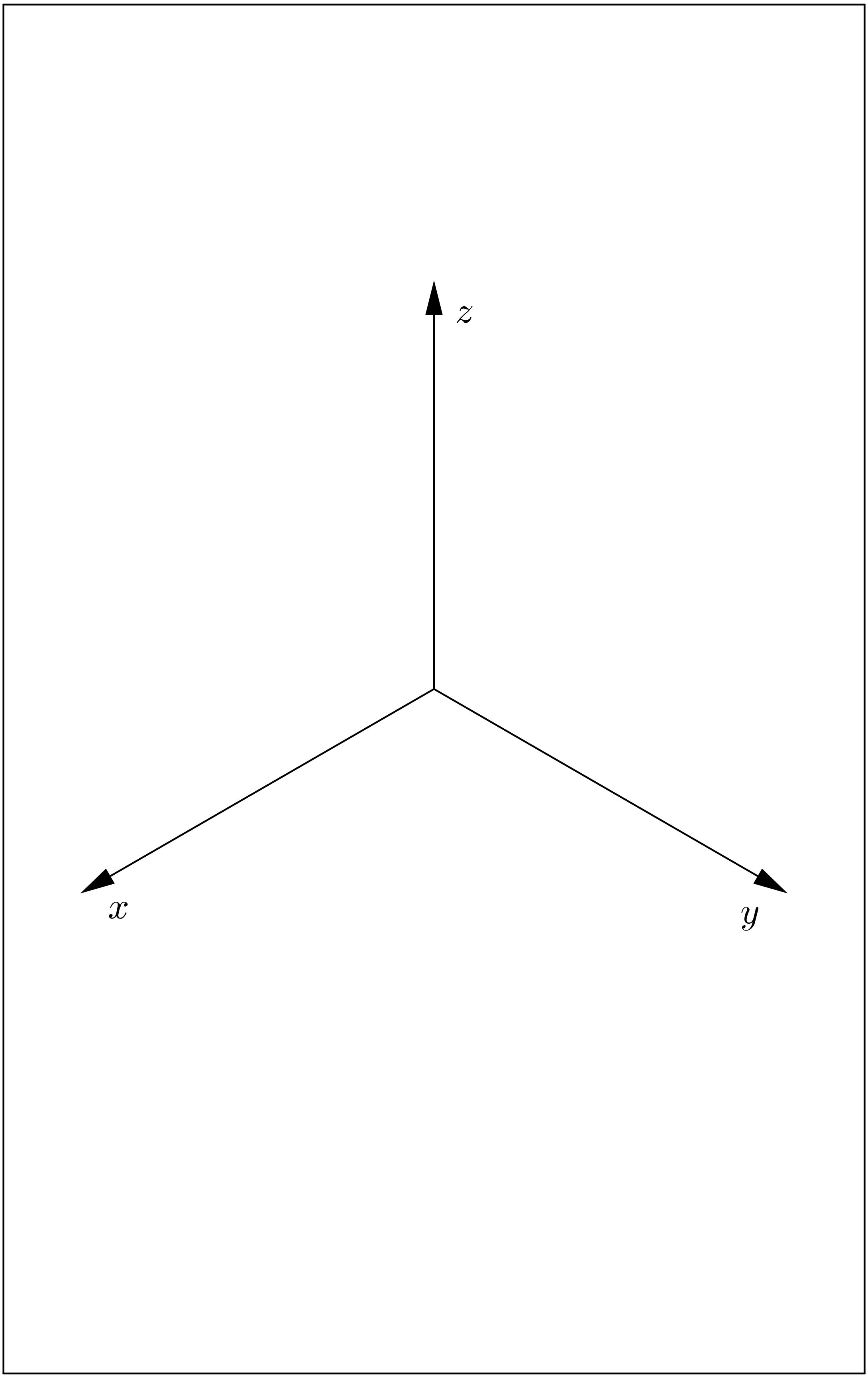


FIGURE 5.4 – Isométrie vierge – axes de référence

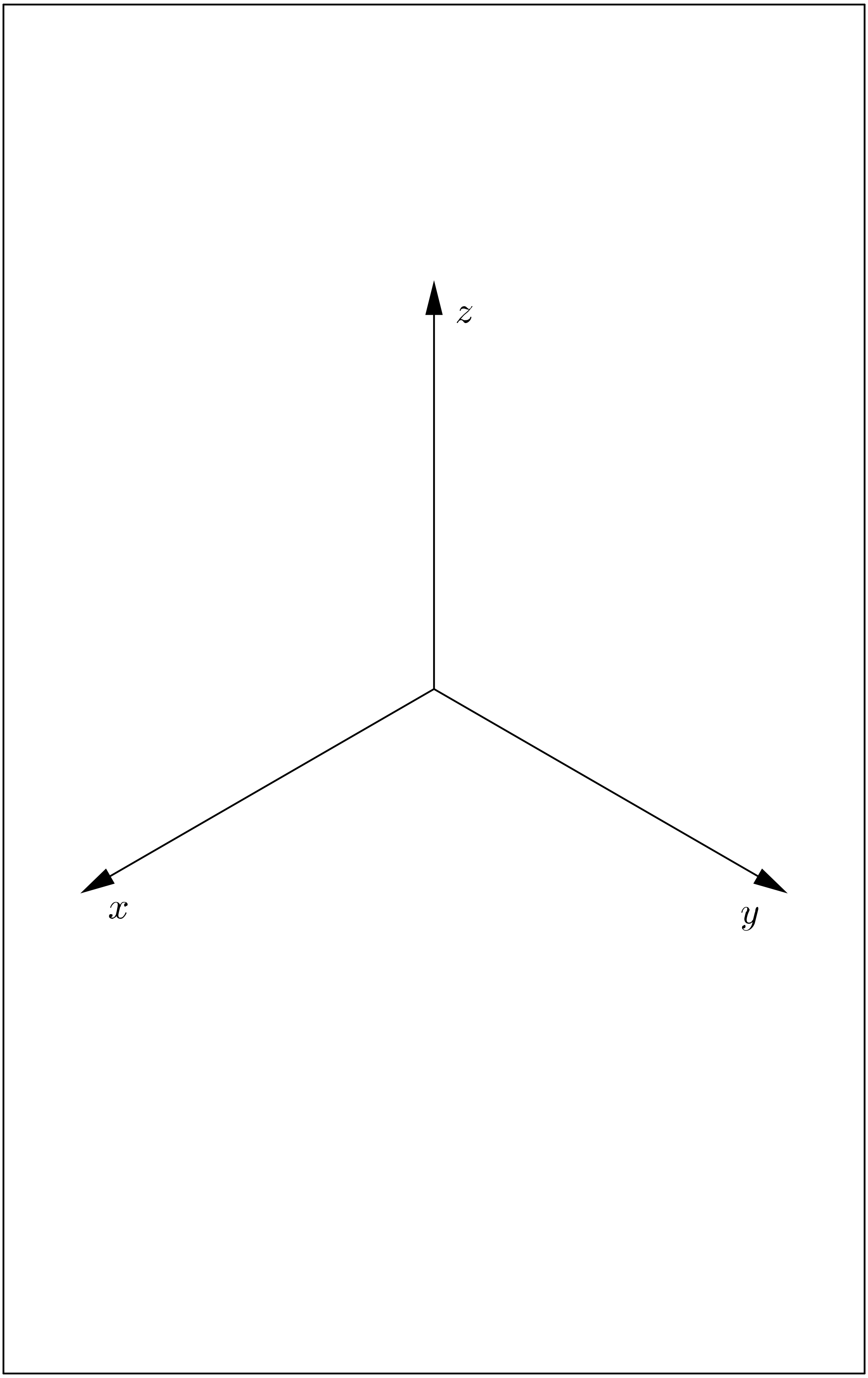


FIGURE 5.5 – Isométrie vierge – axes de référence

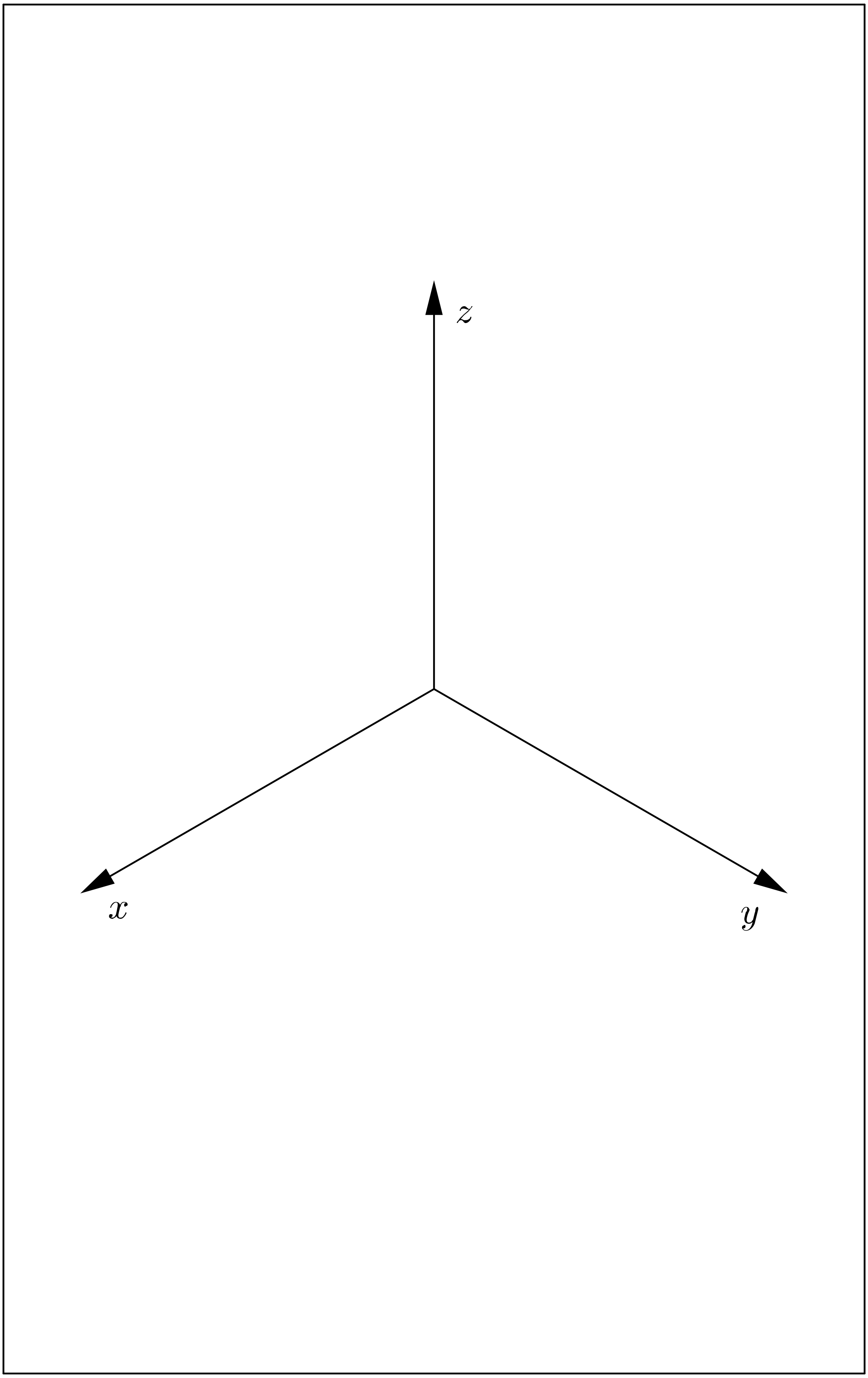


FIGURE 5.6 – Isométrie vierge – axes de référence

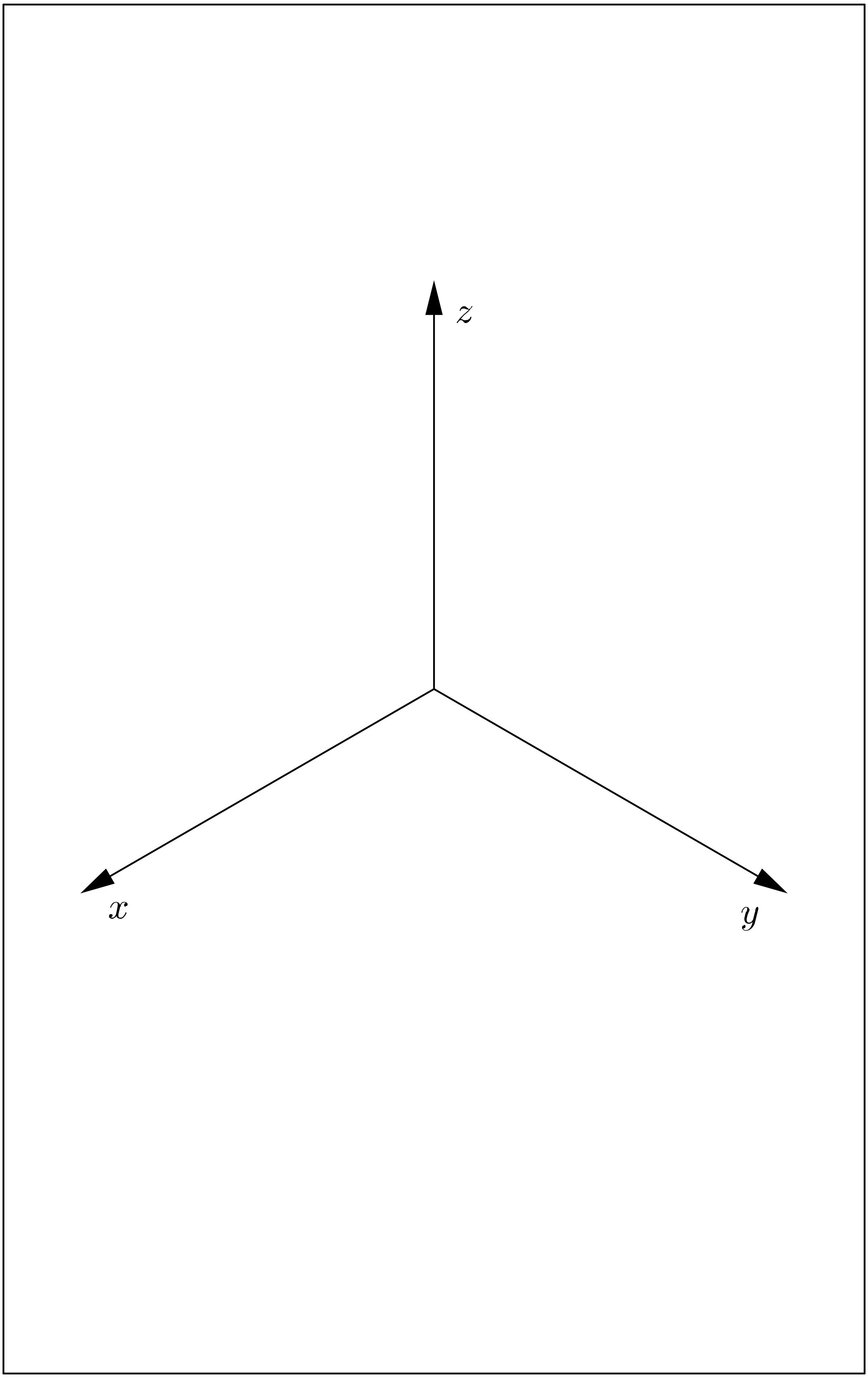


FIGURE 5.7 – Isométrie vierge – axes de référence

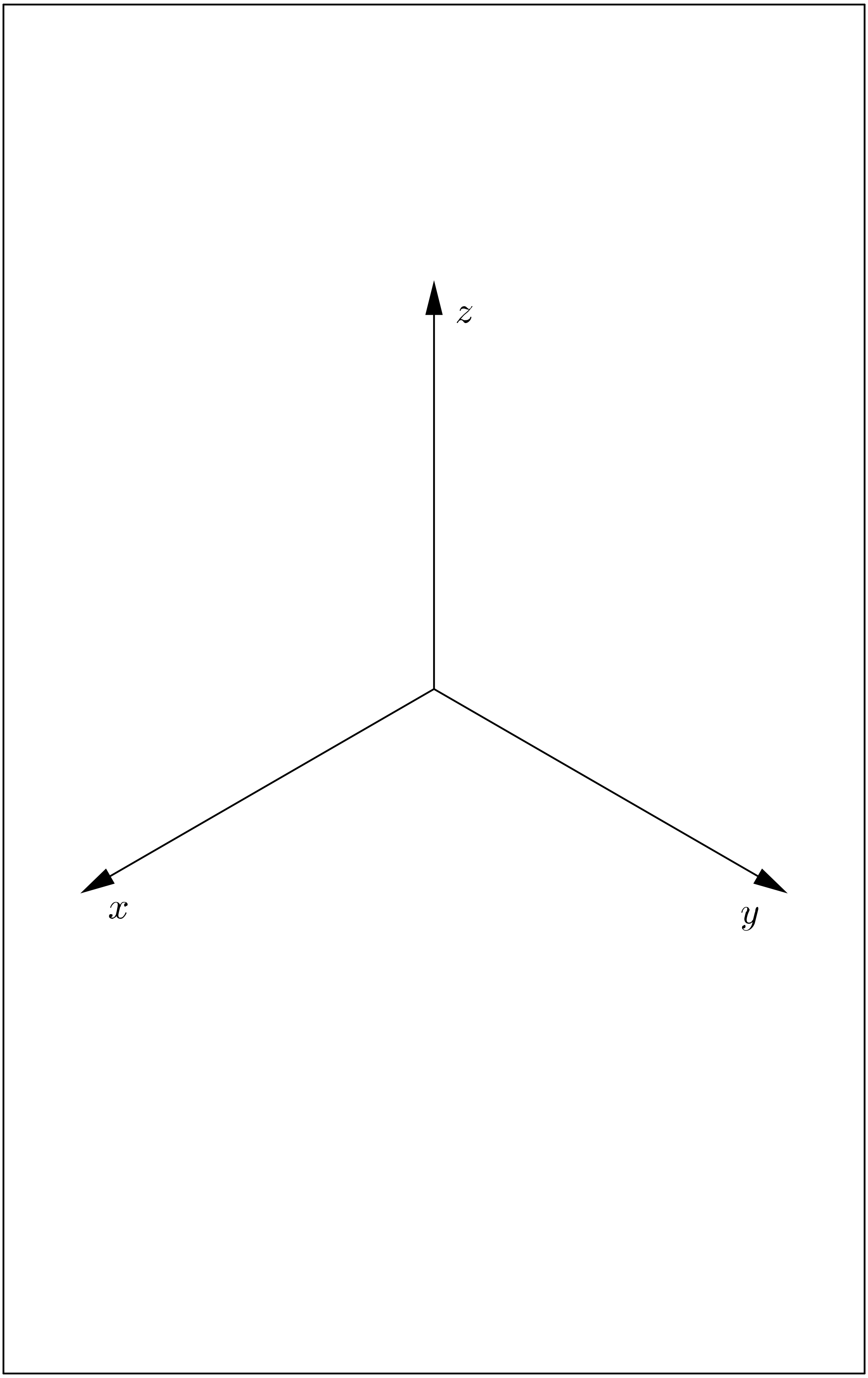


FIGURE 5.8 – Isométrie vierge – axes de référence

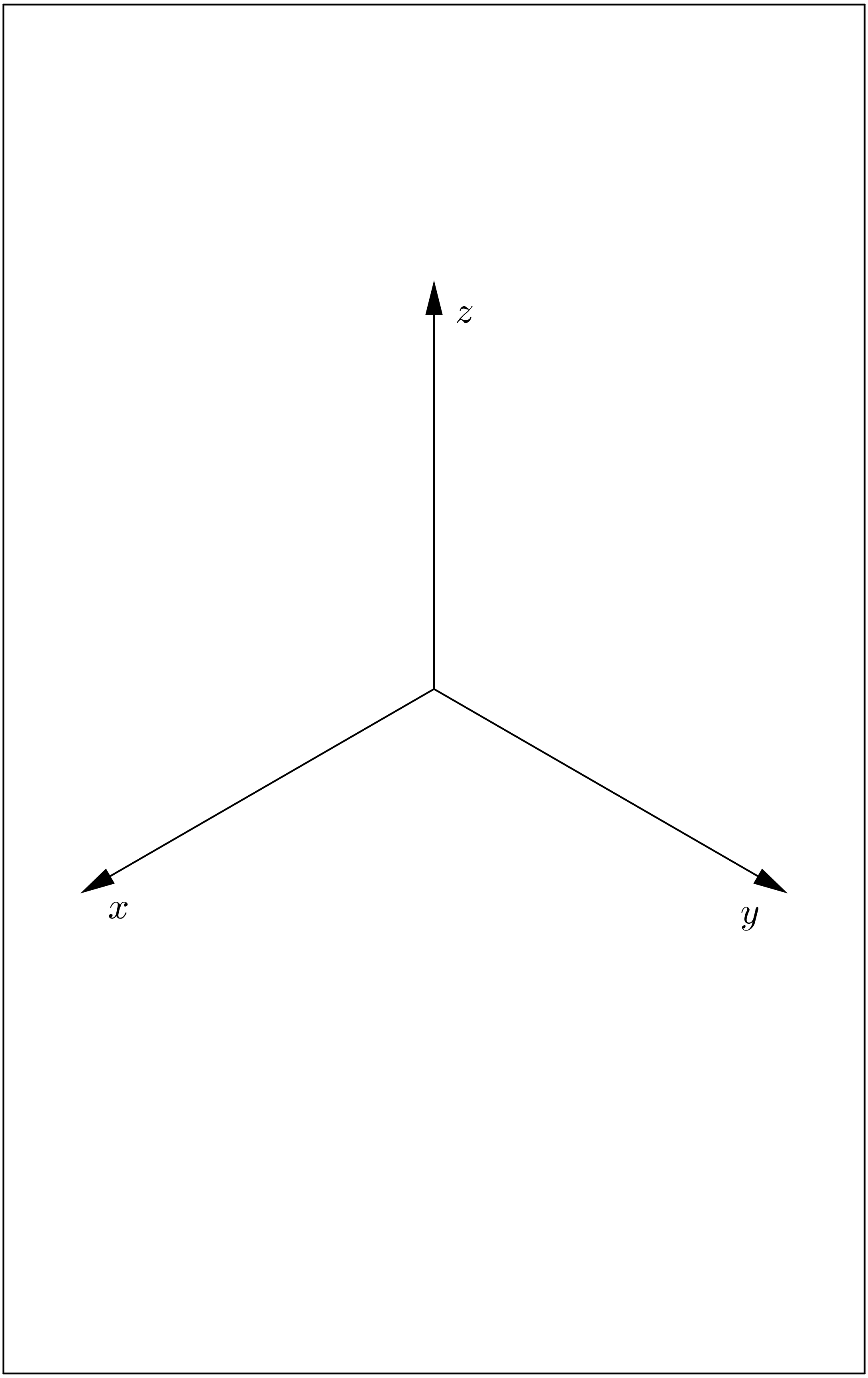


FIGURE 5.9 – Isométrie vierge – axes de référence

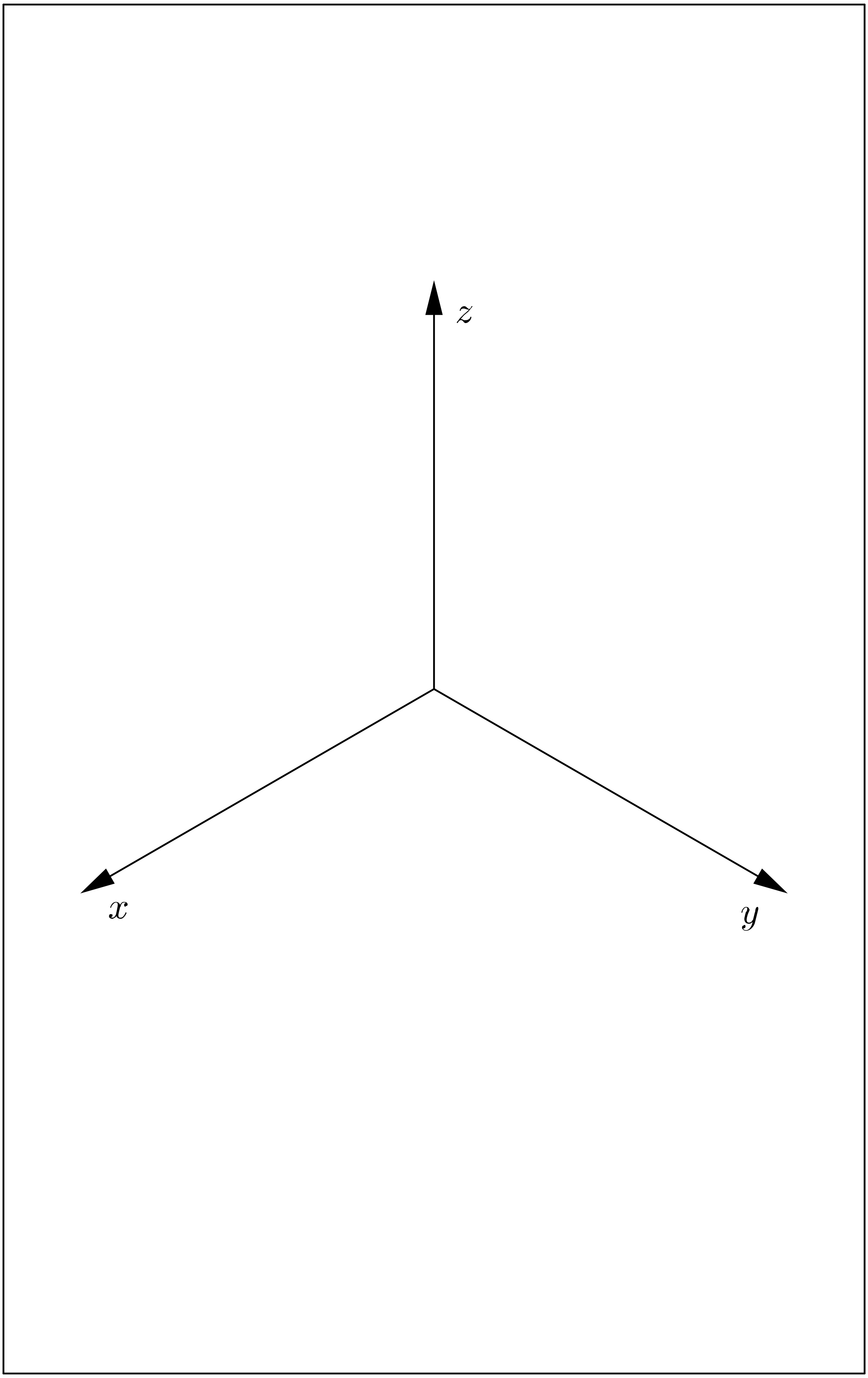


FIGURE 5.10 – Isométrie vierge – axes de référence

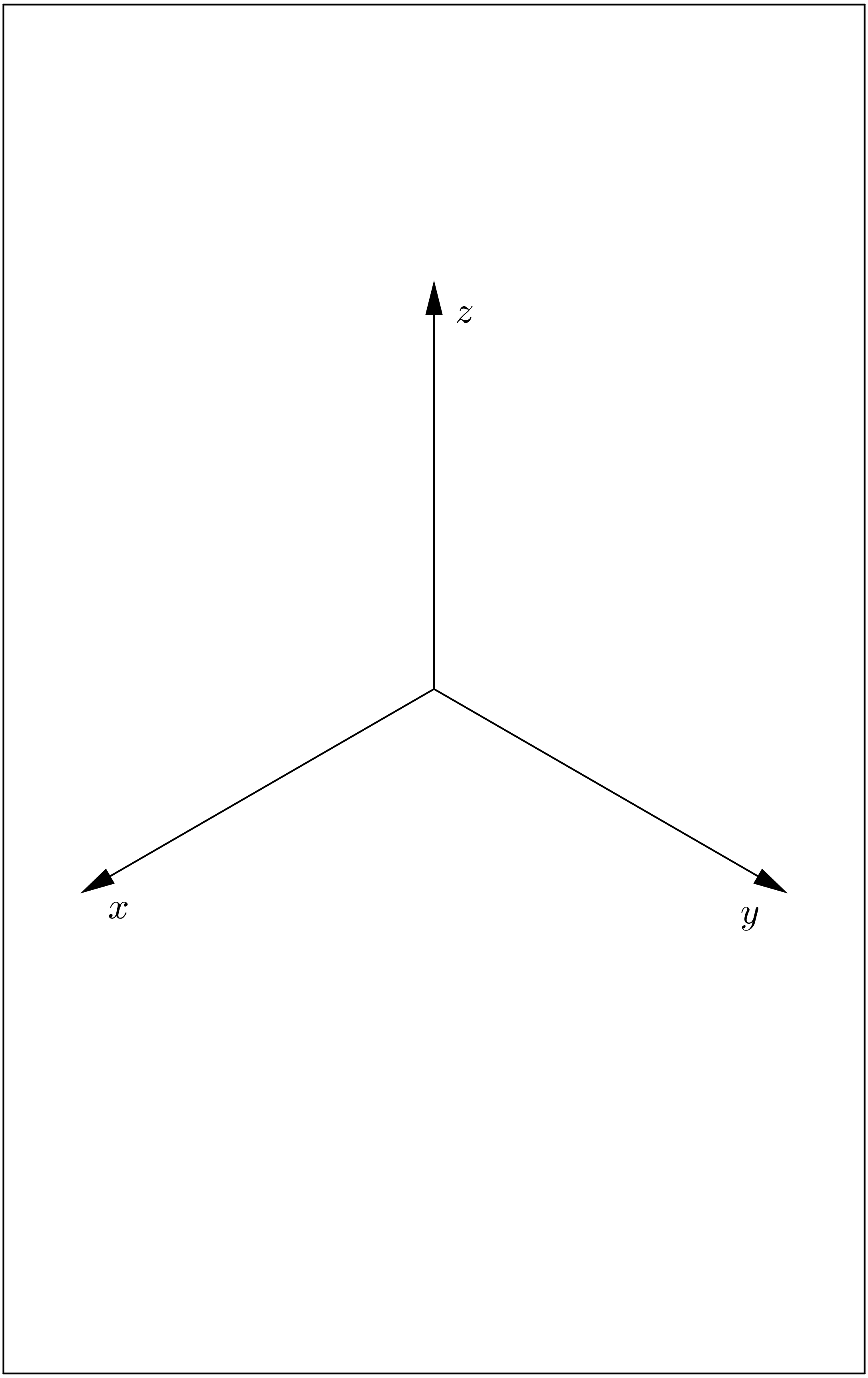


FIGURE 5.11 – Isométrie vierge – axes de référence

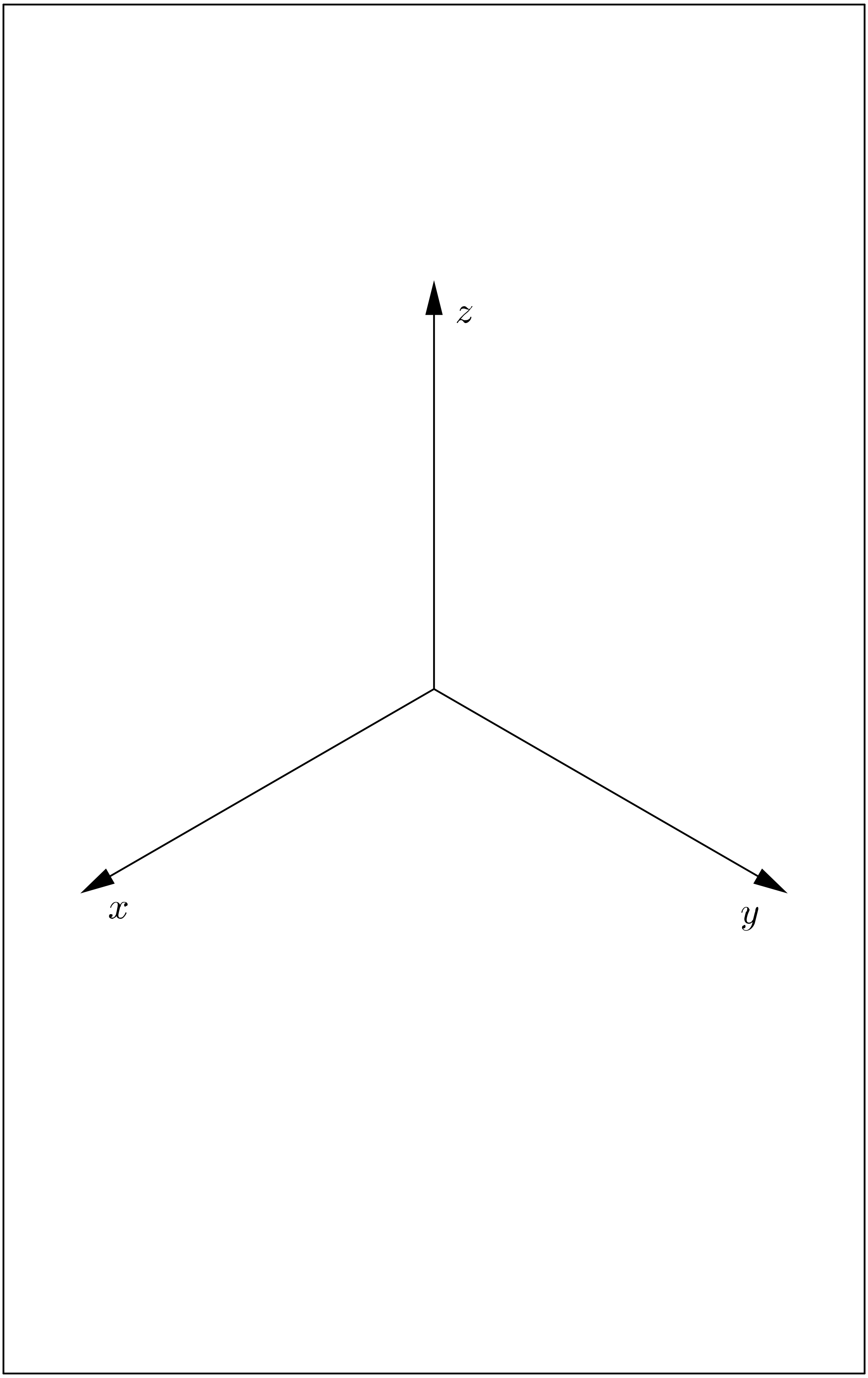


FIGURE 5.12 – Isométrie vierge – axes de référence

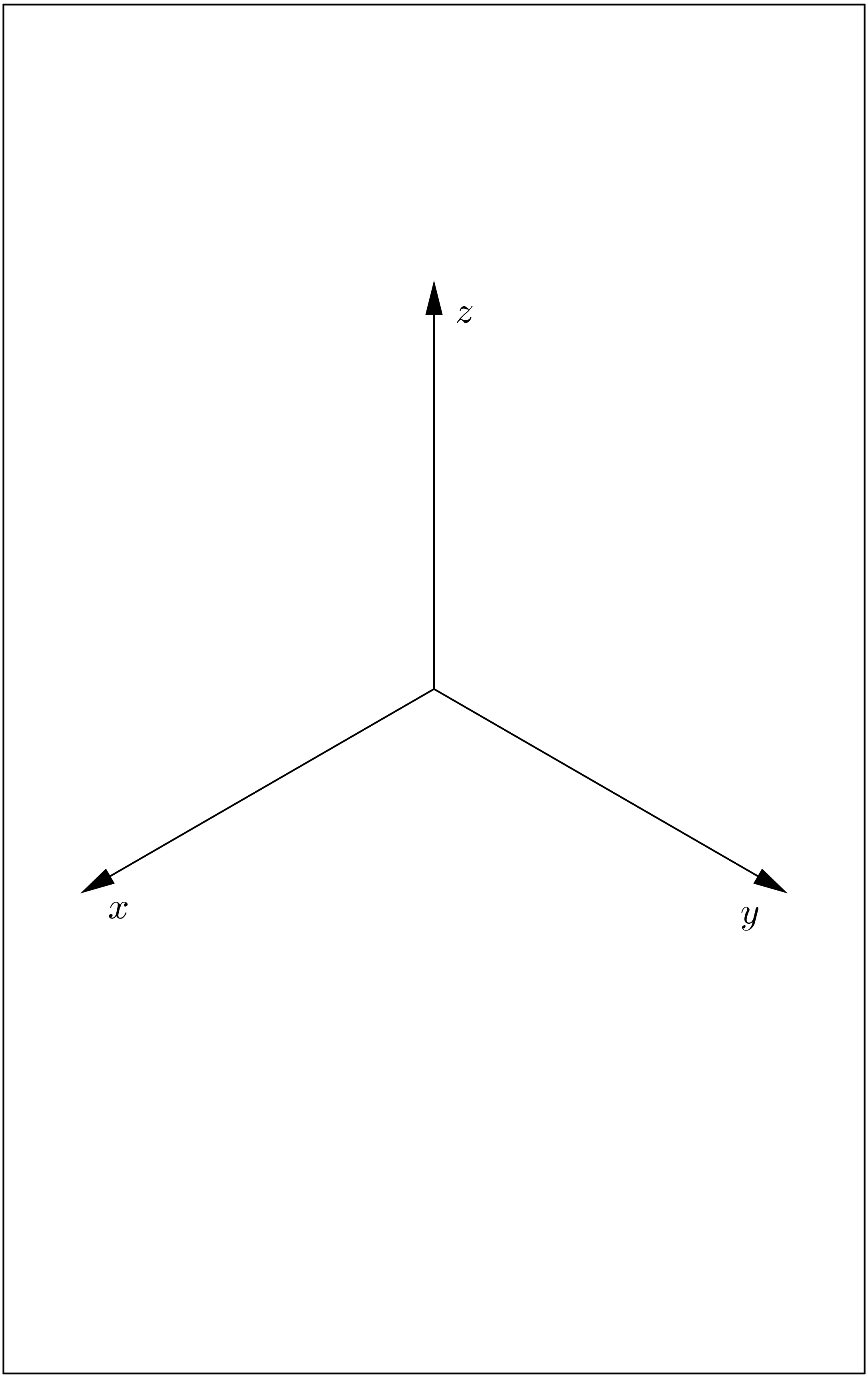


FIGURE 5.13 – Isométrie vierge – axes de référence

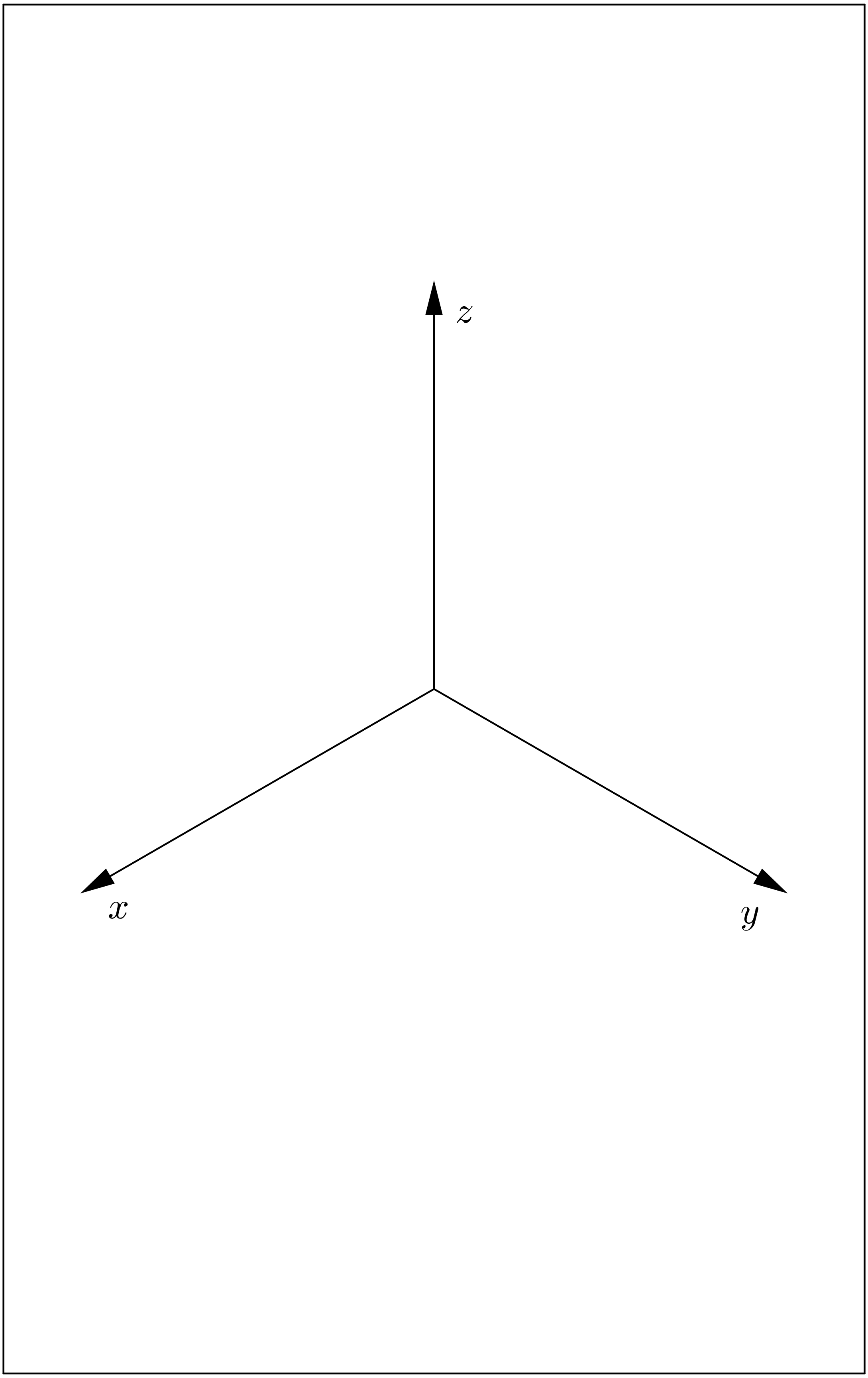


FIGURE 5.14 – Isométrie vierge – axes de référence

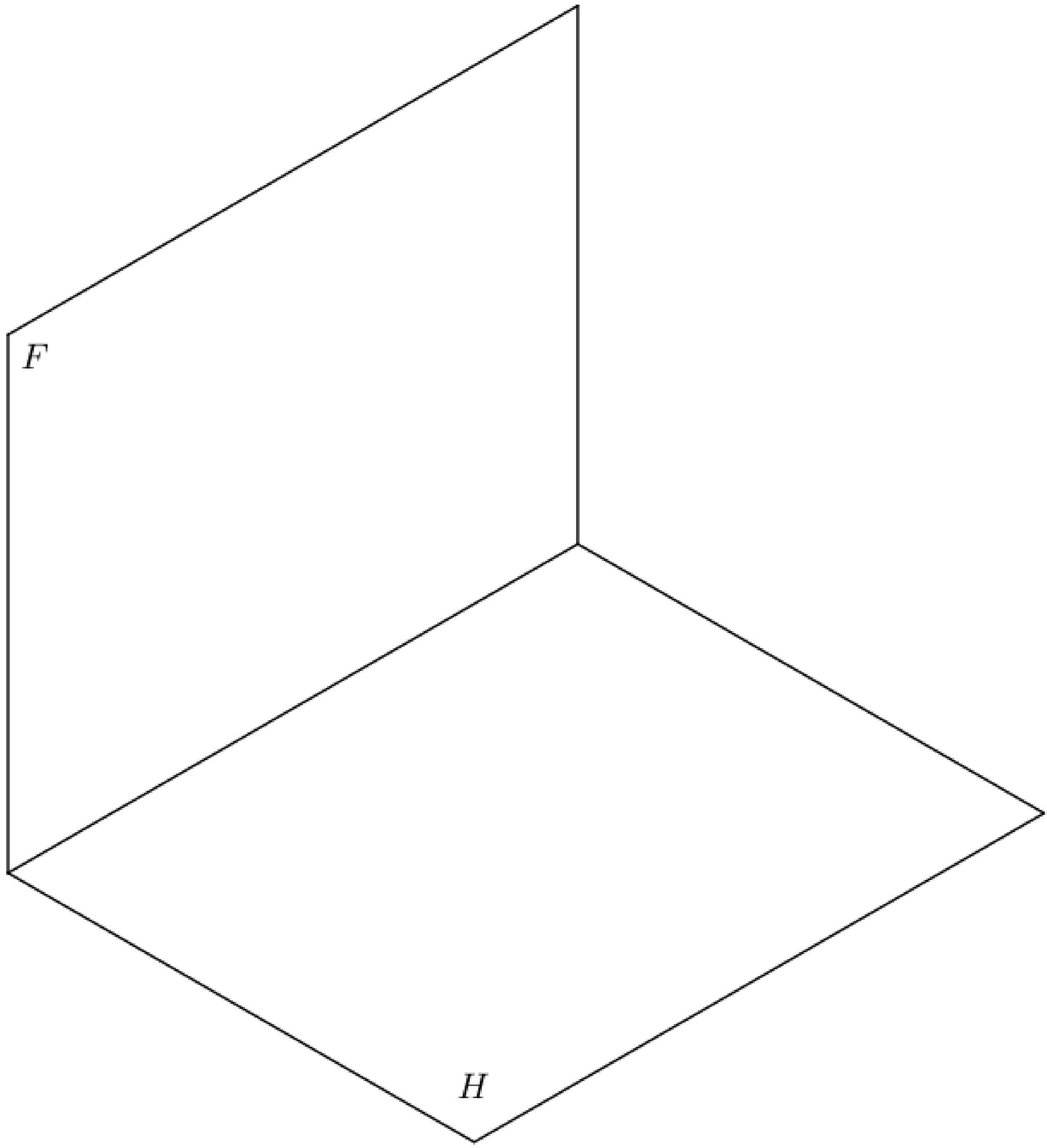


FIGURE 5.15 – Isométrie vierge – Monge

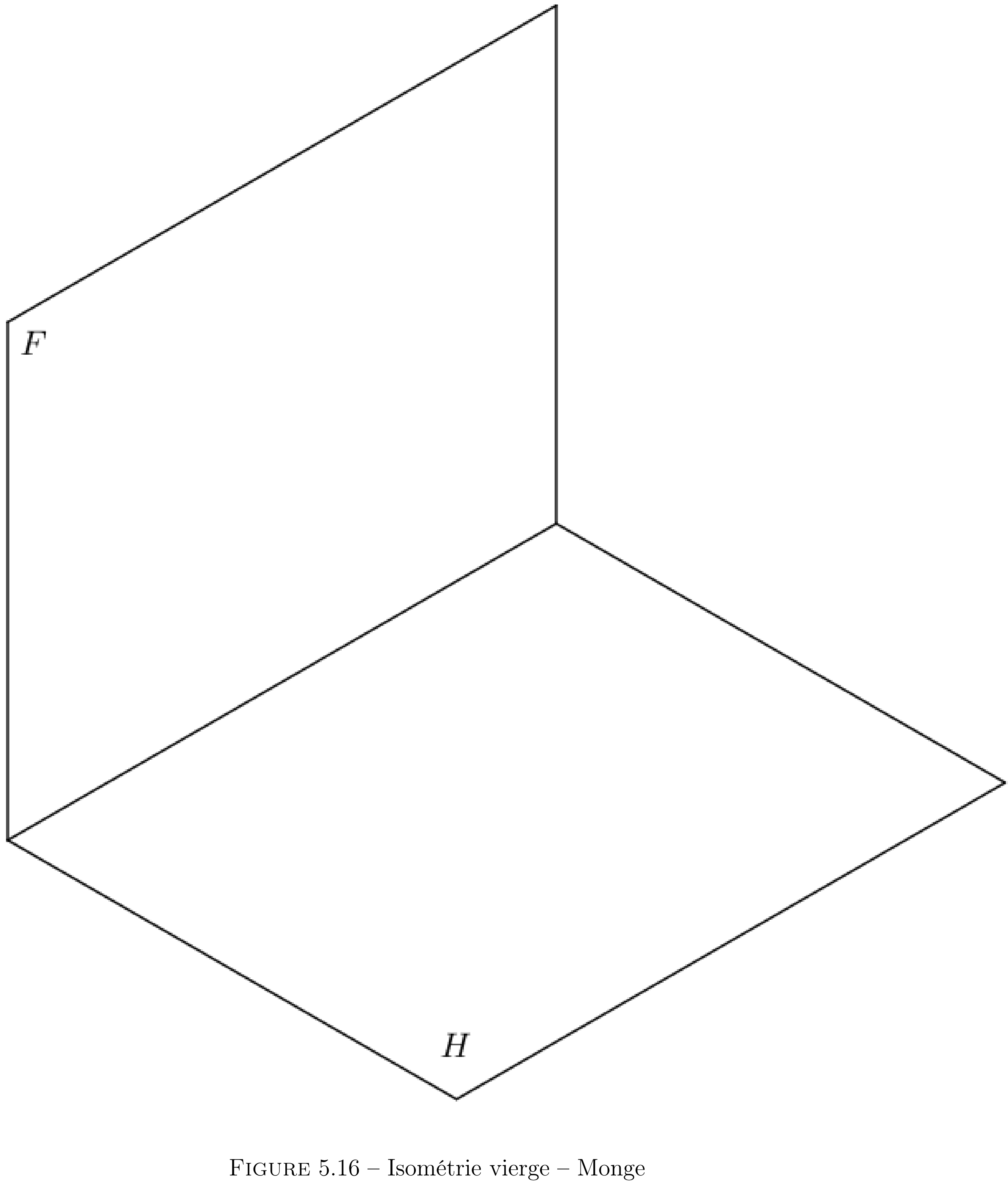


FIGURE 5.16 – Isométrie vierge – Monge

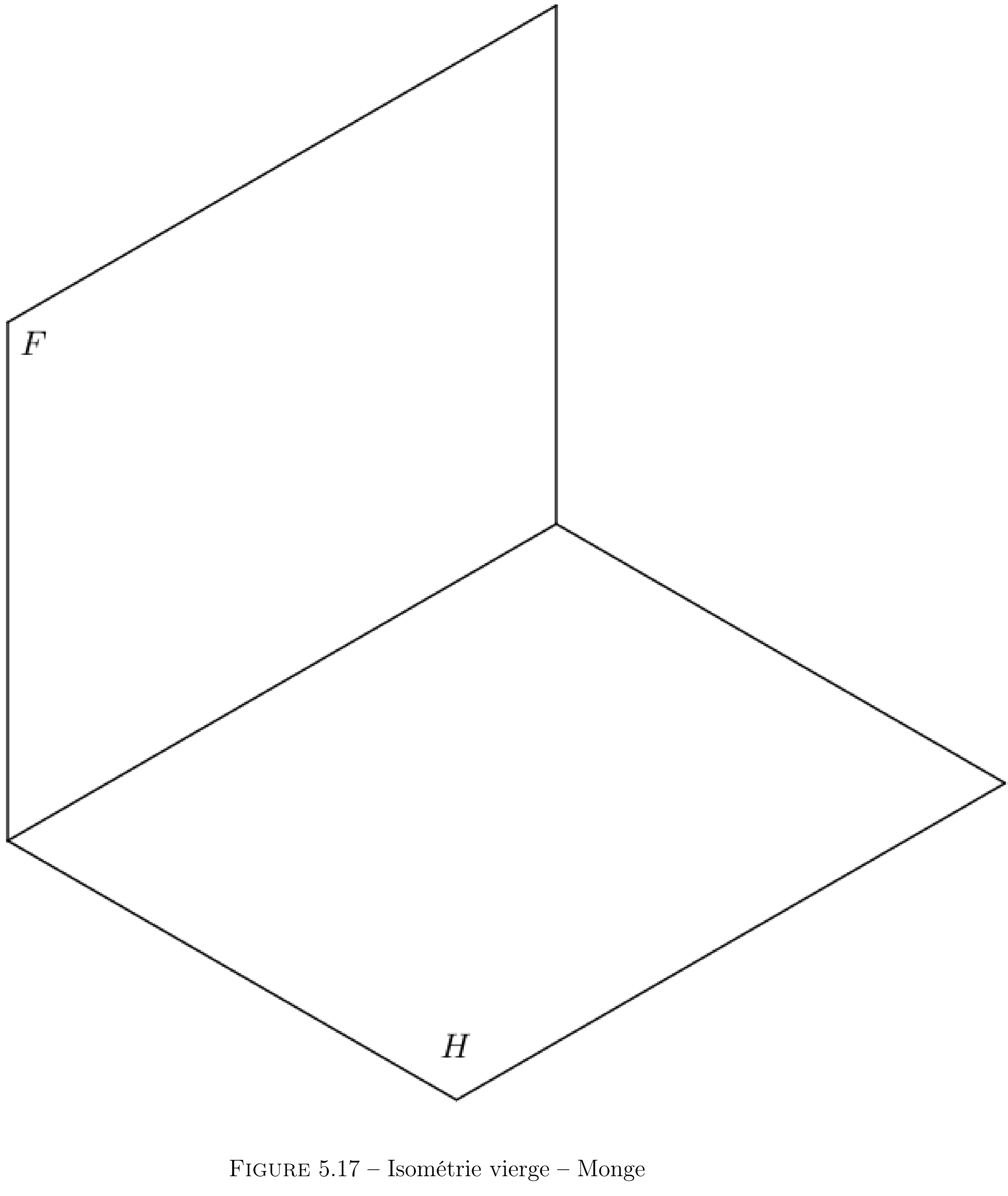


FIGURE 5.17 – Isométrie vierge – Monge

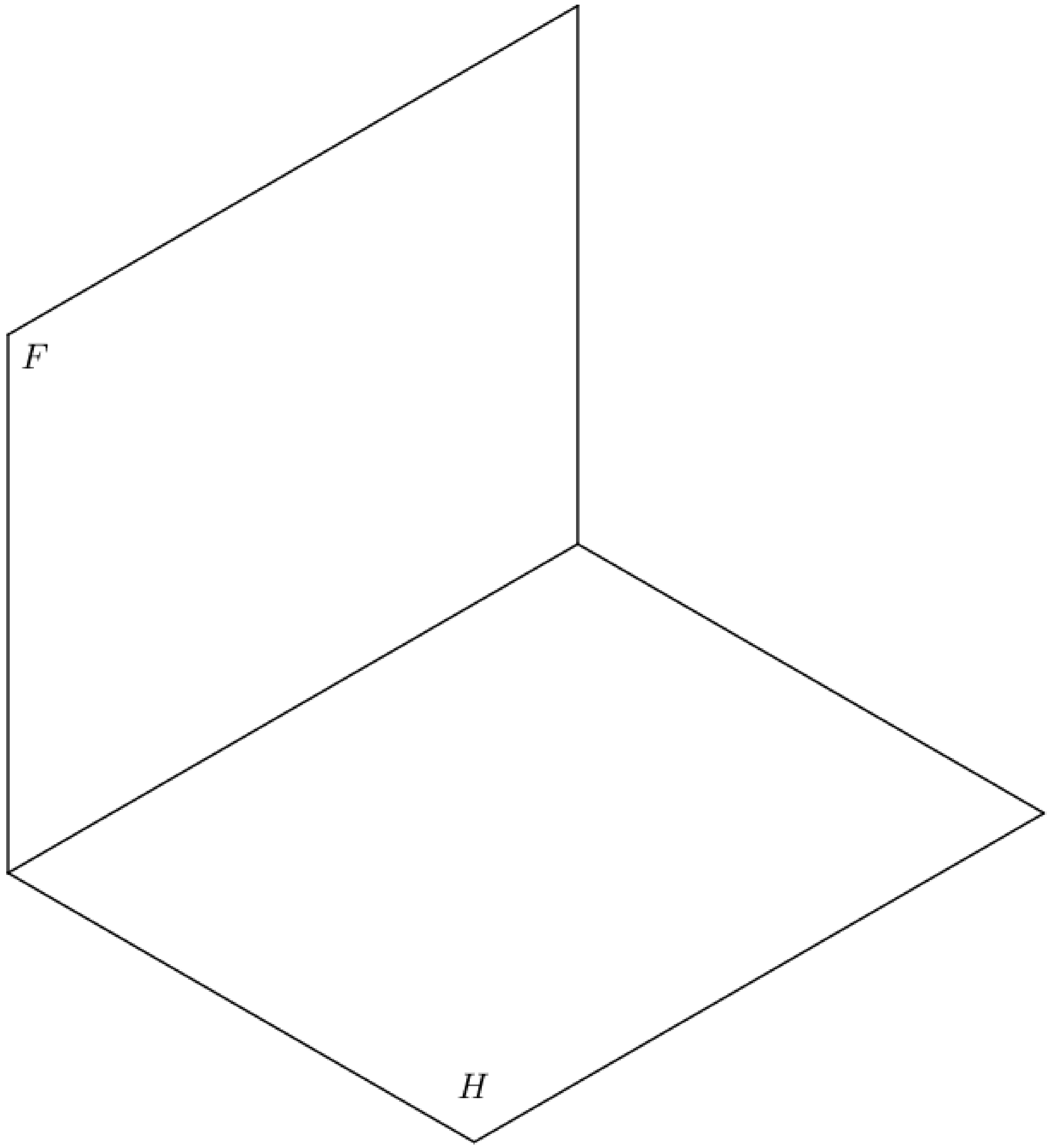


FIGURE 5.18 – Isométrie vierge – Monge

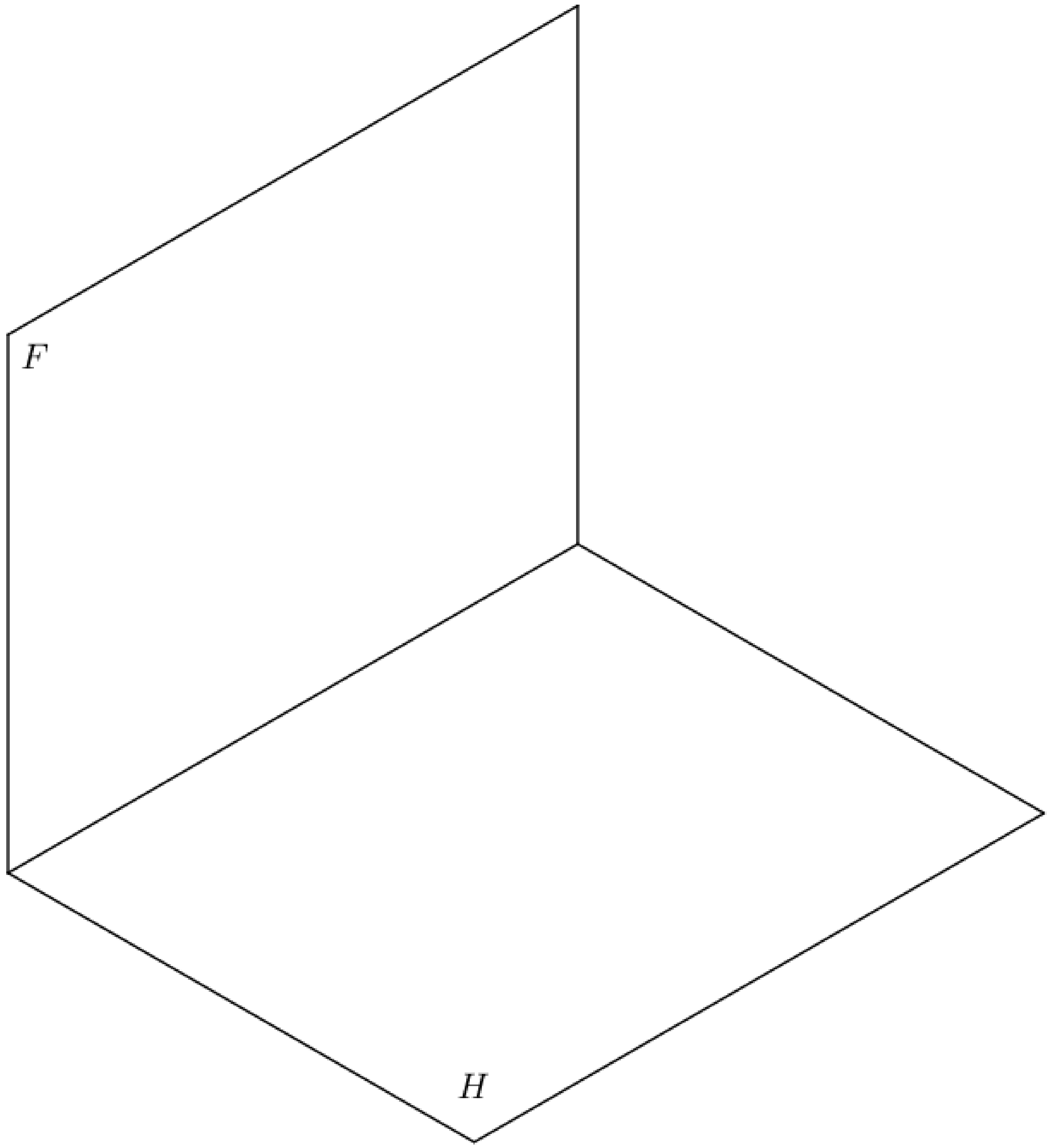


FIGURE 5.19 – Isométrie vierge – Monge

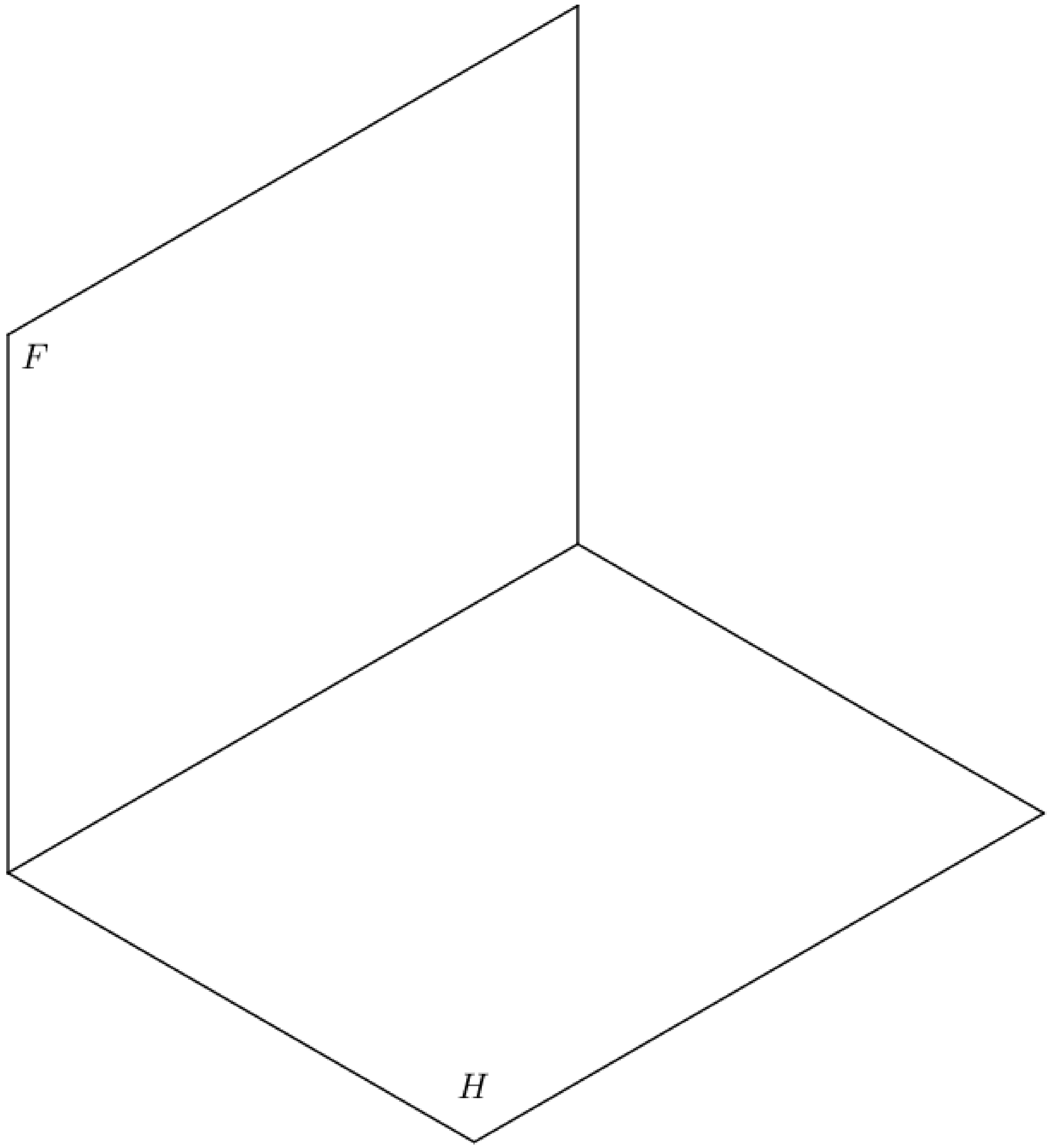


Figure 5.20 – Isométrie vierge – Monge

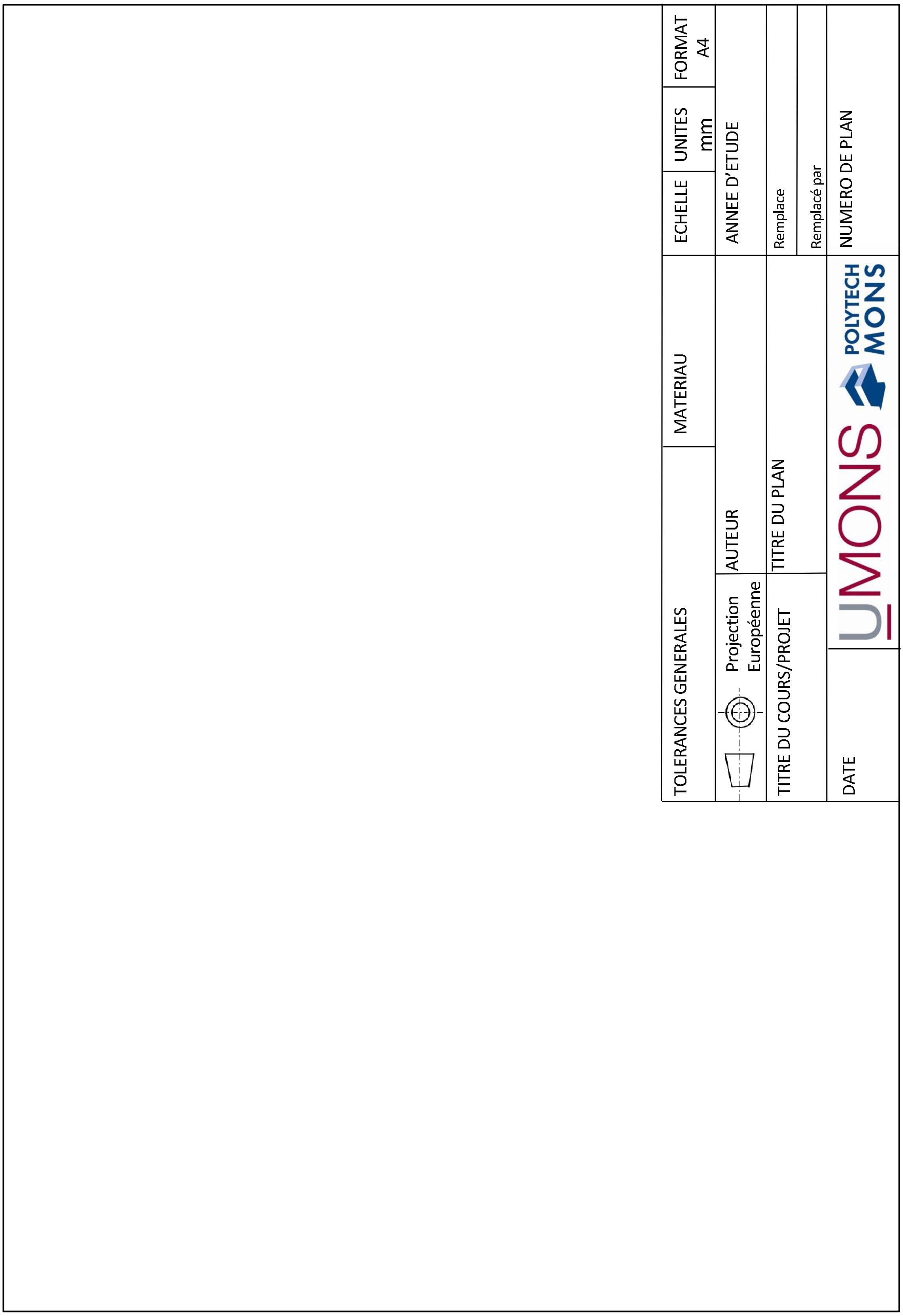


FIGURE 5.21 – Cartouche Vide – Paysage

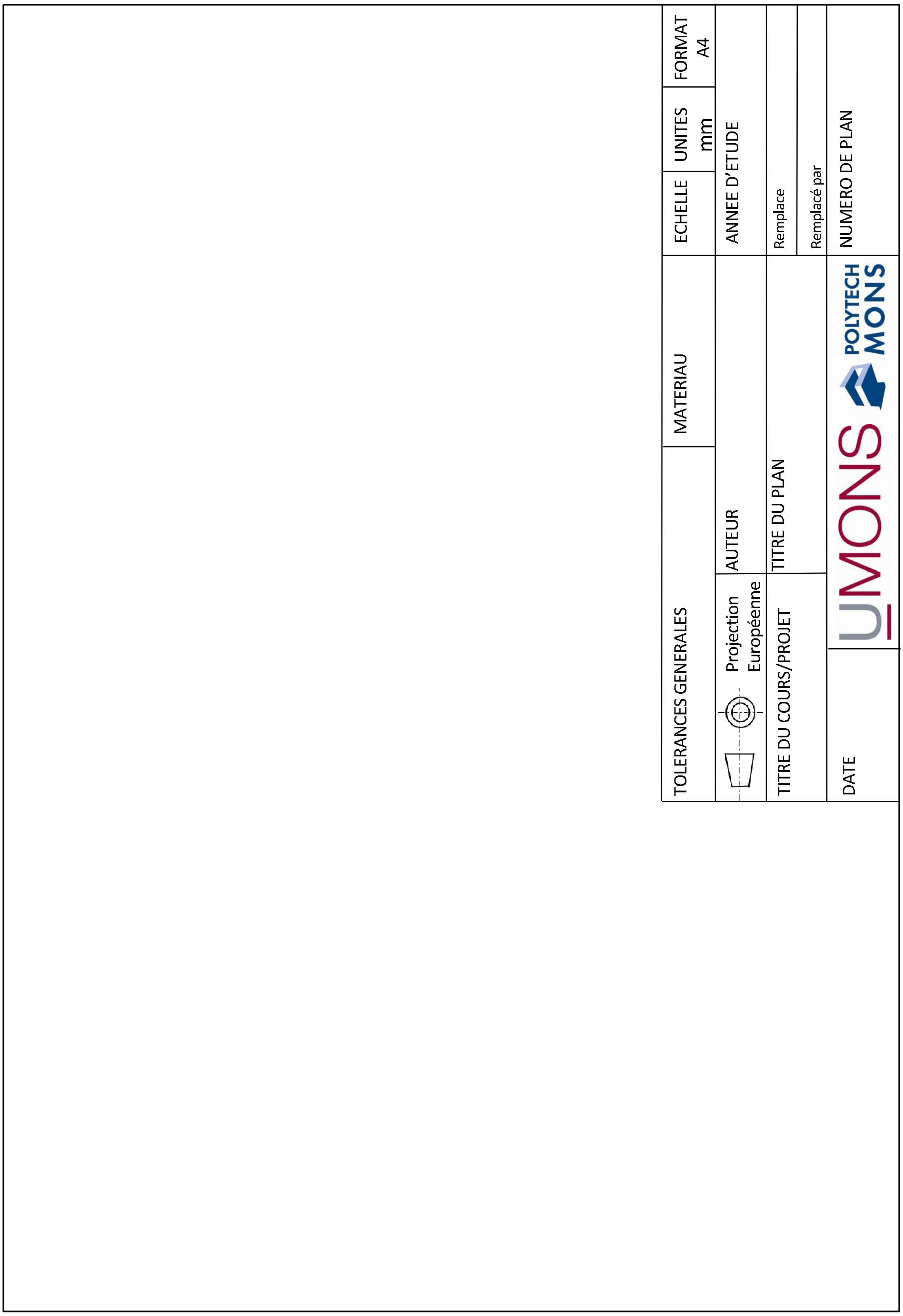


Figure 5.22 – Cartouche Vide – Paysage

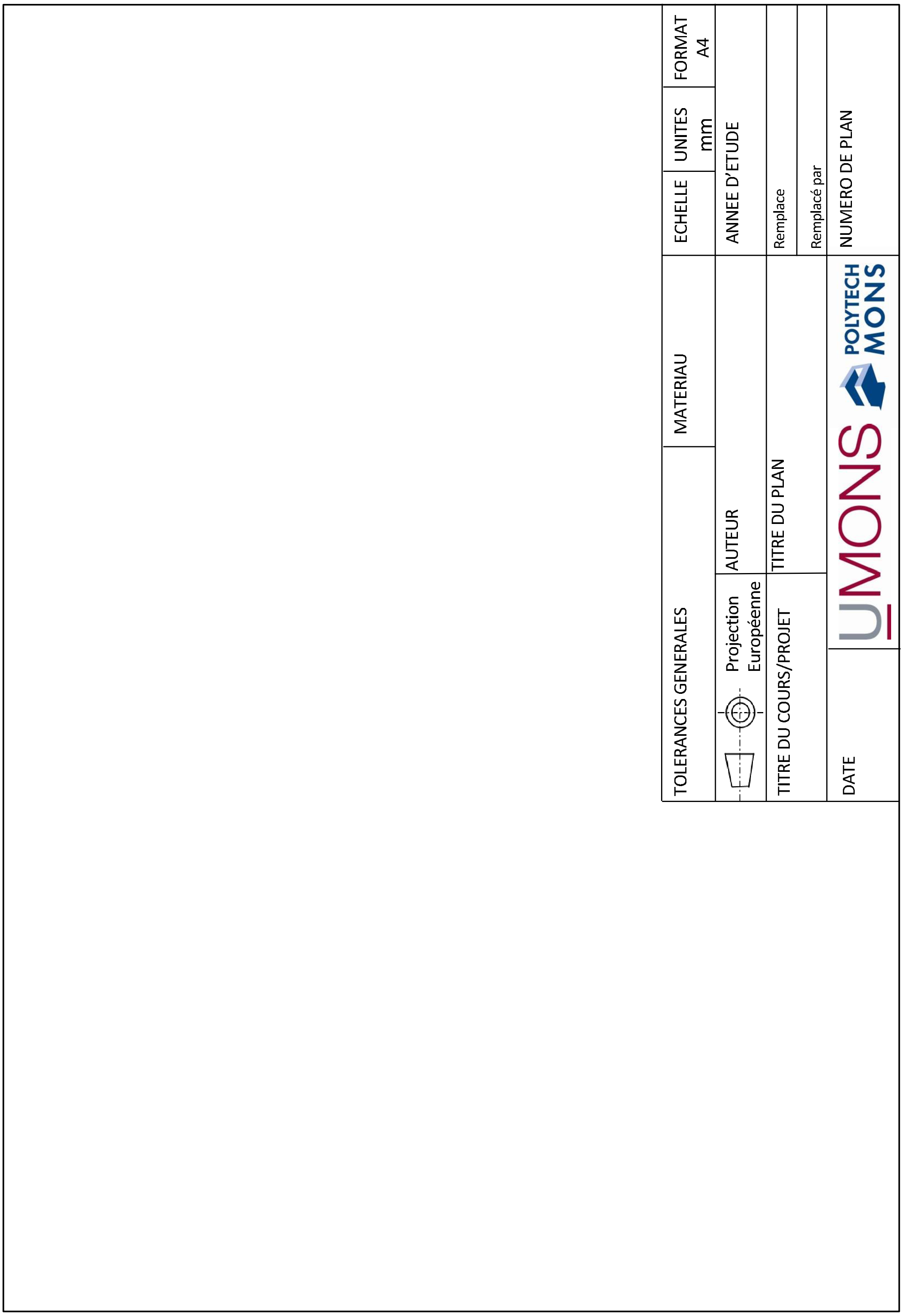


FIGURE 5.23 – Cartouche Vide – Paysage

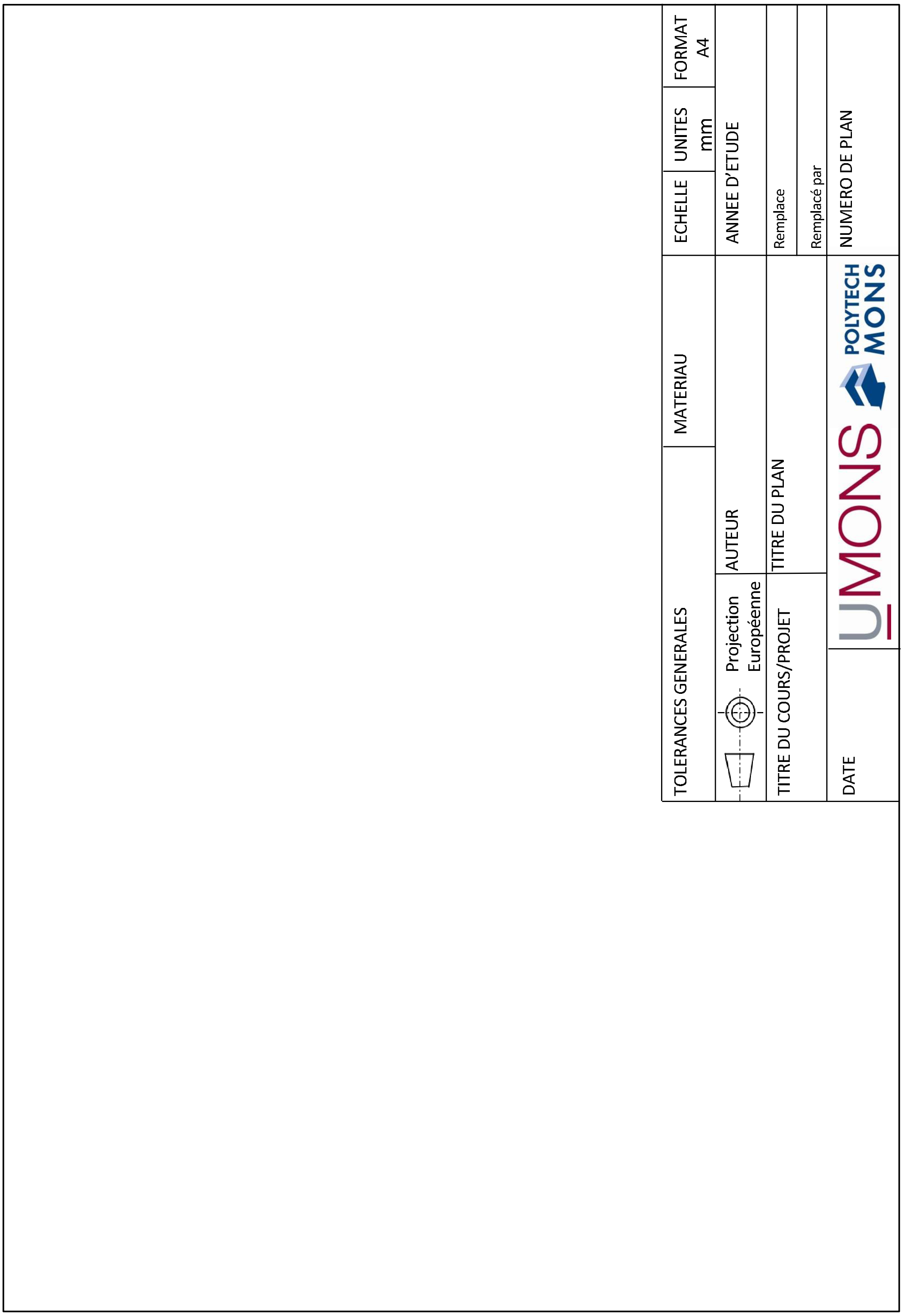


FIGURE 5.24 – Cartouche Vide – Paysage

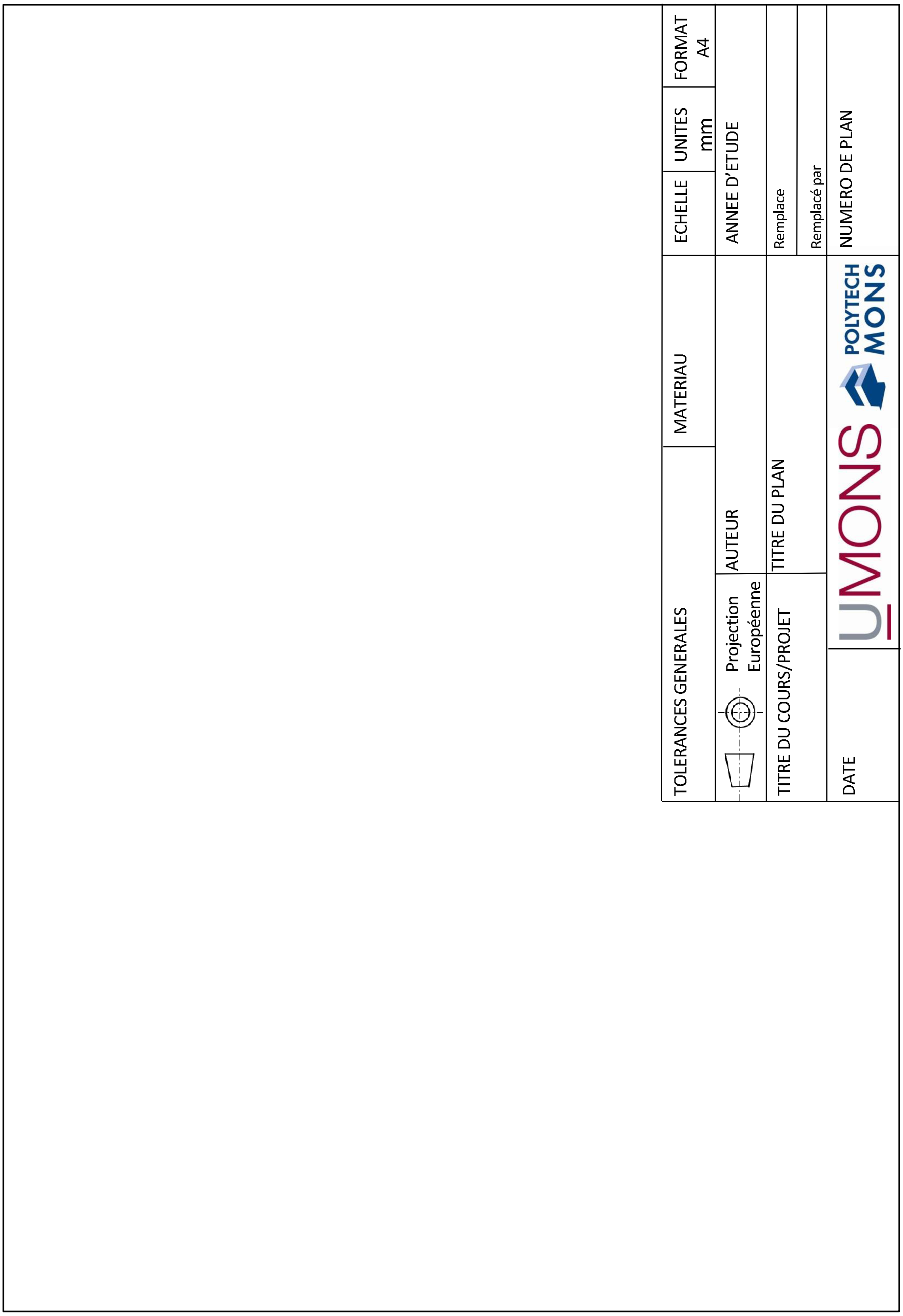


FIGURE 5.25 – Cartouche Vide – Paysage

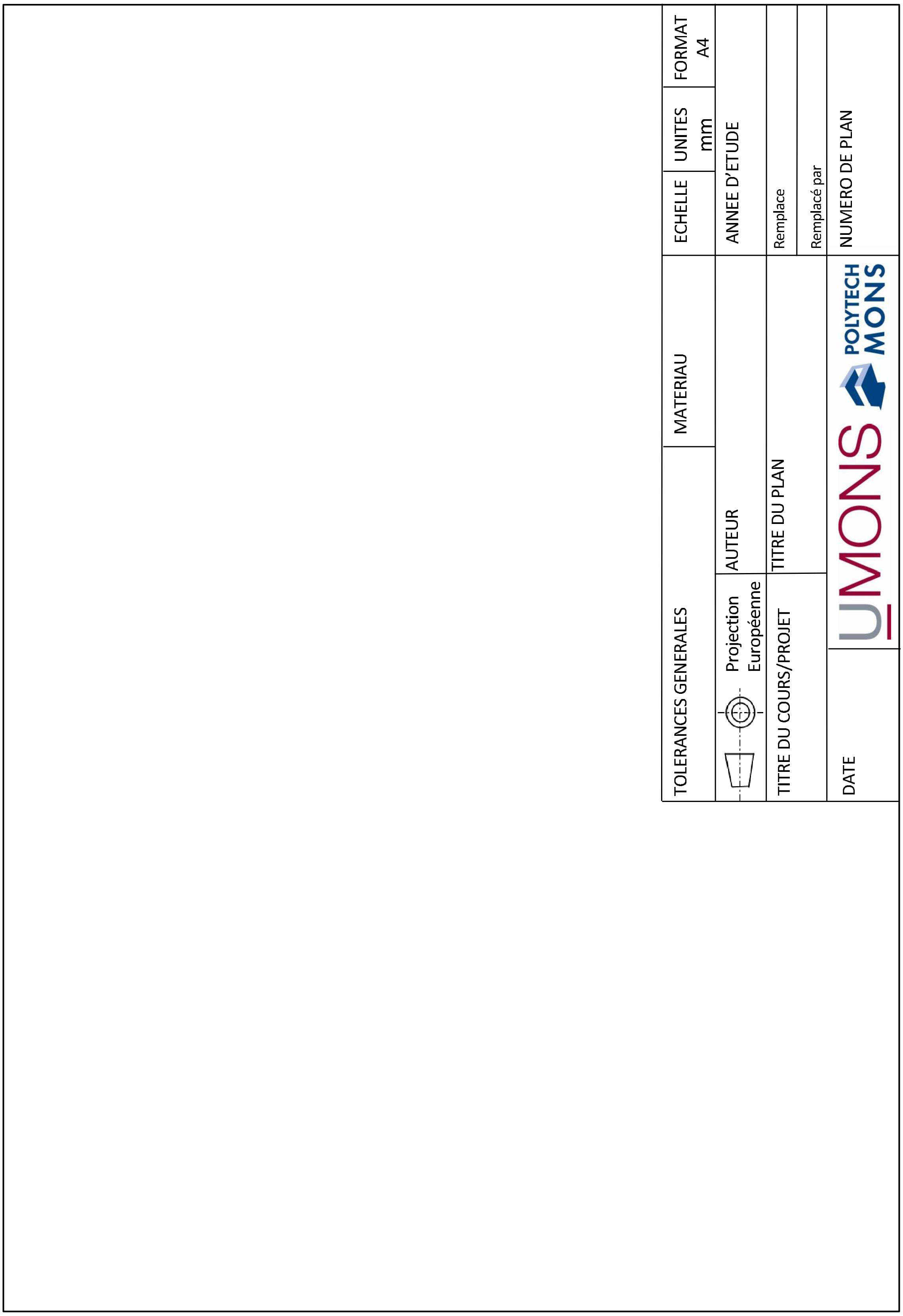


FIGURE 5.26 – Cartouche Vide – Paysage

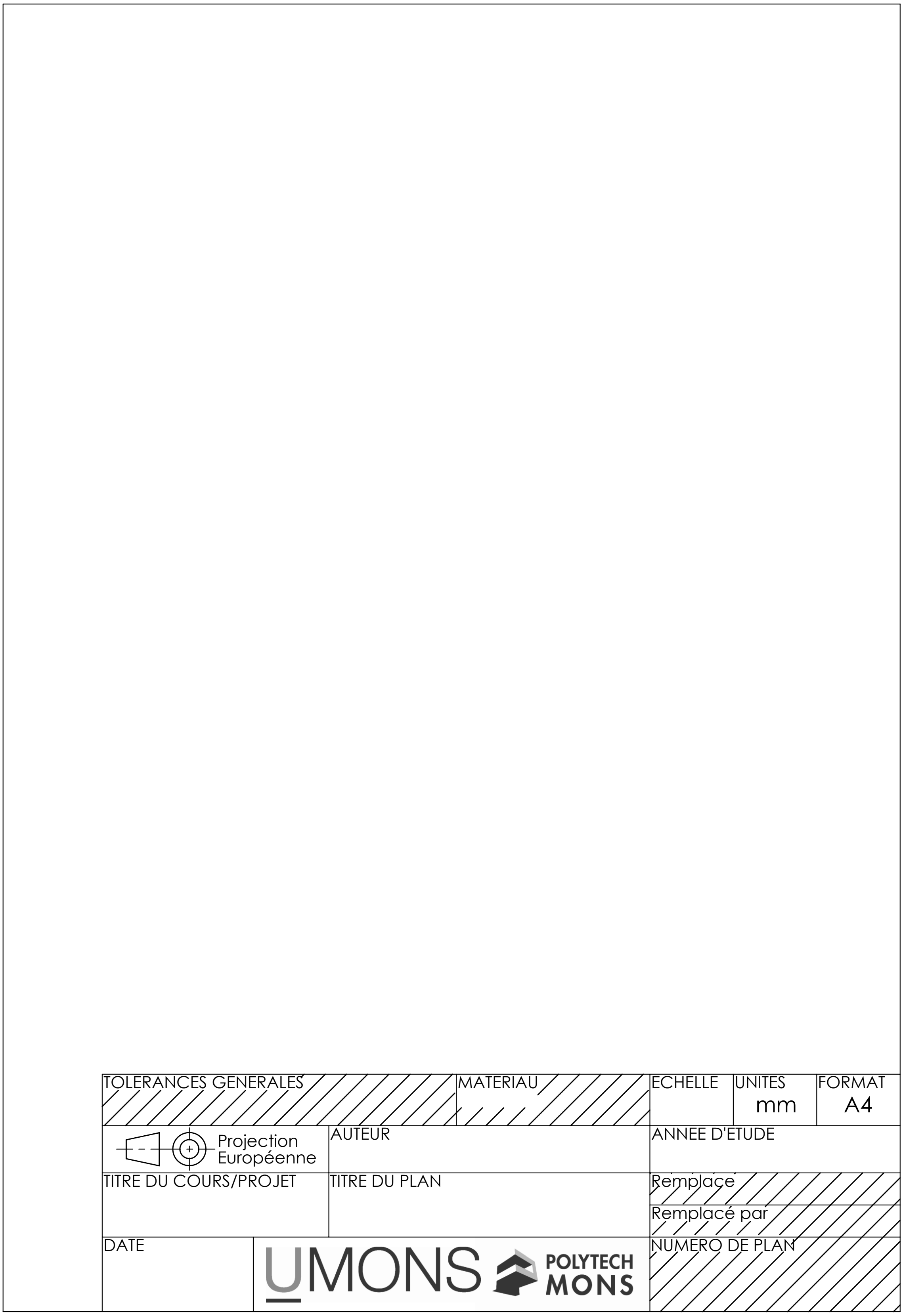


FIGURE 5.27 – Cartouche Vide – Portrait

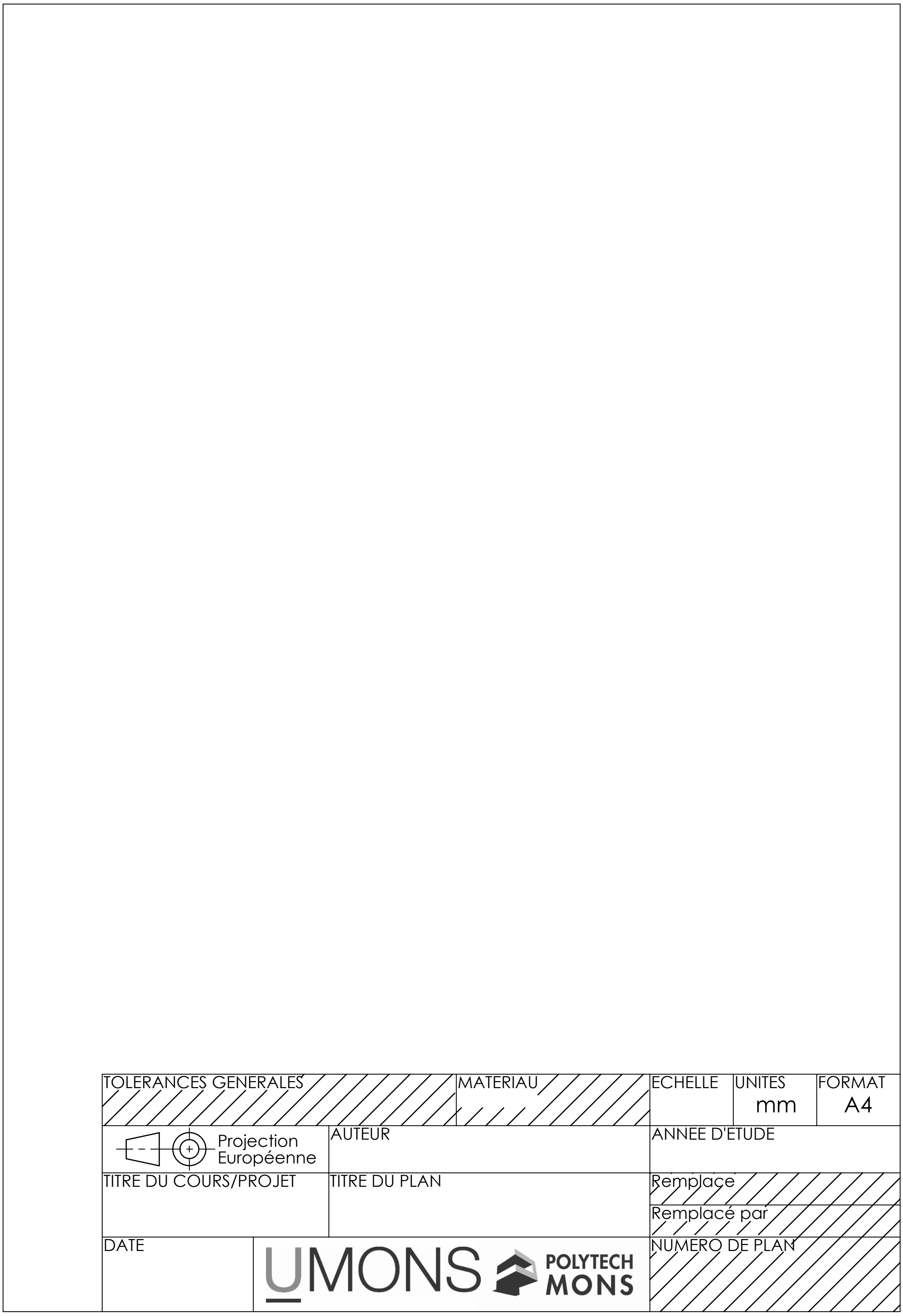


FIGURE 5.28 – Cartouche Vide – Portrait

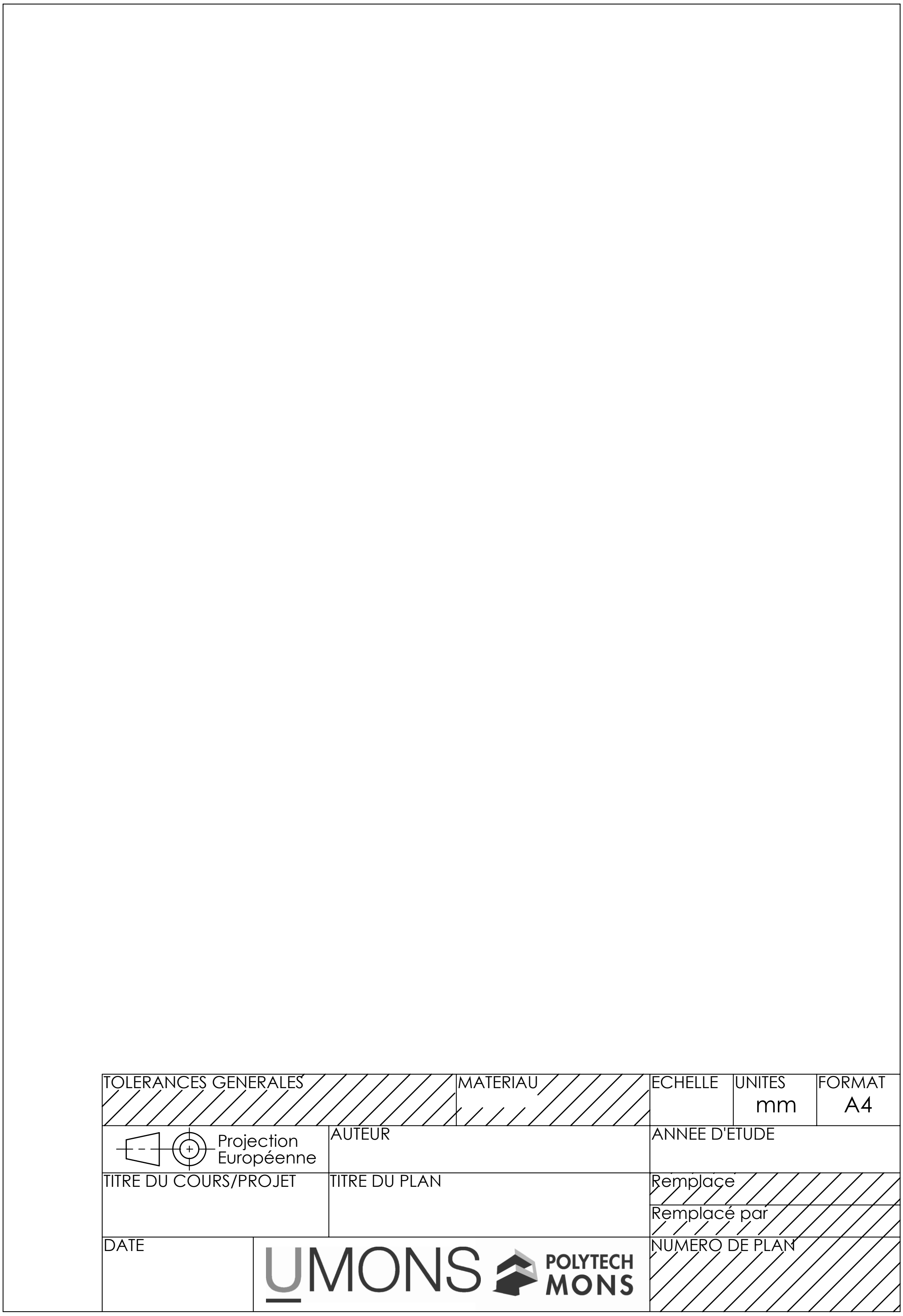


FIGURE 5.29 – Cartouche Vide – Portrait

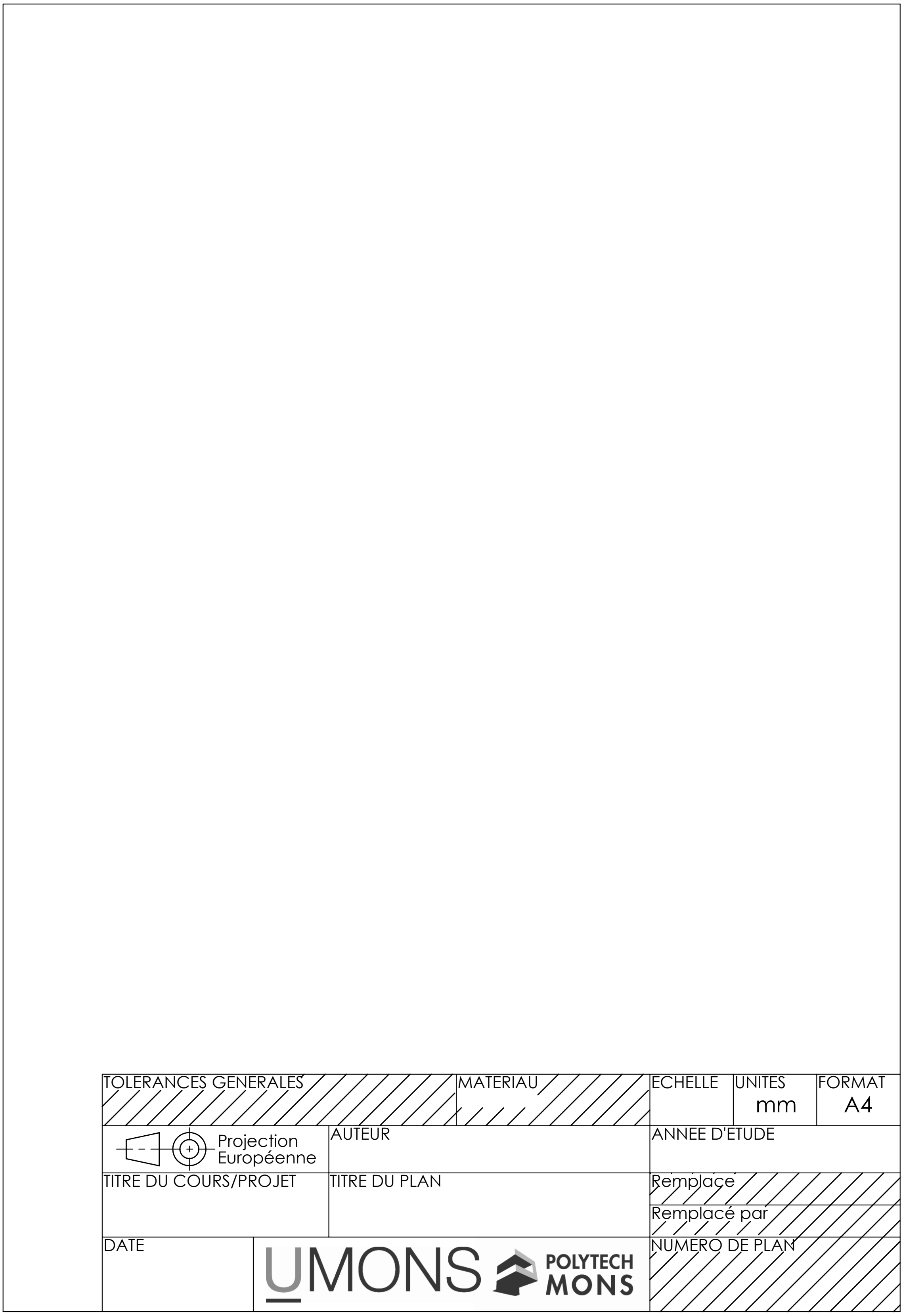


FIGURE 5.30 – Cartouche Vide – Portrait

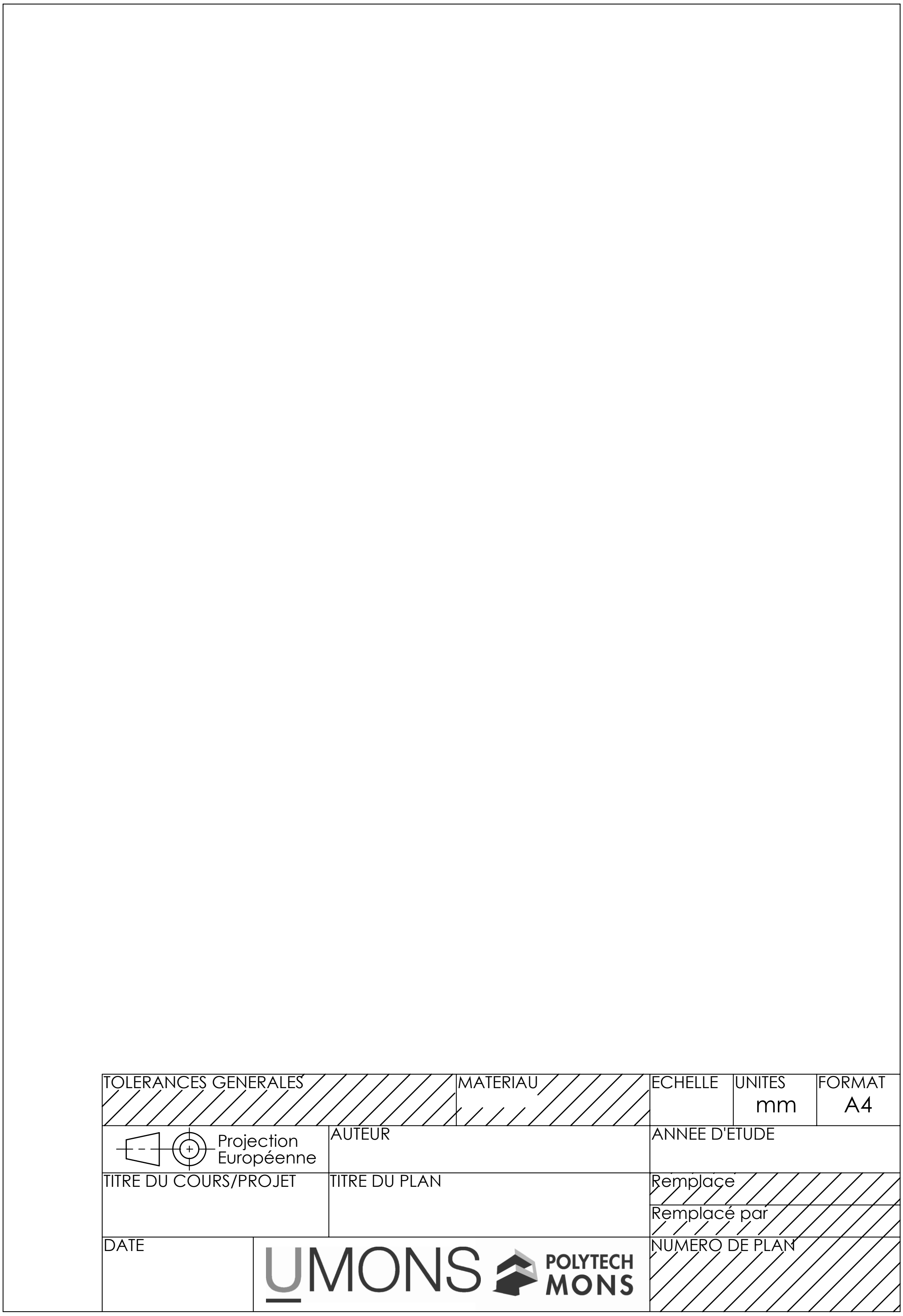


FIGURE 5.31 – Cartouche Vide – Portrait

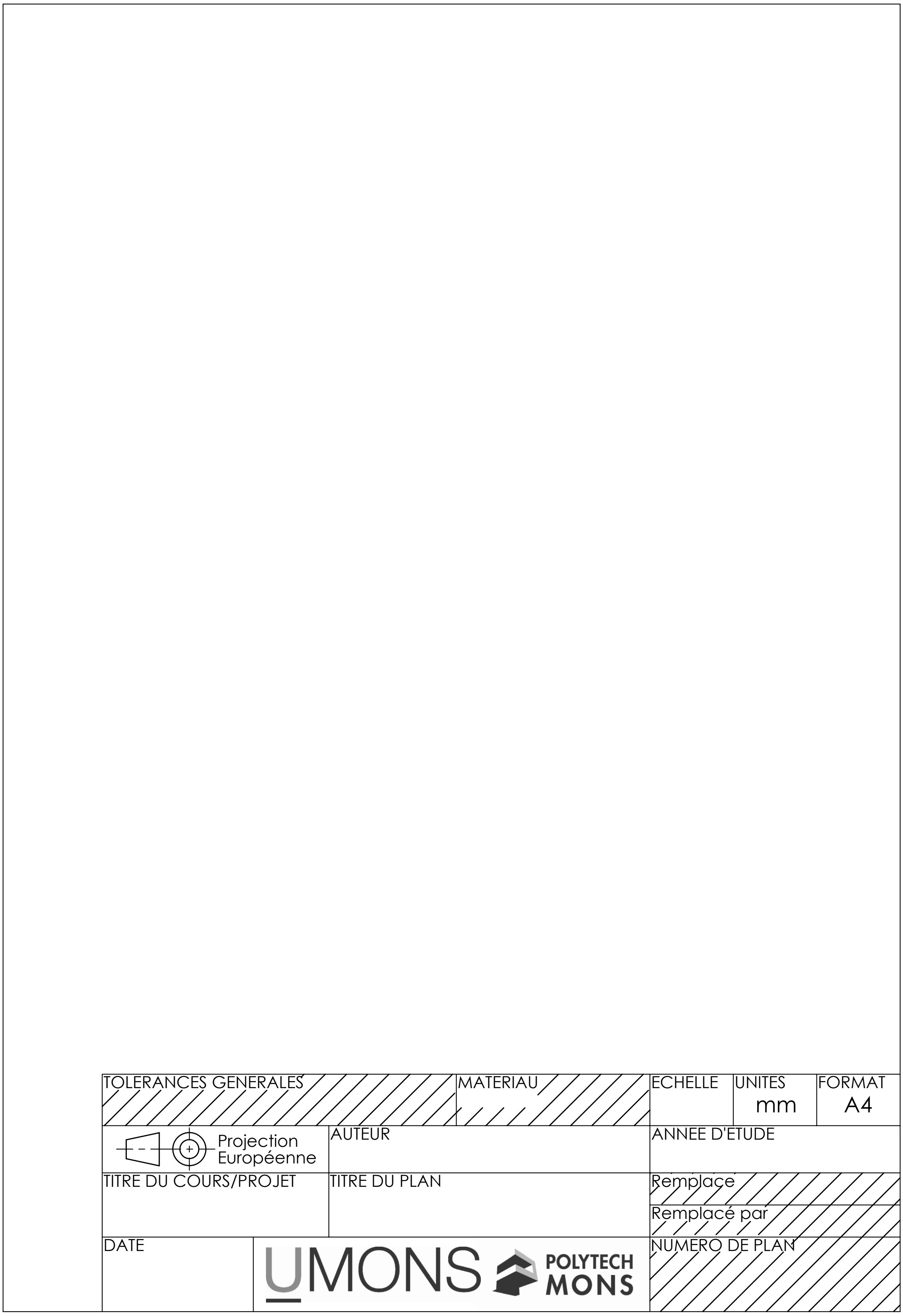


Figure 5.32 – Cartouche Vide – Portrait

Épure de Monge

Réaliser des épures vierges : cadre de 170 mm * 270 mm sur papier A4. La ligne de terre est une horizontale au milieu du cadre.

Croquis en isométrie

Réalise des croquis en isométrie vierges. Le point d'origine (0,0,0) se situe à 70 mm du bord gauche et à 150 mm du bord haut de la feuille A4. Vous prendrez comme échelle pour ces croquis 1ur=0.5 mm et vous supposerez le rapport de réduction λ égal à 1.

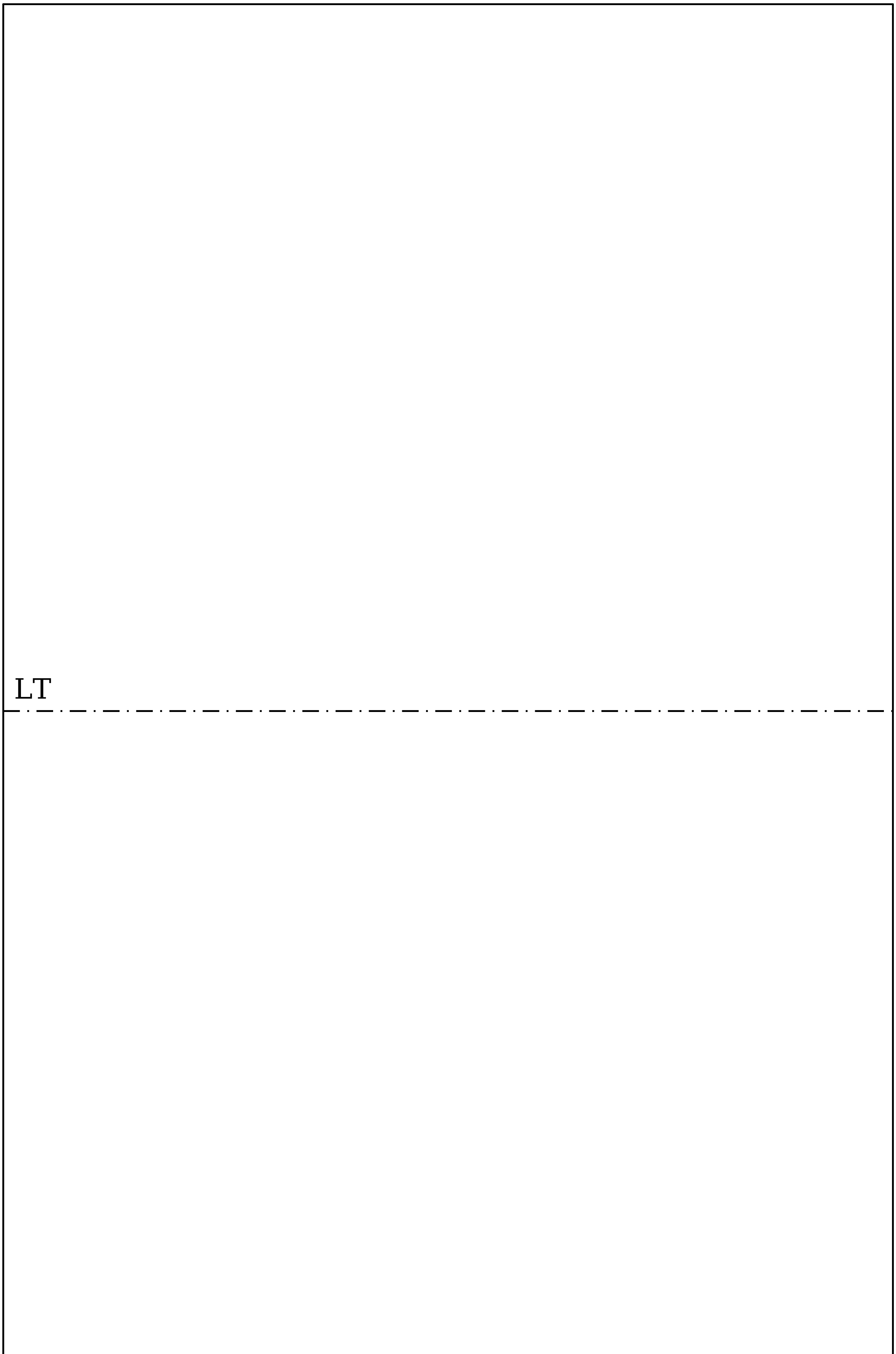


Figure 5.33 – Monge : épure vierge

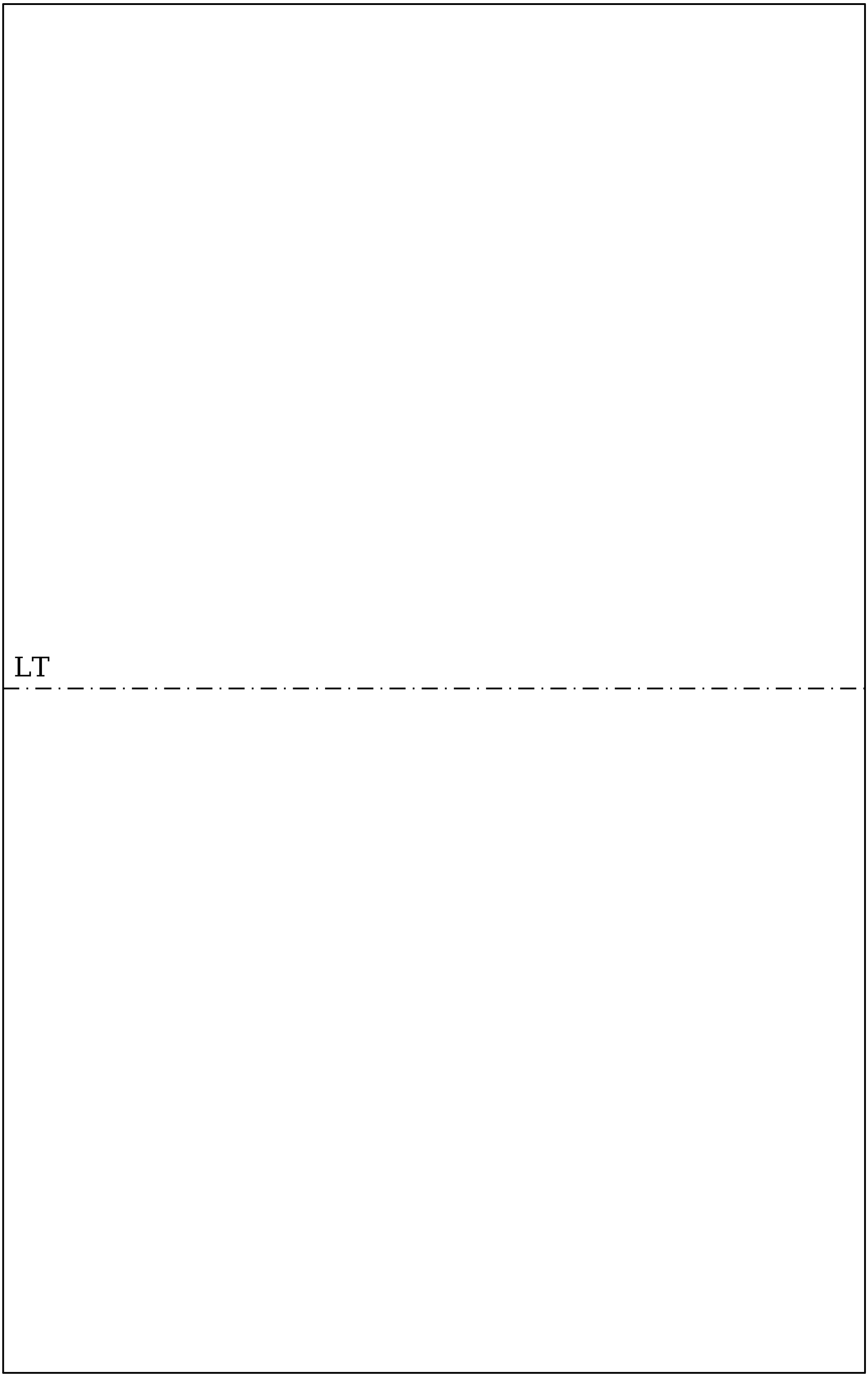


Figure 5.34 – Monge : épure vierge

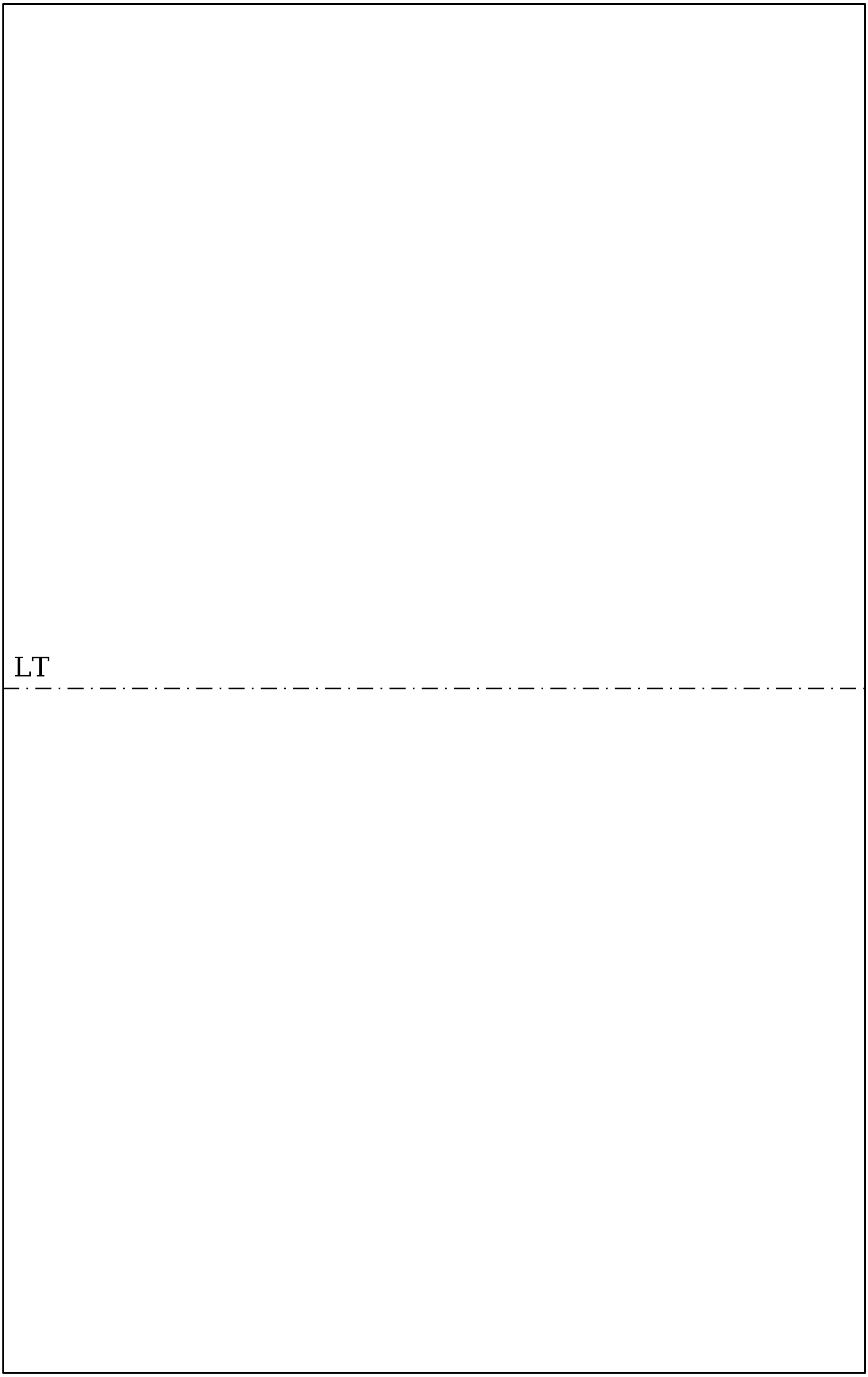


FIGURE 5.35 – Monge : épure vierge

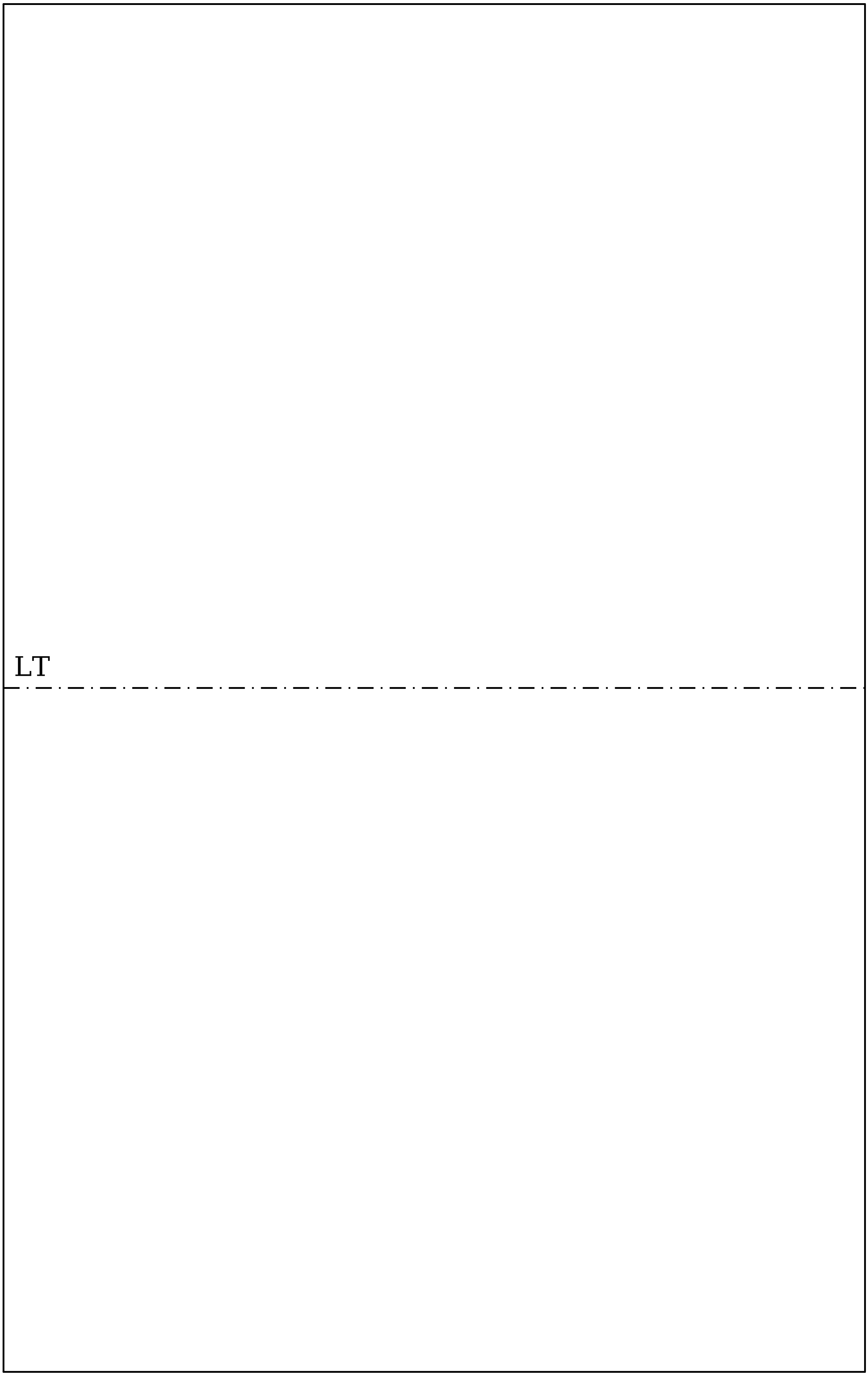


Figure 5.36 – Monge : épure vierge

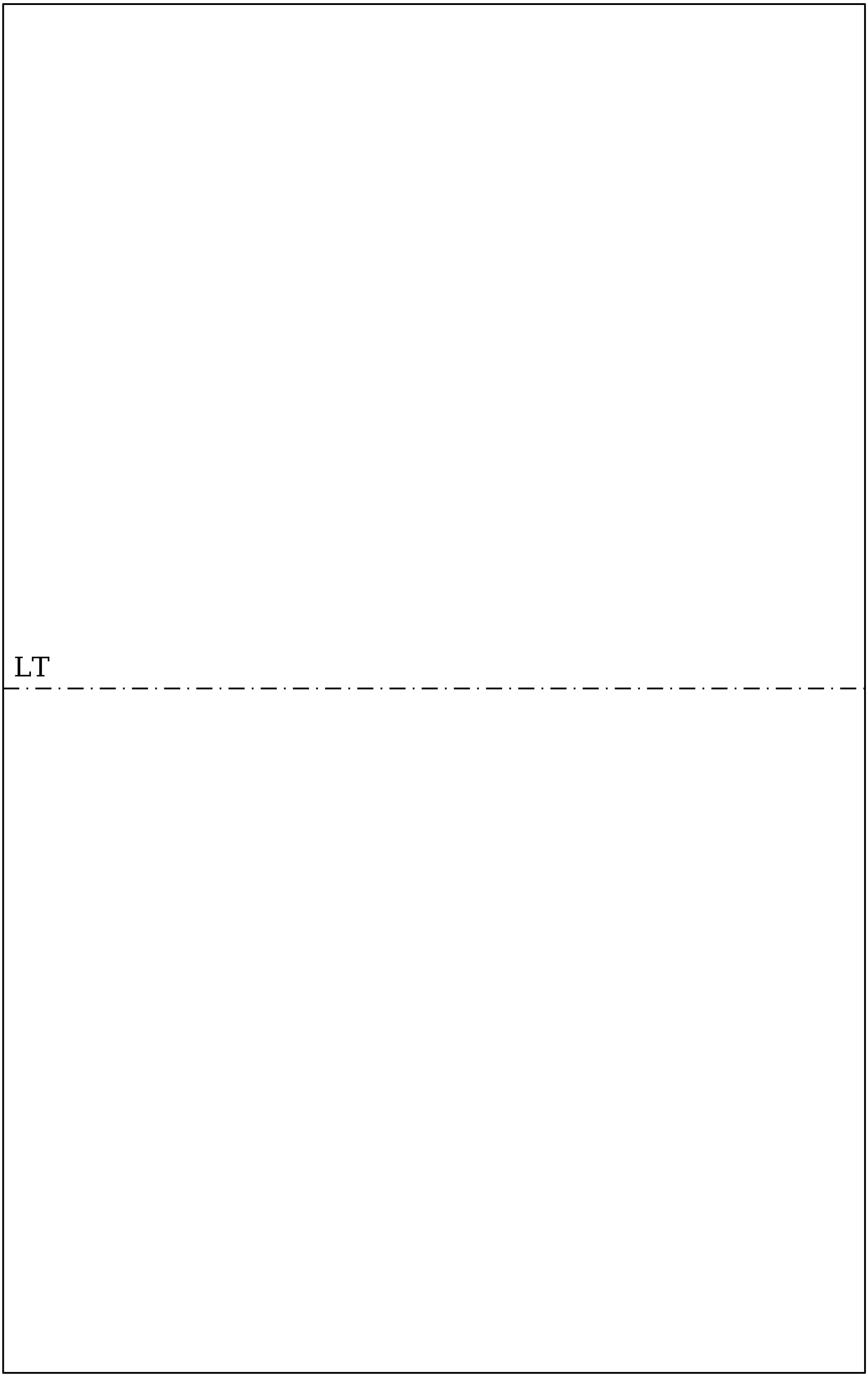


FIGURE 5.37 – Monge : épure vierge

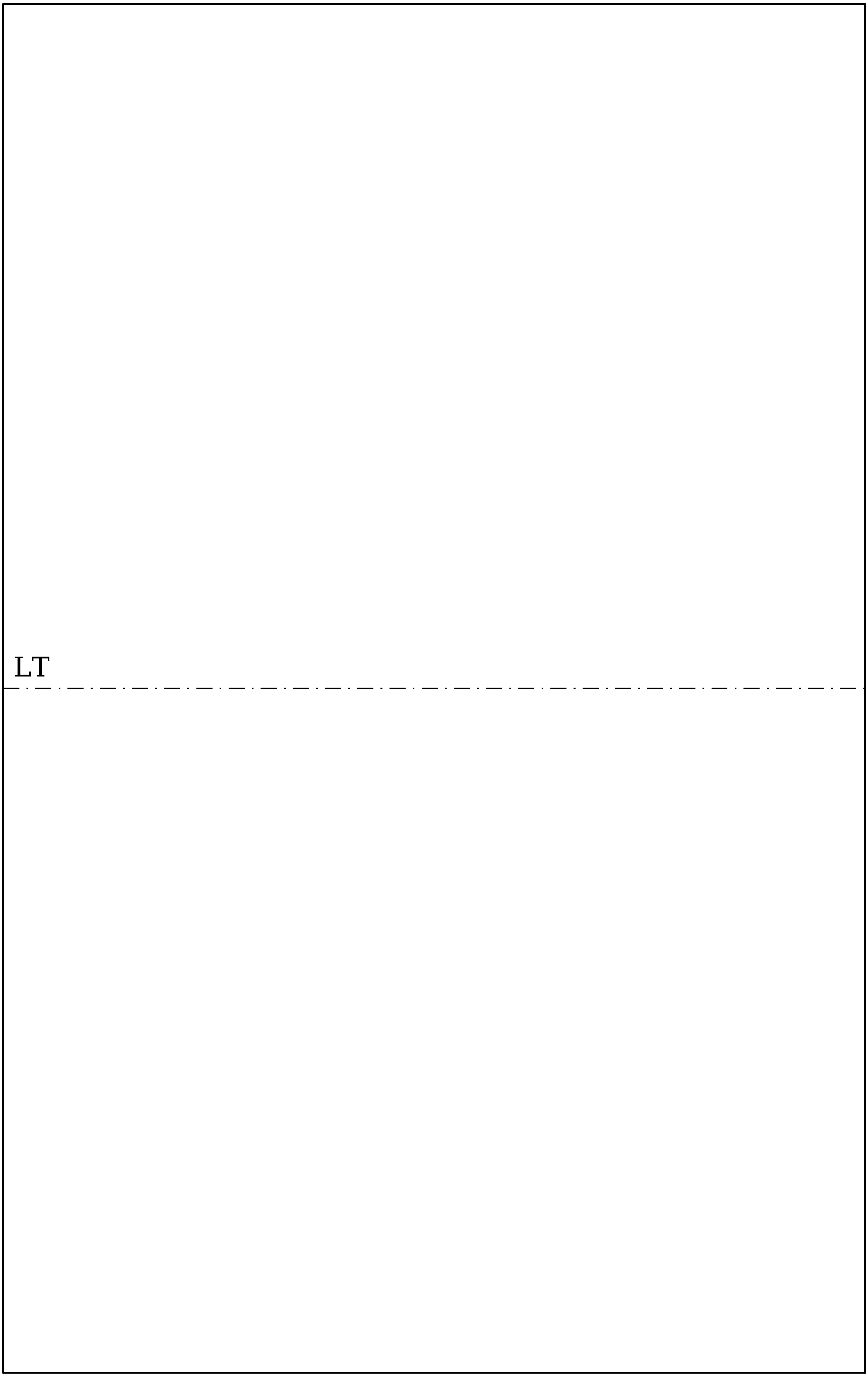


FIGURE 5.38 – Monge : épure vierge

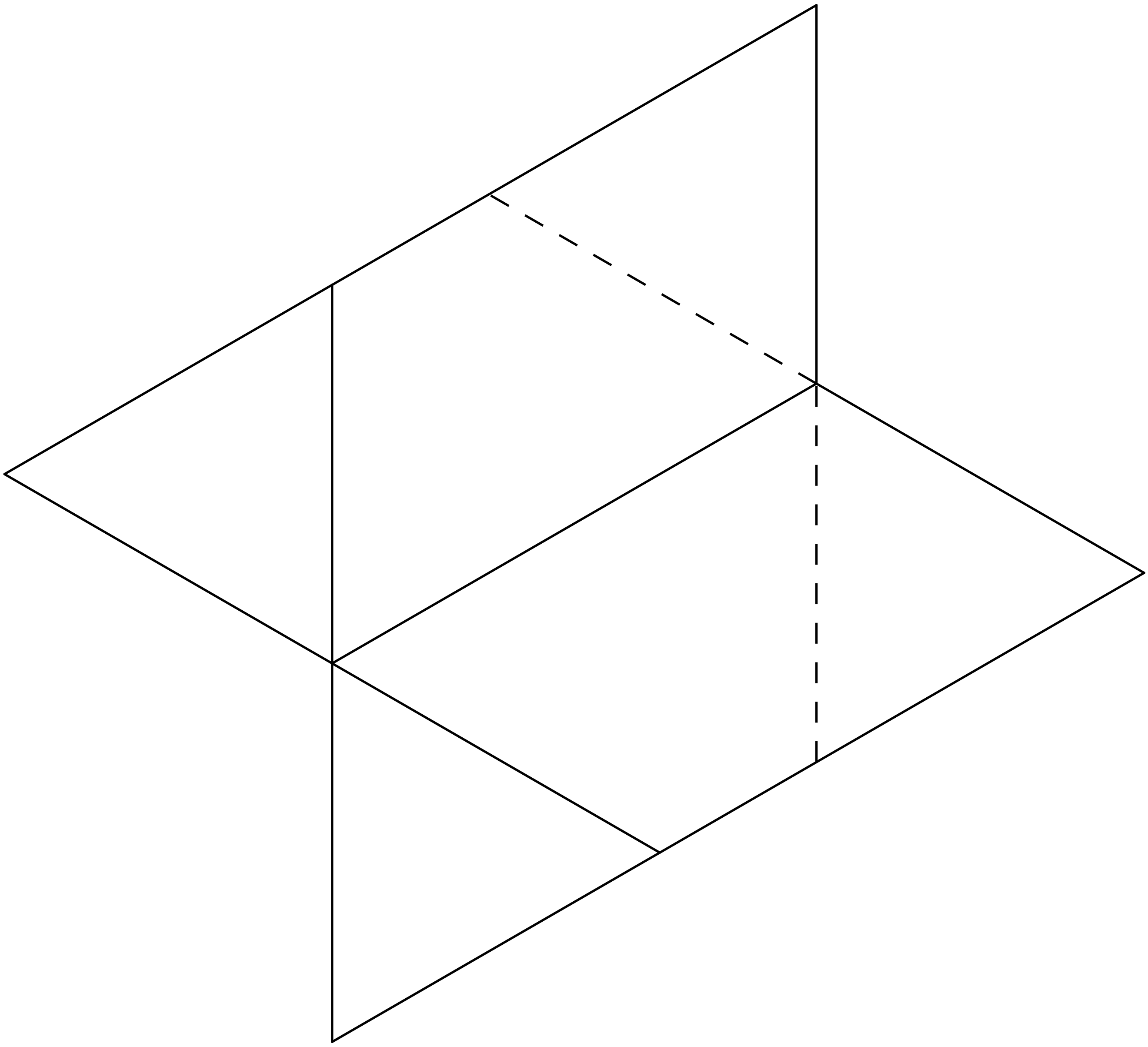


FIGURE 5.39 – Monge : Isométrie vierge

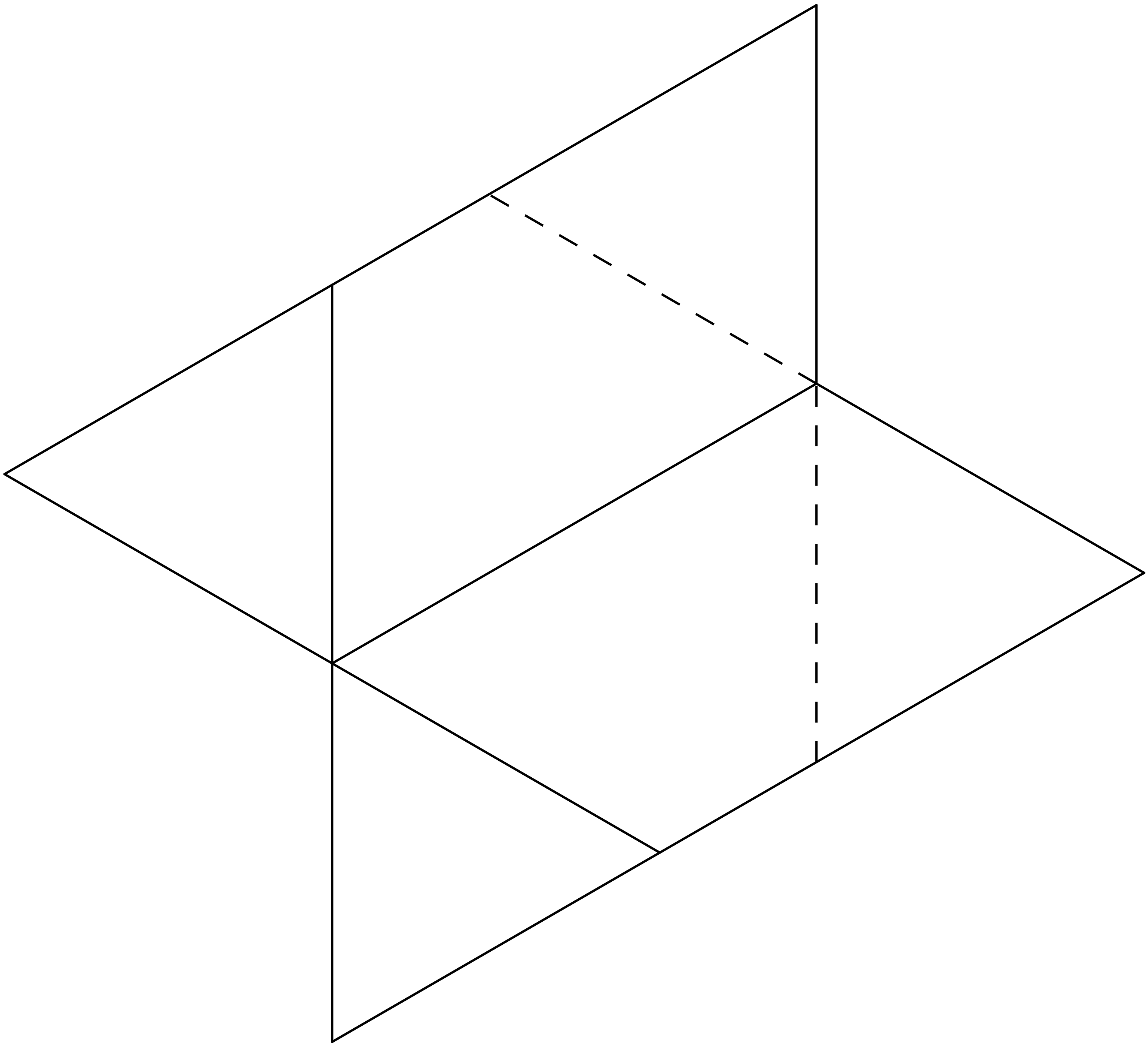


FIGURE 5.40 – Monge : Isométrie vierge

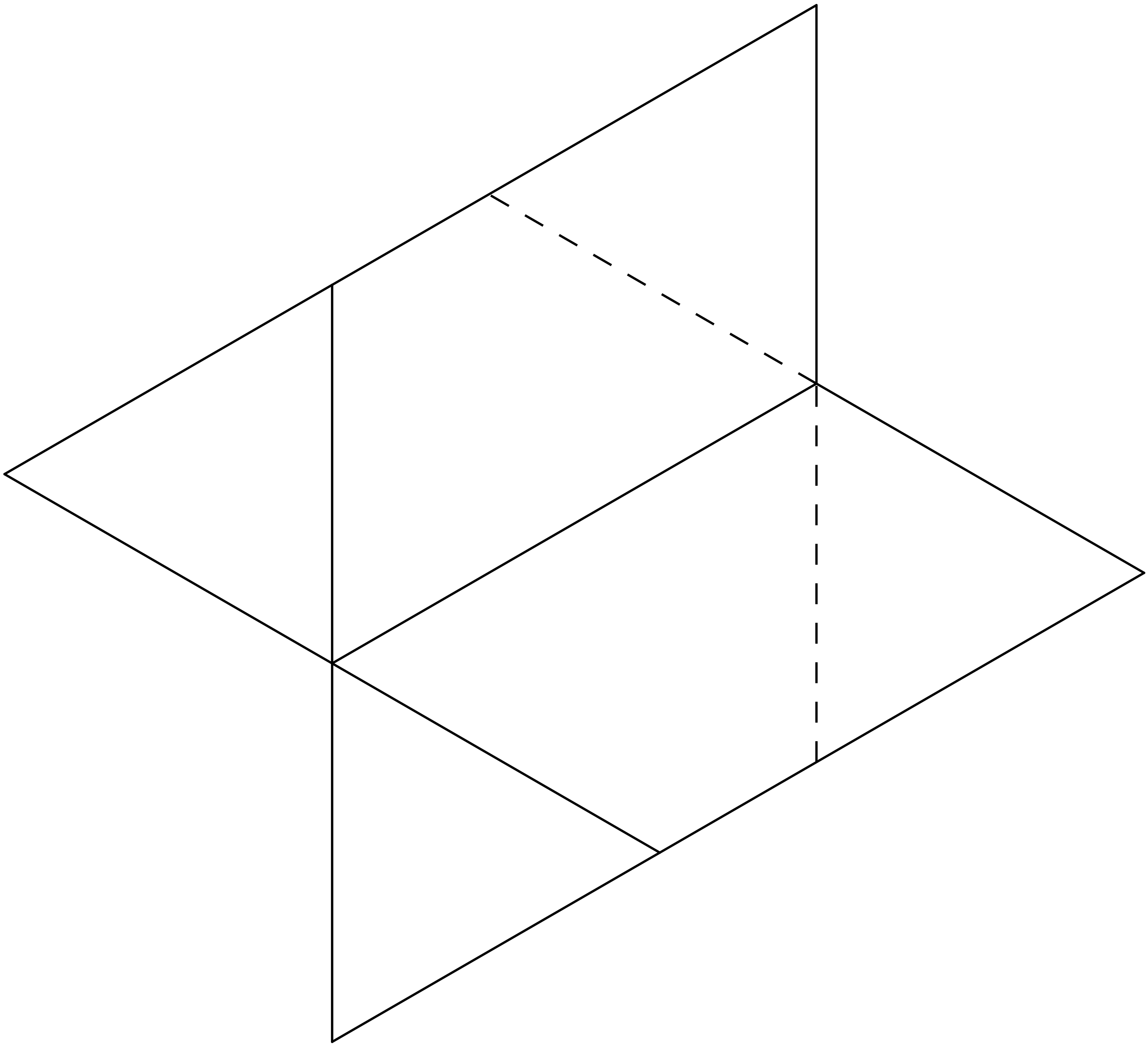


FIGURE 5.41 – Monge : Isométrie vierge

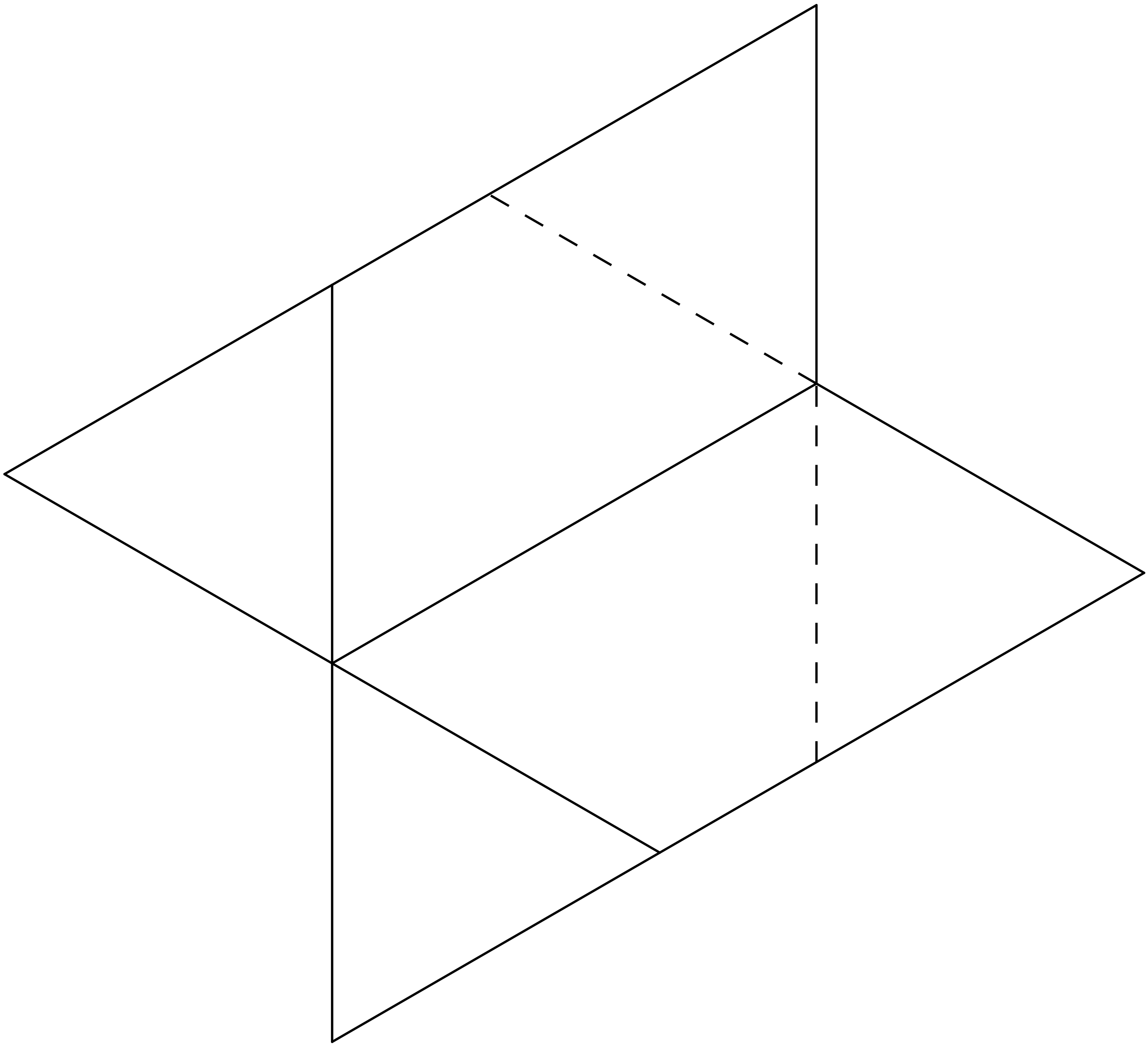


FIGURE 5.42 – Monge : Isométrie vierge

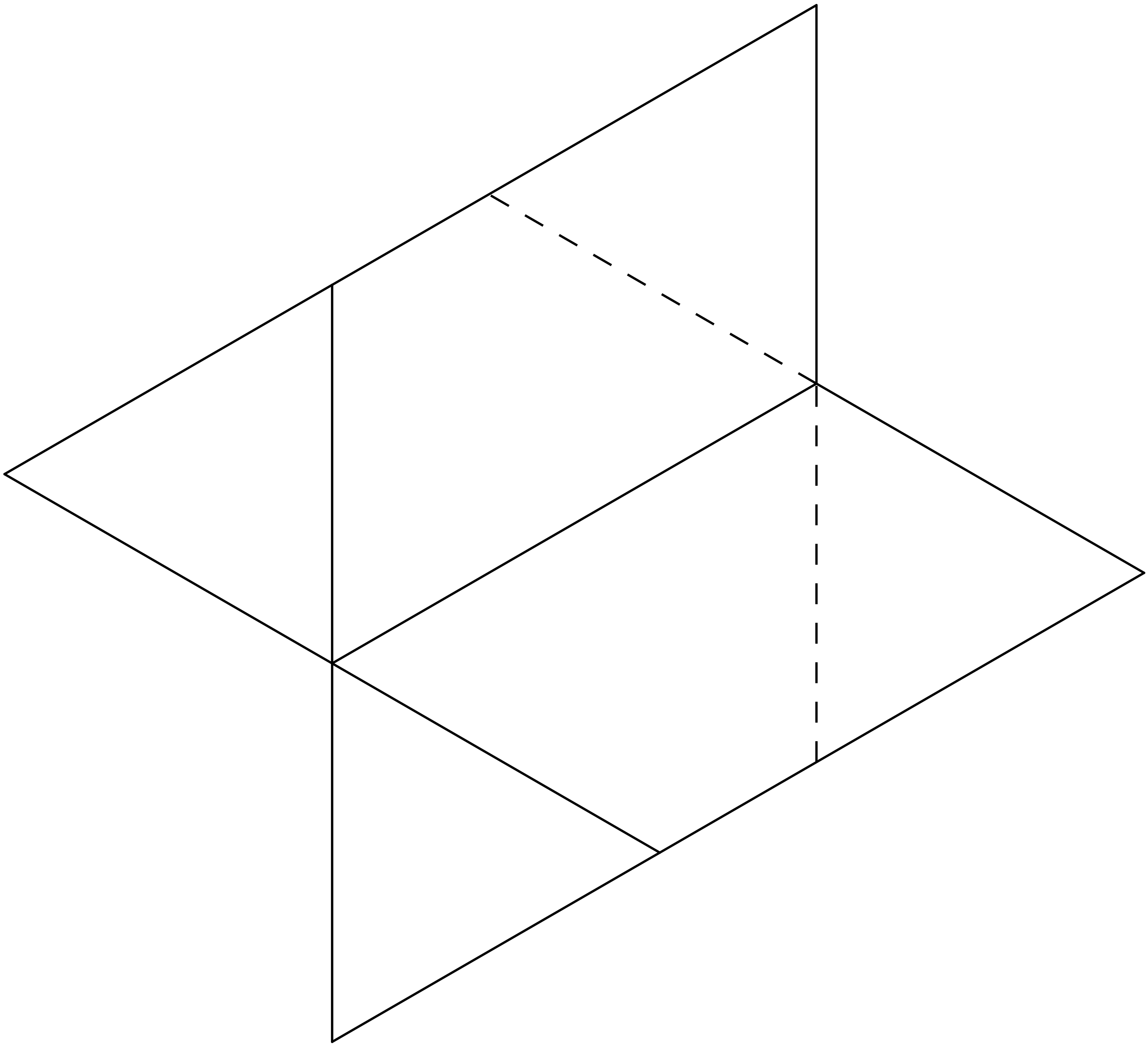


Figure 5.43 – Monge : Isométrie vierge

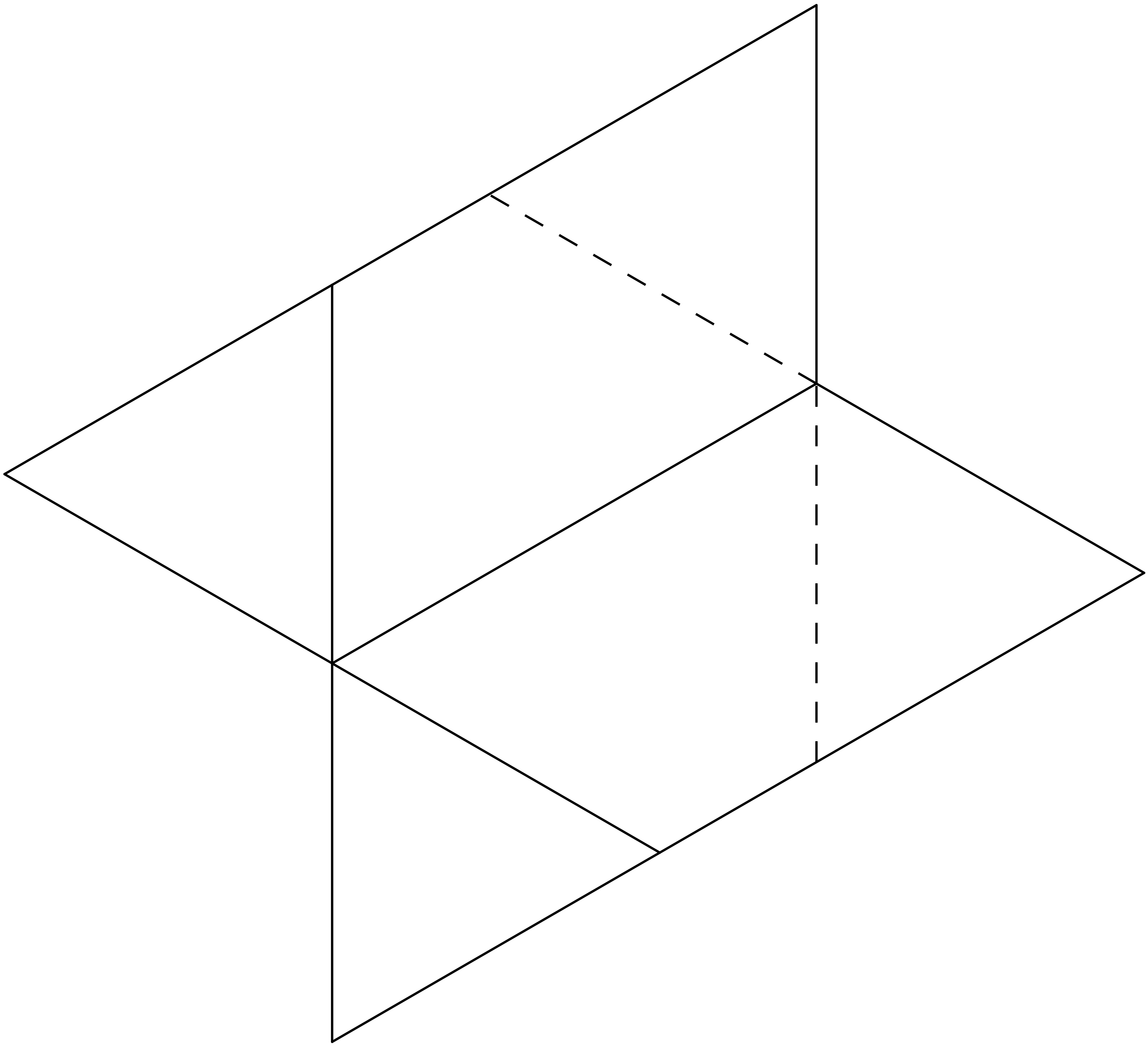


Figure 5.44 – Monge : Isométrie vierge