UMONS – Université de Mons – Faculté des Sciences

École doctorale : Didactique des disciplines
Laboratoire de Didactique André Revuz

Thèse de doctorat

Didactique des mathématiques

présentée par
Céline NIHOUL

Impact des pratiques enseignantes sur la conceptualisation des droites et des plans dans l'espace : une étude de cas

Directeur de thèse
Stéphanie BRIDOUX
UMONS

Composition du jury
Christian MICHAUX
UMONS, président
Thomas BRIHAYE
UMONS, secrétaire
Natacha DUROISIN
UMONS
Aurélie CHESNAIS
Université de Montpellier
Nicolas GRENIER-BOLEY
Université Rouen Normandie

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier ma directrice de thèse, Stéphanie Bridoux, pour m'avoir aidée et soutenue tout au long de ce travail. Je n'aurais pas autant progressé sans ses conseils avisés. J'espère que notre collaboration ne fait que débuter. Si je me suis lancée dans cette thèse, c'est aussi parce qu'elle a réussi à transmettre son intérêt pour la didactique des mathématiques durant mon cursus universitaire.

Mes remerciements vont ensuite aux membres du jury. Je remercie Thomas Brihaye, sans qui je n'aurais pas eu la possibilité d'être assistante pendant toutes ces années, et Christian Michaux de présider ce jury. Je tiens également à remercier Natacha Duroisin et Aurélie Chesnais pour avoir accepté de faire partie de mon jury. Je remercie enfin Nicolas Grenier-Boley pour son soutien tout au long de mon doctorat.

Je tiens également à remercier tous les jeunes et moins jeunes chercheurs rencontrés ces 7 dernières années. Merci à Aline Robert et Cécile de Hosson pour avoir accepté de m'écouter et de me conseiller à de nombreuses reprises. Merci aux jeunes chercheurs de l'ARDM pour les bons moments échangés tels que Florence, Pierre-Vincent, Alix, Blandine,... Je pense aussi à une autre génération de jeunes chercheurs qu'il est toujours plaisant de retrouver. Charlotte et Assia je vous remercie de la confiance accordée au tout début de ma thèse pour l'organisation du WEJCH en 2015 à Mons. J'en garde des souvenirs mémorables.

Je remercie aussi Quentin Lambotte qui m'a supportée pendant toutes les étapes de ce travail et qui m'a toujours écoutée dans les bons comme dans les mauvais moments. Merci à Christophe Troestler pour son soutien et son aide en informatique et en LaTeX lors de la réalisation de ce travail. Merci à Aline Goeminne pour sa bonne humeur et les pauses café.

Je tiens, de plus, à remercier les cinq enseignants qui ont accepté de travailler avec moi, d'être filmés et d'avoir accepté que j'expérimente ma séquence dans leur classe. Merci à eux pour l'enthousiame et l'intérêt qu'ils ont portés à mon travail. Sans eux, rien n'aurait été possible.

Finalement, je tiens à remercier les personnes qui me sont chères. Merci à ma maman et à Silvana pour leur relecture attentive de ce travail. Merci à mon père et à Gianni d'avoir cru en moi et toujours souhaité le meilleur pour moi. Julien, je te remercie pour ta patience, tes conseils et toutes les solutions que tu as mises en place pour m'aider lors de ma thèse et en particulier de ma rédaction. Merci à tous d'avoir participé à votre échelle et de m'avoir soutenue et supportée ces dernières années.

Table des matières

Introduction 1

Partie 1 ► Relief sur les notions étudiées 3

Introduction 5

I Contexte du travail : la géométrie différentielle 7

1 Les notions mathématiques étudiées 7

2 Difficultés des étudiants 14

3 Premier questionnement 17

II Premières spécificités des notions enseignées 19

1 Mettre du relief sur les notions à enseigner 19

2 Diagnostic du cours de Mathématiques élémentaires 21

2.1 La transition secondaire-université 22

2.2 Les objectifs du cours de Mathématiques élémentaires 29

2.3 Les outils d'analyse du cours de Mathématiques élémentaires 30

2.4 Étude du travail réalisé au sein du cours 38

2.5 Les évaluations 47

2.6 Bilan de l'étude cognitive 64

III Étude historico-épistémologique 67

1 Méthodologie 68

2 Le raisonnement déductif d'Euclide 69

3 La légitimité des constructions géométriques 72

4 Les équations 75

5 L'algèbre nouvelle de Viète 79

6 Les opérations algébriques en géométrie chez Descartes 83
7 Le problème de Pappus 87
8 L'émergence de la géométrie analytique 93
9 La naissance de l'algèbre linéaire 101
9.1 La genèse de la notion de rang 102
9.2 De la géométrie analytique à l'algèbre linéaire 106
10 Bilan de l'étude historique 109
10.1 Un panorama de l'étude menée 109
10.2 Les spécificités des notions de géométrie analytique 112
10.3 Limites méthodologiques 114

IV Les programmes de l'enseignement secondaire belge 117
1 Éléments méthodologiques 117
2 Les programmes avant 2018 119
2.1 Présentation générale des programmes 119
2.2 Analyse des programmes 121
2.3 Bilan 129
3 Les programmes actuels 132
3.1 Présentation générale des programmes 132
3.2 Analyse des programmes 133
3.3 Bilan 139
4 Bilan de l'étude curriculaire 142

V Mise en relief des notions à enseigner 145
1 Notre objectif initial 145
2 Des décalages entre le savoir savant, le savoir à enseigner et le savoir enseigné . . 146
2.1 Les cadres 146
2.2 Les registres 147
2.3 Les points de vue 148
2.4 L'interprétation géométrique 148
2.5 Le caractère généralisateur des notions 148
3 Question de recherche 149

Partie 2 ► Cadrage théorique – Problématique – Analyses didactiques 151

Introduction 153

VI Cadrage théorique et questionnement didactique 155

1 La Théorie de l'Activité . . . 155
1.1 La construction des connaissances chez Piaget et Vygotski . . . 156
1.2 Les activités comme intermédiaires pour étudier les liens enseignement/apprentissage 158
1.3 Les pratiques enseignantes . . . 159
1.4 Méthodologie d'analyse des pratiques enseignantes . . . 160
2 Question de recherche et méthodologie générale . . . 168

VII Analyse des manuels scolaires belges 173

1 Éléments méthodologiques . . . 173
2 Chapitres analysés dans les manuels . . . 174
3 Les anciens manuels . . . 175
3.1 Les activités d'introduction . . . 175
3.2 Les cours . . . 179
3.3 Les exercices . . . 192
4 Le nouveau manuel . . . 203
5 Conclusion . . . 207

VIII Étude de terrain 211

1 Éléments méthodologiques . . . 211
1.1 Présentation générale des enseignants . . . 211
1.2 L'analyse des scénarios et des déroulements . . . 212
2 Analyse des scénarios : documents « élèves » . . . 214
2.1 Chronologie globale des scénarios . . . 215
2.2 Les activités d'introduction . . . 218
2.3 Les moments d'exposition des connaissances . . . 223
2.4 L'analyse *a priori* des tâches . . . 232
2.5 Bilan sur les activités attendues des élèves . . . 240
3 Analyse des déroulements . . . 242
3.1 Chronologie globale *a posteriori* . . . 242

3.2 Les moments d'exposition des connaissances 246
3.3 L'analyse *a posteriori* des tâches 281
3.4 Bilan sur l'analyse des déroulements 299
4 Limites méthodologiques 301
5 Éléments de réponse à notre problématique 302

Partie 3 ► Scénario d'enseignement sur les droites et les plans dans l'espace : de sa conception aux activités possibles des élèves 305

Introduction 307

IX Principes d'élaboration de la séquence 309
1 Une séquence « de type ingénierie » 309
2 Choix du chercheur dans l'élaboration du scénario 312
3 Bilan 316

X Présentation de la séquence 319
1 Méthodologie générale 319
2 Présentation du scénario 320
3 Élaboration d'un guide d'entretien 358
4 Entretiens avec les enseignants 359
5 Bilan 366

XI L'analyse *a priori* du scénario 367
1 Méthodologie 367
2 L'activité d'introduction 368
3 Les exercices proposés 374
4 Bilan 387

XII Expérimentation du scénario 391
1 Éléments méthodologiques 391
2 Panorama général de l'expérimentation 392
2.1 Chronologie globale 392
2.2 L'activité d'introduction 397
2.3 Les exercices 400

3 Analyse de quelques phases précises des déroulements . . . 403
3.1 Présentation des analyses . . . 403
3.2 La tâche introductive 1 : S_1 . . . 404
3.3 La tâche introductive 2 : S_4 . . . 408
3.4 Les exercices . . . 420
3.5 Premières conclusions . . . 438
4 Bilan et limites de l'expérimentation . . . 441
4.1 Retour sur la conceptualisation visée chez les élèves . . . 441
4.2 Limites méthodologiques . . . 444

XIII Apprentissages des élèves 445
1 Éléments méthodologiques . . . 445
2 Questionnaire pour les étudiants de BAB1 . . . 446
2.1 Question 1 . . . 446
2.2 Question 2 . . . 455
3 Questionnaire auprès des élèves du secondaire . . . 459
3.1 Question 1 . . . 459
3.2 Question 2 . . . 465
3.3 Question 3 . . . 467
3.4 Question 4 . . . 472
4 Comparaison des résultats . . . 475
5 Inférences sur les apprentissages . . . 476
6 Bilan . . . 477

Conclusion 479

Bibliographie 489

Annexes 503

A Programmes scolaires 503
1 Le premier degré de l'enseignement . . . 503
2 Ancien programme du deuxième degré de l'enseignement . . . 504
3 Ancien programme du troisième degré de l'enseignement . . . 508

4 Programme du deuxième degré 515
5 Programme du troisième degré 518

B Les manuels scolaires : résolution d'une tâche du *CQFD* 523

C Les tâches prescrites par les enseignants 531
1 L'enseignant P_1 531
2 L'enseignant P_2 534
3 L'enseignant P_3 537
4 L'enseignant P_4 540
5 L'enseignant P_5 545

D Les tâches prescrites dans notre scénario 549

E Transcriptions des entretiens menés avec les enseignants 557
1 L'enseignant P_1 557
2 L'enseignant P_2 566
3 L'enseignant P_3 574
4 L'enseignant P_4 584
5 L'enseignant P_5 594

F Analyse *a priori* des tâches prescrites dans notre scénario 601
1 Exercice 1 601
2 Exercice 4 602
3 Exercice 5 603
4 Exercice 6 603
5 Exercice 7 604
6 Exercice 9 605
7 Exercice 10 606
8 Exercice 13 607
9 Exercice 14 608
10 Exercice 15 609
11 Exercice 16 610
12 Exercice 17 611
13 Exercice 19 612

14 Exercice 20 613
15 Exercice 21 614
16 Exercice 24 615
17 Exercice 25 616
18 Exercice 26 616
19 Exercice 27 617

G Solutions des tâches proposées aux élèves 619

1 Tâches introductives 619
2 Exercice 1 620
3 Exercice 2 621
4 Exercice 3 621
5 Exercice 4 622
6 Exercice 5 622
7 Exercice 6 623
8 Exercice 7 624
9 Exercice 8 625
10 Exercice 9 626
11 Exercice 10 626
12 Exercice 11 626
13 Exercice 12 627
14 Exercice 13 628
15 Exercice 14 629
16 Exercice 15 629
17 Exercice 16 630
18 Exercice 17 630
19 Exercice 18 630
20 Exercice 19 631
21 Exercice 20 632
22 Exercice 21 632
23 Exercice 22 633
24 Exercice 23 635
25 Exercice 24 640
26 Exercice 25 641

27 Exercice 26 641
28 Exercice 27 642

H Les équations cartésiennes sous forme de déterminants **645**

I Les documents donnés aux élèves lors de notre expérimentation **649**
1 Activité d'introduction 649
2 Rappels : les équations 649
2.1 Qu'est-ce qu'une équation ? 649
2.2 Que signifie « résoudre une équation » ? 650
2.3 Est-ce qu'une équation doit toujours être résolue ? 650
3 Les équations cartésiennes de droites dans le plan 652
4 Positions relatives de deux droites dans le plan 654
5 Les équations de droites et de plans dans l'espace 655
6 Positions relatives des droites et des plans dans l'espace 658
7 Bilan 661
8 Distances 662
9 Exercices 663

J Déroulement du scénario **665**

K Les questionnaires **713**

Introduction

Le point de départ de notre travail de thèse est lié à notre expérience d'enseignante au sein d'un cours d'Introduction aux variétés différentielles donné à des étudiants de troisième année dans une filière mathématique à l'Université de Mons en Belgique. Nous avons repéré au fil des années des difficultés récurrentes chez ces étudiants à interpréter géométriquement les équations manipulées, et ce, même pour des objets tels que les droites et les plans dans l'espace. Nous nous sommes donc intéressée, dans ce travail, à l'enseignement de ces notions d'une part pour mieux comprendre leurs difficultés et d'autre part pour trouver des pistes visant à améliorer notre enseignement.

Dans la première partie de notre travail, nous avons tout d'abord cherché à déterminer les premières spécificités des notions de géométrie analytique dans l'espace. Pour ce faire, un diagnostic du cours de Mathématiques élémentaires adressé aux étudiants de première année universitaire dans les filières mathématique, informatique et physique a été réalisé. Cette étude cognitive est également complétée par des travaux antérieurs en lien avec notre questionnement. Afin d'adopter un point de vue plus général et de nous dégager du contexte institutionnel dans lequel notre recherche vit, nous réalisons une étude historique et épistémologique de l'émergence et du développement des notions de droites et de plans dans l'espace. Puisque ces notions sont introduites pour la première fois dans l'enseignement secondaire supérieur, nous terminons cette étude du relief (au sens de Pariès, Pouyanne, Robert, Roditi et Rogalski, 2007) par une analyse des programmes de l'enseignement secondaire. Le croisement des résultats de ces études cognitive, curriculaire, historique et épistémologique nous amène à une première formulation de notre question de recherche.

Afin de préciser notre problématique et d'y apporter des éléments de réponse, nous inscrivons notre travail dans le cadre de la Double Approche didactique et ergonomique au sein de la Théorie de l'Activité (Robert & Rogalski, 2002). Nous admettons donc que les apprentissages des élèves sont approchables via les activités qu'ils peuvent développer ; ces dernières étant elles-mêmes influencées par les pratiques des enseignants en dehors et pendant la classe. La méthodologie de recherche associée à ce cadre théorique nous amène à réaliser des analyses didactiques prenant en compte à la fois les contenus mathématiques (théorie et exercices) mais aussi les déroulements organisés par l'enseignant en classe. Dans la deuxième partie de notre travail, nous présentons les fondements de ce cadre théorique. Nous menons également une analyse didactique de plusieurs manuels scolaires belges (francophones) ainsi qu'une étude de terrain. Nous cherchons ainsi à déterminer les choix de l'enseignant en termes de contenus et de déroulements en classe et leur impact sur les activités possibles des élèves pour ce chapitre.

Dans la troisième partie de notre travail, sur la base des résultats issus de cette étude de terrain, nous avons choisi d'élaborer un scénario d'enseignement conforme aux programmes de l'enseignement secondaire. Nous y avons intégré certains leviers didactiques susceptibles d'enclencher des activités favorisant les apprentissages des élèves. Les choix que nous avons effectués en tant que chercheur lors de la conception du scénario ont plusieurs objectifs. Ils permettent d'une part de prendre en compte les spécificités des notions déterminées dans la première partie et d'autre part, d'incorporer certains éléments dont nous supposons, au vu de la deuxième partie de notre travail, qu'ils développent la conceptualisation visée. Une fois les activités attendues des élèves précisées, nous expérimentons notre scénario dans une classe de l'enseignement secondaire car les déroulements peuvent fortement les influencer. En effet, les tâches prescrites dans le scénario peuvent être plus ou moins éloignées des tâches effectivement réalisées en classe à cause de certaines conceptions ou difficultés chez les élèves ou même à cause des choix de gestion ou du discours de l'enseignant. Nous analysons finalement les déroulements en classe et les copies des élèves lors d'une évaluation. Nous pouvons dès lors caractériser les apprentissages qu'ils ont potentiellement réalisés pour le chapitre de géométrie analytique dans l'espace.

Nous terminons cette recherche par une conclusion générale. Nous revenons tout d'abord sur le travail qui a été réalisé dans le but de dégager des éléments de réponses à notre question de recherche. Nous présentons ensuite les limites et les apports de cette thèse dans le champ de la recherche en didactique des mathématiques. Nous formulons aussi quelques perspectives à notre travail.

Première partie

Relief sur les notions étudiées

Partie 1 — Introduction

Nous commençons par exposer, au chapitre I, le point de départ de notre recherche. C'est dans le contexte d'un cours de géométrie différentielle adressé à des étudiants de BAB3 à l'Université de Mons (Belgique) que nous nous situons. Nous y présentons les notions clés et le travail attendu des étudiants lors des exercices et des évaluations. Ceci nous permet de mettre en évidence des difficultés récurrentes rencontrées par nos étudiants à interpréter géométriquement des équations. Partant de ce constat, nous formulons un premier questionnement à la base de notre recherche.

La difficulté d'interprétation géométrique des étudiants concerne notamment des notions qu'ils ont déjà rencontrées à de nombreuses reprises. C'est le cas des notions de droites et de plans dans l'espace. Cela nous amène à réaliser une étude du relief sur ces notions, au sens de Pariès, Pouyanne, Robert, Roditi et Rogalski (2007), c'est-à-dire une étude croisant des aspects cognitifs, curriculaires et épistémologiques. Le chapitre II nous éclaire sur la dimension cognitive. Nous réalisons un diagnostic du cours de Mathématiques élémentaires dans lequel ces notions sont travaillées avec des étudiants de BAB1. Ce diagnostic complété par les travaux antérieurs nous aide à dégager quelles sont les difficultés rencontrées par les étudiants et à déterminer les premières spécificités des notions.

Nous présentons, dans le chapitre III, une étude historique et épistémologique de l'émergence et du développement de la géométrie analytique. Celle-ci permet de mieux comprendre les besoins des mathématiciens de l'époque à inventer et utiliser la géométrie analytique et de mettre en évidence des obstacles ou des difficultés qu'ils ont pu rencontrer et auxquels les apprenants peuvent également être confrontés.

Les notions de droites et de plans dans l'espace sont introduites en cinquième année dans l'enseignement secondaire. C'est pourquoi nous analysons les programmes de l'enseignement secondaire sur la géométrie analytique au chapitre IV. En particulier, nous mettons en évidence les différences d'injonctions entre ceux en vigueur avant 2018 et ceux qui sont désormais en application. Cette étude permet de préciser le niveau de conceptualisation, au sens de Robert (1998), attendu des élèves à la fin de l'enseignement secondaire.

Les résultats issus des différentes analyses qui composent l'étude du relief des notions de droites et de plans dans l'espace permettent de présenter, au chapitre V, une première formulation de notre problématique.

Chapitre I

Contexte du travail : la géométrie différentielle

Le point de départ de cette recherche est lié à notre expérience d'enseignante. En effet, nous intervenons, à l'Université de Mons en Belgique, dans un cours d'Introduction aux variétés différentielles adressé à des étudiants en troisième année universitaire de la filière mathématique. Nous nous occupons des travaux dirigés depuis presque 7 ans. C'est dans ce contexte que nous avons constaté certaines difficultés rencontrées par nos étudiants lorsqu'ils devaient manipuler et esquisser les objets géométriques étudiés. Afin de mettre en évidence ces difficultés, nous exposons dans un premier temps les notions importantes travaillées au sein de ce cours. Nous présentons également la philosophie du cours ainsi que les attentes des enseignants lors de l'évaluation finale. Nous déduisons de ces analyses un premier questionnement.

1 Les notions mathématiques étudiées

La géométrie différentielle est l'application des outils du calcul différentiel et de l'algèbre linéaire à l'étude de la géométrie (définition utilisée dans le syllabus [1] du cours et inspiré de Wikipédia). Nous étudions alors au sein de ce cours des objets géométriques tels que les courbes du plan et de l'espace ainsi que les surfaces de $\mathbb{R}^3$. C'est une volonté de la part des enseignants de ne pas aller au-delà de l'espace appréhendable par les étudiants. En effet, l'interprétation géométrique des notions vues et des calculs effectués est selon nous une condition nécessaire pour une meilleure compréhension des notions clés de la géométrie différentielle.

Dans le premier chapitre du cours sont notamment vues les notions de courbe paramétrée, de courbe régulière, de courbe paramétrée par longueur d'arc et de courbure. Il est à noter que nous ne nous intéressons pas à la façon dont les courbes sont parcourues mais bien à leur géométrie c'est-à-dire à l'image de la courbe. Nous donnons les définitions de ces différents concepts.

1. Le syllabus est accessible sur https://moodle.umons.ac.be/pluginfile.php/297771/mod_resource/content/1/plan.pdf

Définition 1 (Courbe paramétrée)**.** *Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle d'intérieur non vide. Une courbe paramétrée est une fonction $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ continue.*

Définition 2 (Courbe régulière)**.** *Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée. Soit $t \in I$. Le point $\alpha(t)$ est dit régulier si $\dot{\alpha}(t) \neq 0$. Une courbe paramétrée est dite régulière si tous ses points sont réguliers.*

Définition 3 (Courbe paramétrée par longueur d'arc)**.** *Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée. On dit que α est paramétrée par longueur d'arc si et seulement si $\|\dot{\alpha}(t)\| = 1$, quel que soit $t \in I$.*

Définition 4 (Courbure)**.** *Soient $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée par longueur d'arc et $t \in I$. La courbure de α au point $\alpha(t)$, notée $\kappa(t)$, est définie par $\|\ddot{\alpha}(t)\|$.*

Comme le montrent les définitions ci-dessus, les notions semblent se limiter à des calculs de dérivées et de norme. C'est pourquoi, les enseignants mettent un accent fort sur la signification géométrique de ces différentes notions. Pour eux, il est plus important que les étudiants soient capables d'interpréter géométriquement les différents résultats qu'ils obtiennent lors de leurs calculs que les calculs en eux-mêmes. Ainsi, que ce soit avec l'enseignant lors des séances théoriques ou avec l'assistant lors des séances d'exercices, les étudiants sont amenés à devoir interpréter géométriquement les objets qu'ils manipulent et les résultats des différents calculs effectués.

Voici des exemples d'exercices proposés aux étudiants au sein de ce chapitre.

Exercice 2.3.4.

Calculez la courbure de la courbe $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$.

Exercice 2.3.46.

Soit $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la courbe paramétrée définie par : $\alpha(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t), \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t), \cos(t)\right)$.

① La courbe α est-elle paramétrée par longueur d'arc ?

② Calculez la courbure de cette courbe en un point $\alpha(t)$.

③ Esquissez l'image de la courbe α.

Pour ces deux exercices, il faut vérifier que la courbe donnée est bien une courbe régulière paramétrée par longueur d'arc. Autrement dit, il faut vérifier pour chacun des points de la courbe l'existence d'un vecteur vitesse tangent à la courbe et qu'elle est parcourue à la vitesse constante 1. Dans les deux exercices, la courbure des courbes vaut 1. Il est important de comprendre, d'un point de vue géométrique, qu'étudier la courbure d'une courbe en un point revient à analyser la variation de la direction du vecteur vitesse au voisinage de ce point. Selon Pressley (2010), « The curvature measures the extend to which a curve is not contained in a straight line (so that straight lines have zero curvature) » (p. 25). Cette interprétation géométrique du concept de courbure d'une courbe est

souvent utilisée par les enseignants. Comme dit précédemment, les calculs sont moins importants que l'interprétation géométrique. C'est pourquoi, nous demandons toujours aux étudiants, même si la question ne le précise pas toujours explicitement, d'esquisser les courbes avec lesquelles ils travaillent pour voir si les résultats obtenus sont sensés. Dans les deux exercices, l'image de la courbe est un cercle centré en $(0,0)$ et de rayon 1. Il est donc normal d'avoir une courbure constante qui dépend du rayon du cercle ; plus celui-ci est grand et plus la courbure est petite, plus celui-ci est petit et plus la courbure est grande.

Le deuxième chapitre du cours aborde les notions de surfaces. En particulier nous voulons, tout comme pour les courbes, calculer la courbure d'une surface en un point de celle-ci. Les surfaces sont définies de deux façons différentes : soit par les courbes de niveaux, soit par les cartes locales. Quelle que soit la définition utilisée, nous voulons que les étudiants soient capables de déterminer la courbure de Gauss et la courbure normale de celle-ci. Encore une fois, l'interprétation géométrique des résultats, des notions et des objets manipulés est centrale dans ce chapitre. Nous donnons les définitions fournies aux étudiants des différentes notions nécessaires à la compréhension de nos propos.

Définition 5 (Surface définie par une courbe de niveau)**.** *Une courbe de niveau est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ de la forme $f^{-1}(c) = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x_1,x_2,x_3) = c\}$, où $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une fonction infiniment différentiable et $c \in \mathbb{R}$.*

Définition 6 (Surface définie par une paramétrisation)**.** *On dit que $\mathrm{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ est une surface si et seulement si pour tout point $p \in \mathrm{S}$, il existe $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un ouvert (de $\mathbb{R}^2$) et $W \subseteq \mathbb{R}^3$ un ensemble ouvert (de $\mathbb{R}^3$) contenant p tels que U et $\mathrm{S} \cap W$ sont homéomorphes (i.e. il existe une bijection continue $\varphi : U \to \mathrm{S} \cap W$ telle que φ^{-1} est également continue).*

Une carte locale ou une paramétrisation locale de $\mathrm{S} \cap W$ est donnée par (U, φ). La surface S est décrite par un atlas c'est-à-dire par une collection de cartes locales dont l'union des images couvre la surface.

Définition 7 (Surface régulière)**.** *Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction infiniment différentiable et $c \in \mathbb{R}$. La courbe de niveau $f^{-1}(c)$ est dite régulière si et seulement si pour tout $p \in f^{-1}(c)$, on a $\mathrm{d}f(p) \neq 0$.*

Définition 8 (Carte locale régulière)**.** *Une surface $\mathrm{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ est dite régulière si et seulement si pour tout point $p \in \mathrm{S}$, il existe $W \subseteq \mathbb{R}^3$ un ensemble ouvert (de $\mathbb{R}^3$) contenant p et (U, φ) une carte locale régulière de $\mathrm{S} \cap W$.*

Définition 9 (Surface régulière)**.** *Soient $\mathrm{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ une surface (localement paramétrée), $p \in \mathrm{S}$, $W \subseteq \mathbb{R}^3$ un ensemble ouvert (de $\mathbb{R}^3$) contenant p et (U, φ) une carte locale de $\mathrm{S} \cap W$. On dit que (U, φ) est régulière si et seulement si*

① *φ est infiniment dérivable ;*

② *$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$ sont linéairement indépendants, quel que soit $(u_0, v_0) \in U$.*

Dans ce chapitre, nous analysons la géométrie des surfaces régulières. Pour cela, la deuxième forme fondamentale nous permet d'étudier la courbure d'une surface. Par analogie avec le chapitre sur les courbes, la courbure d'une surface permet d'étudier localement comment la surface se comporte par rapport à un plan dont la courbure est nulle. Nous donnons toutes les définitions nécessaires à la compréhension de la deuxième forme fondamentale et de ce fait à la courbure normale et à la courbure de Gauss.

Définition 10 (Vecteurs tangents)**.** *Soient* S *une surface régulière,* $p \in \mathrm{S}$ *et* $v \in \mathbb{R}^3$*. On dit que* v *est un vecteur tangent à* S *en* p *si et seulement s'il existe une courbe* $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ *telle que* $\alpha(0) = p$ *et* $\dot{\alpha}(0) = v$*.*

Autrement dit, pour n'importe quel point de la surface S, nous pouvons toujours trouver une courbe vivant sur la surface passant par ce point et dont le vecteur considéré lui est tangent en ce point. L'ensemble des vecteurs tangents à la surface S en un point p de S est appelé l'espace tangent à S en p et est noté S_p. Cet espace est un espace vectoriel de dimension 2. Si la surface est définie par une courbe de niveau alors $S_p = \langle \mathrm{d}f(p) \rangle^{\perp}$. Si la surface est définie par une carte locale, une base naturelle de S_p est donnée par $\{E_1, E_2\}$, où $E_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $E_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$ avec $\varphi(u_0, v_0) = p$.

Le plan tangent à la surface S en un point p est donné quant à lui par $\mathrm{S}_p + p$. Il s'agit donc d'une translation de l'espace tangent de p. Nous considérons plus souvent le plan tangent que l'espace tangent en lui-même.

Un vecteur normal à la surface S en un point p sera tout simplement donné par une fonction $\mathbf{N} : S \to \mathbb{R}^3$ telle que $\langle \mathbf{N}(p), v \rangle = 0$ pour tout $v \in \mathrm{S}_p$.

Définition 11 (Surface orientée)**.** *Une surface régulière* S *est orientable s'il existe* $\mathbf{N}$ *un champ de vecteurs normaux, unitaires et différentiables sur* S*. Un tel champ de vecteurs est appelé une orientation de* S *et la paire* $(\mathrm{S}, \mathbf{N})$ *est appelée une surface orientée.*

Toutes les surfaces ne sont pas orientables. C'est le cas par exemple du ruban de Moëbius. Nous nous restreignons à l'étude des surfaces orientées au sein de ce cours.

Définition 12 (Application de Weingarten)**.** *Soient* $(\mathrm{S}, \mathbf{N})$ *une surface orientée et* $p \in \mathrm{S}$*. L'application de Weingarten de* S *au point* p *est la fonction* $W_p : \mathrm{S}_p \to \mathrm{S}_p$ *définie par* $W_p(v) = -\mathrm{d}\mathbf{N}(p)(v)$*.*

Cette application bilinéaire symétrique permet de mesurer la variation de la direction du vecteur normal $\mathbf{N}$ en un point $p \in \mathrm{S}$ dans toutes les directions $v \in \mathrm{S}_p$.

Définition 13 (Deuxième forme fondamentale)**.** *Soient* $(\mathrm{S}, \mathbf{N})$ *une surface orientée et* $p \in \mathrm{S}$*. La seconde forme fondamentale de* S *au point* p *est la forme bilinéaire symétrique* $\mathrm{II}_p : \mathrm{S}_p \times \mathrm{S}_p \to \mathbb{R}$ *définie par* $\mathrm{II}_p(u, v) = \langle W_p(u), v \rangle$*.*

Définition 14 (Courbure normale)**.** *Soient* $(\mathrm{S}, \mathbf{N})$ *une surface orientée,* $p \in \mathrm{S}$ *et* $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathrm{S}$ *une courbe telle que* $\alpha(0) = p$*. La courbure normale de* S *de la courbe* α *au point* p *est notée* κ_n *et définie par* $\kappa_n = \langle \ddot{\alpha}(0), \mathbf{N}(p) \rangle$*.*

Théorème 15. *Soient* $(\mathrm{S},\mathbf{N})$ *une surface orientée,* $p \in \mathrm{S}$ *et* $\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathrm{S}$ *une courbe paramétrée par longueur d'arc telle que* $\alpha(0) = p$ *et* $\dot{\alpha}(0) = v$*. Si* κ_n *représente la courbure normale de* S *de la courbe* α *au point p, alors* $\kappa_n = \mathrm{II}_p(v,v)$.

Ainsi, le théorème de Meusnier (15) dit que toutes les courbes de S paramétrées par longueur d'arc, passant par p et de vecteur tangent v auront toutes la même courbure normale. Pour déterminer la courbure normale d'une surface, il suffit alors de calculer la deuxième forme fondamentale. D'un point de vue géométrique, nous sectionnons la surface S par un plan $\mathscr{N}(p,v)$ normal à S, passant par p et engendré par $\mathbf{N}(p)$ et $v \in \mathrm{S}_p$. Cette section normale de S au point p peut être paramétrée par une courbe régulière $\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathrm{S} \cap \mathscr{N}(p,v)$ telle que $\alpha(0) = p$ et $\dot{\alpha}(0) = v$. Ainsi, la courbure normale d'une surface en un point p dans une direction v peut être vue comme la courbure d'une courbe passant par p et de vecteur tangent v (au point p).

Du calcul de la deuxième forme fondamentale, nous pouvons déterminer les courbures principales (extrema de la courbure normale) et la courbure de Gauss (moyenne géométrique des courbures principales).

Définition 16 (Courbure de Gauss)**.** *Soient* $(\mathrm{S},\mathbf{N})$ *une surface orientée,* $p \in \mathrm{S}$ *et* M_W *la matrice naturellement associée à l'application de Weingarten en p. La courbure de Gauss de* S *en p, notée* K_p *est définie par* $K_p = det(M_W)$.

Définition 17 (Courbures principales)**.** *Soient* $(\mathrm{S},\mathbf{N})$ *une surface orientée,* $p \in \mathrm{S}$ *et* M_W *la matrice naturellement associée à l'application de Weingarten en p. Les courbures principales de* S *en p, notées* κ_1 *et* κ_2 *sont les valeurs propres de* M_W*. Les vecteurs propres de* M_W *sont appelés directions principales.*

La courbure de Gauss est alors donnée par $K_p = \kappa_1 \cdot \kappa_2$ où κ_1, κ_2 sont les courbures principales. Les courbures principales correspondent aux courbures des courbes obtenues en sectionnant la surface dans les directions principales. Le signe de la courbure de Gauss (et donc des courbures principales) permet de déterminer le type de points appartenant à la surface étudiée [2].

Définition 18. *Soient* $(\mathrm{S},\mathbf{N})$ *une surface orientée et* $p \in \mathrm{S}$.

① *On dit que p est un* ***point elliptique*** *si* $K_p = \kappa_1 \cdot \kappa_2 > 0$.

② *On dit que p est un* ***point hyperbolique*** *si* $K_p = \kappa_1 \cdot \kappa_2 < 0$.

③ *On dit que p est un* ***point parabolique*** *si* $K_p = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = 0$ *et* $\kappa_1 \neq 0$ *ou* $\kappa_2 \neq 0$.

④ *On dit que p est un* ***point planaire*** *si* $K_p = \kappa_1 = \kappa_2 = 0$.

Selon le type de points, nous avons une idée du comportement de la surface. Par exemple, si $K_p = \kappa_1 = \kappa_2 = 0$ alors la surface se comporte localement comme un plan. En effet, les courbures principales sont nulles ce qui amène, lorsque nous sectionnons la surface dans les directions principales, à définir deux courbes dont la courbure est nulle,

2. Nous n'entrons pas dans les détails mathématiques car ils n'éclairent en rien nos propos pour la suite du chapitre. Ces détails se trouvent à la page 193 du (Pressley, 2010).

c'est-à-dire deux droites. Si $K_p = 0$ avec $\kappa_1 = 0$ et $\kappa_2 \neq 0$ ou $\kappa_1 \neq 0$ et $\kappa_2 = 0$ alors la surface se comporte localement comme un cylindre. Ce cas est illustré à la figure I.1. Si $K_p > 0$ alors soit $\kappa_1 < 0$ et $\kappa_2 < 0$, soit $\kappa_1 > 0$ et $\kappa_2 > 0$. Dans ce cas, la surface se comporte localement comme une paraboloïde comme l'illustre la figure I.2. Si $K_p < 0$ alors soit $\kappa_1 < 0$ et $\kappa_2 > 0$, soit $\kappa_1 > 0$ et $\kappa_2 < 0$. Dans ce cas, la surface se comporte localement comme une paraboloïde hyperbolique comme l'illustre la figure I.3 [3].

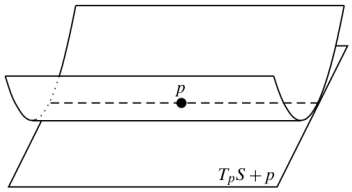


FIGURE I.1 – Les points paraboliques (Bär, 2010).

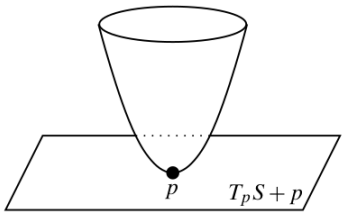


FIGURE I.2 – Les points elliptiques (Bär, 2010).

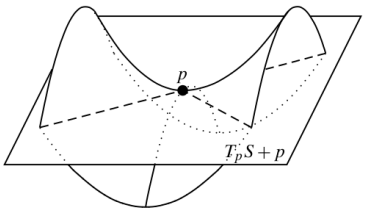


FIGURE I.3 – Les points hyperboliques (Bär, 2010).

Voici des exemples d'exercices proposés aux étudiants au sein de ce chapitre.

Exercice 3.5.52.

Soient $U = (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, \pi)$ et $\varphi : U \to \varphi(U)$ une paramétrisation locale d'une surface régulière S définie par : $\varphi(u,v) = (\cos(u)\cos(v), \cos(u)\sin(v), \sin(u))$. Calculez la deuxième forme fondamentale et donnez une interprétation géométrique.

Extrait d'une évaluation

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^2 + z^2$ et la surface $S = f^{-1}(1)$. Calculez la deuxième forme fondamentale et esquissez la surface S.

3. Sur ces figures T_pS est l'espace tangent à la surface S en p que nous notons S_p.

Il est demandé dans ces deux exercices de calculer la deuxième forme fondamentale. La seule différence entre les deux énoncés concerne la définition de surface utilisée : carte locale ou courbe de niveau. Dans les deux cas, la matrice associée à l'application de Weingarten doit être déterminée. Les calculs s'effectuent comme suit :

□ Exercice 3.5.52.
Soit $p \in \mathrm{S}$. Nous avons besoin de connaître une base de l'espace tangent S_p. Nous avons :

$$\mathrm{d}\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(u)\cos(v) & -\sin(v)\cos(u) \\ -\sin(u)\sin(v) & \cos(v)\cos(u) \\ \cos(u) & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $S_p = \langle E_1, E_2 \rangle$ avec $E_1 = \big(-\sin(u)\cos(v), -\sin(u)\sin(v), \cos(u)\big)$ et $E_2 = \big(-\sin(v)\cos(u), \cos(v)\cos(u), 0\big)$.
Nous avons : $\mathbf{N}(p) = \dfrac{E_1 \times E_2}{\|E_1 \times E_2\|} = \big(-\cos(v)\cos(u), -\sin(v)\cos(u), -\sin(u)\big)$.
Nous obtenons : $W_p(E_1) = -\big(\sin(u)\cos(v), \sin(u)\sin(v), -\cos(u)\big)$ et $W_p(E_2) = -\big(\sin(v)\cos(u), -\cos(v)\cos(u), 0\big)$.
Dans la base $\{E_1, E_2\}$, nous avons : $W_p(E_1) = E_1 + 0E_2$ et $W_p(E_2) = 0E_1 + E_2$.
Donc :

$$M_W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous constatons que selon la paramétrisation donnée, les calculs peuvent devenir longs et compliqués. Cela appuie le fait qu'il est important pour les étudiants d'interpréter géométriquement les résultats obtenus. De la matrice M_W, nous pouvons dire que les courbures principales sont toutes les deux positives et égales à 1. La courbure normale de la surface est donc égale à 1. La courbure de Gauss est strictement positive. Tous les points p de la surface sont alors des points elliptiques (figure I.2). Les étudiants sont amenés à esquisser la surface étudiée. Il s'agit ici d'une sphère centrée en $(0,0,0)$ et de rayon 1. Il est évident que toute section normale de la sphère décrira un cercle de rayon 1. De plus, le chapitre sur les courbes permet de confirmer que la courbure d'un cercle de rayon 1 est 1. Les résultats sont ainsi confrontés à la surface étudiée.

□ Extrait d'une évaluation.
Soit $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathrm{S}$. Nous avons besoin de connaître une base de l'espace tangent S_p. Nous avons $\mathrm{d}f(x,y,z) = (2x, 0, 2z)$. Ainsi, $S_p = \langle \mathrm{d}f(p) \rangle^{\perp} = \langle E_1, E_2 \rangle$ où $E_1 = (0,1,0)$ et $E_2 = (-p_3, 0, p_1)$.
Puisque $\mathbf{N}(p) = \frac{\mathrm{d}f(p)}{\|\mathrm{d}f(p)\|}$, nous avons : $\mathbf{N}(p) = (p_1, 0, p_3)$. De ce fait,

$$\mathrm{d}\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où, $W_p(E_1) = (0,0,0)$ et $W_p(E_2) = -(p_3, 0, p_1)$. Dans la base $\{E_1, E_2\}$, nous avons : $W_p(E_1) = 0E_1 + 0E_2$ et $W_p(E_2) = 0E_1 - E_2$.

Donc :

$$M_W = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas d'une courbe de niveau, les calculs peuvent également devenir très vite longs et compliqués. De la matrice M_W, nous pouvons dire qu'une courbure principale est nulle et que l'autre courbure principale est strictement négative. La courbure normale de la surface varie entre -1 et 0 selon le point de la surface considéré. La courbure de Gauss est donc nulle. Tous les points p de la surface sont alors des points paraboliques (figure I.1). La surface étudiée ici est un cylindre. Nous pouvons voir la surface comme un empilement de cercles centrés en $(0, y, 0)$ avec $y \in \mathbb{R}$ et de rayon 1. Une section normale de la surface donnera un des cercles. Cette courbe correspond à la courbure principale -1. Le signe « - » indique qu'il y a un angle de 180° entre le vecteur normal à la surface et le vecteur normal à la courbe. L'autre section normale de la surface donnera des droites. Ceci correspond à la courbure nulle.

Nous constatons qu'il est important de confronter les résultats à la surface étudiée mais nous notons également que les résultats trouvés peuvent aussi aider à la déterminer. En effet, dans les deux exercices, il est possible de décrire la surface à partir des courbures. Cela n'est pas forcément possible ou aisé pour toutes les surfaces étudiées. Il est donc préférable que les étudiants aient une idée préalable de celle-ci. Or, ce n'est pas forcément le cas comme expliqué au point suivant.

2 Difficultés des étudiants

Le cours de géométrie différentielle aborde de nombreuses notions amenant les étudiants à réaliser beaucoup de calculs. L'interprétation géométrique des différentes notions est alors nécessaire pour que les étudiants les comprennent. Nous avons mis en évidence le travail attendu des étudiants par les enseignants lors des exercices et des évaluations. La confrontation des résultats obtenus avec la surface étudiée est jugée importante au sein de ce cours. Or, pour y arriver, les étudiants doivent être capables d'esquisser la surface ou du moins de la visualiser, c'est-à-dire de se créer une image mentale de l'objet et de pouvoir effectuer des modifications de ces images mentales comme par exemple effectuer des rotations (Marchand, 2006).

Nous intervenons dans les travaux dirigés depuis presque sept ans. Nous constatons chaque année qu'il n'est pas évident pour la majorité des étudiants de visualiser la surface étudiée, les courbes décrites par les sections normales, et d'employer une démarche permettant d'y arriver. Les étudiants essayent généralement de s'en sortir avec une démarche de pointage (Duval, 1988). Il s'agit de trouver des points appartenant aux courbes et aux surfaces et de s'en donner suffisamment pour esquisser l'objet géométrique considéré. Cette démarche peut fonctionner dans $\mathbb{R}^2$ mais dans $\mathbb{R}^3$ elle est vite mise en défaut. Ils sont généralement démunis lorsque cette démarche est non efficace.

Par exemple, prenons la courbe $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $\alpha(t) = \big(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t), \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t), \cos(t)\big)$. Si nous nous donnons quelques valeurs de t, nous pouvons par exemple trouver les points $(0,0,1)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $(0,0,-1)$. Une fois ces points placés dans un repère orthonormé, il n'est pas évident de déterminer qu'ils sont situés sur un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1 dans le plan d'équation $x = y$. De plus, même s'ils y arrivent, ils ne sont pas forcément capables de fournir un argument le justifiant. Par contre, il est plus facile d'envisager le problème de la manière suivante. Nous pouvons constater que la courbe donnée vérifie l'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. C'est une équation de la sphère unité. Nous pouvons aussi ajouter que l'abscisse et l'ordonnée sont identiques, ce qui amène à sectionner la sphère par un plan dont une équation cartésienne est $x = y$. Cette démarche nous permet de trouver et de justifier qu'il s'agit d'un cercle.

Prenons des exemples pour les surfaces. Soient S_1 et S_2 deux surfaces. Nous définissons $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = z\}$ et S_2 par la paramétrisation $\varphi(u,v) = (u,v,u+v)$. Les étudiants ne sont généralement pas capables de visualiser ces deux surfaces au début du cours de géométrie différentielle. Une démarche possible et efficace pour la première surface est de fixer un plan et de regarder la courbe décrite dans ce plan (figure I.4). Si nous fixons le plan d'équation $x = 0$, l'équation devient $-y^2 = z$. La courbe décrite est une parabole. Si nous fixons le plan d'équation $y = 0$, l'équation devient $x^2 = z$. La courbe décrite est encore une parabole. Si nous fixons le plan d'équation $z = 0$, l'équation devient $x^2 - y^2 = 0$ ou encore $x^2 = y^2$ ou encore $x = y$ ou $x = -y$. Nous avons donc deux droites dans ce dernier cas.

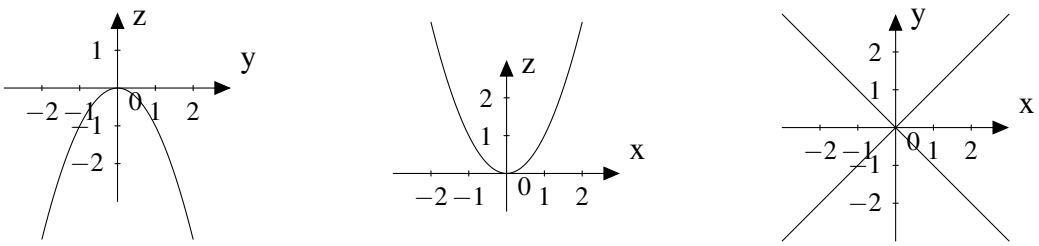


FIGURE I.4 – Exemple d'une démarche pour visualiser la surface S_1.

Une fois les trois courbes décrites, il faut visualiser la surface dans sa globalité et pouvoir dire qu'il s'agit d'une selle de cheval comme illustré à la figure I.5.

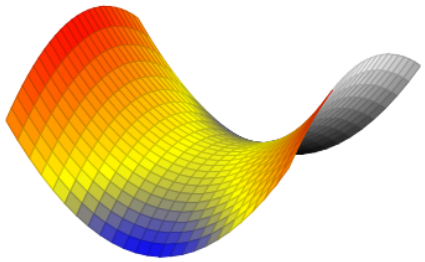


FIGURE I.5 – La selle de cheval.

Une démarche possible pour la deuxième surface est de fixer une des deux variables et de faire varier l'autre. Ainsi, si $u = 0$ alors nous avons $(0, v, v)$ avec $v \in \mathbb{R}$ et si $v = 0$ alors nous avons $(u, 0, u)$ avec $u \in \mathbb{R}$. Ceci correspond à deux droites. La surface décrite est un plan.

Nous constatons que la plupart des étudiants de BAB3 ne sont pas capables face à une équation, qu'elle soit paramétrique ou cartésienne, de visualiser directement l'objet géométrique associé et de mettre en œuvre une autre démarche que celle de pointage. Cette difficulté est importante au début du cours de géométrie différentielle et concerne aussi bien les courbes et les surfaces « simples » comme les droites et les plans que les courbes et les surfaces plus « compliquées » comme l'hélice et la selle de cheval. Elle est généralement surmontée au fur et à mesure des séances d'exercices après que nous ayons proposé les démarches présentées ci-dessus. Ceci peut expliquer notamment le taux de réussite élevé lors des évaluations finales.

Une autre difficulté des étudiants, non sans lien avec la précédente, est de décrire une surface ou une courbe par une équation. Par exemple, dans l'exercice suivant, la surface est donnée et il s'agit de lui trouver une paramétrisation.

Exercice 3.5.59

Soit S un tore de petit rayon 1 et de grand rayon 4.

① Donnez une paramétrisation de S.

② Montrez que la surface est régulière.

③ Calculez la deuxième forme fondamentale en chaque point de S et donnez une interprétation géométrique.

Le travail consiste alors à déterminer la position du point p sur un petit cercle du tore (figure I.6) et ensuite de situer ce petit cercle sur le tore (figure I.7).

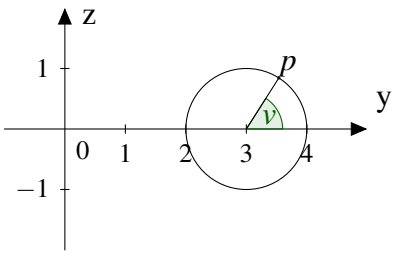


FIGURE I.6 – Position du point p sur un petit cercle.

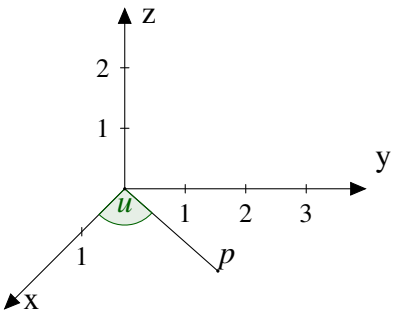


FIGURE I.7 – Position du cercle sur le tore.

La position du point p sur le petit cercle dans le plan Oyz est donnée par $\big(3 + \cos(v), \sin(v)\big)$. Nous avons ainsi les coordonnées du point p projeté dans le plan Oxy.

Une carte locale de la surface est donnée par :

$$\varphi(u,v) = \Big(\big(3+\cos(v)\big)\cos(u), \big(3+\cos(v)\big)\sin(u), \sin(v)\Big).$$

La plupart des étudiants restent bloqués face à ce genre d'exercices. Ils ne parviennent pas à établir une démarche permettant de déterminer une paramétrisation de la surface. Bien qu'ils soient capables de se représenter et de dessiner la surface en question, ils rencontrent des difficultés à la décrire par une équation. Ainsi, la visualisation, au sens de Marchand (ibid.), semble problématique chez la plupart des étudiants puisqu'ils ne parviennent pas à modifier leurs images mentales dans le but de construire une telle démarche. La description des objets géométriques par une équation pose des difficultés aux étudiants et ce bien après que nous ayons travaillé ce genre d'exercices en classe.

3 Premier questionnement

Nous avons mis en évidence les notions et les objectifs du cours de géométrie différentielle dans lequel nous intervenons. Nous y avons repéré depuis de nombreuses années une difficulté récurrente chez nos étudiants à pouvoir décrire un objet géométrique (courbe ou surface) à partir d'une équation (paramétrique ou cartésienne) et à associer une équation à un objet géométrique donné. Dans la suite de ce travail, nous utilisons le terme « **interprétation géométrique** » d'une équation pour l'association d'une équation à un objet géométrique et réciproquement. Par exemple, si un étudiant est capable de décrire l'équation $x^2+y^2+z^2=1$ comme étant la sphère unité et de représenter la sphère unité par l'équation $x^2+y^2+z^2=1$ alors nous dirons que l'étudiant interprète géométriquement les équations. La **démarche d'interprétation géométrique** sera associée à la démarche mise en œuvre pour interpréter géométriquement les équations.

Comme nous l'avons expliqué, la majorité des étudiants se limite à une démarche de pointage pour décrire un objet géométrique à partir d'une équation. Cette méthode peut être efficace dans certains cas mais pas dans tous. Elle ne permet pas non plus de pouvoir représenter un objet géométrique à partir d'une équation. Nous en déduisons que la démarche d'interprétation géométrique n'est pas acquise chez la plupart de nos étudiants. En outre, cette difficulté à interpréter géométriquement les équations se pose pour presque tous les objets géométriques abordés au sein du cours dont il est question ici[4]. En effet, elle concerne aussi bien des objets géométriques déjà rencontrés à de nombreuses reprises par les étudiants dans leur parcours scolaire (secondaire et universitaire) que des objets géométriques nouveaux (par exemple le tore). Parmi les objets géométriques connus, les notions de droites et de plans dans l'espace ne semblent pas maîtrisées par la plupart de nos étudiants de BAB3. Celles-ci sont pourtant introduites dans l'enseignement secondaire et retravaillées à l'université. Nous nous sommes donc intéressée à l'enseignement de ces notions afin de mieux comprendre la difficulté de nos étudiants à interpréter géométriquement des équations.

4. Cette difficulté a également été repérée dans les travaux de Trigueros et Martinez-Planell (2010) sur les représentations géométriques des fonctions à deux variables.

Nous nous sommes dans un premier temps intéressée au cours de Mathématiques élémentaires dans lequel les notions de droites et de plans sont explicitement travaillées avec les étudiants de BAB1. Nous avons analysé la façon dont ces notions sont abordées et le travail proposé sur l'interprétation géométrique des équations. Un diagnostic de ce cours nous aide à mieux cerner et identifier les difficultés que les étudiants peuvent rencontrer et déterminer également certaines spécificités de ces notions. Il fait l'objet du chapitre suivant.

Chapitre II

Premières spécificités des notions enseignées

Nous nous intéressons à l'enseignement des notions de droites et de plans dans l'espace. Un de nos objectifs est de mieux comprendre la difficulté repérée chez nos étudiants de BAB3 à interpréter géométriquement des équations. Pour ce faire, nous cherchons à étudier le travail effectivement proposé sur ces notions lorsqu'elles sont abordées dans l'enseignement secondaire. Dans la perspective de mener une étude de terrain intégrant notamment l'expérimentation d'une séquence d'enseignement, nous avons besoin de constituer une référence mathématique décrivant les spécificités des notions ciblées. Ce type d'analyse constitue ce que nous appelons une étude de relief, au sens de Pariès et al. (2007) sur les notions à enseigner ; elle guidera nos futures analyses didactiques. Dans ce chapitre, nous expliquerons tout d'abord en quoi le fait de croiser des études cognitive, épistémologique et curriculaire permet de mettre du relief sur les notions à enseigner. Dans notre recherche, la dimension cognitive est étudiée via l'analyse d'un cours de BAB1 au sein de notre université dont un des objectifs est notamment de faciliter la transition secondaire-université. Après avoir précisé le contexte de ce cours, nous introduisons quelques outils didactiques tels que les cadres (au sens de Douady, 1986) et les registres (au sens de Duval, 1993) pour nous aider dans notre diagnostic du cours. Nous pouvons alors inférer des éléments sur la conceptualisation visée par cet enseignement pour ces notions.

1 Mettre du relief sur les notions à enseigner

Comme nous l'avons souligné au chapitre I, la démarche d'interprétation géométrique des équations n'est pas acquise par la majorité des étudiants de BAB3. Nous nous attachons à mieux comprendre les difficultés qu'ils rencontrent, en particulier pour les notions de droites et de plans dans l'espace. Ces notions sont introduites pour la première fois dans l'enseignement secondaire. Nous nous fixons comme objectif de nous rendre sur le terrain et d'analyser la façon dont ces notions sont enseignées ainsi que le travail proposé par les enseignants aux élèves quant à l'interprétation géométrique des équations. Or, ces analyses ne se mènent pas sans avoir articulé au préalable une ré-

flexion sur les mathématiques à enseigner et leur enseignement effectif (Robert, 2008). Cette réflexion globale sur l'enseignement des notions, nommée en didactique le relief sur les notions à enseigner (Pariès et al., ibid.), permet de construire un savoir [1] de référence, au sens de Rogalski et Samurçay (1994), qui va servir de balise pour toute notre recherche.

Pour construire cette référence, nous réalisons dans un premier temps un diagnostic du cours de Mathématiques élémentaires de BAB1 dans lequel les notions de droites et de plans dans l'espace sont travaillées. Ce diagnostic nous permet notamment de faire un état des lieux des connaissances [2] mathématiques qui peuvent être mobilisées dans le chapitre de la géométrie analytique dans l'espace. Il nous permet également de pointer les premières spécificités du savoir enseigné dans notre institution. Or, l'enseignement secondaire et l'université sont deux institutions ayant leur propre mode de fonctionnement et probablement des exigences différentes. Nous devons donc nous dégager du contexte institutionnel auquel notre diagnostic est soumis. Afin de préciser les spécificités du savoir enseigné, indépendamment du contexte institutionnel, il est nécessaire d'étudier le processus de transposition didactique, au sens de Chevallard (1991). Ce processus permet de caractériser le décalage qu'il peut y avoir entre le savoir savant tel qu'il peut exister dans la sphère des mathématiciens, et le savoir à enseigner que nous retrouvons notamment dans les programmes et les manuels scolaires. Il met également en évidence les transformations subies par le savoir savant, désigné comme savoir à enseigner, le rendant apte à prendre place parmi les objets d'enseignement. Le processus de transposition didactique nous amène donc à étudier à la fois le savoir savant et le savoir à enseigner.

Pour étudier le savoir savant, nous adoptons une posture de didacticienne des mathématiques et non d'historienne. Ce qui nous intéresse particulièrement, ce sont la genèse et le développement des notions de droites et de plans dans l'histoire. Comme le souligne Dorier (2000a), il est important dans une analyse didactique de :

> « prendre en compte l'évolution et la constitution historique du savoir mathématique dans la sphère savante et ses rapports avec la constitution du texte du savoir enseigné » (p. 9).

Il s'agit donc de réaliser dans un second temps une analyse historique de l'émergence des notions de géométrie analytique mais également d'y incorporer une réflexion sur la nature des notions en jeu. En effet, une analyse épistémologique aide « la didactique à se déprendre de l'illusion de transparence des objets qu'elle manipule au niveau du savoir » et aide « le didacticien à se dégager des représentations épistémologiques erronées que tend à induire sa pratique d'enseignant » (Artigue, 1989, p. 2). L'analyse épistémologique aide alors à prendre du recul par rapport au savoir enseigné. Nous revenons plus

1. Selon Margolinas (2015), un savoir est une construction sociale et culturelle qui vit dans une institution. Il est dépersonnalisé, décontextualisé, détemporalisé, formulé, formalisé, validé et mémorisé.

2. Selon Robert, Penninckx et Lattuati (2012), les connaissances réfèrent à ce que l'enseignant introduit (ou a été introduit à un moment du cursus) telles que les définitions, les propriétés et les méthodes. Les connaissances correspondent alors à ce que l'élève peut disposer pour résoudre un exercice et à ce que l'enseignant essaie de leur faire apprendre. Dans ce travail, nous parlons de « connaissances » pour les élèves et de « savoirs » pour les textes mathématiques.

en détails sur les principes et les résultats de l'analyse historique et épistémologique au chapitre III.

Lorsque l'étude historique et épistémologique a été réalisée, nous étudions les transformations que le savoir savant a subi en vue d'être enseigné. Pour ce faire, nous nous centrons enfin sur le savoir à enseigner. L'analyse de ce savoir passe notamment par une étude des programmes auxquels l'enseignement secondaire est soumis. Nous pouvons alors pointer les notions qui sont enseignées ainsi que leur répartition tout au long du cursus. Cependant, il ne s'agit pas de lire les programmes de manière linéaire car ceux-ci ne renseignent pas suffisamment sur ce qui est en jeu pour une notion (Pariès et al., 2007). Nous cherchons plutôt à préciser les relations entre les notions vues au cours d'une même année et les relations entre les notions vue d'une année à l'autre. Autrement dit, nous essayons d'avoir une idée plus claire de l'organisation des connaissances en géométrie analytique dans l'espace. C'est pourquoi nous étudions, via les programmes, les niveaux de conceptualisation des connaissances attendues pour une notion. Robert (2003a) définit un niveau de conceptualisation comme un domaine de travail assez important et cohérent qui est spécifié par des fondements (axiomes), un arsenal (objets, définitions, théorèmes, propositions), des modes de raisonnements, des démarches et un niveau de rigueur ainsi qu'un corps de problèmes. L'analyse des programmes en termes de niveaux de conceptualisation permet de préciser ce qui est à conceptualiser à un moment donné du cursus scolaire en fonction des spécificités des notions mathématiques pointées dans notre étude du savoir enseigné et du savoir savant. Nous revenons sur cette analyse curriculaire au chapitre IV.

Le savoir de référence qui guide notre recherche est construit sur la base d'un croisement entre l'étude cognitive, l'étude historique et épistémologique et l'étude curriculaire. Nous pouvons alors grâce à cette référence

> « mettre en perspective les notions et les problèmes qu'elles permettent d'aborder, réfléchir à leur disponibilité à un niveau scolaire donné, comprendre l'évolution sous-jacente à la progression des programmes » (Robert, 2008, p. 47).

2 Diagnostic du cours de Mathématiques élémentaires

Nous avons choisi d'analyser le cours de Mathématiques élémentaires pour plusieurs raisons. Tout d'abord, il s'agit d'un des rares cours dans notre département abordant la géométrie et en particulier la géométrie analytique. Ensuite, ce cours est organisé en début de première année universitaire avant tout autre cours de mathématiques. Il se place alors dans le contexte de la transition secondaire-université. Puisqu'un des objectifs des membres du Département de Mathématique est d'essayer de mieux prendre en compte les difficultés des étudiants lors de cette transition, ce cours vise à reprendre des notions abordées dans l'enseignement secondaire. Enfin, un test a lieu chaque lundi matin et ce pendant toute la durée du cours (6 semaines). Nous avons alors la possibilité

d'accéder aux réponses des étudiants de BAB1 des filières mathématique, physique et informatique (environ une centaine d'étudiants) concernant les questions de géométrie analytique. L'analyse des réponses peut nous permettre d'obtenir plus d'informations quant à leurs difficultés. Dans cette section, nous revenons dans un premier temps sur les ruptures engendrées par la transition secondaire-université. Nous mettons en évidence la façon dont le cours de Mathématiques élémentaires essaye de les prendre en compte. Nous réalisons ensuite le diagnostic du cours pour le chapitre sur les droites et les plans dans l'espace.

2.1 La transition secondaire-université

De nombreux travaux en didactique abordent la transition entre l'enseignement secondaire et l'université (Dieudonné, Droniou, Durand-Guerrier, Ray, & Theret, 2011 ; Gueudet, 2008a, 2008b, 2008c ; Lalaude-Labayle, 2016 ; Najar, 2010 ; Praslon, 2000 ; Robert, 1998 ; Trouche, Cazes, Jarraud, Rauzy, & Mercat, 2011). Nous exposons certaines ruptures mises en avant par ceux-ci.

Selon Artigue (2004), l'institution du secondaire et l'institution universitaire développent des cultures mathématiques qui leur sont propres, caractérisées par les savoirs et les savoir-faire en jeu, des modes de pensées et des pratiques différents. Gueudet, Bosch, diSessa, Kwon, et Verschaffel (2016) les caractérisent de la façon suivante :

> « When we consider the level of the discipline, investigations characterize university mathematics as being more focused on the theoretical organization of mathematical content, the foundations of knowledge, and presenting proofs and theorems as tools to approach problems. In contrast, secondary mathematicsstresses the production of results and the pratical aspect of mathematical activites, assigning a more "decorative" role to axioms, definitions, and proofs » (p. 19).

Selon Artigue (ibid.), la transition entre l'enseignement secondaire et l'université consiste en une transition entre ces deux cultures mathématiques. Praslon (ibid.) et Gueudet (2008a, 2008b, 2008c, 2016) ont mis en évidence des éléments liés à ce changement culturel pouvant induire des ruptures entre les deux institutions. Nous revenons sur ces éléments.

►► Le rôle des cours magistraux

Un élément concerne le nouveau rôle qui est attribué aux cours universitaires. En effet, dans le secondaire, la plupart des séances contiennent à la fois des moments dédiés à l'exposition du savoir et à la résolution des exercices. À l'université, il y a une séparation nette entre les séances dédiées aux moments de cours et les séances d'exercices. Praslon (ibid.) parle de dialectique cours/exercices à l'université et de relation descendante entre les cours et les exercices dans le secondaire. De plus, le temps d'enseignement accordé à l'exposition des savoirs est moindre que celui laissé pour les exercices au lycée. L'apprentissage des techniques peut alors prendre le pas sur le développement du sens des

notions. Or, à l'université, il y a une accélération du temps didactique : le temps accordé aux cours magistraux est important et le travail des techniques est souvent plus restreint.

►► Les pratiques mathématiques

Un autre élément mis en évidence est l'évolution des pratiques mathématiques. Lors de la transition secondaire-université, Tall (1991) explique qu'il y a un changement du mode de pensée à opérer. Les étudiants doivent passer d'un mode de pensée élémentaire à un mode de pensée mathématique avancé (AMT). Il déclare :

> « The move from elementary to AMT involves a significant transition : that from describing to defining, from convincing to proving in a logical manner based on definitions » (idid., p. 20).

Ainsi, les pratiques mathématiques des étudiants doivent pouvoir évoluer vers des pratiques mathématiques expertes. En effet, ce sont ces pratiques expertes qui, selon Robert (1998), servent de modèle aux exigences et attentes des enseignants du supérieur envers leurs étudiants. Nous allons caractériser ces pratiques.

Les experts ont un grand nombre de connaissances qui sont organisées et disponibles (Robert, ibid.). Ils sont en particulier capables de transposer un problème donné dans un contexte précis à un autre, de réaliser des mises en relation, de faire des généralisations, des particularisations, de faire varier les paramètres, les hypothèses, les domaines d'application et les modes d'écritures, … Ces capacités témoignent d'une certaine disponibilité des connaissances chez les experts. Ils peuvent aussi insérer les nouvelles connaissances acquises dans le stock de connaissances qu'ils possèdent déjà. Il y a alors une certaine organisation de leurs connaissances. De plus, ils possèdent dans leur stock de connaissances un bestiaire de situations de référence qui jouent le rôle de terrain d'expérimentation pour tester ou conjecturer sur des situations nouvelles. Cela permet de mettre en œuvre de nombreux types de questionnements tels que les « questions d'existence, d'unicité, d'exhaustivité » (Robert, ibid., p. 145) et d'avoir une sorte de contrôle interne. Finalement, la rédaction des raisonnements est tout aussi primordiale dans l'activité mathématique que le raisonnement lui-même. En effet,

> « le passage à l'écriture (avec le formalisme nécessaire) engendre à la fois une dynamique de questionnements plus précis, rendus possibles par la production écrite, visible, et une exigence de rigueur sur la chose écrite, notamment dans la phase finale, la rédaction définitive » (Robert, ibid., p. 145).

Ainsi, les étudiants acquièrent cette pensée mathématique plus avancée lorsque leurs connaissances deviennent organisées et disponibles, lorsqu'ils possèdent une plus grande quantité de situations de référence et lorsque le formalisme et la rédaction mathématiques ne leur posent plus de problèmes.

Les travaux de Sierpinska (2000) montrent également un changement des modes de pensée lors de la transition secondaire-université. Elle parle de « pensée pratique » et de « pensée théorique ». La pensée pratique consiste à effectuer des raisonnements basés sur une logique d'action comme par exemple tester avec des exemples une propriété. La pensée théorique est caractérisée par un réseau de connaissances organisées plutôt

que des agrégats d'idées et des raisonnements reposant sur les principes logiques et sémantiques. Selon l'auteure (ibid.), les mathématiciens utilisent les deux modes de pensée : la pensée pratique dans des contextes familiers et la pensée théorique pour aborder des problèmes nouveaux. Elle explique que la plupart des étudiants de première année universitaire ne semblent pas développer, contrairement aux experts, les deux modes de pensée. Le manque d'expérience en mathématiques peut amener ces étudiants à se limiter à la pensée pratique. Elle ajoute :

> « The enrichment of their mathematical experience along the years is likely to bring a natural solution to this problem. But this process might require a very long time » (Gueudet, 2008a, p. 241).

Pour Dreyfus (1999), les étudiants entrant à l'université doivent passer d'une vision mathématique basée sur les calculs et les techniques (la « pensée pratique » pour Sierpinska) à une vision mathématique fondée sur un ensemble de structures imbriquées les unes dans les autres (la « pensée théorique » pour Sierpinska). Ces auteurs, avec des vocabulaires différents, expliquent qu'un changement de mode de pensée est nécessaire chez les étudiants lors de la transition secondaire-université. Il est alors important que les étudiants rencontrent de nombreuses situations de référence pour favoriser le développement de la pensée théorique.

Au niveau des démonstrations, il y a également une évolution des pratiques mathématiques lors de cette transition. De nombreux travaux se sont intéressés à cette évolution et aux difficultés des étudiants à aborder les preuves et à manipuler les notions de logique et de théorie des ensembles pouvant s'y rapporter. Nous revenons sur quelques-uns de ces travaux. À l'université, les preuves deviennent plus complexes, plus longues et plus variées que celles réalisées dans l'enseignement secondaire (Robert, ibid.). De plus, de nouveaux types de problèmes sont abordés tels que les problèmes d'unicité ou d'existence. Ainsi, Moore (1994) cite plusieurs sources de difficultés que les étudiants peuvent rencontrer lors de la production de démonstrations telles que la méconnaissance des définitions à utiliser, l'élaboration d'exemples, l'entrée dans la preuve ou l'utilisation du langage formel. Epp (2003) confirme que de nombreux étudiants perçoivent l'enseignement universitaire comme un nouvel environnement dans lequel il est nécessaire de s'approprier un nouveau langage. Or, l'appropriation de ce nouveau formalisme ne va pas de soi chez les étudiants. Dorier (1997) parle « d'obstacle du formalisme ». Selon lui, l'insuffisance de connaissances en logique et en théorie des ensembles des étudiants explique leurs erreurs de manipulation du langage formel en algèbre linéaire. Najar (2010) va lui aussi dans ce sens :

> « le manque de maîtrise du langage ensembliste et la déficience dans les connaissances de logique élémentaire conduisent à des blocages dans la résolution de problèmes et rendent inopérantes les connaissances d'algèbre linéaire étudiées » (p. 44).

Cet obstacle du formalisme amène des difficultés chez les étudiants lors de l'introduction de l'algèbre linéaire. Nous sommes donc particulièrement attentive à ces difficultés lors de l'analyse du chapitre des droites et des plans dans l'espace. L'enseignement d'autres notions étudiées en première année est aussi impacté par cet obstacle du forma-

lisme. C'est le cas par exemple des suites numériques (Robert, 1982) et des premières notions de topologie (Bridoux, 2011). La transition secondaire-université amène donc les étudiants à devoir s'approprier un nouveau formalisme que ce soit dans les énoncés mathématiques, les définitions ou les preuves. Cette acquisition ne va pas de soi et pose des difficultés importantes pour comprendre les notions vues en première année d'université dans différents domaines.

Des travaux se sont alors concentrés sur les difficultés propres aux notions de logique et de théorie des ensembles. Chellougui (2004) dit qu'un grand nombre d'étudiants éprouve une insuffisance à contrôler la structure logique des énoncés mathématiques tant sur la syntaxe que sur la sémantique. La majorité des étudiants ne connait pas les lois et les règles de logique comme par exemple le principe incontournable du tiers exclu (une proposition est soit vraie, soit fausse) qui n'est pas toujours évident pour eux (Legrand, 1995). Au niveau des quantificateurs, les recherches sur leur manipulation sont nombreuses (Durand-Guerrier, 1996, 2005 ; Dieudonné et al., 2011 ; Chellougui, 2003, 2004). Nous citons par exemple les problèmes liés aux quantifications cachées, aux quantifications bornées et aux quantifications multiples. Mason (1996) explique que derrière des articles définis ou indéfinis se cache souvent un quantificateur existentiel ou universel et cela est généralement ignoré des étudiants. Les quantifications bornées font apparaître et disparaître une implication dans un énoncé mathématique. Par exemple, Durand-Guerrier (2005) donne la définition de la continuité d'une fonction f en un point a dans laquelle

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, \left(|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon\right)$$

peut s'écrire comme

$$\forall \varepsilon \Big(\varepsilon > 0 \Rightarrow \left(\exists \eta \left(\eta > 0 \wedge \forall x (|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon)\right)\right)\Big).$$

Selon elle, la quantification bornée n'aide pas les étudiants à comprendre la structure logique profonde des énoncés mathématiques. Chellougui (2003) explique qu'un grand nombre d'étudiants rencontrent des difficultés à donner du sens aux écritures dans lesquelles plusieurs quantificateurs apparaissent comme par exemple celles de la forme « pour tout, il existe » et « il existe, pour tout ». Selon elle (2004), cela s'explique notamment par le fait que la majorité des étudiants ne voit pas de différence sémantique entre ces deux formes d'énoncés. Najar (2015) conclut que ces « lacunes conduisent la majorité des étudiants à perdre le sens du langage symbolique qu'ils manipulent et entrainent un manque de contrôle sur la structure logico-déductive de la preuve » (p. 154).

D'autres difficultés, non sans lien avec celles mentionnées ci-dessus sur la logique, concernent les notions ensemblistes. Celles-ci, associées au vocabulaire et au symbolisme ensemblistes, sont aussi considérés comme des outils fondamentaux dans les pratiques mathématiques à l'université (Najar, 2012). Il est donc attendu des étudiants qu'ils apprennent à les maîtriser et à les utiliser à bon escient. Or, Dieudonné et al. (ibid.) ont également repéré des difficultés chez les étudiants novices renvoyant aux

aspects ensemblistes. En particulier, il semble que la plupart des étudiants rencontrent des difficultés « à concevoir un ensemble comme un nouvel objet mathématique sur lequel des assertions et des raisonnements peuvent être faits » (Dieudonné et al., ibid., p. 23). Ils confondent aussi facilement l'ensemble lui-même, sa description et les éléments lui appartenant. Cela peut engendrer des problèmes au niveau de la différenciation des symboles d'appartenance et d'inclusion.

Ainsi, l'évolution des pratiques mathématiques lors de la transition secondaire-université est importante. Des difficultés se posent aux étudiants lorsqu'ils sont confrontés aux démonstrations et au formalisme associé (quantificateurs, logique, notions ensemblistes). Ce formalisme faisant obstacle à l'apprentissage de nouvelles notions telles que l'algèbre linéaire et la topologie, il est important de proposer aux étudiants un enseignement spécifique de la logique rendant l'articulation des aspects syntaxique et sémantique explicite (Durand-Guerrier & Arsac, 2003).

►► Les objets d'enseignement

Un élément mis également en évidence par Praslon (2000) et Gueudet (2008a, 2008b, 2008c, 2016) pouvant provoquer des ruptures entre l'enseignement secondaire et l'université concerne l'évolution des objets d'enseignement. Najar (2010) précise qu'il y a un passage à effectuer entre les objets pré-construits dans l'enseignement secondaire à des objets définis de façon axiomatique et formelle à l'université. Pour mieux caractériser ces évolutions, Robert (1998) a introduit différents statuts que peut avoir une notion mathématique à enseigner. Pour chaque notion, il s'agit de se demander quelle est sa fonction et comment elle s'insère dans le paysage des connaissances que les étudiants ont déjà. Cela aide à préciser comment introduire et mettre en fonctionnement les nouvelles notions. Selon Robert (Vandebrouck, 2008), les nouvelles notions peuvent présenter trois caractères :

- le **caractère généralisateur** apparaît quand la nouvelle connaissance étend les connaissances antérieures. Par exemple, le produit scalaire et les opérations sur les vecteurs dans l'espace généralisent le produit scalaire et les opérations sur les vecteurs dans le plan.
- le **caractère formalisateur** apparaît lorsqu'un formalisme nouveau est introduit. Par exemple, la description d'un plan passant par l'origine du repère par un ensemble de vecteurs orthogonaux à un vecteur donné permet d'introduire un nouveau formalisme.
- le **caractère unificateur** apparaît quand la nouvelle connaissance unifie plusieurs connaissances que les étudiants ont déjà et qui jusqu'ici étaient traitées séparément. Par exemple, la notion d'espace vectoriel vue en BAB1 unifie plusieurs connaissances étudiées par les étudiants dans l'enseignement secondaire comme les droites et les plans.

Le type de la notion dépend fortement de la distance séparant les nouvelles connaissances de celles déjà acquises par les étudiants. Il est souvent déterminé par la combinaison de plusieurs de ces caractères. Il y a :

- les **extensions** de notions anciennes (avec ou sans accident). C'est le cas de celles qui possèdent le caractère généralisateur ou de celles qui se traduisent dans un formalisme qui étend un formalisme antérieur. Comme expliqué précédemment, la notion de produit scalaire dans l'espace est une extension sans accident de la notion de produit scalaire dans le plan.
- les **réponses à un problème** (RAP). C'est le cas de celles qui possèdent les caractères généralisateur et unificateur ou unificateur et formalisateur. Par exemple, le théorème de Pythagore donne une relation générale valable pour tous les triangles rectangles.
- les **notions formalisatrices, unificatrises et généralisatrices** (FUG). Elles permettent de généraliser et d'unifier des notions antérieures grâce à un nouveau formalisme. Par exemple, les suites numériques (Robert, 1982), les premières notions de topologie (Bridoux, 2011), la symétrie axiale (Chesnais, 2009), la distributivité (Constantin, 2014) et les notions d'algèbre linéaire (Dorier, 1997 ; Lalaude-labayle, 2016) sont des notions FUG.

Il est à noter que les notions FUG sont réputées pour provoquer des difficultés d'enseignement notamment parce qu'il est difficile de s'appuyer sur les connaissances antérieures des étudiants pour introduire le nouveau à cause de la trop grande distance les séparant. Nous avons déjà cité quelques difficultés liées uniquement à l'obstacle du formalisme. Ainsi, les difficultés des étudiants peuvent aussi dépendre du statut de la nouvelle notion introduite.

►► Le contrat didactique et l'autonomie

Un dernier élément mis en évidence est l'évolution du contrat didactique [3] et du degré d'autonomie des étudiants. Selon Brousseau (1998), l'enseignement secondaire et l'université ont des contrats didactiques différents et le passage de l'un à l'autre peut générer des ruptures. Selon Gueudet (2008c), le contrat didactique est visible à travers les horaires, les programmes, les textes d'exercices et de problèmes mais aussi des évaluations. Or, à l'université, puisqu'il n'existe pas de programmes établis, c'est à travers les exercices et les évaluations proposés aux étudiants que le contrat didactique peut être délimité. Grønbæk, Misfeldr et Winsløw (2009) soulignent également le rôle des évaluations dans la détermination du contrat. Selon eux, les étudiants acceptent les règles du contrat parce qu'ils pensent que tout ce que l'enseignant propose va les aider à réussir les examens. C'est pourquoi, ils considèrent les évaluations antérieures comme la référence principale de ce qui est attendu. Malheureusement, les contraintes institutionnelles à l'université font que ces évaluations questionnent bien souvent la reproduction de techniques. De ce fait, les étudiants se préparent aux évaluations en orientant leur travail personnel vers la reproduction de techniques. Lithner (2003) arrive aux mêmes conclusions pour les manuels universitaires : la majorité des exercices dans les manuels peut être traité grâce à des modes de raisonnements basés sur l'imitation ou la reproduction de techniques déjà utilisées. De ce fait, les étudiants développent souvent des

3. Le contrat didactique, défini par Brousseau (1990), contient les attentes respectives des maîtres et des élèves.

apprentissages superficiels, sans questionnement, en pensant que cela va les amener à la réussite au détriment d'apprentissages plus authentiques obligeant des questionnements (Robert, 1998). La logique de la réussite surpasse alors la logique de l'apprentissage.

Entrer dans une logique de l'apprentissage nécessite un certain degré d'autonomie et un travail personnel des étudiants plus importants à l'université que dans l'enseignement secondaire. Ce travail personnel se doit aussi d'être efficace pour être capable de résoudre des problèmes nouveaux (Robert, ibid.). L'évolution de l'autonomie entre les deux institutions a été étudiée par Praslon (ibid.) dans sa thèse sur la notion de dérivée. Selon lui, le degré d'autonomie est très différent entre les deux institutions. Il cite notamment les nombreuses aides fournies au lycée et le découpage (trop) important des exercices ne mettant plus en jeu que des applications immédiates de théorèmes ou de propriétés du cours. Il en conclut que la culture du lycée ne permet pas aux futurs étudiants de développer l'autonomie nécessaire, ainsi qu'une efficacité du travail personnel suffisante pour entrer à l'université.

►► Bilan

Nous avons montré que la transition entre l'enseignement secondaire et l'université se caractérise par plusieurs ruptures. Certaines portent sur les contenus mathématiques travaillés ou sur les pratiques mathématiques au sein des deux institutions. Les contenus sont plus nombreux et abstraits et ils nécessitent parfois des démarches reposant sur des raisonnements logiques qui ne sont pas toujours acquis ou explicités (Trouche et al., 2011). D'autres ruptures sont liées à une différence de contrat didactique entre les deux niveaux d'enseignement. Selon Bosch, Fonseca et Gascón (2004), cette différence de contrat constitue un obstacle d'origine didactique qui a pour conséquence de provoquer un dysfonctionnement à l'entrée de l'université dans les études mathématiques. Pour ces auteurs, des dynamiques entre les deux institutions sont nécessaires pour aider les étudiants à surmonter les difficultés et les obstacles qu'ils peuvent rencontrer. Artigue (2004) ajoute que cela ne peut se faire en rompant brutalement avec la culture du secondaire. C'est à l'institution du supérieur de déterminer comment aider les nouveaux venus à comprendre et à répondre aux attentes de l'université.

Certaines universités organisent des cours spécifiquement dédiés à améliorer cette transition. C'est le cas de l'Université de Mons qui a mis en place en 1999 le cours de Mathématiques élémentaires. Nous allons désormais revenir sur les objectifs de ce cours et nous mettons en évidence la manière dont il essaie de prendre en compte les différentes ruptures mentionnées ci-dessus. Nous devons également garder à l'esprit que certaines études sur ce type de cours montrent qu'en réalité ils ne permettent pas de faciliter l'entrée des étudiants dans la culture et les pratiques universitaires et creusent même davantage l'écart entre les deux institutions (Serrano, Bosch, & Gascón, 2007 ; Sierpinska, Bobos, & Knipping, 2008). C'est par exemple le cas des cours dont l'objectif est de compléter et d'approfondir les connaissances de base pour en parfaire la maîtrise sans vraiment laisser le temps aux étudiants d'adapter leurs pratiques (Gueudet, 2016).

2.2 Les objectifs du cours de Mathématiques élémentaires

Le Département de Mathématique de l'Université de Mons, conscient des difficultés rencontrées par les étudiants à leur entrée à l'université, a mis au point un dispositif [4] permettant aux étudiants d'être encadrés tout au long de la première année. Il vise à « les aider à acquérir le profil attendu tant dans la maîtrise des contenus mathématiques que dans le développement d'une certaine autonomie dans leur travail personnel et dans l'activité mathématique en général » (Bridoux, 2014). Ainsi, ce dispositif comporte plusieurs actions dont le cours de Mathématiques élémentaires et des séances de remédiation.

Le cours de Mathématiques élémentaires démarre le jour de la rentrée universitaire et se termine à la fin du mois d'octobre, soit six semaines. Il se déroule avant le début de tout autre cours de mathématiques tels que l'analyse et l'algèbre linéaire et est obligatoire pour tous les étudiants des filières mathématique, physique et informatique. Un des objectifs principaux est de s'assurer qu'ils maîtrisent les contenus essentiels pour s'approprier les autres cours de mathématiques. C'est pourquoi certaines notions enseignées dans l'enseignement secondaire sont reprises en y incorporant des exigences spécifiques aux mathématiques universitaires. Ainsi, les étudiants sont amenés, sur des notions qu'ils ont déjà rencontrées, à utiliser les notions de logique et de théorie des ensembles et à rédiger leurs raisonnements avec la rigueur attendue. Le cours semble alors tenir compte des difficultés liées aux démonstrations et au formalisme mathématique associés dont nous avons parlé au point 2.1. En effet, nous avons mentionné qu'une insuffisance de connaissances en logique et en théorie des ensembles chez les étudiants peut constituer un obstacle à l'apprentissage de nouveaux domaines tels que l'algèbre linéaire et la topologie. Le fait que le cours de Mathématiques élémentaires se déroule avant les autres cours et qu'il aborde certaines notions de logique et de théorie des ensembles permet d'aller dans ce sens.

Les séances de Mathématiques élémentaires intègrent à la fois des moments de cours et des moments dédiés aux exercices. Toutefois, les moments de cours occupent une place plus importante que dans l'enseignement secondaire. Nous remarquons qu'il y a une légère évolution du rôle des cours magistraux bien que la relation entre les moments de cours et les exercices soit encore descendante comme dans l'enseignement secondaire. L'accélération du temps didactique à l'université que nous avons relevée au point 2.1 semble donc moins importante dans ce dispositif.

Un autre objectif principal de ce cours est d'amener les étudiants à développer une méthode de travail régulière et efficace. Pour ce faire, deux actions sont mises en œuvre. Une évaluation est organisée chaque lundi matin dont la matière est cumulative. Le lundi de la deuxième semaine, les étudiants sont interrogés sur la matière vue pendant la première semaine du cours ; le lundi de la troisième semaine, ils sont interrogés sur la matière vue pendant deux semaines, … Ces évaluations comptent pour 20% de la note finale du cours. Cette première action amène les étudiants à s'investir dans le cours

4. Le dispositif a été élaboré en 2000 et a subi des évolutions au fil des années décrites dans (Bridoux, 2014).

et à fournir un travail régulier. De plus, les corrections de leurs tests sont accessibles avant le test de la semaine suivante pour qu'ils puissent prendre conscience de leurs difficultés. Cette action semble guider les étudiants vers une méthode de travail efficace pour l'université. La deuxième action consiste à proposer aux étudiants des exercices supplémentaires et à les faire corriger par l'enseignant sur demande. Ceci peut aussi amener les étudiants à augmenter leur degré d'autonomie et à développer une méthode de travail régulière et efficace avant d'aborder les autres cours de mathématiques.

Le Département de Mathématique est bien conscient qu'un seul cours ne suffit pas à combler toutes les difficultés et les manques observés chez les étudiants. Selon Bridoux (ibid.),

> « ce travail amorcé dans le cours de Mathématiques élémentaires montre d'emblée aux étudiants la nature de l'activité mathématique qui est attendue de leur part dans ce type d'études. Les habitudes à acquérir doivent ensuite faire l'objet d'un travail dans les autres cours en continuité avec celui entrepris dans ce premier cours » (p. 97).

C'est pourquoi, une autre action, facultative, prévue dans le dispositif consiste en des remédiations. Elles ont lieu de novembre à fin mai chaque lundi matin pendant 4 heures. Le sujet sur lequel elles portent est choisi par les étudiants. Une autonomie de plus en plus grande leur est aussi demandée. Nous ne nous attardons pas sur cette action car elle concerne principalement des cours de mathématiques plus avancés et n'aborde pas les droites et les plans dans l'espace.

En conclusion, le dispositif mis en place par le Département de Mathématique permet de ne pas avoir une scission brutale avec la culture de l'enseignement secondaire. En effet, le déroulement des cours est assez similaire à ceux de l'enseignement secondaire et amène une accélération du temps didactique à l'université moins rapide. De plus, bien qu'une plus grande autonomie soit laissée aux étudiants, les exercices et les évaluations régulières font que le contrat didactique au sein de ce cours n'est pas trop éloigné de celui dans le secondaire. Le cours de Mathématiques élémentaires laisse le temps aux étudiants de s'adapter à l'université en les aidant à développer une méthode de travail régulière et efficace avant d'introduire de nouvelles notions. Nous avons dès lors mis en évidence la manière dont ce cours prend en compte une grande partie des ruptures mentionnées au point 2.1. Nous allons désormais présenter quelques outils didactiques nécessaires pour analyser le chapitre des équations de droites et de plans dans l'espace au sein de ce cours.

2.3 Les outils d'analyse du cours de Mathématiques élémentaires

Nous venons de présenter les objectifs du cours de Mathématiques élémentaires. Nous voulons désormais réaliser un diagnostic de ce cours afin de mieux comprendre la difficulté que nous avons repérée chez de nombreux étudiants à interpréter géométriquement les équations. Nous sommes alors amenée à étudier aussi bien la façon dont les contenus enseignés sont agencés que le travail proposé, attendu et effectif des étudiants

dans le chapitre des équations de droites et de plans dans l'espace. Dans cette section, nous présentons quelques outils didactiques tels que les cadres (au sens de Douady , 1986), les registres (au sens de Duval, 1993) et les points de vue (au sens de Rogalski, 1995). Ces outils vont nous aider à analyser les moments de cours. Nous présentons également les adaptations des connaissances (au sens de Robert, 1998) qui vont nous être utiles pour étudier les exercices proposés au sein du cours. Nous présentons ensuite une définition opérationnelle de la conceptualisation des notions de droites et de plans dans l'espace.

▶▶ Les jeux de cadres

Nous avons mis en évidence au point 2.1 que les mathématiciens experts sont capables de transposer un problème donné dans un contexte précis à un autre et de réaliser des mises en relation (Robert, ibid.). C'est en étudiant l'activité du mathématicien et dans le but de décrire les pratiques attendues des étudiants que Douady (1992) a introduit les notions de cadres et de changements ou jeux de cadres.

Un cadre est défini comme étant

> « constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations » (Douady, ibid., p. 135).

Ainsi, une même notion peut très bien être travaillée dans différents cadres, chacun ayant des caractéristiques spécifiques. Par exemple, les notions de droites et de plans peuvent intervenir dans le cadre de la géométrie synthétique, dans le cadre de la géométrie analytique ou encore dans le cadre des espaces vectoriels. Comme ces exemples le laissent supposer, les notions de droites et de plans vont être définies et utilisées différemment selon le cadre dans lequel elles interviennent. C'est pourquoi Douady propose de réaliser des changements de cadres ou des jeux de cadres pour favoriser la conceptualisation des notions.

> « Le changement de cadres est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en œuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation » (Douady, ibid., p. 135).

Il peut donc être profitable pour résoudre un exercice d'effectuer un changement de cadres. Par exemple, si nous devons déterminer le point de percée [5] d'une droite dans un plan dans le cadre de la géométrie synthétique, alors il peut être intéressant de transposer le problème dans le cadre de la géométrie analytique en se fixant un repère.

Selon Praslon (ibid.), les différences de fonctionnement et de formulation entre les cadres permettent une grande diversité à la fois des entrées dans le problème à résoudre et des techniques employées. Il dit que les changements de cadres sont vus comme moteur de l'activité mathématique. Les étudiants, pour devenir experts, doivent alors être capables de travailler au sein d'un cadre précis et d'effectuer des changements de cadres

5. Le point de percée d'une droite dans un plan est le point d'intersection entre ces deux objets.

pour résoudre un problème donné. Nous pointons alors dans le cours de Mathématiques élémentaires les cadres et les jeux de cadres qui sont éventuellement abordés.

►► La dialectique outil-objet

Puisque nous voulons mieux comprendre la difficulté des étudiants à donner du sens aux équations et à parvenir à les associer aux objets géométriques qu'elles décrivent, nous nous intéressons à la dialectique outil-objet. Dans ses recherches sur le calcul algébrique, Douady (1994) s'intéresse à la construction du sens des notions mathématiques chez les élèves lors de la transition collège-lycée. Pour définir ce qui peut aider à celle-ci, Douady (1984) définit les caractères « outil » et « objet » que possède un concept.

> « Par outil nous entendons son fonctionnement scientifique dans les divers problèmes qu'il permet de résoudre » (p. 9).

> « Par objet, nous entendons le concept mathématique, considéré comme objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement » (p. 10).

Par exemple, le caractère objet des équations de droites et de plans dans l'espace se travaille lorsque nous introduisons les différentes équations ou que nous voulons en déterminer une, le caractère outil de ces notions est abordé quand elles interviennent pour résoudre un problème comme la détermination d'une section d'un cube par un plan.

Douady (1986) ajoute qu'une notion prend son sens grâce au caractère outil. Ainsi, l'enseignement d'une notion ne doit pas se cantonner au caractère objet et il est important de proposer des problèmes dans lesquels la notion intervient comme un outil pour la résolution. Douady parle de dialectique outil-objet (D.O.O.). Celle-ci amène à déterminer que le sens possède deux composantes : sémantique et syntaxique. La composante sémantique est prise en compte par le statut outil des notions. Mais les mises en relation entre les différentes notions mathématiques sont tout autant importantes. Elles permettent par exemple d'élargir le domaine de validité des objets. Pour cela, nous devons respecter des règles et différents modes d'expression. Cela définit la composante syntaxique. Il est donc important de développer les deux statuts d'une notion pour lui donner du sens.

Pour l'apprentissage du calcul algébrique, Douady (1994) ajoute que le sens ne suffit pas. Il est nécessaire que les élèves possèdent un équilibre entre « la construction du sens et la familiarité technique » (p. 48). De ce fait, il est important de proposer un travail équilibré entre le sens et la technique pour l'apprentissage d'une notion. Ainsi, nous analysons les dialectiques outil-objet et sens-technique en jeu au sein du cours de Mathématiques élémentaires afin d'avoir des éléments sur le sens que les étudiants donnent aux équations.

►► Les registres

Les travaux de Duval s'intéressent eux aussi à l'activité mathématique. Il explique que les objets mathématiques ne sont pas des objets « réels » ou « physiques », leur appréhension n'est que conceptuelle (Duval, 1993). Nous en avons des représentations mentales, c'est-à-dire un ensemble d'images et de conceptions sur ces objets. Les représentations sémiotiques sont un moyen simple d'extériorisation des représentations mentales pour pouvoir les rendre accessibles à autrui. Ainsi, il est nécessaire de se donner des représentations pour qu'une activité soit possible sur ces objets (Duval, ibid.). C'est ce que l'auteur appelle le paradoxe cognitif de la pensée mathématique. Duval (1995) définit la notion de registre (de représentation sémiotique) comme étant un système sémiotique qui permet trois activités cognitives fondamentales : la formation des représentations, les transformations des représentations en d'autres qui s'opèrent soit par un traitement (au sein d'un même registre), soit par une conversion (d'un registre à un autre). Par exemple, les notions de droites et de plans peuvent être représentées dans le registre du dessin (sans repère), le registre graphique (dans un repère) ou encore le registre algébrique (équations). Un exemple de traitement dans le registre algébrique est donné par : posons $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$.

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0.$$

Une conversion entre le registre algébrique et le registre graphique consisterait par exemple à représenter l'objet qui est décrit par une équation dans un repère orthonormé.

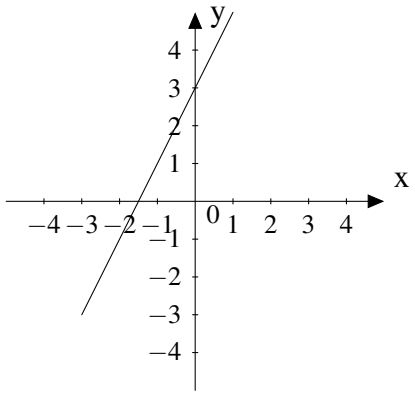
Registre algébrique	Registre graphique
$y = 2x + 3$	

FIGURE II.1 – Conversion entre les registres algébrique et graphique.

Selon Duval (1993), il est essentiel dans l'activité mathématique de pouvoir mobiliser plusieurs registres au cours d'une même démarche ou de pouvoir choisir un registre plutôt qu'un autre. Il ajoute :

> « La compréhension d'un contenu conceptuel repose sur la coordination d'au moins deux registres de représentation, et cette coordination se manifeste par la rapidité et la spontanéité de l'activité cognitive de conversion » (p. 51).

Ainsi, la conversion des registres est importante dans les pratiques mathématiques expertes. Duval (ibid.) montre qu'en réalité cette activité n'est pas prise en compte dans l'enseignement secondaire car elle est bien souvent considérée comme allant de soi. Or, cette conversion entre les registres n'est pas une activité naturelle chez les élèves, notamment parce qu'ils les cloisonnent. L'auteur précise que cette absence de coordination des registres n'empêche pas une compréhension partielle de la notion, mais celle-ci ne favorise pas les apprentissages ultérieurs en rendant les connaissances acquises peu ou pas mobilisables dans d'autre situations.

De plus, nous pouvons constater sur la figure II.1 que le travail à effectuer n'est pas le même lors de la conversion du registre algébrique vers le registre graphique et lors de la conversion du registre graphique vers le registre algébrique. En effet, les règles de conversion ne sont pas les mêmes selon le sens de la conversion. Il peut donc y avoir des difficultés qui apparaissent chez les apprenants lors d'une conversion mais pas lors de la conversion réciproque. Pavlopoulou (1993) montre que les étudiants de première année d'université rencontrent plus de difficutés dans la conversion d'un registre quelconque vers le registre de l'écriture symbolique que lors de la conversion du registre symbolique vers un registre quelconque. Il est donc primordial de pouvoir travailler au sein d'un registre mais surtout de pouvoir effectuer des conversions entre les registres et ce peu importe le sens de la conversion. Nous pointons dans l'analyse du cours de Mathématiques élémentaires les registres et les conversions de registres qui y sont travaillés.

►► Les points de vue

Plusieurs auteurs ont utilisé la notion de point de vue pour étudier l'activité mathématique mais les sens qui lui étaient donnés sont bien différents. Puisque nous nous intéressons aux moments de cours et au travail proposé aux étudiants dans le cadre d'un chapitre de géométrie analytique, nous choisissons de présenter la notion de point de vue selon Robert (1998) et selon Rogalski (1995).

Pour Robert (Vandebrouck, 2008), un point de vue est une manière d'aborder un problème mathématique. En fonction du point de vue adopté sur un problème, la stratégie change. Les changements de points de vue sont très fréquents en mathématique et peuvent aider à démarrer une démonstration ou la résolution d'un problème. Robert (1998) précise qu'il s'agit d'un changement de l'angle d'attaque ou de la traduction d'un énoncé donné. Par exemple, un changement de point de vue s'effectue lorsque nous traduisons l'énoncé « les trois droites sont concourantes » en « il existe un point commun aux trois droites » ou encore « le point d'intersection de deux de ces droites appartient à la troisième ». Cet outil est plutôt utilisé pour analyser le travail proposé aux étudiants au sein du cours de Mathématiques élémentaires.

La définition de point de vue selon Rogalski (1995) est très différente de celle ci-dessus. Pour lui, un point de vue sur un objet mathématique est une manière de le regarder, de le faire fonctionner et éventuellement de le définir. Les changements de points de vue sont moins liés à la résolution de problèmes que pour Robert (ibid.). Il ne s'agit pas forcément de résoudre le problème grâce à un changement de stratégie mais

plutôt de définir un même objet mathématique avec des outils différents. Par exemple, pour les droites et les plans, deux points de vue ont été relevés : paramétrique et cartésien. Si un plan est défini par un de ses vecteurs normaux ou qu'une droite est définie comme un ensemble de vecteurs orthogonaux à deux vecteurs non colinéaires, alors nous avons un point de vue cartésien sur ces objets dans le cadre de la géométrie vectorielle. Maintenant, si un plan est défini comme un ensemble de vecteurs $\overrightarrow{AB}$ qui sont une combinaison linéaire de deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ou qu'une droite est définie comme un ensemble de vecteurs $\overrightarrow{AB}$ colinéaires au vecteur $\overrightarrow{u}$, alors nous avons un point de vue paramétrique sur ces objets dans le cadre de la géométrie vectorielle. Si nous décrivons les objets par des équations, le type de ces équations (cartésiennes ou paramétriques) donne le point de vue à adopter (cartésien ou paramétrique) sur ces objets mais cette fois-ci dans le cadre de la géométrie analytique. Ainsi, la notion de point de vue est totalement indépendante de la notion de cadres. En effet, nous pouvons avoir plusieurs points de vue au sein d'un même cadre et un point de vue donné s'adapte aux objets du cadre dans lequel ils sont définis. Les points de vue sont aussi indépendants de la notion de registres. L'exemple donné par Rogalski est le suivant : dans le registre symbolique nous pouvons rencontrer les écritures $|x-2|<3$; $d(x,2)<3$; $-1<x<5$; $x\in]-1,5[$ et chacune de ces écritures amènent un point de vue différent. Les changements de points de vue sont alors également constitutifs de l'activité mathématique tout comme les conversions de registres et les jeux de cadres.

Ainsi, des changements de points de vue, au sens de Robert, peuvent apparaître au sein des exercices proposés aux étudiants. Pour Rogalski, deux points de vue ont été soulignés pour les notions de droites et de plans dans l'espace : le point de vue cartésien et le point de vue paramétrique. La thèse d'Alves-Dias (1998) met en évidence qu'il est fondamental de pouvoir articuler les points de vue cartésien et paramétrique, et ce, dans les deux sens, en algèbre linéaire. Il nous semble tout aussi important de travailler ces changements de points de vue au sein de la géométrie analytique. En effet, Rogalski (Dorier, 2000b) explique que les connaissances liées à la géométrie cartésienne et à une pratique de la géométrie dans l'espace constituent un support important pour le langage et le sens des notions vues en algèbre linéaire. Selon lui, ces connaissances géométriques peuvent donner des images de certains concepts vectoriels tels que les ensembles de solutions de systèmes d'équations linéaires. Harel (Dorier, 2000b) va dans ce sens et ajoute qu'un tel support géométrique doit être incorporé dans l'enseignement des premières notions d'algèbre linéaire. Selon lui, cela contribue de façon significative à la compréhension des étudiants. Les notions de géométrie analytique étudiées dans ce travail de thèse constituent les prémices du cours d'algèbre linéaire, il est alors important de développer cette articulation des points de vue. Nous allons donc analyser les éventuelles articulations des points de vue mises en jeu au sein du cours de Mathématiques élémentaires.

►► Les niveaux de mises en fonctionnement

Nous avons expliqué au point 2.1 qu'il est important pour les étudiants de développer des pratiques mathématiques expertes. Nous avons cité notamment le fait que

leurs connaissances doivent être organisées et disponibles. Robert (1998) a introduit les niveaux de mises en fonctionnement pour étudier l'organisation des connaissances des étudiants. Cet outil est principalement utilisé dans l'analyse des exercices qui leur sont proposés. La résolution d'un exercice peut relever d'une application immédiate d'une définition ou d'une propriété. Dans ce cas, la connaissance à appliquer est appelée une connaissance simple (appliquée telle quelle) et isolée (appliquée sans lien avec aucune autre connaissance). Le niveau de mise en fonctionnement est technique. La résolution d'un exercice peut aussi nécessiter des adaptations des connaissances (anciennes et/ou en cours d'acquisition). Pour caractériser ces adaptations des connaissances, Robert (Vandebrouck, 2008) en dégage sept types.

- **A1 : Les reconnaissances des modalités d'application des connaissances**
  Par exemple, déterminer une équation cartésienne d'un plan revient à trouver un point et un vecteur normal au plan.
- **A2 : L'introduction d'intermédiaires**
  Par exemple, pour déterminer la distance d'un point à une droite dans l'espace, nous devons trouver une équation d'un plan contenant le point et perpendiculaire à la droite.
- **A3 : Les mélanges de plusieurs notions, les changements de points de vue, les changements ou jeux de cadres, les registres, les mises en relation ou interprétations**
  Par exemple, pour montrer qu'une droite est parallèle à un plan à partir de leurs équations, nous pouvons déterminer un vecteur directeur de la droite et un vecteur normal du plan et ensuite utiliser les propriétés du produit scalaire.
- **A4 : L'introduction d'étapes, l'organisation des calculs ou des raisonnements**
  Par exemple, pour trouver une équation d'une droite passant par deux points dont les coordonnées sont données, nous devons d'abord calculer les composantes d'un vecteur directeur de la droite.
- **A5 : L'utilisation de questions précédentes dans un problème**
  Par exemple, déterminer les équations d'une droite et d'un plan avant d'en chercher le point de percée.
- **A6 : L'existence de choix, forcés ou non**
  Par exemple, pour déterminer une équation cartésienne d'un plan dont on connait une équation paramétrique, plusieurs méthodes sont possibles : par le déterminant ou l'élimination des paramètres.
- **A7 : Manque de connaissances nouvelles**

Dans le cas où des adaptations des connaissances sont à réaliser dans un exercice, le niveau de mise en fonctionnement est mobilisable si elles sont en partie au moins indiquées et de niveau disponible si c'est aux étudiants à reconnaître les connaissances qu'il faut utiliser pour résoudre le problème.

Robert (1998) précise que les élèves sont souvent confrontés à une mise en fonctionnement des connaissances de niveau technique. Or, même « si cela peut engendrer

des résultats presque corrects à court terme, cela peut s'avérer très périlleux pour la suite, voire tout à fait insuffisant pour faire construire les connaissances ultérieures » (p. 197). Elle ajoute que la disponibilité des connaissances est fortement liée à leur organisation et qu'il ne faut négliger aucun des trois niveaux de mises en fonctionnement dans l'enseignement. Nous analysons alors les exercices proposés aux étudiants en termes de niveaux de mises en fonctionnement des connaissances.

►► La conceptualisation

Nous avons introduit la dialectique outil-objet, les jeux de cadres, les registres de représentation, les points de vue et les niveaux de mises en fonctionnement des connaissances comme des outils didactiques pour faciliter l'étude du cours de Mathématiques élémentaires. Nous savons désormais qu'il est important pour une notion de :

- travailler à la fois son statut outil et son statut objet pour aider les étudiants à lui donner du sens ;
- proposer des changements de cadres ;
- créer, traiter mais surtout travailler les conversions de registres ;
- proposer des changements de points de vue ;
- travailler les trois niveaux de mises en fonctionnement des connaissances.

Nous pouvons désormais définir ce que nous mettons sous le terme « conceptualisation » d'une notion.

De nombreuses recherches montrent qu'il est important pour les étudiants de développer une certaine flexibilité cognitive entre les différents cadres, registres et points de vue pour une compréhension des objets mathématiques (Alves-Dias, 1998 ; Alves-Dias & Artigue, 1995 ; Artigue, 2006 ; Cerclé, Chesnais, Gosselin, Leberre, & Nyssen, 2015 ; Dogan-Dunlap, 2010 ; Dorier, 1997 ; Dorier & Sierpinska, 2001 ; Gueudet, 2000 ; Sandoval & Possani, 2016 ; Vandebrouck, 2008). Selon Artigue, Chartier et Dorier (Dorier, 2000b), cette flexibilité ne va pas de soi et un travail important et spécifique doit être proposé pour la développer.

Nous associons alors la conceptualisation d'une notion à la disponibilité des statuts outil et objet de la notion, à l'organisation entre les connaissances antérieures et nouvelles, à une certaine flexibilité entre les cadres, les registres et les points de vue mais aussi à une diversité des niveaux de mises en fonctionnement attendus pour résoudre les exercices.

Nous allons donc étudier, grâce à ces outils, la conceptualisation que les étudiants entrant à l'université ont des notions de droites et de plans dans l'espace. L'analyse des moments d'exposition du savoir, des questions posées lors des tests et des réponses des étudiants nous éclaire sur cette conceptualisation, aide à préciser les difficultés des étudiants en lien avec le travail qui leur est demandé et met en évidence les spécificités du cours de Mathématiques élémentaires. Nous aurons également des éléments via cette analyse sur la flexibilité développée chez les étudiants à la fin du cours et donc sur leur capacité à interpréter géométriquement les objets de l'espace.

2.4 Étude du travail réalisé au sein du cours

Nous avons analysé le chapitre sur les équations de droites et de plans dans l'espace au sein du cours de BAB1 dont il est question en octobre 2014. En particulier, nous étudions d'une part les moments où l'enseignant expose le savoir mathématique sur ces notions et d'autre part, au point 2.5, les questions qu'il propose aux étudiants lors des séances d'exercices et des évaluations. En ce qui concerne les moments de cours, nous ciblons l'ordre dans lequel les notions de ce chapitre apparaissent mais aussi le travail proposé aux étudiants en termes de cadres, de registres et de points de vue. De plus, étant donné que nous avions constaté chez les étudiants de BAB3 dans le cours de géométrie différentielle des difficultés à interpréter géométriquement les objets, nous nous intéressons au travail éventuellement proposé au sein du cours magistral (et des exercices) sur cette interprétation géométrique.

Cette année-là, le chapitre sur les droites et les plans dans l'espace a été étudié juste après le chapitre des droites dans le plan. Puisque l'enseignant s'appuie sur les connaissances déjà-là des étudiants sur les droites dans le plan pour introduire ce chapitre, nous allons rapidement revenir sur le travail qu'il propose dans le plan. Tout d'abord, l'enseignant demande quel est l'objet géométrique décrit par l'équation $ax+by=c$ dans le plan. Voyant que la majorité des étudiants n'est pas capable de répondre à cette question, l'enseignant demande de déterminer l'objet décrit par l'équation $2x+3y=6$. Nous constatons alors que le premier réflexe des étudiants est de construire un tableau de valeurs afin de placer sur un graphique les coordonnées des quelques points trouvés. Ils déduisent qu'il s'agit d'une droite car ils voient que les points sont alignés. Ce réflexe nous pose question : d'une part les étudiants n'ont pas l'air de maîtriser les équations générales de droites dans le plan, d'autre part il n'y a pas de réelle interrogation quant à la nature des objets décrits par une équation cartésienne. Si les étudiants gardent ce même réflexe dans l'espace, de nouvelles difficultés liées à la visualisation des objets peuvent survenir (Nihoul, 2013). Ensuite, l'enseignant établit les liens entre l'équation générale $ax+by=c$ et les équations dont les étudiants se souviennent $x=k$ où k est une constante et $y=mx+p$ où m et p représentent respectivement la pente de la droite et l'ordonnée à l'origine. De plus, l'enseignant décrit la droite d'équation $ax+by=c$ comme l'ensemble des couples (x,y) du plan vérifiant l'égalité $ax+by=c$. Il est alors, par exemple pour l'équation $2x+3y=6$, très difficile pour les étudiants de concevoir que l'ensemble $\left\{\left(x,\frac{6-2x}{3}\right) \mid x\in\mathbb{R}\right\}$ décrit une droite ou encore que cet ensemble et l'ensemble $\left\{\left(\frac{6-3y}{2},y\right) \mid x\in\mathbb{R}\right\}$ décrivent la même droite (Nihoul, 2016). Ces difficultés entrent en résonnance avec celles mentionnées par Dieudonné et al. (2011) dont nous avons parlé au point 2.1. En effet, la majorité des étudiants se donne une valeur de x (ou de y) précise et cherche l'ordonnée (ou l'abscisse) correspondante. Il est donc difficile pour eux de passer de cette démarche à l'idée plus abstraite qu'à une valeur quelconque de x correspond l'ordonnée $y=\frac{c-ax}{b}$ avec $b\neq 0$. Enfin, l'enseignant caractérise cet ensemble de points par une équation paramétrique de la forme $(x,y)=(x_A,y_A)+\lambda(x_v,y_v)$ où $\lambda\in\mathbb{R}$ et (x_A,y_A) sont les coordonnées d'un point A de la droite, (x_v,y_v) sont les composantes d'un vecteur directeur de la droite. En éliminant le paramètre, l'enseignant

montre que l'on retombe sur l'équation cartésienne générale donnée au début du cours. L'étude des positions relatives est laissée pour la résolution des systèmes lors des exercices. Nous retenons que les équations de droites dans le plan amènent déjà quelques difficultés aux étudiants.

Le chapitre des droites et des plans dans l'espace débute par le questionnement suivant :

> « L'équation $ax+by=c$ vient d'être étudiée dans le plan. Nous avons établi que la droite d'équation $ax+by=c$ est l'ensemble des couples (x,y) du plan qui vérifient l'égalité $ax+by=c$. Quel est maintenant l'objet géométrique de l'espace décrit par cette équation ? » (Nihoul, 2016, p. 465).

Pour répondre à cette question, l'enseignant choisit d'étudier l'équation $2x+3y=6$. Nombreux sont les étudiants incapables de reconnaître l'objet géométrique décrit par cette équation. La plupart d'entre eux pensent qu'il s'agit d'une droite à cause de la proximité visuelle entre les équations cartésiennes de droites dans le plan et les équations cartésiennes de plans dans l'espace. Dans le but d'initier un travail sur la notion d'« équation » et sur leur représentation dans l'espace, l'enseignant veut décrire cette équation comme un ensemble de triplets la vérifiant. Pour ce faire, il demande dans un premier temps quelques points vérifiant l'équation $2x+3y=6$. Il y a deux groupes d'étudiants : ceux qui proposent des couples (x,y) vérifiant cette équation, ceux qui proposent uniquement des triplets de la forme $(x,y,0)$. La majorité des étudiants considère alors que la variable (ici z) est absente de l'équation parce que sa valeur est nulle. Cette difficulté a également été identifiée par Maurel (2001) qui l'interprète comme une confusion de la part des étudiants entre le statut des différentes lettres, ici variable et coefficient. Une fois qu'il est établi que la cote peut être quelconque, plusieurs triplets sont donnés et placés sur un graphique dans un repère orthonormé. Il s'agit alors de déterminer visuellement que l'ensemble des triplets vérifiant l'équation $2x+3y=6$ décrit un plan. L'enseignant propose un travail dans le registre algébrique et dans le registre graphique. Une conversion de registres est donc effectuée par l'enseignant. Notons qu'il ne justifie pas qu'il s'agit d'un plan autrement que visuellement. Il généralise ensuite le travail effectué sur les équations incomplètes pour introduire la forme générale $ax+by+cz=d$. C'est alors le point de vue cartésien, au sens de Rogalski, qui est abordé en premier.

Les objectifs de l'enseignant dans cette introduction sont multiples. Il veut dans un premier temps montrer aux étudiants que des équations cartésiennes *a priori* similaires ne représentent pas les mêmes objets géométriques dans le plan et dans l'espace. Cette fausse ressemblance s'explique par le fait que les notions de droites et de plans dans l'espace généralisent les notions de droites dans le plan. Ce sont donc des extensions de notions comme défini au point 2.1. Or, Pariès et Robert (2009) ont montré que cette extension pouvait se faire avec ou sans accident. Le produit scalaire dans le plan est généralisé à l'espace sans accident car il suffit d'ajouter les troisièmes composantes des vecteurs dans le calcul. Par contre, l'extension du point de vue cartésien engendre plusieurs accidents. En effet, si nous étendons l'équation du plan $ax+by=c$, nous obtenons $ax+by+cz=d$ dans l'espace et ces équations ne décrivent pas les mêmes objets.

Une première rupture est repérée lors de l'interprétation géométrique d'équations de la même forme. Une deuxième rupture s'opère lorsque nous voulons décrire une droite dans le plan et dans l'espace : une seule équation cartésienne suffit pour la décrire dans le plan alors qu'il est nécessaire d'en avoir deux dans l'espace. Le nombre d'équations cartésiennes change lors du passage du plan à l'espace pour la notion de droite. Il nous semble donc que le cours magistral attire à la fois l'attention des étudiants sur ces ruptures et sur le fait que ce n'est pas parce qu'une ou plusieurs variables sont absentes dans les équations qu'il ne faut pas en tenir compte. Les difficultés liées aux équations incomplètes de plans relevées dans les travaux de Lebeau et Schneider (2009, 2010) semblent prises en compte par le cours de Mathématiques élémentaires. Dans un dernier temps, le travail initié sur les équations est important car la notion même d'équation n'est jamais travaillée dans son statut objet dans l'enseignement secondaire. C'est une notion paramathématique au sens de Chevallard (1991) car elle n'a jamais vraiment été définie. Ainsi, dans l'enseignement secondaire belge, la notion d'équation ne joue qu'un rôle d'« étiquette » (Schneider, 1988) et leur interprétation peut révéler « des surprises lorsqu'elles sont susceptibles de représenter des objets géométriques différents dans un plan ou dans l'espace » (Lebeau & Schneider, 2010, p. 20).

Dans la suite du cours, l'enseignant réalise un dessin, illustré à la figure II.2 pour exprimer le fait que le plan peut être vu comme un ensemble de vecteurs tous orthogonaux au vecteur normal (a,b,c).

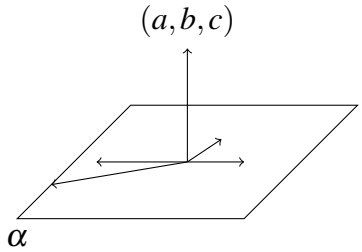


FIGURE II.2 – Dessin réalisé par l'enseignant au tableau.

Cette fois-ci, le travail articule les registres du dessin et de la langue naturelle. Nous retrouvons encore une fois les difficultés mentionnées par Dieudonné et al. (2011) sur la manipulation des notions ensemblistes et sur la considération qu'un ensemble de vecteurs peut décrire un plan. L'enseignant veut ensuite déterminer une équation paramétrique d'un plan et repart de l'exemple utilisé jusqu'ici $2x+3y=6$. Un vecteur normal de ce plan peut être donné et les étudiants proposent des vecteurs qui lui sont orthogonaux. L'enseignant explique qu'il suffit d'avoir deux vecteurs directeurs du plan et un point pour le déterminer. Il s'appuie sur le fait que « deux droites sécantes déterminent un plan » pour amener les deux directions non colinéaires. L'enseignant met en œuvre des connaissances anciennes des étudiants à la fois dans le cadre de la géométrie synthétique et dans le cadre de la géométrie analytique plane pour introduire le point de vue paramétrique. Il élimine ensuite les deux paramètres pour montrer que cela revient à l'équation cartésienne vue juste avant. Un changement de points de vue dans le sens paramétrique/cartésien est effectué.

L'enseignant introduit ensuite les droites de l'espace comme un ensemble de points alignés. Il étend alors le travail déjà réalisé dans le plan pour déterminer une équation paramétrique de la droite dans l'espace. Cette extension du point de vue paramétrique entre le plan et l'espace se fait sans accident. Le cheminement est après identique que celui suivi dans le plan. En effet, le paramètre est éliminé et les droites sont caractérisées par un système d'équations cartésiennes de la forme :

$$\begin{cases} \frac{x-x_A}{x_v} = \frac{y-y_A}{y_v} \\ \frac{y-y_A}{y_v} = \frac{z-z_A}{z_v} \end{cases}$$

où (x_A, y_A, z_A) sont les coordonnées d'un point A de la droite, (x_v, y_v, z_v) sont les composantes, toutes non nulles, d'un vecteur directeur de la droite. Un changement de point de vue dans le sens paramétrique/cartésien est réalisé uniquement pour le cas général où toutes les composantes du vecteur directeur sont non nulles. Les autres cas ne sont pas abordés lors des moments de théorie. L'enseignant, à cette étape du cours, explique pourquoi deux équations sont nécessaires pour décrire une droite dans l'espace. Il décrit la droite comme étant l'intersection de deux plans sécants et montre que chacune des équations du système correspond bien à une équation cartésienne incomplète d'un plan. L'enseignant tente de se rapprocher des connaissances antérieures des étudiants vues dans le cadre de la géométrie synthétique dans l'enseignement secondaire et dans le cadre de la géométrie analytique retravaillé juste avant. L'enseignant essaie vraiment d'amener les étudiants à interpréter géométriquement les équations et à donner du sens aux équations.

Cette analyse du cours théorique révèle que le travail effectué en classe est assez varié. Plusieurs registres apparaissent comme le registre algébrique, le registre ensembliste, le registre graphique et le registre du dessin. Le registre de la logique est quant à lui absent du travail réalisé en classe car les quantifications restent relativement implicites. C'est le cas par exemple quand l'enseignant donne plusieurs ensembles pour décrire la même droite. Il serait intéressant de montrer rigoureusement que ces ensembles sont égaux. Cela permettrait de proposer un travail supplémentaire aux étudiants faisant intervenir les notions de logique et de théorie des ensembles. Quelques conversions de registres sont également développées mais pas forcément dans les deux sens de la conversion. Par exemple, une conversion de registres dans le sens algébrique/graphique est réalisée et aucune conversion dans l'autre sens n'est effectuée. Pourtant, il est possible de proposer en classe la conversion de registres dans le sens graphique/algébrique. C'est le cas, par exemple, lorsque nous représentons graphiquement une droite particulière ou un plan particulier et que nous voulons les décrire par une équation. Nous pensons que cela permet également d'appuyer sur la description de ces objets en termes d'ensembles de triplets vérifiant certaines caractéristiques. L'interprétation géométrique des équations serait peut-être encore plus mise en avant. En ce qui concerne les points de vue, ils sont tous les deux présents dans le cours à la fois pour les droites et les plans mais les changements de points de vue effectués sont relativement peu nombreux et concernent principalement le sens paramétrique/cartésien. Les plans sont étudiés avant les droites dans l'espace pour mettre en évidence plusieurs ruptures lors de l'extension des notions du plan à l'espace. Cela permet aussi de mobiliser des connaissances que

les étudiants ont vues dans l'enseignement secondaire dans le cadre de la géométrie synthétique. Un changement de cadres a donc lieu pour donner du sens aux équations et développer l'interprétation géométrique des étudiants. Le cours de Mathématiques élémentaires propose un travail important entre les cadres, les registres et les points de vue et développe la dimension objet de ces notions. Bien que celles-ci ne soient pas totalement nouvelles pour les étudiants, nous avons repéré que leurs conceptions personnelles, au sens de Hitt (2006), sur les notions de droites et de plans amènent certaines difficultés. Nous complétons et précisons celles-ci en étudiant le travail proposé aux étudiants lors des moments dédiés à la résolution des exercices. Nous donnons plusieurs exemples de questions [6] proposées aux étudiants en mettant en évidence le travail que leurs résolutions engendrent. Nous analysons alors les mises en fonctionnement des connaissances, présentées au point 2.3, dont font parties les cadres, les registres et les points de vue.

Question 9, test 5, 2010

① Soient les droites

$$D_1 \equiv (x,y,z) = (1,-1,2) + \lambda(-2,1,3), \text{ où } \lambda \in \mathbb{R},$$

$$D_2 \equiv (x,y,z) = (0,3,4) + \mu(-1,0,5), \text{ où } \mu \in \mathbb{R}.$$

Recherchez, s'il existe, le point d'intersection de ces deux droites.

② Soient le plan $\alpha \equiv x - 2y + 3z = \sqrt{2}$ et la droite D dont un système d'équations cartésiennes est $1 + x = 2y + 1 = z/\lambda^2$ où $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pour quelle(s) valeur(s) de λ la droite D est-elle parallèle au plan α ?

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie vectorielle.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

□ Connaissances anciennes : opérations sur les vecteurs, résolution de systèmes, équations cartésiennes de plans, système d'équations cartésiennes de droites dans l'espace, positions relatives d'une droite et d'un plan, produit scalaire, fractions.

6. Les exercices proposés aux étudiants en 2014 sont des questions posées lors des tests des années précédentes.

Adaptations à réaliser

Pour la question ①, l'*organisation du raisonnement* se fait en plusieurs étapes. L'énoncé est donné dans le registre de la langue naturelle. Une *conversion de registres* est nécessaire pour déterminer qu'un système composé des équations des deux droites doit être résolu (*reconnaissance des modalités d'application*). Afin d'écrire le système à résoudre, les opérations sur les vecteurs doivent être utilisées (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Ces connaissances étant étudiées dans le cadre de la géométrie vectorielle, un *changement de cadres* a lieu. La résolution d'un système de trois équations à deux inconnues est réalisée (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Le système étant impossible, les deux droites ne s'intersectent pas (*conversion de registres*). Dans cette question, seul le point de vue paramétrique est en jeu.

Pour la question ②, l'*organisation du raisonnement* se fait en plusieurs étapes. Le parallélisme du plan α et de la droite D doit être étudié (*reconnaissance des modalités d'application*). La position relative du plan et de la droite, donnée en langue naturelle, est traduite en termes d'orthogonalité d'un vecteur normal au plan avec un vecteur directeur de la droite (*conversion de registres*). Un vecteur normal du plan est identifié grâce à l'équation cartésienne donnée dans l'énoncé (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Le point de vue cartésien pour les plans est en jeu. Afin d'identifier un vecteur directeur de la droite D, des opérations algébriques sont effectuées pour écrire le système d'équations cartésiennes donné sous forme canonique (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Le point de vue cartésien est également mis en jeu. Le produit scalaire entre ces deux vecteurs doit être nul pour que la droite et le plan soient parallèles (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Le calcul du produit scalaire amène à déterminer une valeur de λ. Or, cette valeur étant nulle, il est impossible que le plan et la droite soient parallèles (*conversion de registres*).

Cet exemple est de niveau de mise en fonctionnement mobilisable. En effet, il ne s'agit pas uniquement d'appliquer un théorème ou une définition puisque quelques adaptations sont à réaliser. Elles consistent principalement à des conversions entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique. De nombreuses connaissances anciennes sont exploitées dans cet exercice. Ainsi, une certaine disponibilité des connaissances est attendue de la part des étudiants. Cependant, bien que les points de vue paramétrique et cartésien soient sollicités, aucune articulation entre les deux n'est nécessaire lors de la résolution.

Question 4, test 5, 2011

Soit le système

$$\begin{cases} 3x-2y+z=0 \\ \lambda x=\lambda(y+z) \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel. Résolvez ce système en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ et interprétez géométriquement les résultats obtenus.

Domaine de travail

Cadre de la géométrie analytique.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle, registre ensembliste.

Points de vue

Point de vue cartésien, point de vue paramétrique.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : équations cartésiennes de plans, équations paramétriques de plans, résolution de systèmes de deux équations à trois inconnues, équations paramétriques de droites dans l'espace.

Adaptations à réaliser

L'*organisation du raisonnement* se fait en plusieurs étapes. Il s'agit dans un premier temps de distinguer les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$ et de déterminer l'ensemble des solutions dans chaque cas (*reconnaissance des modalités d'application*). Le point de vue cartésien est utilisé pour décrire les deux plans dont une intersection est recherchée. Dans le cas où $\lambda = 0$, le système se restreint à l'équation $3x-2y+z=0$. Il est possible de reconnaître le plan à partir du point de vue cartésien. Il s'agit du plan passant par le point $(0,0,0)$ et dont un vecteur normal est $(3,-2,1)$. Il est possible aussi que l'ensemble des solutions du système soit écrit (*conversion de registres*). Le plan est alors reconnu à partir du point de vue paramétrique (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *conversion de registres*). Le plan est alors décrit comme passant par le point $(0,0,0)$ et dont deux vecteurs directeurs sont $(1,0,-3)$ et $(0,1,2)$. Dans le cas où $\lambda \neq 0$, il s'agit de résoudre un système de deux équations à trois inconnues (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Deux des inconnues sont exprimées en fonction de la troisième. L'ensemble des solutions peut être écrit (*conversion de registres*). L'interprétation géométrique de cet ensemble est une droite passant par le point $(0,0,0)$ et dont un vecteur directeur est $(\frac{3}{4},1,-\frac{1}{4})$. Celle-ci se fait à partir du point de vue paramétrique (*conversion de registres*).

Cet exercice nécessite une disponibilité des connaissances des étudiants et met en jeu plusieurs conversions entre les registres algébrique, ensembliste et de la langue naturelle. Les points de vue cartésien et paramétrique sont présents mais ils ne sont pas articulés. L'interprétation géométrique demandée aux étudiants nécessite aussi qu'ils soient capables de jongler entre les différentes informations qui permettent de décrire les objets dans l'espace (point, vecteur directeur, vecteur normal) ainsi que le nombre d'informations à fournir (deux vecteurs directeurs pour un plan, un vecteur directeur pour une droite). L'exercice est de niveau de mise en fonctionnement disponible.

Question 6, janvier, 2010

Soient les ensembles

$$A := \left\{ \alpha \;\middle|\; \alpha \text{ est un plan perpendiculaire à la droite } D \equiv x-1 = \frac{2-y}{2} = 3z+1 \right\},$$

$$\text{et} \quad B := \left\{ \beta \;\middle|\; \beta \text{ est un plan dont un vecteur normal est } (-6,12,-2) \right\}.$$

① Soit le plan $\gamma \equiv 3x-6y+z=7$. A-t-on $\gamma \in A$? Justifiez.

② Soit le plan $\delta \equiv 6x-12y+2z=3$. A-t-on $\delta \in B$? Justifiez.

③ Montrez que $A = B$. Détaillez votre raisonnement.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie vectorielle.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre ensembliste, registre de la logique.

Point de vue

Point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : colinéarité de vecteurs, équations cartésiennes de plans, système d'équations cartésiennes de droites dans l'espace, opérations sur les vecteurs.
- Connaissances nouvelles : égalité de deux ensembles, inclusion de deux ensembles, implication, quantificateurs.

Adaptations à réaliser

Pour la question ①, l'*organisation du raisonnement* se fait en plusieurs étapes. L'ensemble A contient tous les plans perpendiculaires à une droite donnée. Le registre ensembliste est donc en jeu. Pour déterminer si le plan γ appartient à l'ensemble A, un vecteur directeur de la droite D et un vecteur normal du plan γ sont à déterminer (*reconnaissance des modalités d'application*). Une *conversion* entre le registre ensembliste et le registre algébrique est nécessaire. Un vecteur normal du plan est donné directement par l'équation cartésienne (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Un vecteur directeur de la droite D est déterminé après avoir mis le système donné sous forme canonique (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Dans les deux équations, le point de vue cartésien entre en jeu. La position relative de la droite et du plan donnée en langue naturelle doit être traduite en termes de colinéarité de vecteurs (*conversion de registres*). Il s'agit alors de tester si les deux

vecteurs sont colinéaires. Cela implique un *changement de cadres* car ce sont des connaissances du cadre de la géométrie vectorielle. La prise en compte du quantificateur existentiel dans la définition de la colinéarité implique un *choix* à effectuer pour le facteur de proportionnalité (*mise en jeu de connaissances anciennes*). La formulation de la réponse se fait dans le registre de la langue naturelle (*conversion de registres*).

Pour la question ②, l'ensemble B contient tous les plans dont un vecteur normal est donné. Le registre ensembliste est donc en jeu. Le plan δ appartient à l'ensemble B si un vecteur normal de δ est colinéaire à celui donné dans l'ensemble (*reconnaissance des modalités d'application*). Une *conversion* entre le registre ensembliste et le registre algébrique est nécessaire. Le plan est décrit dans un point de vue cartésien. Ainsi, un vecteur normal de δ est directement déterminé (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Il s'agit alors de tester si les deux vecteurs sont colinéaires (*changement de cadres*). La prise en compte du quantificateur existentiel dans la définition de la colinéarité implique un *choix* à effectuer pour le facteur de proportionnalité (*mise en jeu de connaissances anciennes*). La formulation de la réponse se fait dans le registre de la langue naturelle (*conversion de registres*).

Pour la question ③, l'*organisation du raisonnement* se fait en plusieurs étapes. Pour montrer que les deux ensembles sont égaux, il faut montrer que $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$ (*reconnaissance des modalités d'application*). Cette question *met en jeu des nouvelles connaissances* en théorie des ensembles et en logique. La preuve des deux inclusions revient à montrer que deux vecteurs sont colinéaires (*conversion de registres*). Il y a une mise en jeu des connaissances anciennes du cadre de la géométrie vectorielle (*changement de cadres*). Un *choix* s'effectue dans les deux cas pour donner une valeur au facteur de proportionnalité des deux vecteurs. La conclusion de la preuve entraîne une *conversion* entre le registre algébrique et le registre de la langue naturelle.

Cet exercice met en jeu des conversions entre le registre algébrique, ensembliste et de la langue naturelle, mais aussi des changements de cadres entre la géométrie analytique et la géométrie vectorielle. L'utilisation de connaissances nouvelles en théorie des ensembles et en logique est également nécessaire dans l'entièreté de l'exercice. Seul le point de vue cartésien est en jeu et aucune articulation entre les points de vue n'est à réaliser. Le niveau de mise en fonctionnement des connaissances est disponible.

Nous déduisons que ce cours propose, aussi bien lors de l'exposition de la théorie que de la résolution des exercices, un travail varié et relativement consistant. Des changements de cadres entre la géométrie vectorielle et la géométrie analytique sont effectués. Les conversions entre les registres algébrique, ensembliste, de la langue naturelle, de la logique sont nombreuses. Les points de vue paramétrique et cartésien sont articulés, et ce, dans les deux sens. Cependant, nous remarquons quelques manques. Les droites et les plans ne sont décrits comme des ensembles que lors des moments de cours. Le cadre de la géométrie synthétique et le registre graphique, bien qu'intervenant un peu dans le cours, restent globalement très peu travaillés. De plus, l'analyse du cours révèle

que les aspects outils des notions de droites et de plans sont totalement absents. Nous nous sommes alors demandée quelle est la flexibilité et la conceptualisation de ces notions développées par les étudiants et s'ils sont capables d'interpréter géométriquement les objets à partir des différents points de vue, et ce, dans n'importe quel registre (algébrique, ensembliste). Pour répondre à ces questions, nous avons analysé les réponses des étudiants sur la géométrie analytique dans l'espace lors des évaluations.

2.5 Les évaluations

Pour compléter le travail réalisé en classe, nous avons analysé les questions proposées aux étudiants lors des évaluations de l'année 2014. Nous en présentons plusieurs et analysons les réponses que les étudiants ont fournies. Cela permet d'illustrer les difficultés résistantes à l'enseignement proposé. Notre échantillon est constitué de 101 étudiants. Nous considérons qu'une question est réussie lorsque l'étudiant obtient au moins la moitié de la note attribuée à la question.

Question 2, test 4, 2014

Soit le système

$$\begin{cases} x+2y=4 \\ 5x-3y=1 \end{cases}$$

① Résolvez ce système dans le plan $\mathbb{R}^2$. Interprétez géométriquement les résultats obtenus.

② Résolvez ce système dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Interprétez géométriquement les résultats obtenus.

Il s'agit de résoudre un système de deux équations à deux inconnues dans le premier cas et de deux équations à trois inconnues dans le second. Plusieurs méthodes peuvent être envisagées pour le résoudre : substitution, combinaison linéaire, Cramer. Dans tous les cas, l'ensemble des solutions dans le plan est $\{(\frac{14}{13}, \frac{19}{13})\}$. L'interprétation géométrique permet de dire que les deux droites initialement données sont sécantes au point $(\frac{14}{13}, \frac{19}{13})$. Les mêmes démarches sont envisageables dans l'espace. Il est possible d'utiliser la résolution effectuée à la première question pour donner directement l'ensemble des solutions dans l'espace. Dans ce cas, cet ensemble est $\{(\frac{14}{13}, \frac{19}{13}, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Les deux plans donnés sont sécants suivant une droite. Cette droite passe par le point $(\frac{14}{13}, \frac{19}{13}, 0)$ et a comme vecteur directeur $(0,0,1)$. Ces deux questions demandent alors de réaliser des conversions entre les registres de la langue naturelle et algébrique, entre les registres algébrique et ensembliste et entre les registres ensembliste et de la langue naturelle. Une grande disponibilité des connaissances est nécessaire, notamment sur les équations de droites dans le plan, les équations de droites et de plans dans l'espace et la résolution des systèmes. Il faut alors une certaine flexibilité entre les différents objets pour réussir à interpréter géométriquement les résultats.

La question vaut quatre points : deux points par item. Il est à noter que ce n'est pas parce qu'un étudiant a réussi un des deux items qu'il réussit pour autant la ques-

tion. Celle-ci est réussie par 59,4% des étudiants. Le tableau II.1 montre le pourcentage d'étudiants ayant réussi en fonction des items et des filières [7].

% réussite	Math	Phys	Info	Ayant réussi
Item 1	100	88,9	86	90,1
Item 2	20,8	29,6	20	22,8

TABLE II.1 – Pourcentage de réussite des étudiants à la question 2 du test 4.

Nous remarquons que même si la question est bien réussie par une majorité d'étudiants, la différence de pourcentage entre les deux items est importante, et ce, quelle que soit la filière. Les copies révèlent que pour le premier item, aucune difficulté ne se pose aux étudiants. Ils sont capables de résoudre le système et utilisent principalement la méthode de Cramer. Cette méthode a été justement revue lors du chapitre sur les équations de droites dans le plan. Les étudiants ayant utilisé la méthode de la substitution ont en général plus d'erreurs lors de leurs calculs et aboutissent moins souvent à la bonne réponse. L'interprétation géométrique du système dans le plan est correcte pour 84,2% des étudiants toutes filières confondues. La deuxième question pose quant à elle plus de difficultés. Un peu plus d'un tiers des étudiants répondent que la variable z vaut 0. Cette difficulté persistante, même après un enseignement spécifique, est repérée plus fréquemment dans les filières mathématique et informatique. Pourtant, 50% des étudiants en mathématique et 32% des étudiants en informatique sont capables d'interpréter géométriquement le système dans l'espace, contre 29,6% des étudiants en physique. Ainsi, la confusion entre la variable et le coefficient semble encore marquée dans les évaluations mais celle-ci n'empêche pas les étudiants à interpréter géométriquement les objets de l'espace. Cependant, seulement 35,6% des étudiants (toutes filières confondues) sont capables de décrire la droite d'intersection des deux plans. Nous illustrons les principales erreurs rencontrées dans leurs copies.

Certains étudiants ont un ensemble de solutions correct mais ils ne sont pas capables d'interpréter géométriquement l'objet qu'il décrit. Nous présentons les réponses données par les étudiants P_7 et P_{20} respectivement aux figures II.3 et II.4.

$S = \left\{ \left(\frac{14}{13}, \frac{19}{13}, \alpha\right) : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$: géométriquement cela correspond à un plan de $\mathbb{R}^3$.

FIGURE II.3 – Réponse de P_7 à la question 2 du test 4.

Cet étudiant décrit correctement l'ensemble des solutions. Il semble que les notations ensemblistes soient maîtrisées. Pourtant, il associe cet ensemble à un plan. Il n'est pas évident de déterminer si c'est la conversion entre le registre ensembliste et le registre algébrique qui pose problème ou bien si c'est la reconnaissance de la droite selon le point de vue paramétrique.

7. La colonne « Ayant réussi » représente le rapport entre le nombre d'étudiants ayant réussi l'item sur le nombre total d'étudiants dans notre échantillon.

$$\begin{cases} x = \frac{14}{13} \\ y = \frac{19}{13} \\ z = \lambda \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Géométriquement les 2 plans d'équations $\alpha \equiv x + 2y + 0z = 4$ et $\beta \equiv 5x - 3y + 0z = 1$ sont parallèles à l'axe OXY.

FIGURE II.4 – Réponse de P_{20} à la question 2 du test 4.

Cet étudiant résout le système étudié mais ne donne pas l'ensemble des solutions. L'interprétation géométrique qu'il fournit ne concerne pas cet ensemble de solutions mais les équations initiales. Il est capable de reconnaître un plan dans le point de vue cartésien. Puisqu'il parle de l'axe OXY, nous pensons qu'il confond les axes et les plans formant le repère orthonormé. Les plans étudiés sont effectivement parallèles à l'axe Oz. Il est donc capable d'identifier la position relative des plans dans l'espace. Cependant, il ne précise pas que les deux plans sont sécants et que leur intersection donne une droite. Il est difficile de dire s'il a compris la question ou s'il n'est pas capable d'interpréter la droite d'intersection des deux plans dans le point de vue paramétrique.

D'autres étudiants interprètent correctement la situation bien que l'ensemble des solutions soit incorrect. C'est par exemple le cas des étudiants M_6, M_{23} et I_{43} dont les extraits de leurs copies sont présentées aux figures II.5, II.6 et II.7.

$$S = \left\{ \left(\frac{14}{13}, \frac{19}{13}, 42\right) \right\}$$

Cela signifie que l'intersection des 2 plans est une droite $\parallel$ à z.

FIGURE II.5 – Réponse de M_6 à la question 2 du test 4.

Dans $\mathbb{R}^3$, la troisième composante des solutions de ce système est toujours nul et donc l'ensemble des solutions de ce système dans $\mathbb{R}^3$ est $\left\{ \left(\frac{14}{13}, \frac{19}{13}, 0\right) \right\}$.

Géométriquement dans $\mathbb{R}^3$: on a une ici équation cartésienne d'une droite parallèle à l'axe des z.

FIGURE II.6 – Réponse de I_{43} à la question 2 du test 4.

Dans ces deux exemples, l'ensemble des solutions donné correspond à un unique point. Pour l'un, la variable z est nulle et pour l'autre elle vaut 42. Nous pensons que l'étudiant M_6 a retenu que la cote pouvait être quelconque et donc il a choisi une valeur particulière. Cependant, les deux étudiants décrivent bien qu'il s'agit dans cet exercice d'une droite parallèle à l'axe des cotes. Il ne semble pas déraisonnable de penser que l'interprétation géométrique ne se soit pas faite à partir de l'ensemble des solutions mais plutôt à partir d'un questionnement sur les objets décrits par le système à résoudre. En

effet, une analyse en termes géométriques du système amène à chercher l'intersection de deux plans sécants. Comme ils sont tous les deux parallèles à l'axe des cotes, la droite d'intersection de ces deux plans est elle aussi parallèle à l'axe Oz. Selon nous, ces étudiants scindent les calculs algébriques réalisés de l'interprétation géométrique. Ces étudiants ne semblent pas avoir effectué de vérification [8] entre l'objet décrit par l'ensemble des solutions et celui qu'ils pensent obtenir. Selon Chalançon, Coppé et Pascal (2002), les vérifications deviennent difficiles lorsque les techniques de calculs ne s'appuient pas sur des connaissances suffisamment solides. Nous pensons que ces étudiants éprouvent alors des difficultés à contrôler suffisamment leurs actions et leurs connaissances pour faire des vérifications.

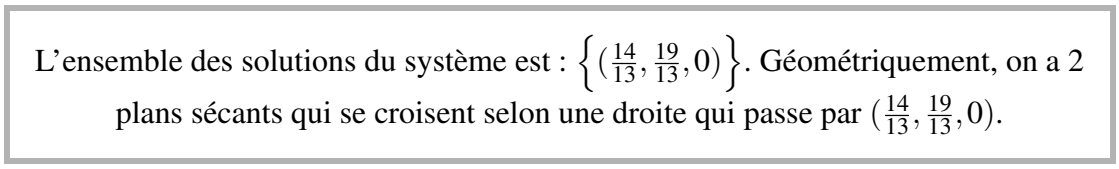


FIGURE II.7 – Réponse de M_{23} à la question 2 du test 4.

Cet étudiant, contrairement aux étudiants M_6 et I_{43}, essaie d'établir un lien entre l'ensemble des solutions qu'il donne et la droite. Il semble cohérent dans son raisonnement puisque la droite passe effectivement par ce point. Cependant, il ne donne qu'un seul point pour décrire celle-ci. Sans la donnée d'un vecteur directeur, il y a une infinité de droites qui passent par ce point. Cet étudiant ne semble pas se rendre compte de ce problème de non unicité de l'objet décrit. Ce manque d'informations dans la description de la droite apparait dans les copies de nombreux étudiants, y compris ceux ayant fourni un ensemble de solutions correct.

L'énoncé analysé révèle que les étudiants n'ont aucune difficulté dans le plan. Ils sont capables de résoudre un système et d'interpréter géométriquement les objets du plan. Par contre, il en va tout autrement dans l'espace. La confusion entre variable et coefficient est toujours très présente chez les étudiants (32,7% des étudiants) et cela en amène certains à donner une interprétation géométrique incorrecte. Cependant, d'autres étudiants fournissent une interprétation géométrique correcte malgré cette confusion. Ces étudiants ne semblent pas établir d'aller-retour entre les calculs et l'interprétation qu'ils ont du système. Ainsi, l'interprétation géométrique à partir du point de vue cartésien n'amène pas de difficulté au contraire de celle d'un ensemble de solutions. La conversion entre le registre ensembliste et le registre de la langue naturelle est problématique. De plus, de nombreux étudiants ne décrivent pas la droite entièrement. Ils s'en tiennent à donner un seul point de la droite ou bien un vecteur directeur de celle-ci. La non unicité des objets qu'ils décrivent ne semble pas claire chez eux.

8. Coppé (1997) définit la vérification comme un argument avancé ou toute action mise en œuvre par l'élève pour limiter l'incertitude sur le résultat. Une vérification peut amener une phase de rectification.

Question 7, test 4, 2014

① Donnez une équation cartésienne du plan α passant par $(1,-1,2)$ et parallèle au plan OYZ.

② Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par le point $(-1,2,3)$ et parallèle à la droite $D' \equiv (x,y,z) = (\lambda+2,-4,5\lambda+1)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Afin de déterminer une équation cartésienne du plan α, un vecteur normal et un point du plan doivent être donnés. Puisque le plan α est parallèle au plan OYZ, un vecteur normal de α est colinéaire à un vecteur normal de OYZ. Il y a une conversion entre les registres de la langue naturelle et algébrique. Ainsi, un vecteur normal de α est par exemple $(1,0,0)$. Une équation cartésienne du plan α est de la forme $x = d$. Or, le point $(1,-1,2)$ appartient au plan. D'où $\alpha \equiv x = 1$. Pour la deuxième question, un vecteur directeur et un point de la droite D sont à déterminer. Puisque les droites D et D' sont parallèles, un vecteur directeur de l'une est colinéaire à un vecteur directeur de l'autre. Il y a une conversion entre les registres de la langue naturelle et algébrique. L'équation de D' peut se réécrire comme $(x,y,z) = (2,-4,1) + \lambda(1,0,5)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$, grâce aux opérations sur les vecteurs. Ces connaissances sont connues des étudiants et vues dans le cadre de la géométrie vectorielle. Il y a alors un changement de cadres. Un vecteur directeur de la droite D' est alors $(1,0,5)$. Un vecteur directeur de D est par exemple $(1,0,5)$. Une équation paramétrique de la droite D est $(x,y,z) = (-1,2,3) + \lambda(1,0,5)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. En éliminant des équations le paramètre λ, nous obtenons :

$$\begin{cases} y = 2 \\ x+1 = \frac{z-3}{5}. \end{cases}$$

Il y a une articulation des points de vue dans le sens paramétrique/cartésien. Cette question nécessite elle aussi la disponibilité de connaissances antérieures des étudiants comme les opérations sur les vecteurs, la colinéarité des vecteurs et la résolution d'un système avec paramètre.

La question vaut quatre points : deux points par item. Cette question est réussie par 60,4% des étudiants. Le tableau II.2 montre le pourcentage d'étudiants ayant réussi en fonction des items et des filières.

% réussite	Math	Phys	Info	Ayant réussi
Item 1	58,3	37	44	45,5
Item 2	79,2	59,3	58	63,4

TABLE II.2 – Pourcentage de réussite des étudiants à la question 7 du test 4.

Le deuxième item est mieux réussi que le premier, et ce, dans toutes les filières. Pour le deuxième item, la majorité des étudiants (75%) a réussi à développer l'équation paramétrique donnée pour en extraire un vecteur directeur de la droite D'. La position

relative entre les deux droites a été bien traduite en termes de vecteurs colinéaires et ils choisissent tous le vecteur directeur de D' trouvé précédemment. 63,4% d'entre eux ont écrit une équation paramétrique de la droite D. L'erreur fréquemment commise est d'écrire directement un système d'équations cartésiennes d'une droite alors qu'une des composantes du vecteur directeur est nulle. Cela ne semble pas leur poser de problème de diviser par 0. L'articulation entre le point de vue paramétrique et le point de vue cartésien est correcte pour 60,4% des étudiants.

Pour le premier item, les résultats sont moins bons. Deux stratégies apparaissent : déterminer un vecteur normal du plan Oyz, déterminer deux vecteurs directeurs du plan Oyz. La première stratégie a été utilisée par 63,4% des étudiants. La plupart ont réussi à fournir un vecteur normal au plan Oyz, à traduire la position relative des deux plans en termes de vecteurs et à donner une équation cartésienne du plan α. La deuxième stratégie a été employée par 16,8% des étudiants mais elle ne semble pas les amener à la réussite de la question. Les erreurs sont nombreuses et variées. Nous les illustrons avec des extraits de copies des étudiants.

Certains étudiants ont donné un système d'équations cartésiennes pour décrire un plan comme par exemple l'étudiant P_{15} (voir figure II.8).

si le plan α est $\|$ au plan OYZ alors son vecteur abscisse vaut 0 et son ordonné et son z peut valoir n'importe quelle valeur
$\frac{y+1}{\lambda} = \frac{z-2}{\lambda} = 1.$

FIGURE II.8 – Réponse de P_{15} à la question 7 du test 4.

Cet étudiant visualise bien un plan parallèle à Oyz. Il est capable de déterminer les caractéristiques que doivent respecter les composantes des vecteurs directeurs d'un tel plan. Par contre, il décrit une droite au lieu de décrire le plan α. Une confusion entre la description d'une droite et celle d'un plan dans le point de vue cartésien semble apparaître. Il se peut qu'elle soit liée à un manque de questionnement de la part de ces étudiants sur ce que représente géométriquement une équation. Plusieurs causes peuvent expliquer cette difficulté. Tout d'abord, comme nous l'avons déjà dit au point 2.4, la notion même d'équation est une notion paramathématique, au sens de Chevallard (1991). Autrement dit, elle est travaillée comme un outil mais jamais en tant qu'objet mathématique défini. Le cours de Mathématiques élémentaires ne définit pas non plus de manière formelle ce qu'est une équation mais le travail proposé sur les ensembles de points permet déjà d'en saisir une première formalisation. Il se peut alors que la dimension objet de la notion ne soit pas suffisamment développée chez nos étudiants.

Une deuxième explication à cette difficulté est fournie par Kouki (2008). Dans sa thèse, il définit une équation en utilisant la logique des prédicats. Il explique qu'en logique, une classe d'objets est un terme général et si un prédicat est appliqué à un terme général alors l'expression produite est dépourvue de valeur de vérité. Il donne comme exemple « x est inférieur ou égale à 3 ». Cette expression est parfois vraie, parfois fausse. C'est ce que l'auteur appelle des phrases ouvertes ou des fonctions propositionnelles.

Il définit alors une équation comme une phrase ouverte. De ce point de vue, résoudre une équation c'est tout simplement trouver tous les éléments dans un ensemble donné qui satisfont cette phrase ouverte. En étudiant la notion d'équation dans l'enseignement tunisien, Kouki (2006) repère que les difficultés des élèves sont liées à une absence de mise en relation des aspects syntaxique (manipulations des expressions algébriques) et sémantique (vérification et interprétation du résultat lors de la résolution de problèmes). De la sorte, la difficulté que nous avons repérée ici peut s'expliquer par un manque d'articulation entre les deux aspects. Notons que l'aspect syntaxique ne semble pas une source d'erreurs chez nos étudiants au contraire de l'aspect sémantique. Ces deux aspects étant pourtant développés au sein du cours analysé.

D'autres étudiants ont un raisonnement correct mais ils n'ont pas donné un bon candidat pour un vecteur normal du plan Oyz. C'est le cas par exemple de M_{11} à la figure II.9.

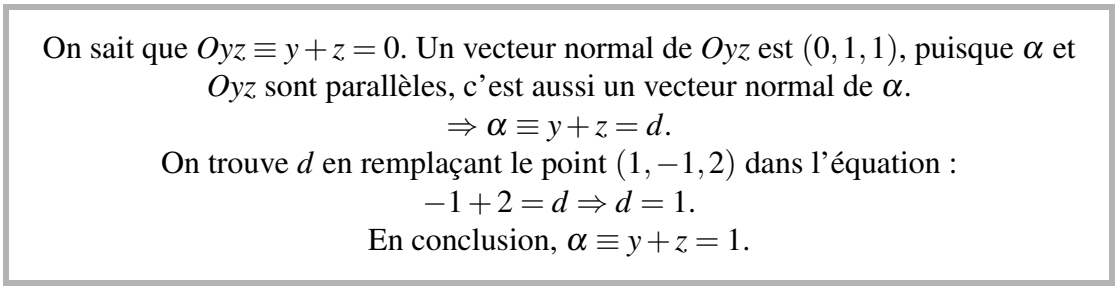


FIGURE II.9 – Réponse de M_{11} à la question 7 du test 4.

Cet étudiant cherche à identifier un vecteur normal au plan Oyz. Il traduit correctement le parallélisme des deux plans en termes de vecteurs colinéaires. La conversion entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique ne semble pas une difficulté pour lui. Il utilise ensuite le point donné dans l'énoncé pour écrire une équation cartésienne du plan α. Bien que le raisonnement soit parfait, il donne quand même une équation cartésienne incorrecte pour le plan Oyz. Nous pensons qu'il a confondu $x=0$ et $0x$. Il s'agit certainement de la même confusion entre la variable et le coefficient dont nous avons déjà parlé. Le point de vue cartésien semble maîtrisé par cet étudiant. Cependant, il ne semble pas avoir vérifié que l'équation donnée représentait bien un plan parallèle au plan Oyz. L'aspect sémantique des équations est encore une fois mis en défaut.

Plusieurs étudiants ont essayé de déterminer des vecteurs directeurs du plan Oxy pour ensuite trouver un vecteur normal à ce plan. Certains d'entre eux ont donné des vecteurs colinéaires comme par exemple l'étudiant I_{26} (voir figure II.10). D'autres n'ont donné qu'un seul vecteur directeur du plan et déterminé un vecteur qui lui est orthogonal. C'est le cas des étudiants P_{18}, P_{25} et I_8 (voir figures II.11, II.12, II.13).

$(0,1,1)$ est un point du plan Oyz
$(0,2,2)$ est aussi un point du plan Oyz
$(0,-1,-1)$ est donc un vecteur directeur de Oyz.
Comme le plan α est $\|$ au plan Oyz, le vecteur directeur $(0,-1,-1)$ de Oyz est aussi un vecteur directeur de α.
$(0,3,2)$ est un point du plan Oyz
$(0,5,4)$ est aussi un point du plan Oyz
$(0,-2,-2)$ est donc un vecteur directeur de Oyz donc de α.
$\alpha \equiv (1,-1,2)+\lambda(0,-1,-1)+\mu(0,-2,-2)$.

FIGURE II.10 – Réponse de I_{26} à la question 7 du test 4.

Cet étudiant se donne quatre points distincts du plan Oyz et calcule les composantes de deux vecteurs du plan. L'abscisse des points donnés est toujours nulle. L'étudiant est alors certainement capable de dire que tous les points du plan Oyz ont une telle abscisse et pourtant il n'utilise pas le point de vue cartésien. De plus, ses connaissances sont disponibles car il calcule correctement les composantes d'un vecteur lorsque son origine et son extrêmité sont données. Il sait également que deux vecteurs directeurs sont nécessaires pour décrire le plan dans le point de vue paramétrique. L'étudiant ajoute que les vecteurs directeurs du plan Oyz sont des vecteurs directeurs du plan α car ils sont parallèles. Il traduit alors correctement la condition de parallélisme des deux plans dans le registre algébrique. Le raisonnement de l'étudiant est correct. Cependant, il donne $(0,-1,-1)$ et $(0,-2,-2)$ comme vecteurs directeurs du plan. Ces deux vecteurs étant colinéaires, cela ne suffit pas à déterminer une équation paramétrique du plan α. Cet étudiant n'a certainement pas remarqué la proportionnalité des deux vecteurs ou il n'a pas réellement compris l'utilité de la non colinéarité des deux vecteurs pour décrire un plan. Ensuite, l'étudiant pense donner une équation paramétrique du plan α et il n'écrit ni les variables, ni le signe d'égalité. Un manque de sens important sur la notion d'équation est repéré. Puisqu'il n'a pas donné une équation cartésienne du plan, il nous est difficile de dire si c'est parce qu'il confond le point de vue cartésien et le point de vue paramétrique ou s'il n'est pas capable de les articuler.

Un vecteur normal de Oyz est, par exemple, $(1,0,-1)$ (car ses vecteurs directeurs sont de la forme $(0,y,z)$ donc il possède par exemple $(0,1,1)$ en directeur. Il suffit alors de prendre un vecteur qui donne un produit scalaire nul avec celui-ci pour affirmer qu'il est vecteur normal, c'est ainsi que je trouve $(1,0,-1)$)

FIGURE II.11 – Réponse de P_{18} à la question 7 du test 4.

(a,b,c) est un vecteur normal de α et comme α est parallèle à Oyz, alors (a,b,c) est aussi normal à $Oyz \Leftrightarrow$ un vecteur directeur de Oyz est $(0,1,1)$ qui est aussi un vecteur directeur de α.
$\Rightarrow (a,b,c)\cdot(0,1,1)=0$ car le vecteur normal $\perp$ vecteur directeur
$\Rightarrow a.0+b+c=0$
$\Rightarrow b+c=0$
$\Rightarrow b=-c$
Oyz a pour équation cartésienne $y+z=0$.

FIGURE II.12 – Réponse de P_{25} à la question 7 du test 4.

$\Rightarrow$ un vecteur directeur de ce plan pourrait être $(0,1,1)$
sachant que α et Oyz sont $\|$, on peut en déduire qu'ils ont un même vecteur directeur.
Un vecteur normal aux deux plans est $(0,1,-1)$ car le produit scalaire avec le vecteur directeur $(0,1,1)$ est nul.

FIGURE II.13 – Réponse de I_8 à la question 7 du test 4.

Dans ces trois copies, les étudiants ont établi que le vecteur $(0,1,1)$ est un vecteur directeur du plan Oyz. Ils construisent ensuite un vecteur orthogonal à $(0,1,1)$ grâce au produit scalaire nul. Pour P_{18}, le produit scalaire entre $(0,1,1)$ et $(1,0,-1)$ ne donne pas 0 mais -1. Le produit scalaire ne semble pas une connaissance disponible chez cet étudiant. Par contre, cela semble être le cas pour les étudiants P_{25} et I_8. Dans l'extrait de la copie de P_{25}, l'étudiant arrive à la relation $b=-c$. Ainsi, un vecteur normal (a,b,c) serait de la forme $(a,-c,c)$. Or, il choisit comme vecteur normal $(0,1,1)$ qui ne respecte pas cette condition. Il semble avoir substitué les coefficients b et c du vecteur normal par les variables y et z pour obtenir l'équation cartésienne $y+z=0$. En effet, $b=-c$ devient alors $y=-z$ ou encore $y+z=0$. Il est alors possible que cette erreur soit liée à la confusion entre les variables et les coefficients. Seul l'étudiant I_8 construit un vecteur qui est bien orthogonal à $(0,1,1)$. Cependant, ces trois étudiants ont commis la même erreur de raisonnement. En effet, dans l'espace, ce n'est pas parce qu'un vecteur est orthogonal à un vecteur directeur du plan qu'il est obligatoirement un vecteur normal de ce plan. Il nous semble alors que l'orthogonalité dans l'espace n'est pas une notion bien maîtrisée par ces étudiants. Il se peut que cette difficulté soit liée aux démarches que les étudiants ont apprises, notamment au sein du cours de Mathématiques élémentaires, dans le chapitre des droites du plan. Ils ont vu que si (a,b) est un vecteur normal à la droite d alors $(-b,a)$ est un vecteur directeur de la droite d puisque $-ab+ba=0$. Ainsi, les exercices proposés dans le plan amenaient souvent les étudiants à construire de la sorte un vecteur orthogonal à un vecteur donné. Or, cette démarche ne fonctionne plus dans l'espace. Les étudiants ne semblent alors pas conscients de la rupture occasionnée par l'extension de la notion d'orthogonalité du plan à l'espace.

Bien que cette question soit réussie par une grande partie des étudiants, de nombreuses difficultés ressortent de l'analyse de leurs copies. Celles-ci concernent plutôt la nature même de la notion d'équation et le nombre de vecteurs nécessaires pour décrire les objets dans l'espace en fonction des points de vue. Ce n'est donc pas l'articulation des points de vue qui semble poser problème dans cette question mais bien la description des objets dans chacun des points de vue. Cette difficulté peut aussi expliquer que les étudiants ne soient pas conscients des ruptures lors du passage du plan à l'espace des démarches utilisées dans les exercices sur l'orthogonalité. La notion de rang pourrait peut-être aider à saisir pourquoi deux vecteurs non colinéaires sont nécessaires pour décrire un plan dans le point de vue paramétrique ou déterminer, dans le point de vue cartésien, un vecteur normal au plan. Selon Rogalski (1991), cette notion est essentielle pour aborder les notions d'algèbre linéaire. Nous pensons qu'elle est utile également pour la géométrie des droites et des plans car la géométrie analytique fournit un « support géométrique et intuitif à certains concepts d'Algèbre Linéaire » (Rogalski, ibid., p. 9). Or, cette notion n'est formalisée que dans le cours d'algèbre linéaire se déroulant à la fin du cours de Mathématiques élémentaires.

Question 2, test 5, 2014

Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par $(2,-1,9)$ et dont un vecteur directeur est simultanément orthogonal aux vecteurs $(4,5,6)$ et $(-3,-1,0)$.

L'énoncé est écrit dans la langue naturelle. Nous cherchons un vecteur directeur (a,b,c) qui est simultanément orthogonal aux deux vecteurs donnés. Cette orthogonalité peut être traduite en termes de produit scalaire nul. Il y a une conversion entre les registres de la langue naturelle et algébrique. Le système suivant doit être résolu :

$$\begin{cases} 4a+5b+6c=0 \\ -3a-b=0. \end{cases}$$

Nous pouvons par exemple exprimer b et c en fonction de a. Nous obtenons alors $b=-3a$ et $c=\frac{11}{6}a$. Ainsi, un vecteur orthogonal à $(4,5,6)$ et $(-3,-1,0)$ est de la forme $(a,-3a,\frac{11}{6}a)$ avec $a\in\mathbb{R}$. Par exemple, nous pouvons choisir $a=6$ ce qui nous donne le vecteur $(6,-18,11)$. Un système d'équations cartésiennes de la droite D est alors $\frac{x-2}{6}=\frac{y+1}{-18}=\frac{z-9}{11}$. Les connaissances sur l'orthogonalité des vecteurs, le produit scalaire et la résolution de systèmes doivent être disponibles chez les étudiants.

La question vaut quatre points. Elle est réussie par 55% des étudiants. Le tableau II.3 montre le pourcentage d'étudiants ayant réussi en fonction des items et des filières.

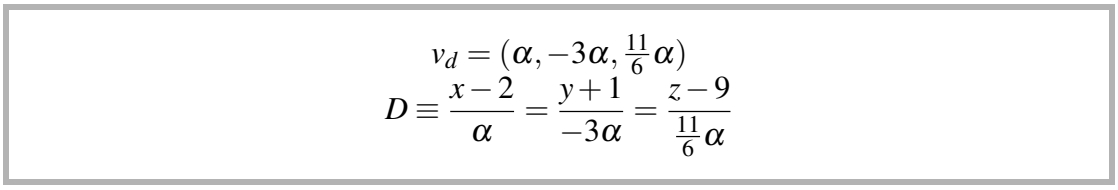
% réussite	Math	Phys	Info
Question	82,6	57,7	41,2

TABLE II.3 – Pourcentage de réussite des étudiants à la question 2 du test 5.

Nous constatons que cette question est très bien réussie dans la filière mathématique. Dans cette filière, les erreurs sont souvent calculatoires. Par contre, les erreurs

dans les filières physique et informatique relèvent de mauvaises conceptions. Nous illustrons nos propos en présentant les copies de certains étudiants.

De nombreux étudiants trouvent l'ensemble des vecteurs orthogonaux aux deux vecteurs donnés par l'énoncé. Il est question de choisir un des vecteurs appartenant à cet ensemble pour donner un système d'équations cartésiennes de la droite. Plusieurs étudiants rencontrent des difficultés à effectuer ce choix comme le montre la figure II.14.



$$v_d = (\alpha, -3\alpha, \tfrac{11}{6}\alpha)$$
$$D \equiv \frac{x-2}{\alpha} = \frac{y+1}{-3\alpha} = \frac{z-9}{\frac{11}{6}\alpha}$$

FIGURE II.14 – Réponse de l'étudiant P_{21} à la question 2 du test 5.

Ces étudiants traduisent correctement les relations d'orthogonalité en termes de produit scalaire nul. La résolution du système ne leur pose aucun problème. Les connaissances sur l'orthogonalité, le produit scalaire et la résolution de systèmes semblent disponibles. Ces étudiants fournissent également un ensemble de solutions correct. La conversion entre le registre algébrique et le registre ensembliste s'effectue correctement. De plus, le système d'équations cartésiennes donné est écrit sous la bonne forme. Le point de vue cartésien ne semble pas problématique. Cependant, ces étudiants n'ont pas choisi un vecteur directeur particulier pour écrire le système puisque les trois dénominateurs du système dépendent de α. De plus, ils ne justifient pas que la valeur de α est non nulle. Ils ont certainement considéré le triplet $(\alpha, -3\alpha, \frac{11}{6}\alpha)$ comme un triplet générique (x_v, y_v, z_v) et non comme la forme générale que l'ensemble des vecteurs doivent respecter. La difficulté s'explique peut-être par une incompréhension de l'ensemble des solutions.

Certains étudiants se donnent un vecteur orthogonal à $(4,5,6)$ et écrivent directement un système d'équations cartésiennes de la droite sans même vérifier que ce vecteur est lui aussi orthogonal à $(-3,-1,0)$. Cette erreur revient à celle commise à la question 7 du test 4 mentionnée ci-dessus.

L'erreur la plus souvent commise (21% des étudiants) consiste à chercher une équation cartésienne de plan. Celle-ci se présente essentiellement sous deux formes : soit ils le disent directement (figure II.15), soit ils veulent résoudre un système de 3 équations à 3 inconnues (figure II.16).

La droite D est d'équation $D \equiv ax + by + cz = d$.

FIGURE II.15 – Réponse de l'étudiant I_{27} à la question 2 du test 5.

le système des équations est donc $\begin{cases} 4a+5b+6c=0 \\ -3a-b=0 \\ 2a-b+9c=d \end{cases}$

FIGURE II.16 – Réponse de l'étudiant P_1 à la question 2 du test 5.

À la figure II.15, une confusion entre la description d'une droite dans l'espace et d'un plan dans le point de vue cartésien semble apparaitre. Celle-ci peut être expliquée par les spécificités des notions. Nous avons expliqué que le point de vue cartésien ne s'étend pas sans accident entre le plan et l'espace. Ces étudiants n'ont pas l'air conscient de cette rupture entre les connaissances du plan et de l'espace. Pourtant, l'enseignant a débuté le cours théorique par attirer l'attention sur celle-ci. À la figure II.16, nous retrouvons un extrait de la copie de l'étudiant P_1. Il explique qu'il cherche un vecteur directeur (a,b,c) de la droite D. Il développe le produit scalaire entre ce vecteur et chacun des vecteurs donnés dans l'énoncé. Cela correspond aux deux premières équations du système. Ensuite, il dit que le point $(2,-1,9)$ appartient à la droite et donne la relation $2a-b+9c=d$. Pour y arriver, l'étudiant semble partir d'une équation de la forme $ax+by+cz=d$ et remplacer les inconnues par les coordonnées du point. Une confusion entre la description des droites dans le plan et dans l'espace dans le point de vue cartésien semble émerger chez ces étudiants.

Pour cette question, les connaissances antérieures des étudiants ont l'air disponibles. Celles des droites dans le plan peuvent même engendrer certaines difficultés dans l'espace. C'est par exemple le cas des démarches utilisant l'orthogonalité des vecteurs et la description des objets dans le point de vue cartésien. Ces différentes ruptures semblent encore poser des problèmes aux étudiants même après un enseignement les prenant en compte.

Question 4, test 5, 2014

Soient les ensembles

$$A = \left\{(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid (\alpha,\beta,\gamma) \text{ est un vecteur orthogonal au vecteur } (4,-1,-1)\right\},$$

$$B = \left\{(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (\alpha,\beta,\gamma) \text{ est un vecteur directeur de la droite } D \equiv \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-3}{7}\right\}.$$

① Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

(a) $(0,0,0) \in A$.

(b) $(0,0,0) \in B$.

(c) $(-\frac{5}{13}\pi, -\pi, -\frac{7}{13}\pi) \in B$.

(d) $(1,2,3) \in B$.

(e) Il existe un vecteur $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(\alpha,\beta,\gamma) \neq (0,0,0)$, $(\alpha,\beta,\gamma) \in A$ et $(\alpha,\beta,\gamma) \notin B$.

② Décrivez géométriquement l'ensemble A.

L'affirmation au point (a) est vraie. La description des vecteurs appartenant à l'ensemble A est donnée en langue naturelle. L'orthogonalité des deux vecteurs se traduit par un produit scalaire qui peut être nul ou non. Les vecteurs (α,β,γ) appartenant à l'ensemble A satisfont la relation $4\alpha-\beta-\gamma=0$. Il y a donc une conversion entre les registres de la langue naturelle et algébrique. Le vecteur nul appartient à l'ensemble A puisqu'il vérifie cette relation. L'affirmation au point (b) est fausse. La description des vecteurs appartenant à l'ensemble B est donnée en langue naturelle. Tous les vecteurs directeurs de la droite D sont des multiples non nuls du vecteur directeur $(5,13,7)$. Il y a donc une conversion entre les registres de la langue naturelle et algébrique. Cette conversion est associée à la reconnaissance d'un système d'équations cartésiennes d'une droite de l'espace pour en déduire un vecteur directeur. Le vecteur nul n'appartient pas à l'ensemble B car quelle que soit la valeur du réel λ, nous avons $(0,0,0)\neq(5,13,7)$. L'affirmation au point (c) est vraie. Le vecteur $(-\frac{5}{13}\pi,-\pi,-\frac{7}{13}\pi)$ est un vecteur directeur de la droite D car il est multiple du vecteur $(5,13,7)$. L'affirmation au point (d) est fausse. En effet, nous avons déterminé au point (a) que la relation $4\alpha-\beta-\gamma=0$ doit être vérifiée pour que $(\alpha,\beta,\gamma)\in A$. Or, $(1,2,3)$ ne vérifie pas cette égalité. L'affirmation au point (e) est vraie. L'énoncé mélange les mots et les symboles. Un vecteur remplissant simultanément les trois conditions doit être exhibé. Il doit être non nul, appartenir à l'ensemble A et ne pas appartenir à l'ensemble B. Cette question revient à montrer que l'ensemble A n'est pas inclus à l'ensemble B.

Pour la deuxième question, deux méthodes peuvent être considérées. La première consiste à utiliser un résultat du cours : l'ensemble de tous les vecteurs orthogonaux à un vecteur donné forme un plan dont un vecteur normal est le vecteur donné. La seconde amène à réécrire l'ensemble A en utilisant la relation $4\alpha-\beta-\gamma=0$. Dans les deux cas, les étudiants reviennent à l'interprétation par le biais d'une équation cartésienne pour identifier le plan passant par l'origine du repère et admettant comme vecteur normal $(4,-1,-1)$. Cette question nécessite une conversion entre les registres ensembliste et algébrique et une conversion entre les registres algébrique et de la langue naturelle.

La question vaut six points : cinq points pour le premier item et un point pour le second. Cette question est réussie par 37,2% des étudiants. Le tableau II.4 montre le pourcentage d'étudiants ayant réussi en fonction des items et des filières.

% réussite	Math	Phys	Info	Ayant réussi
Item (a)	75	69,2	55,8	63,7
Item (b)	29,2	38,5	23,1	28,4
Item (c)	62,5	61,5	32,7	47,1
Item (d)	50	50	28,8	39,2
Item (e)	29,2	30,8	21,1	25,5
Item 2	58,3	46,1	42,3	47,1

TABLE II.4 – Pourcentage de réussite des étudiants à la question 4 du test 5.

Nous remarquons que l'item (a) est réussi par la majorité des étudiants. Leurs copies sur cet item ne révèlent aucune difficulté particulière. Nous allons regrouper les items (b), (c) et (d) car ils concernent à chaque fois l'appartenance d'un vecteur à l'ensemble B. Cet ensemble contient tous les vecteurs directeurs de la droite D. Il est question à chaque fois de tester si le vecteur est colinéaire ou non au vecteur $(5,13,7)$. Nous constatons que les résultats sont pourtant assez différents pour une même tâche. L'item (e) est le moins bien réussi par les étudiants et le nombre d'abstentions est important (36,3% des étudiants). La majorité des étudiants n'interprète pas correctement l'ensemble A. Nous allons nous intéresser aux erreurs et difficultés repérées dans les copies des étudiants.

Voici un extrait d'une copie de l'étudiant M_2 pour les items (c) et (d).

(c) Vrai. $(5,13,7)$ est un vecteur directeur de D. $(-\frac{5}{13}\pi, -\pi, -\frac{7}{13}\pi)$ est un vecteur directeur de D ssi il existe un λ réel tel que $\lambda(5,13,7) = (-\frac{5}{13}\pi, -\pi, -\frac{7}{13}\pi)$
Avec $\lambda = \frac{-\pi}{13}$, on a $\frac{-\pi}{13}(5,13,7) = (-\frac{5}{13}\pi, -\pi, -\frac{7}{13}\pi)$
(d) Vrai. $(1,2,3) \in B$ ssi $(1,2,3) \in D$ c-à-d ssi $\dfrac{1-1}{5} = \dfrac{2-2}{13} = \dfrac{3-3}{7} = 0$ (c-à-d si $(1,2,3)$ vérifie les équations de D).

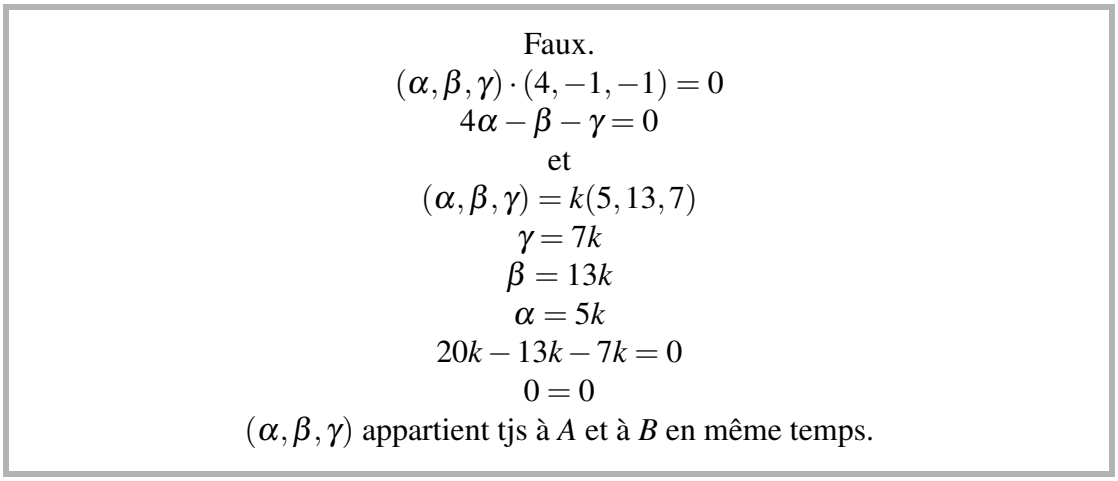
FIGURE II.17 – Réponse de l'étudiant M_2 à la question 4 du test 5.

Cet étudiant répond correctement à l'item (c). Il identifie correctement un vecteur directeur de la droite D. Le point de vue cartésien ne semble pas problématique. Il traduit ensuite correctement la condition d'appartenance à l'ensemble B et met bien en évidence la valeur de λ prouvant la colinéarité des deux vecteurs. Ainsi, la conversion entre les registres ensembliste et algébrique est correctement effectuée. Les connaissances sur la colinéarité semblent disponibles. Il est alors possible que l'étudiant ait compris ce que représente l'ensemble B. Cependant, la réponse à l'item (d) pose question. Il montre que le vecteur $(1,2,3)$ appartient à l'ensemble B car les composantes vérifient le système d'équations cartésiennes de la droite D. Une confusion entre le vecteur appartenant à un ensemble et un point d'une droite apparait. De plus, une incohérence entre l'item (c) et l'item (d) survient puisque l'étudiant a bien répondu aux items précédents. Il est possible que l'étudiant ait directement vu que le point $(1,2,3)$ appartient à la droite D au vu du système d'équations cartésiennes et qu'il n'est pas revenu sur la définition même de l'ensemble B.

40,2% des étudiants répondent, aux items (b), (c) et (d), que les points n'appartiennent pas à la droite D. Dans ce cas-ci, ces étudiants semblent confondre les objets « point » et « vecteur ». Cette difficulté revient souvent dans les travaux traitant de l'enseignement des vecteurs en mathématiques ou en physique (Ba, 2007 ; Lê Thi, 1997 ; Lounis, 1989 ; Pressiat, 1999). Pavlopoulou (1993) explique que la distinction entre l'objet mathématique de ses représentants est importante et peut être travaillée à partir des conversions de registres. Tanguay (2002) ajoute qu'une « grande souplesse de pensée » est nécessaire et qu'elle « ne s'acquiert que par la maîtrise et la clarté des idées » (p.

46). Ainsi, une première explication à cette difficulté peut être liée à une flexibilité trop faible voire manquante chez nos étudiants pour la notion de vecteurs. Il est possible que ce manque de flexibilité soit lié au fait que les étudiants ressentent une certaine confiance et facilité pour les calculs algébriques et qu'ils ne possèdent pas la subtilité du sens géométrique. Bittar (1998) donne une autre explication. Dans l'enseignement, les vecteurs sont davantage travaillés en tant qu'outils pour résoudre des problèmes géométriques ou algébriques et les aspects objets sont négligés. De ce fait, il peut être difficile pour les étudiants de mobiliser leurs connaissances sur les vecteurs pour résoudre un problème les faisant intervenir.

L'item (e) est plus complexe du point de vue des aspects logiques que les autres questions. Il faut tenir compte de la quantification existentielle et de la conjonction. De plus, cet énoncé est proposé dans un registre mélangeant les mots et les symboles, nous le nommons registre mixte. Les difficultés que nous avons repérées sont vraiment liées à la logique. Nous présentons les copies des étudiants M_1 et M_{11} (figures II.18 et II.19).



Faux.

$$(\alpha,\beta,\gamma)\cdot(4,-1,-1)=0$$
$$4\alpha-\beta-\gamma=0$$

et

$$(\alpha,\beta,\gamma)=k(5,13,7)$$
$$\gamma=7k$$
$$\beta=13k$$
$$\alpha=5k$$
$$20k-13k-7k=0$$
$$0=0$$

(α,β,γ) appartient tjs à A et à B en même temps.

FIGURE II.18 – Réponse de l'étudiant M_1 à la question 4 du test 5.

Cet étudiant donne sous forme algébrique les conditions pour qu'un vecteur générique (α,β,γ) appartiennent à la fois aux ensembles A et B. Il déduit des conditions sur les composantes du vecteur considéré et vérifie ensuite si la relation donnée par le produit scalaire vaut zéro. Cet étudiant montre alors que tous les vecteurs de l'ensemble B sont toujours dans A en calculant le produit scalaire avec $(4,-1,-1)$. Il prouve donc que l'ensemble B est inclus à A. Or, ce n'est pas l'objectif de la question. Cependant, son raisonnement n'est pas sans cohérence. En effet, il répond que l'affirmation est fausse et considère qu'il vient de montrer que tous les vecteurs appartiennent à la fois à A et à B. Cet étudiant ne prend alors la négation que de certains morceaux de l'affirmation et ne tient pas compte de la conjonction. Les étudiants ayant commis ce genre d'erreur ont des difficultés avec le registre de la logique telles que le sens associé aux quantificateurs universels et existentiels et à la négation de l'affirmation. De plus, des difficultés supplémentaires sont liées au registre ensembliste, notamment sur le sens associé aux inclusions et à l'égalité d'ensembles. Nous avons mis en évidence que les étudiants de BAB1 pouvaient rencontrer ce genre de difficultés au point 2.1. Ainsi, même après un

enseignement se voulant d'assurer la transition secondaire-université, les difficultés des étudiants en logique et en théorie des ensembles n'ont pas disparu.

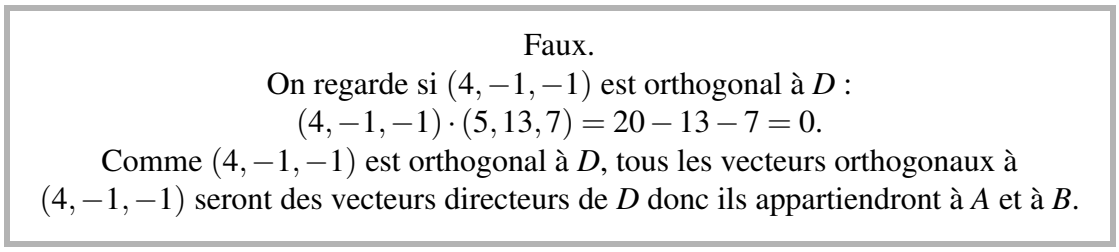

Faux.
On regarde si $(4,-1,-1)$ est orthogonal à D :
$(4,-1,-1)\cdot(5,13,7) = 20-13-7 = 0$.
Comme $(4,-1,-1)$ est orthogonal à D, tous les vecteurs orthogonaux à $(4,-1,-1)$ seront des vecteurs directeurs de D donc ils appartiendront à A et à B.

FIGURE II.19 – Réponse de l'étudiant M_{11} à la question 4 du test 5.

Cet étudiant calcule le produit scalaire entre le vecteur $(4,-1,-1)$ et un vecteur directeur de la droite D. Il ne traduit pas sous forme algébrique les conditions d'appartenance aux ensembles A et B. Il dit que si le vecteur $(4,-1,-1)$ est orthogonal à un vecteur directeur de la droite D alors tous les vecteurs orthogonaux à $(4,-1,-1)$ sont des vecteurs colinéaires à ce vecteur directeur. Cette justification est fausse. En effet, dans l'espace nous pouvons avoir un vecteur orthogonal à $(4,-1,-1)$ et qui ne soit pas un vecteur directeur de la droite D. C'est par exemple le cas du vecteur $(1,2,2)$. Il a un raisonnement cohérent puisqu'il répond que l'affirmation est fausse et considère que l'ensemble A est égal à l'ensemble B. Nous retrouvons, comme pour l'étudiant M_1, des difficultés liées au registre de la logique et à la manipulation de la négation et du quantificateur mais aussi liées à l'inclusion de deux ensembles.

Nous remarquons que pour cette question aucun étudiant n'a répondu en utilisant un argument géométrique. L'ensemble A est un plan et l'ensemble B décrit une droite. Il est donc évident qu'il existe un triplet dans le plan qui n'appartient pas à la droite. Cette réponse est peut-être jugée non valable par les étudiants puisque la question est posée dans un registre mixte. La présence explicite d'un quantificateur pousse certainement les étudiants à répondre de façon formelle, surtout au vu de l'accent fort mis par le cours sur la rédaction des raisonnements et la prise en compte de la logique.

Pour la deuxième question, la majorité des étudiants a donné une équation cartésienne du plan et déterminé qu'il s'agissait effectivement du plan passant par $(0,0,0)$ et de vecteur normal $(4,-1,-1)$. Nous illustrons les erreurs rencontrées par les copies des étudiants M_{12} et M_{19} (figures II.20 et II.21).

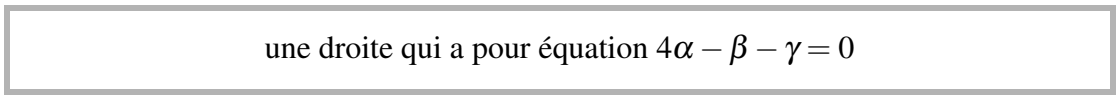

une droite qui a pour équation $4\alpha-\beta-\gamma=0$

FIGURE II.20 – Réponse de l'étudiant M_{12} à la question 4 du test 5.

Cet étudiant donne une équation cartésienne correcte du plan décrit par l'ensemble A mais il l'interprète comme étant une droite. Il s'agit encore une fois de la difficulté lors de l'extension du point de vue cartésien du plan à l'espace.

C'est un ensemble de plans $\|$ les uns aux autres et orthogonaux à $(4,-1,-1)$.

FIGURE II.21 – Réponse de l'étudiant M_{19} à la question 4 du test 5.

La majorité des étudiants échoue à cette question parce qu'ils considèrent soit un ensemble de plans, soit ils oublient de donner un point du plan. Dans les deux cas, c'est encore l'unicité du plan qui est remise en question. C'est le cas de l'étudiant M_{19} qui parle d'un ensemble de plans parallèles.

Globalement pour cette question, la traduction de la condition d'appartenance à l'ensemble A dans le registre algébrique semble maîtrisée par la majorité des étudiants. Au contraire, l'ensemble B amène plus de difficultés que l'ensemble A. En effet, les étudiants ne reconnaissent pas les objets qui appartiennent à cet ensemble. Ils l'interprètent comme un ensemble de points de la droite D et non comme un ensemble de vecteurs directeurs de cette droite. Nous en concluons que selon l'ensemble considéré, la reconnaissance des objets appartenants ou non à cet ensemble est plus ou moins maîtrisée. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'ensemble A ne demande qu'une seule traduction algébrique des informations pour obtenir une équation cartésienne, alors que l'ensemble B requiert à la fois une identification des informations déduites du système d'équations cartésiennes et une traduction algébrique de la condition d'appartenance. La logique et la théorie des ensembles semblent encore problématiques pour la plupart des étudiants. Les connaissances algébriques telles que l'orthogonalité, le produit scalaire, la colinéarité et l'égalité de vecteurs sont disponibles chez nos étudiants au contraire des connaissances nouvelles liées à la logique et à la théorie des ensembles.

L'analyse des questions proposées lors des évaluations met en évidence qu'une certaine flexibilité entre les registres et les points de vue est nécessaire chez nos étudiants pour réussir le cours. Nous notons que peu de questions demandent d'effectuer un changement de cadres. Il est attendu des étudiants une grande disponibilité de leurs connaissances telles que les équations de droites dans le plan, la résolution des systèmes, l'orthogonalité et la colinéarité pour répondre aux questions. La majorité des étudiants semble avoir développé une flexibilité et conceptualisé, au moins en partie, les notions de droites et de plans dans l'espace après le cours de Mathématiques élémentaires. Cependant, un travail dans les registres de la logique et ensembliste engendre encore certaines difficultés chez nos étudiants. L'interprétation géométrique est elle aussi encore problématique et en particulier quand les objets sont décrits par un ensemble ou selon le point de vue cartésien. Cette constatation peut expliquer pourquoi cette démarche est encore absente chez nos étudiants de BAB3 dans le cours de géométrie différentielle. Ainsi, bien que les conceptions personnelles des étudiants semblent avoir évolué au fil de leur apprentissage, l'interprétation géométrique est toujours une source de difficultés importantes pour les étudiants.

2.6 Bilan de l'étude cognitive

Le diagnostic du cours de Mathématiques élémentaires permet de mettre à jour les premières spécificités des notions de droites et de plans dans l'espace ainsi que plusieurs difficultés rencontrées par les étudiants de BAB1.

Au sein de ce cours, les notions de droites et de plans dans l'espace sont introduites comme une extension des notions vues dans le plan. Quelques-unes de ces extensions s'effectuent avec une certaine continuité lors de la généralisation entre le plan et l'espace. C'est le cas par exemple du produit scalaire et du point de vue paramétrique. Par contre, il arrive que des accidents se produisent lors de ce passage, comme pour le point de vue cartésien, les droites et même au niveau des démarches employées pour résoudre des exercices d'orthogonalité. Nous avons constaté que ces ruptures engendrent pour la plupart des étudiants de nombreuses difficultés, et ce, même après un enseignement les mettant en évidence.

Les notions de droites et de plans interviennent dans les cadres de la géométrie synthétique, vectorielle et analytique, dans les registres algébrique, graphique, ensembliste, de la logique et de la langue naturelle, suivant un point de vue cartésien et paramétrique. Un travail complexe nécessitant une quantité et une variété importante d'adaptations des connaissances est donc attendu des étudiants de première année d'université. Ainsi, l'enseignement proposé prend en compte le développement de la flexibilité cognitive des étudiants nécessaire pour ces notions. Toutefois, la dimension outil des notions de droites et de plans dans l'espace ainsi que la définition en tant qu'objet de la notion d'équation n'interviennent à aucun moment de l'enseignement. Or, nous avons montré au point 2.3 que la dialectique outil-objet fait partie intégrante du processus de conceptualisation des notions. Il nous semble donc important que ces manques soient pris en compte dans notre séquence d'enseignement. Kouki (2008) et Rogalski (1991) proposent d'ailleurs chacun une définition de la notion d'équation. Selon Kouki (ibid.), une équation est une phrase ouverte qui n'a pas de valeur de vérité. Cette définition se base sur les notions de logique qui sont nouvelles pour les étudiants entrant à l'université et pourrait ne pas les aider à donner du sens aux équations. C'est pourquoi, nous retenons la définition proposée par Rogalski (ibid.). Pour lui, une équation est une application $f : E \to F$ où E et F sont deux ensembles. De la sorte, résoudre l'équation $f(x) = y$ revient à chercher un élément x de E dont l'image par f est y. Par exemple, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ peut être vue comme l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec comme valeur pour y le nombre 0 de $\mathbb{C}$. Cette définition nous semble exploitable, au moins en partie, en BAB1 et dans l'enseignement secondaire, notamment quand la notion de fonction est introduite. L'analyse des programmes faite au chapitre IV nous permettra de mieux apprécier cette définition en fonction des acquis des élèves de l'enseignement secondaire.

Le manque de sens accordé par les étudiants aux équations amène de nombreuses difficultés lors de l'interprétation géométrique des objets de l'espace. Cela a par exemple été relevé lorsque les calculs réalisés ne correspondent pas à l'interprétation géométrique qu'ils donnent. L'articulation nécessaire entre les aspects syntaxique et séman-

tique ne semble pas développée par nos étudiants dans le cours dont il est question ici. De plus, au vu des objectifs du cours et du déroulement, il est possible que les étudiants réussissent l'évaluation finale sans pour autant être capables d'interpréter géométriquement les équations ou les ensembles de points. Or, selon Rogalski (ibid.), il est important qu'ils puissent y arriver car cela permet « une conservation du sens dans la manipulation calculatoire » (p. 9).

Notre analyse révèle que certaines difficultés propres à la transition entre l'enseignement secondaire et l'université sont bien prises en compte par le cours de Mathématiques élémentaires, telles que celles liées à l'accélération du temps didactique à l'université et au changement du degré d'autonomie attendu des étudiants. Cependant, les difficultés liées au formalisme mathématique persistent. En effet, nous avons montré lors de l'analyse des évaluations que les connaissances de logique et de théorie des ensembles restent problématiques pour les étudiants. C'est par exemple le cas lorsque les étudiants sont confrontés à des affirmations plus complexes sur le plan de la logique, mélangeant les quantificateurs, les conjonctions, les négations, ou à des ensembles mettant en jeu plusieurs adaptations des connaissances (traduction de registres, mobilisation de connaissances anciennes ou en cours d'acquisition).

Les notions de droites et de plans dans l'espace sont enseignées pour la première fois dans l'enseignement secondaire. Les étudiants ont donc des conceptions personnelles, au sens de Hitt (2006), sur ces notions en entrant à l'université. Nos conclusions montrent que l'enseignement décrit ici modifie ces conceptions chez la plupart des étudiants et permet de développer leur flexibilité en termes de registres et de points de vue. Nous constatons également que le travail attendu des étudiants nécessite de nombreuses adaptations des connaissances et de pouvoir interpréter géométriquement les objets à partir d'une équation ou d'un ensemble de points. Or, de nombreuses difficultés émergent encore lors de l'analyse des copies des étudiants aux évaluations. L'aspect sémantique est encore très problématique. Ceci explique, au moins en partie, pourquoi les étudiants de BAB3 ne sont pas capables de mettre en œuvre une démarche d'interprétation géométrique.

Ces conclusions nous amènent à nous intéresser au travail proposé dans l'enseignement secondaire sur ces notions. Nous nous demandons si certaines difficultés des étudiants peuvent être expliquées et mises en relation avec ce qu'ils ont vu et fait dans le secondaire. En particulier, les enseignants proposent-ils un travail permettant de développer la flexibilité cognitive nécessaire entre les cadres, les registres et les points de vue chez leurs élèves pour favoriser leur interprétation géométrique ? De plus, l'enseignement secondaire reste une de nos plus grandes préoccupations que ça soit en tant que future enseignante dans l'enseignement secondaire ou en tant que future formatrice d'enseignants. Nous nous centrons donc sur l'enseignement des droites et des plans dans l'espace dans le secondaire dans la suite de notre travail.

L'analyse du cours dont il est question ici a des limites méthodologiques. En effet, le diagnostic ne prend en compte que l'enseignement proposé lors de l'année 2014 et dans un cours tout à fait spécifique. Plusieurs analyses similaires lors des années ultérieures auraient permis d'affiner nos résultats. Les réponses des étudiants lors des

évaluations sont interprétées avec notre regard de chercheur en didactique. Des interviews avec les étudiants auraient aidé à mieux comprendre certaines de leurs difficultés. Cependant, l'étude du cours de Mathématiques élémentaires n'est pas notre objectif premier. Nous avons juste besoin de constituer une référence afin de mieux apprécier l'enseignement proposé dans le secondaire.

Afin de se dégager de l'institution dans laquelle notre travail s'inscrit, nous réalisons dans le chapitre suivant une étude historique et épistémologique. L'analyse de la genèse de la géométrie analytique peut nous aider à expliquer certaines difficultés d'enseignement liées aux équations et à leur interprétation géométrique.

Chapitre III

Étude historico-épistémologique

Nous avons réalisé, au chapitre II, un premier diagnostic d'un cours en première année universitaire dans lequel les notions de droites et de plans dans l'espace sont abordées. Cette étude cognitive nous a permis de relever les premières spécificités du savoir enseigné au sein de notre institution. Nous citons par exemple le fait que les notions de droites et de plans dans l'espace sont des extensions des notions de droites dans le plan. Dans ce chapitre, nous réalisons une étude historique et épistémologique afin d'adopter un point de vue plus général. Nous nous plaçons alors du côté du savoir savant. En particulier, nous nous intéressons à la genèse historique de la géométrie analytique et nous nous attachons à caractériser l'aspect généralisateur des notions de droites et de plans dans l'espace. De plus, nous avons mis en évidence dans les chapitres I et II que les étudiants rencontrent des difficultés à interpréter géométriquement les équations, c'est-à-dire à associer à une équation l'objet qu'elle décrit et réciproquement. C'est pourquoi nous avons choisi de nous intéresser à la façon dont les droites et les plans sont décrits par des équations dans l'histoire des mathématiques. Nous mettons alors en évidence le travail réalisé sur les objets géométriques d'une part et sur les équations algébriques d'autre part avant de montrer comment Descartes a fusionné les domaines algébrique et géométrique pour créer la géométrie analytique.

Nous ne sommes ni historienne, ni épistémologue. En tant que didacticienne des mathématiques, nous cherchons juste à pointer certains éléments répondant à nos besoins didactiques. Notre objectif final étant de concevoir une séquence d'enseignement (présentée au chapitre X) qui tenterait de surmonter les difficultés repérées au chapitre II, nous relatons des faits historiques en lien avec nos besoins que nous lions aux contenus à enseigner dans le chapitre V.

Nous commençons par présenter la méthodologie suivie pour l'étude historico-épistémologique. Nous donnons quelques éléments sur la résolution des problèmes de géométrie et d'algèbre avant 1637. Nous montrons ensuite comment Descartes a fusionné ces deux domaines pour faire naître la géométrie analytique. Nous exposons rapidement l'émergence de l'algèbre linéaire du développement de la géométrie analytique. Finalement, nous dégageons les apports de l'étude historique et épistémologique pour la suite de notre travail.

1 Méthodologie

Les spécificités et les difficultés d'enseignement des notions de droites et de plans dans l'espace que nous avons déterminées proviennent de l'analyse d'un cours spécifique au sein de notre institution. Afin d'étudier la transposition didactique entre le savoir savant et le savoir enseigné, nous devons adopter un point de vue externe au système d'enseignement dans lequel notre travail se situe. C'est pourquoi nous nous intéressons à la constitution et à l'évolution historique du savoir mathématique. En particulier, nous avons repéré au chapitre II des difficultés liées à l'aspect sémantique des équations et à l'aspect généralisateur de ces notions. Nous nous concentrons alors sur la naissance de la géométrie analytique et sur la construction des équations de droites dans le plan et dans l'espace et des équations de plans.

Cette partie du travail constitue une phase fondamentale dans une recherche en didactique des mathématiques comme l'ont montré de nombreux chercheurs (Bridoux, 2011 ; Dorier, 1990 ; Kouki, 2008 ; Lalaude-Labayle, 2016). Les interactions entre la didactique, l'histoire des mathématiques et l'épistémologie y sont importantes. Elles sont d'ailleurs bien explicitées dans (Dorier, 2000a). Pour lui, l'épistémologie aide à mieux comprendre les liens entre la genèse d'une notion dans la sphère savante et son enseignement. Il définit d'ailleurs le qualificatif « épistémologique » comme ce « qui est relatif à l'évolution des savoirs ou des connaissances ». Dans cette étude, il ne s'agit pas de regarder si la progression historique des notions est la même que celle suivie dans l'enseignement. Il s'agit plutôt d'analyser, au regard de la genèse historique dans une réflexion épistémologique, les difficultés d'enseignement que nous avons repérées au chapitre II. C'est pourquoi l'étude historique est menée en parallèle des premières analyses didactiques. Dorier (ibid.) ajoute que l'enseignement vise à recréer au sein de la classe une genèse des concepts mathématiques. Or, cette genèse ne peut être qu'artificielle car elle est obligatoirement liée à l'expérience de la classe et de chaque élève. Cependant, pour le didacticien, la genèse historique est « un point d'ancrage de l'analyse didactique, sorte de promontoire d'observation, quand il s'agit d'analyser un processus d'enseignement donné ou une base de travail, s'il s'agit d'élaborer une telle genèse » (Artigue, 1991, p. 244).

En conclusion, les premières analyses didactiques que nous avons présentées permettent d'incorporer des questions épistémologiques dans le travail historique et en retour les résultats du travail historique sont intégrés dans la recherche en didactique. Cette dialectique entre les recherches historique et didactique permet d'obtenir des éléments aidant à analyser le processus de transposition didactique, à expliquer certaines difficultés repérées chez nos étudiants et à élaborer une genèse artificielle des notions dans une séquence d'enseignement.

Cette étude prend appui sur divers types de sources. Nous nous sommes dans un premier temps référée aux travaux de Dorier (1990, 1993, 1997, 2000a, 2000b). Bien que ceux-ci retracent le développement de l'algèbre linéaire depuis l'antiquité, il est possible d'en dégager des éléments concernant les pratiques mathématiques en algèbre et en géométrie avant Descartes, la genèse de la géométrie analytique et son influence

dans l'émergence de l'algèbre linéaire. Nous nous sommes ensuite intéressée à des travaux d'histoire des mathématiques tels que ceux de Bourbaki (1969) et de Dieudonné (1978) afin d'établir un panorama général de l'émergence et de l'évolution des notions de géométrie analytique. Nous avons finalement étudié les travaux de Descartes (1637, 1886), considéré comme le fondateur de la géométrie analytique, dans lesquels il fournit une méthode pour décrire les objets géométriques par des équations. Le livre de Bos (2001) a permis de compléter cette étude. Ainsi, à l'instar de Derouet (2016), nous avons pris appui sur des sources traitant de questions historiques avec un regard didactique, sur des sources d'histoire des mathématiques mais aussi sur quelques textes originaux.

Afin de mieux mettre en évidence l'apport de la géométrie analytique dans l'histoire des mathématiques, nous présentons tout d'abord les démarches et les fondements de la géométrie jusqu'au XVII^{e} siècle. Puisque selon Dieudonné (ibid.), la géométrie de l'époque était celle des Grecs, transmise notamment par Euclide et Pappus, nous nous intéressons particulièrement à leurs travaux. Nous abordons ensuite les démarches mises en œuvre dans le domaine de l'algèbre avant 1637. Cela permet de mieux comprendre les besoins ressentis par Descartes d'introduire une nouvelle géométrie basée sur l'algèbre pour répondre à des problèmes jusqu'alors insolubles. Nous expliquons aussi comment la géométrie analytique a émergé des travaux de Descartes. Nous présentons finalement les liens qu'entretiennent la géométrie analytique et l'algèbre linéaire.

2 Le raisonnement déductif d'Euclide

Euclide (323-285 av. J.-C.) a donné le premier les fondements de la géométrie dans son œuvre *Les Éléments* (1632) contenant une série de quinze livres. Dans la plupart des livres, il énonce dans un premier temps une série de définitions. Il fournit ensuite quelques axiomes et propose de nombreuses démonstrations. Dans ces livres, toutes les bases (ou presque) de la géométrie euclidienne de nos jours sont données. Nous y retrouvons les propriétés sur les cercles, sur les triangles tels que Pythagore, les cas de similitudes des triangles et la théorie des proportions. Dans le Livre I, nous pouvons voir les définitions qu'il propose sur les objets « point », « droite » et « plan ». Dans un souci de compréhension, nous les avons traduites de la version en ancien français de 1632.

- □ Un point est ce dont la partie est nulle.
- □ Une ligne est une longueur sans largeur.
- □ Les extrémités d'une ligne sont des points.
- □ La ligne droite est celle qui est également comprise et entendue entre ses points.
- □ Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur.
- □ Les extrémités d'une surface sont des lignes.
- □ La surface plane est celle qui est également placée entre ses droites.
- □ Lorsqu'une droite tombant sur une droite fait deux angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit ; et la droite placée au-dessus est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle est placée.

□ Les parallèles sont des droites, qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre.

Chez Euclide, le plan est donc défini comme la surface comprise entre des droites et la droite comme la partie comprise entre deux points. De ce fait, les objets de dimensions inférieures doivent être connus pour comprendre les objets de plus grandes dimensions. La question de la position relative de deux droites dans le plan est aussi présente dans ces définitions. Elle nous indique d'ailleurs que les droites (et donc les plans) sont infinies (infinis) ; ce que les définitions de droites et de plans ne laissaient pas supposer. Selon Nguyen (2018), certaines expressions, comme par exemple longueur, largeur, profondeur, point, ligne, surface, sont utilisées comme si le lecteur était déjà capable de comprendre ce qu'elles signifient géométriquement. L'auteure précise alors que ces assertions sont essentiellement des définitions descriptives et qu'elles ne peuvent donner prise au raisonnement déductif. Ce manque de netteté entre le discours déductif et ce qui est connu ou perçu des objets géométriques est une des raisons pour laquelle l'œuvre d'Euclide a fait l'objet de diverses critiques dans la suite de l'histoire. Pourtant, ces définitions amènent ce que de nos jours nous appellons les axiomes ou postulats d'Euclide. Ils sont au nombre de cinq et sont présentés ci-dessous tel que Perrin (2010) les énonce.

Postulat 1. *De tout point à tout autre point on peut tracer une ligne droite.*

Postulat 2. *Toute droite finie peut être prolongée indéfiniment et continûment.*

Postulat 3. *Avec tout point comme centre et tout rayon, on peut tracer une circonférence.*

Postulat 4. *Tous les angles droits sont égaux entre eux.*

Postulat 5. *Si une droite rencontre deux droites en faisant des angles intérieurs du même côté de la sécante ayant une somme inférieure à deux angles droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où se trouvent les angles dont la somme est inférieure à deux angles droits.*

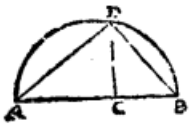
Les preuves des propositions qu'il effectue se basent sur les définitions et les postulats énoncés précédemment. Nous présentons à la figure III.1 une preuve effectuée dans le Livre VI pour mettre en avant les démarches de l'époque utilisant les triangles semblables pour introduire une construction de la moyenne proportionnelle.

Proposition 6 (Proposition XIII Livre VI)**.** *Entre deux lignes droites données, trouver une moyenne proportionnelle.*

224 SIXIESME

Soient deux lignes droictes données AC & CB, entre leſquelles il en faut trouuer vne moyenne proportionnelle.

Soient icelles lignes AC, CB, diſpoſées en vne ligne droicte AB, ſur laquelle ſoit deſcrit vn demy cercle ADB : & apres auoir du poinct C leué la perpendiculaire CD, qui rencontre la circonference en D : Ie dis qu'icelle CD eſt la moyenne proportionnelle demandée.



Car eſtans menées les deux lignes droictes AD & BD, l'angle ADB dans le demy cercle, ſera droict par la 31. p. 3. Veu donc que de l'angle droict ADB du triangle rectangle ADB, eſt tirée DC perpendiculaire à la baſe AB, par le Corol. de la 8. pſ. 6. icelle CD ſera moyenne proportionnelle entre AC, CB. Nous auons donc trouué vne moyenne proportionnelle entre deux lignes données : Ce qu'il falloit faire.

FIGURE III.1 – Preuve de la moyenne proportionnelle chez Euclide (1632, p. 224).

Afin de déterminer la moyenne proportionnelle (ou moyenne géométrique) entre deux droites *AC* et *CB*, Euclide propose la construction suivante. La première étape de sa preuve consiste à mettre bout à bout les deux segments. Ensuite, il trace le demi-cercle de diamètre *AB*. La perpendiculaire au segment *AB* passant par le point *C* coupe le demi-cercle en un point *D*. Il a prouvé précédemment dans le Livre III sur les triangles, que le triangle *ADB* est rectangle en *D*. Il termine sa preuve en utilisant le fait que les triangles *ADB*, *ADC* et *CDB* sont semblables. Il s'appuie sur le théorème 8, proposition VIII du Livre VI qui dit que si de l'angle droit dans un triangle rectangle, on tire une droite perpendiculaire à la base du triangle alors cela coupe le triangle initial en deux triangles semblables entre eux et semblables au triangle initial. La preuve de ce théorème utilise le théorème 17, proposition XXVI du Livre I disant que si deux triangles ont deux angles égaux et un coté en commun alors les deux triangles sont semblables. Ces triangles étant semblables, la relation suivante est respectée : $\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{BC}$. Ce qui l'amène à dire que le segment *AD* est la moyenne proportionnelle entre les segments *AB* et *BC*.

Cet exemple montre que le raisonnement déductif ne sollicite que la langue naturelle. Ce type de raisonnement est utilisé par Euclide et par de nombreux mathématiciens dans les siècles suivants. Cependant, dans le discours déductif d'Euclide, Nguyen (ibid.) note que certaines propriétés des figures ne sont pas prouvées à partir du moment où un dessin bien fait [1] atteste de celles-ci. Elle donne comme exemple la position relative de droites prouvée visuellement grâce au dessin et non rigoureusement. Une critique formulée par plusieurs auteurs à propos de la géométrie euclidienne est bien représentée par les propos de Kline (1972) :

> « La géomérie euclidienne était supposée offrir des démonstrations exactes des théorèmes suggérés intuitivement par les figures, mais elle offrait effectivement des démonstrations intuitives sur des figures dessinées exactement ».

1. Un dessin est bien fait à partir du moment où il est construit en n'utilisant que la règle et le compas.

Dubouclez (2012) ajoute que « la vision greque [de la géométrie] pose qu'une chose est donnée ou connue à partir du moment où elle est construite au moyen des outils et des éléments préalablement définis » (p. 3). Les instruments utilisés pour les constructions géométriques sont principalement la règle et le compas. Ils suffisent amplement car les constructions s'appuient uniquement sur l'utilisation des lignes droites et des cercles. Selon Bos (ibid.), aucun mathématicien jusqu'au XVI^{e} siècle n'a remis en cause cette légitimité des constructions euclidiennes. Par contre, elle a commencé à être remise en question lorsqu'ils ont essayé de résoudre la quadrature du cercle, la trisection de l'angle ou de construire la deuxième moyenne proportionnelle. Selon Dubouclez (ibid.), c'est à partir de 1588 et des travaux de Pappus que la question de la légitimité vient à se formuler. C'est pourquoi nous nous intéressons à son œuvre au point suivant.

3 La légitimité des constructions géométriques

La *Collection* de Pappus écrite au IV^{e} siècle est traduite et imprimée en latin en 1588. Trois thèmes y sont abordés : la classificiation des problèmes géométriques, l'utilisation de courbes dans les constructions et la construction par Neusis (Bos, 2001). Nous revenons brièvement sur ceux-ci.

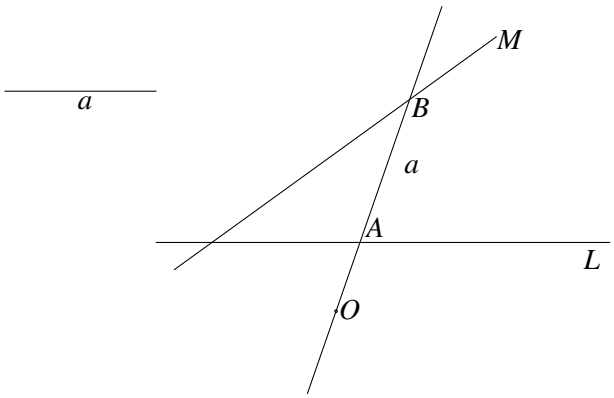
Selon Pappus, la résolution de problèmes géométriques a pour but de trouver une bonne construction géométrique de ceux-ci. Les problèmes qu'ils abordent étaient résolubles soit grâce aux droites et aux cercles, soit grâce à des sections coniques, soit grâce à des lignes plus complexes comme les spirales, quadratrices, conchoïdes ou cissoïdes (Jullien, 1996). La classification qu'il propose tient compte de la nature des courbes utilisées dans les constructions. Les problèmes plans sont ceux dont la résolution demande l'utilisation des lignes droites et des cercles. Tous ceux résolubles par les méthodes d'Euclide sont classés comme des problèmes plans. Les problèmes solides sont ceux dont la résolution se fait en intersectant des coniques. C'est le cas par exemple du problème de la deuxième moyenne proportionnelle dont la construction nécessite d'intersecter une parabole et une hyperbole. Les problèmes linéaires sont ceux utilisant des courbes plus complexes.

En fonction de cette classification, Pappus émet le précepte suivant : « Problems should be constructed with the means appropriate to their class » (Bos, ibid., p. 49). Autrement dit, pour lui, il est inacceptable de construire un problème dans une classe particulière avec les courbes utilisées dans les autres classes de problèmes. Par exemple, il est impensable de construire la deuxième moyenne proportionnelle avec uniquement des cercles et des lignes droites. Les géomètres, voulant suivre ce précepte, ont émis quelques doutes quand à la légitimité des problèmes linéaires. Pour eux, il était difficile de concevoir une construction d'un problème linéaire sans utiliser des instruments et tracer des courbes d'une autre classe de problème telles que les droites et les cercles.

Le troisième thème important dans l'œuvre de Pappus est la construction géométrique par neusis. Le neusis est une méthode utilisée lorsque les problèmes ne peuvent être résolus à la règle et au compas. Voici la méthode :

Le Neusis

Soient deux lignes droites L et M, un point O et un segment a.
La méthode consiste à trouver une droite passant par le point O, intersectant les lignes droites L et M respectivement aux points A et B telle que $AB = a$.



Dans certains cas, cette méthode s'applique à la règle et au compas et dans d'autres cas, il est nécessaire d'utiliser des cercles et des hyperboles. Regardons par exemple comment appliquer cette méthode lorsque les deux lignes droites L et M sont perpendiculaires. La construction neusis est présentée à la figure III.2.

① Tracer une ligne droite passant par O qui coupe L en C et M en B.

② Dessiner le rectangle $ABOC$ et prolonger BO.

③ Tracer une hyperbole passant par C dont les asymptotes sont les lignes droites prolongées BA et BO.

④ Dessiner un cercle de centre C et de rayon a. Ce cercle intersecte l'hyperbole en D.

⑤ Dessiner une ligne droite passant par D parallèle à AC. Cela coupe BA en F.

⑥ Tracer la ligne droite OF. Cela coupe AC en E.

⑦ OEF est la ligne droite cherchée telle que $EF = a$.

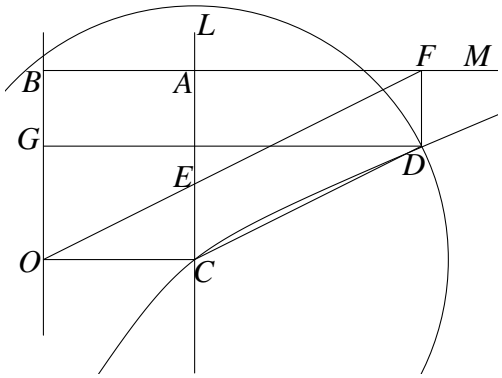


FIGURE III.2 – Méthode neusis dans le cas de deux lignes droites perpendiculaires.

Nous montrons que cette construction amène bien $EF = a$. Puisque le cercle de centre C est de rayon a, nous pouvons dire que $CD = a$. Comme C et D appartiennent tous les deux à l'hyperbole, nous savons que les rectangles formés par les asymptotes de l'hyperbole et les droites menées par un point quelconque de l'hyperbole parallèlement aux asymptotes sont d'aire constante. De ce fait, $FD.DG = AC.CO$. Nous en déduisons alors $BF.FD = BA.AC$ ou encore $\frac{BF}{BA} = \frac{AC}{FD}$. De plus, BFO et COE sont des triangles semblables puisque $\widehat{C} = \widehat{B}$ et $\widehat{F} = \widehat{O}$ avec les propriétés des angles alternes/internes. D'où, $\frac{BF}{BO} = \frac{CO}{CE}$ ou encore $\frac{BF}{CO} = \frac{BO}{CE}$, c'est-à-dire $\frac{BF}{BA} = \frac{AC}{CE}$. Nous obtenons alors $\frac{BF}{BA} = \frac{AC}{CE} = \frac{AC}{FD}$. Donc $CEFD$ est un parallélogramme puisque $CE = FD$. Or, comme $CD = a$, nous avons bien $EF = a$.

La figure III.3 fournit un exemple de résolution par le neusis pour la trisection d'un angle réalisé par Pappus. Rappelons qu'à l'époque, les angles n'étaient pas mesurés et donc ce type de problème ne pouvait être résolu avec une équerre.

Soit un angle φ. L'objectif est de construire un angle d'amplitude égale à $\frac{1}{3}\varphi$.

① Construire un triangle rectangle ABC tel que $\widehat{CAB} = \varphi$. Posons $AC = a$.

② Dessiner une ligne droite M passant par C parallèle à AB.

③ Par neusis, tracer ADE, intersectant BC en D et M en E telle que $DE = 2a$.

④ L'angle $\widehat{DAB}$ est l'angle recherché.

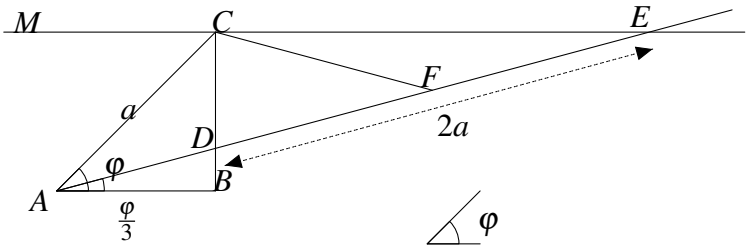


FIGURE III.3 – La trisection d'un angle par la méthode neusis de Pappus.

Nous revenons sur les étapes de cette construction géométrique. La première étape consiste à dessiner un triangle rectangle ABC telle que $AC = a$, $\widehat{A} = \varphi$ et $\widehat{B} = 90°$. Il faut ensuite tracer une ligne droite M parallèle à AB passant par C. La méthode neusis est appliquée sur les deux lignes droites perpendiculaires M et BC. Cela s'effectue exactement comme à la figure III.2 avec $L = BC$, $O = A$ et le segment est $2a$. Nous trouvons alors par cette méthode la droite AE qui coupe BC en D et M en E. La construction se termine par déterminer que l'angle $\widehat{A}$ dans le triangle DAB est celui recherché.

Nous montrons désormais que cette preuve est correcte. Plaçons le point F au milieu du segment DE. Nous avons alors $DF = FE$. Puisque $\widehat{DCE}$ est un triangle rectangle, nous avons que le milieu de l'hypoténuse se situe à égale distance des trois sommets du triangle. Nous appliquons ici le corollaire du théorème 9 de la proposition XVI dans le Livre I d'Euclide. Ainsi, $DF = CF = FE = CA = a$. Les triangles CAF et CFE sont donc des triangles isocèles. Nous avons $\widehat{CAF} = \widehat{CFA}$. Grâce aux propriétés des angles et

des triangles isocèles, nous avons également $\widehat{CFA} = \widehat{FCE} + \widehat{FEC} = 2\widehat{FEC}$. Finalement avec les angles alternes/internes, nous obtenons $\widehat{CAF} = 2\widehat{DAB}$. Donc $\widehat{DAB} = \frac{1}{3}\widehat{CAB}$.

Nous remarquons que les preuves sont fortement basées sur le dessin et ne donnent que peu d'explication. Le lecteur doit être capable de mobiliser tous les fondements de la géométrie pour réussir à comprendre les constructions. Ce type de preuve montre l'importance de la construction géométrique dans la résolution des problèmes. Pour les mathématiciens de l'époque, la validité de la solution d'un problème repose donc davantage sur la méthode de construction du problème et de sa solution que sur une preuve rigoureuse comme nous l'avons fait.

Pappus utilise alors la construction par neusis pour résoudre la plupart des problèmes, notamment les problèmes solides. Nous constatons que cette pratique va à l'encontre de son précepte puisqu'il doit plutôt utiliser les intersections de coniques pour résoudre ce type de problèmes. Son œuvre constitue le point de départ d'un débat sur la légitimité de la procédure de construction géométrique (Bos, ibid.). Cela a amené également les mathématiciens de l'époque à étudier, d'une part, les courbes utilisées dans les constructions ainsi que la façon de les générer et, d'autre part, à classer les procédures de constructions selon que les courbes soient considérées comme géométriques ou non. Nous y reviendrons plus tard.

4 Les équations

Dorier (1990) a réalisé une étude historique et épistémologique des notions d'algèbre linéaire. Il est remonté à la période qu'il nomme « Préhistoire de l'algèbre linéaire ». Il s'est plus particulièrement intéressé aux équations traitées dès l'époque des Babyloniens. Nous présentons les résultats de cette étude. Notre objectif est de fournir ici une idée du travail et des démarches possibles en algèbre avant les travaux de Descartes. Cela permet de mieux comprendre pourquoi Descartes a eu une influence aussi grande dans l'émergence de la géométrie analytique.

De l'époque des Babyloniens ($\pm$ 1800 av. J.-C.) jusqu'à celle de l'Empire Séleucide ($\pm$ 300 ap. J.-C.), les mathématiciens étaient des fonctionnaires au service de l'état et devaient notamment gérer les finances. Les mathématiques ont alors un rôle uniquement utilitaire. Ainsi, les mathématiciens se sont employés à résoudre des problèmes (répartition des récoltes, calcul de taxes, calcul d'intérêts) modélisables par des équations linéaires ou quadratiques à une inconnue ou par des systèmes contenant une équation linéaire et une équation quadratique à deux inconnues, sans que le concept même d'équation n'ait été acquis. Cette résolution se faisait grâce aux méthodes de l'arithmétique et était entièrement basée sur le discours. Il n'y a aucun recours au langage symbolique.

Les Egyptiens résolvaient eux aussi des problèmes concrets énoncés de façon rhétorique et presque sans utiliser de symboles. Dans le *Papyrus Rhind* datant d'environ 1650 av. J.-C. se trouve un exemple de résolution des équations linéaires à une variable. Nous présentons cet exemple à la figure III.4 en langage moderne.

Méthode de résolution de l'équation $x + \frac{1}{7}x = 19$.
Prenons une unité de 7.
Une fois fait 7.
(1/7) fois fait 1.
1+ (1/7) fois fait 8.
Autant de fois qu'il faut multiplier 8 par faire 19, il faudra multiplier 7 pour obtenir le résultat.
Une fois fait 8.
Deux fois font 16.
(1/2) fois fait 4.
(1/4) fois fait 2.
(1/8) fois fait 1.
Au total, 2 + (1/4) + (1/8) font 19.
Multiplions 2+ (1/4) + (1/8) par 7, et on obtiendra le résultat.
Une fois fait 2+ (1/4) + (1/8).
Deux fois font 4+ (1/2) + (1/4).
4 fois font 9+ (1/2).
Au total 7 fois font 16 + (1/2) + (1/8) qui est le résultat.

FIGURE III.4 – Méthode de résolution des équations chez les Egyptiens (Smith, 1958, p. 436).

Cette résolution se fait par essais successifs. Bien que les calculs soient lourds, la méthode est efficace. Selon Dorier (ibid.), cette méthode est l'ancêtre de la méthode de la fausse position et elle est la plus employée jusqu'au XVIII^{e} siècle. Quelques exemples rares de résolution de systèmes de deux équations à deux inconnues sont trouvés dans les papyrus qui ont été conservés, mais il n'y a aucune justification ou définition précise des règles et des opérations utilisées (Bourbaki, 1969).

Chez les Grecs, les prémices de l'algèbre ne sont guère développés dans la période grecque classique. Cela s'explique par la prédominance de la géométrie dans les mathématiques grecques. En effet, pour eux, « c'est en géométrie que s'exerce l'esprit de la déduction et l'art de la démonstration » (Dorier, ibid., p. 12). C'est pourquoi, à cette époque, les équations ne sont abordées que géométriquement. Pourtant, selon Warusfel (2005), les techniques générales de résolution d'équations du premier et du second degré sont données dans les *Éléménts* d'Euclide. L'auteur ajoute qu'il ne s'agit pas d'algorithmes numériques mais bien de preuves et de résolutions basées sur la géométrie classique. Nous présentons un exemple de résolution d'équations du premier degré à la figure III.5 et un autre pour le second degré à la figure III.6. Nous les exposons en termes modernes pour bien montrer que les constructions proposées fournissent effectivement les solutions des équations étudiées.

Afin de résoudre une équation du premier degré de la forme $ax = b$, Euclide propose de construire un parallélogramme qui aura la même aire que celle d'un triangle ou d'un quadrilatère donné en s'appuyant sur un segment et un angle donnés. La résolution est faite à la proposition 44 du Livre I d'Euclide dans la version (Heath, 1956).

Soient un segment AB de longueur a et un rectangle $ACDE$ d'aire b tel que le point A est aligné avec les points B et E (et entre B et E). La preuve dans (Heath, ibid.) est longue et explique la construction des points F, G, H et I représentés sur le dessin ci-dessous. Ces points sont placés en respectant la condition du parallélisme. Les triangles FGH et GFD ont des aires égales. Il en est de même pour les triangles FAB et FAC ainsi que pour les triangles AIG et AEG. De ce fait, l'aire du rectangle $ACDE$ est égale à l'aire du rectangle $ABHI$. Puisque le rectangle $ACDE$ est d'aire b et le rectangle $ABHI$ d'aire ax, nous avons bien $ax = b$.

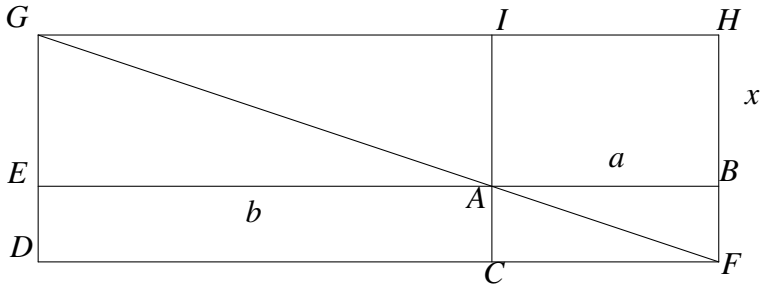


FIGURE III.5 – Résolution d'une équation du premier degré chez Euclide.

Afin de résoudre une équation du second degré de la forme $x^2 + 2px = q$, Euclide propose essentiellement de rechercher des racines carrées (Warusfel, ibid.). La résolution de cette équation du second degré est faite en se reportant aux propositions 5 et 6 du Livre II d'Euclide et aux propositions 27 et 29 du Livre VI dans (Heath, ibid.).

Le problème se construit géométriquement de la façon suivante :

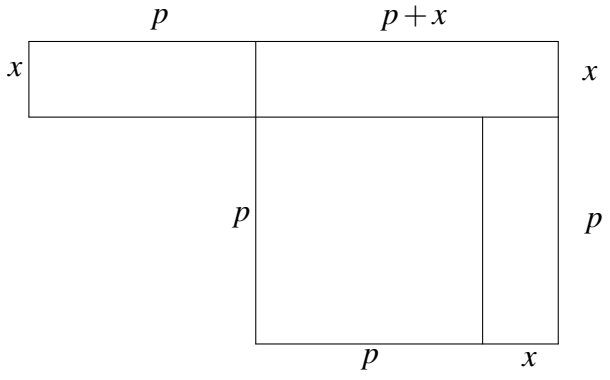


FIGURE III.6 – Résolution d'une équation du deuxième degré chez Euclide.

L'aire totale de cette figure est donnée de deux manières : soit en additionnant l'aire du carré de côté $p+x$ avec l'aire du rectangle de largeur x et de longueur p, soit

en additionnant les aires de chaque rectangle. Peu importe la méthode, l'aire totale ne change pas. Ainsi, nous obtenons :

$$px+(p+x)^2 = px+(p+x)x+p^2+px.$$

Cette égalité peut encore se réécrire $px+(p+x)^2 = x(2p+x)+p^2+px$ ou encore $(p+x)^2 = (2px+x^2)+p^2$. Or, puisque $x^2+2px = q$, nous avons $(p+x)^2 = p^2+q$. Il ne nous reste plus qu'à chercher la racine carrée de $(p+x)^2$.

Une construction de la racine carrée est proposée par Euclide en associant la proposition 31 du Livre III et la proposition 8 du Livre VI (Euclide, 1632). Afin de construire la racine carrée d'un nombre n (figure III.7), il suffit de joindre un segment CA de longueur 1 avec un segment CB de longueur n. Ainsi, la racine carrée du nombre n sera représentée par le segment CD. Cela provient du fait que $CD^2 = CA.CB$.

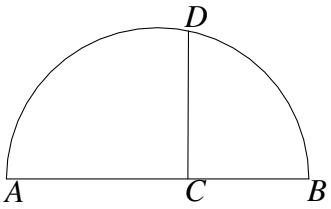


FIGURE III.7 – Construction de la racine carrée d'un nombre chez Euclide.

En suivant cette construction, en prenant par exemple $CA = 1$ et $CB = 2px+x^2+p^2$, nous trouvons que la racine positive de $(p+x)^2 = p^2+q$ est $x = \sqrt{p^2+q}-p$.

Ainsi, dans les pratiques grecques, la résolution d'équations dépend fortement de la géométrie et reste rhétorique. Il faut attendre l'œuvre *Arithmétiques* de Diophante (III^e siècle ap. J.-C.) pour qu'une quantité inconnue soit désignée par un signe spécifique ζ (Serfati, 1998). De plus, certaines notations symboliques interviennent pour désigner la soustraction, les puissances et les racines des inconnues mais il n'utilise qu'un seul symbole pour toutes les inconnues. Ce mélange entre la rhétorique et le symbolisme algébrique a été appelé l'algèbre syncopée. Selon Serfati (ibid.), les principes essentiels de la représentation symbolique n'ont subi aucune modification jusqu'à Viète. Diophante a été le premier mathématicien à étudier la résolution d'équations ou de systèmes indéterminés (Dorier, 1990). L'étude de tels problèmes indéterminés n'a pas fait l'objet d'une attention particulière des mathématiciens de l'époque jusqu'au début de la Renaissance.

Chez les Arabes, au IX^e siècle, Al-Khwarizmi développe une arithmétique entièrement rhétorique mais il nomme de façons différentes les inconnues, son carré et la racine d'une équation. Il a classé toutes les équations à une variable selon six types canoniques. Les équations linéaires en font partie. Avec son œuvre *Précis sur le calcul de al-jabr et al-muqabala*, l'équation prend un réel statut. Al-Karagi définit l'algèbre comme étant le calcul arithmétique sur des quantités contenant une inconnue à la fin du X^e siècle.

Selon Dorier (2000a), les équations n'étaient pas étudiées comme un objet de l'algèbre et la préoccupation majeure chez les mathématiciens de l'époque était leur ré-

solution. Cela explique notamment que l'algèbre reste purement rhétorique jusqu'au XV^{e} siècle alors que certains mathématiciens comme Cardan se sont intéressés à la résolution des équations du troisième et du quatrième degré.

En conclusion, jusqu'au XVI^{e} siècle, résoudre une équation revenait à déterminer une « bonne » construction géométrique de la solution. Cette dominance de la pensée géométrique implique que les résolutions s'effectuent principalement via la rhétorique. Le système d'écriture symbolique est très pauvre. Les avancées de ce système symbolique ont été significatives grâce aux travaux de Viète (Kouki, 2008). Nous en parlons au point suivant.

5 L'algèbre nouvelle de Viète

En 1591, Viète explique dans l'*In artem analyticen isagoge* comment utiliser l'algèbre pour analyser des problèmes de géométrie. Selon Dorier (1990),

> « L'innovation de Viète vient dans l'unification qu'il a réalisée de l'utilisation des nouveaux symboles de l'algèbre et de la tradition de la géométrie à utiliser les lettres pour désigner des quantités non spécifiées, ce que l'on appellerait aujourd'hui des indéterminées. Il désigne ainsi dans une équation, les coefficients indéterminés par des consonnes et les inconnues par des voyelles » (p. 17).

La méthode algébrique de résolution de problèmes géométriques contient trois étapes (Bos, 2001) : mettre le problème géométrique sous forme d'une équation (Zététique), manipuler les techniques de transformations algébriques pour écrire l'équation sous forme standard (Poristique), construire géométriquement la solution algébrique de l'équation (Exégétique ou Rhétique). Un exemple d'application de cette méthode est présenté à la figure III.8.

Analyse algébrique du problème issu de (Ghetaldi, 1630, p. 118–120)

Enoncé :

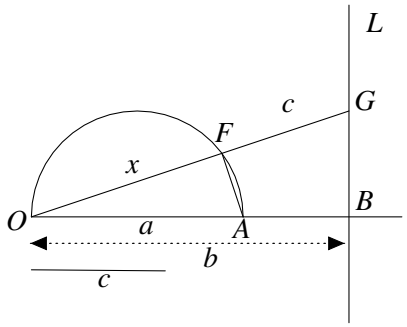
Soient un demi-cercle de diamètre $OA = a$, une ligne droite L perpendiculaire en B au prolongement de OA telle que $OB = b$ et un segment de droite c.
Il faut déterminer une ligne droite passant par O, intersectant le demi-cercle en F et la ligne droite L en G telle que $FG = c$.

Analyse :

① Posons $x = OF$. Tracer AF.

② Les triangles semblables amènent : $\frac{x}{a} = \frac{b}{x+c}$ et donc $x^2 + xc = ab$.

③ Toutefois $x = \sqrt{\frac{c^2}{4} + ab} - \frac{1}{2}c$ et donc x est donné.



Construction :

① Dessiner un demi-cercle de diamètre OB. Tracer AC perpendiculairement à OB tel que C est sur le demi-cercle. Dessiner OC.

② Dessiner BCD tel que $CD = \frac{1}{2}c$. Tracer OD.

③ Dessiner un cercle de centre D et de rayon DC. Son intersection avec OD est E.

④ Prendre F sur le demi-cercle donné tel que $OF = OE$. Prolonger OF. Son intersection avec L est G.

⑤ OFG est la ligne droite telle que $FG = c$.

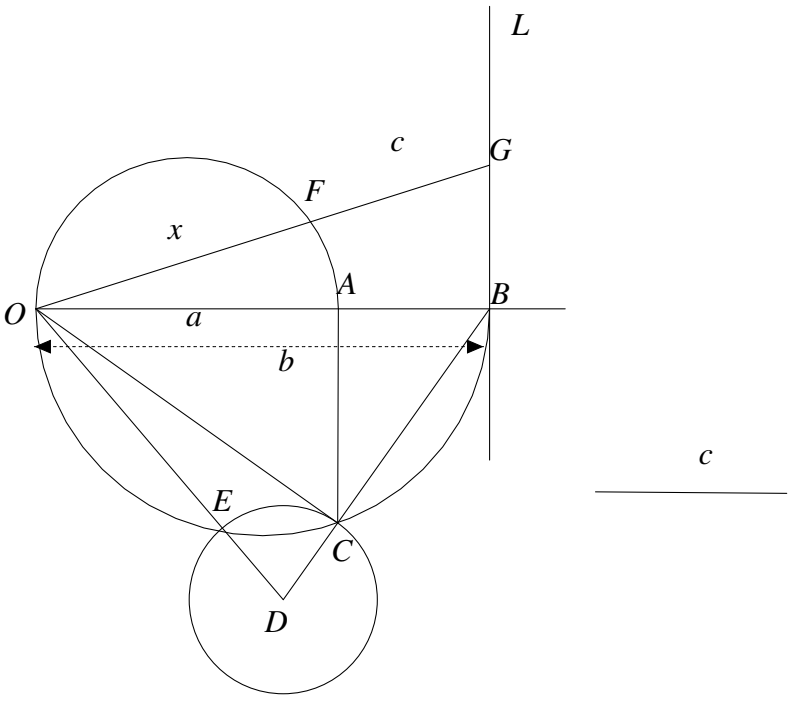


FIGURE III.8 – La construction géométrique du problème de Ghetaldi (1607, p. 5–6).

La première étape de la construction amène à construire OC. Le triangle OCB est un triangle rectangle en C. De ce fait, AC est la moyenne proportionnelle entre OA et AB. Cela nous donne $AC = \sqrt{ab - a^2}$. Dans le triangle rectangle OAC, nous obtenons $OC^2 = AC^2 + OA^2$. En remplaçant AC et OA par leurs valeurs, nous avons $OC^2 = ab - a^2 + a^2$ ou encore $OC = \sqrt{ab}$. La deuxième étape de la construction consiste à construire CD perpendiculairement à OC et de longueur $\frac{1}{2}c$. Ainsi, dans le triangle rectangle OCD, nous avons $OD^2 = ab + \frac{1}{4}c^2$. La troisième étape amène à tracer le cercle de centre D et de rayon $\frac{1}{2}c$. Comme $OD = OE + ED$ et $ED = \frac{1}{2}c$, nous en déduisons que $OE = \sqrt{ab + \frac{c^2}{4}} - \frac{c}{2}$. Or, l'analyse algébrique du problème nous donne la valeur de x. De ce fait, $OE = x$. La quatrième étape permet de placer le point F tel que $OF = OE = x$. L'analyse algébrique dit que x est la solution de l'équation $x^2 - xc = ab$ obtenue à partir du rapport $\frac{x}{a} = \frac{b}{x+c}$. Or, dans notre construction, les triangles OFA et OGB sont semblables. Ceci nous donne la relation $\frac{OF}{OA} = \frac{OB}{OG}$. Puisque $OF = x$, $OA = a$ et $OB = b$, nous en déduisons que $OG = x + c$. Comme $OG = OF + FG$, nous avons bien $FG = c$.

De façon schématique, l'analyse algébrique d'un problème plan se déroule comme suit : le problème est considéré comme résolu ; un élément inconnu est choisi et appelé x ; les relations géométriques sont utilisées pour écrire une équation en x ; l'équation est résolue ; une valeur explicite de x est donnée ; une construction géométrique est réalisée pour justifier la valeur de x. Cette méthode est principalement algébrique. Ainsi, bien que la construction géométrique reste fondamentale dans cette analyse algébrique, les mathématiciens commencent à se détacher de la démarche proposée par Pappus dont nous avons parlé au point 3.

Cette méthode algébrique utilisée pour analyser les problèmes géométriques a induit une fusion graduelle de l'arithmétique, de l'algèbre et de la géométrie (Bos, ibid.). Or, celle-ci a soulevé des questions conceptuelles liées aux techniques et aux terminologies utilisées dans chaque domaine. Cela a amené les mathématiciens à se demander comment représenter les nombres et les opérations arithmétiques en géométrie. En effet, en géométrie, les constructions sont légitimes et exactes si elles se font à partir des lignes droites et des cercles tandis que les calculs réalisés ne seront eux qu'approximatifs. Quant aux opérations arithmétiques, Viète les a définies comme étant indépendantes à la fois des nombres et des grandeurs géométriques. Le tableau III.1 présente la définition des opérations arithmétiques en géométrie [2].

2. Nous avons sélectionné les parties d'un tableau proposé par Bos (2001) qui nous intéressent.

Opérations sur les nombres	**Opérations sur les segments**
Additionner a et b	Mettre bout à bout les segments a et b
Soustraire b de a	Enlever le segment b du segment a
Multiplier a et b	Construire un rectangle de côté a et b
Diviser a par b	Construire un rectangle d'aire a et de côté b
Extraire une racine carrée	Déterminer le côté d'un carré
Extraire une racine cubique	Déterminer le côté d'un cube
Résoudre des équations	Construire géométriquement les problèmes

TABLE III.1 – Les opérations arithmétiques en géométrie pour Viète.

Suite au transfert des opérations arithmétiques en géométrie indépendamment des nombres, la légitimité de l'algèbre en géométrie n'a plus été mise en cause et un nouveau domaine est né, appelé par Viète « algèbre nouvelle ». Dans celle-ci, la résolution de problèmes géométriques revient à établir des constructions pour les racines de n'importe quelle équation. De ce fait, il y a une interaction entre l'analyse algébrique des courbes et le choix de la méthode de construction. Ce nouveau travail sur les équations a amené un questionnement sur la classification des problèmes géométriques (Bos, ibid.). Celle proposée par Viète dépend du degré des équations données par la Zététique. Si l'équation est quadratique alors le problème appartient à la classe des problèmes plans pour Pappus (dont nous avons parlé au point 3), si le degré de l'équation est plus élevé alors le problème appartient à la classe des problèmes solides ou linéaires de Pappus.

Viète étudie en particulier les constructions des solutions des équations du troisième et du quatrième degré. Il commence par la résolution de la deuxième moyenne proportionnelle (problème solide). L'équation donnée par la Zététique est de la forme $x^3 = a^2b$. L'Exégétique de ce problème ne pouvant plus utiliser les constructions euclidiennes habituelles, Viète en propose une construction par neusis. Il décide alors de compléter son algèbre nouvelle en ajoutant un postulat : toutes les constructions doivent s'effectuer par la méthode neusis de Pappus. Cela va à l'encontre du précepte proposé par Pappus dans lequel toutes les constructions dans une classe de problème devaient utiliser les courbes spécifiques à cette classe.

Cette nouvelle considération de l'algèbre complétée du postulat neusis a aidé Viète à formuler un résultat important. Il montre que n'importe quel problème géométrique correspondant à une équation du troisième ou du quatrième degré pouvait être réduit à déterminer la deuxième moyenne proportionnelle entre deux lignes droites ou à une trisection d'un angle donné. Nous ne présentons pas la preuve de ce résultat. Par contre, ce résultat est prouvé par Descartes de façon moins abstraite et il le généralise aux équations de plus haut degrés. Nous en parlons au point 7.

Les travaux de Viète ont été notamment utilisés par Fermat et Descartes. Le premier utilise les équations pour décrire les coniques et leurs intersections. Il établit alors la correspondance entre les équations à deux inconnues et les courbes utilisées dans la construction de problèmes solides (Bos, ibid.). Le deuxième, quant à lui, s'est intéressé à la résolution de lieux géométriques. Bien que l'utilisation de l'algèbre en géométrie soit identique à celle de Viète, Descartes propose une méthode plus générale pour étudier

les équations et la construction géométrique de leur solution. Nous nous intéressons à Descartes aux points suivants.

6 Les opérations algébriques en géométrie chez Descartes

En 1637, Descartes publie le *Discours de la Méthode* dans lequel plusieurs essais figurent. Notre intérêt s'est porté sur le troisième essai intitulé *La Géométrie* car il « est réputé comme le premier écho publié de la naissance de la géométrie analytique » (Warusfel, 2005, p. 1). Selon Dorier (1990), cette œuvre a profondément marqué l'histoire des mathématiques car Descartes a tenté d'algébriser la géométrie. Cet essai est découpé en trois livres. Nous allons nous intéresser dans cette partie au Livre I [3]. Dans ce livre, Descartes (1637, 1886) fournit notamment les règles de conversion entre les opérations arithmétiques de base (addition, soustraction, multiplication, division et extraction de racines carrées) et leur interprétation géométrique. Nous revenons sur ces traductions.

> « Et comme tout l'arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations, qui sont, l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, et l'extraction de racines, qu'on peut prendre pour une espèce de division, ainsi n'a-t-on autre chose à faire en géométrie touchant les lignes qu'on cherche pour les préparer à être connues, que de leur ajouter d'autres, ou en ôter ; ou bien en ayant une, que je nommerai l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut ordinairement être prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'autre est à l'unité, ce qui est le même que la multiplication ; ou bien en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'unité est à l'autre, ce qui est le même que la division ; ou enfin trouver une ou deux, ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'unité et quelque autre ligne, ce qui est le même que tirer la racine carrée ou cubique, etc. Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'arithmétiques en la géométrie, afin de me rendre plus intelligible » (Descartes, 1637, p. 297–298).

Nous reprenons la construction géométrique de ces quatre opérations arithmétiques. L'addition et la soustraction sont assez simples. Il suffit de joindre ou d'enlever un segment à un autre comme à la figure III.9.

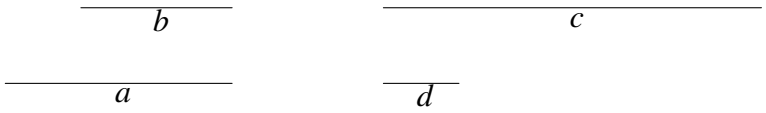


FIGURE III.9 – Représentation géométrique de l'addition et de la soustraction chez Descartes.

3. Les Livres II et III sont présentés au point 7.

Ainsi, l'addition des segments a et b donne le segment c en joignant bout à bout les deux segments et la soustraction des segments a et b donne le segment d en enlevant du segment le plus grand le segment le plus petit. Nous passons maintenant à la construction de la multiplication et de la division à la figure III.10.

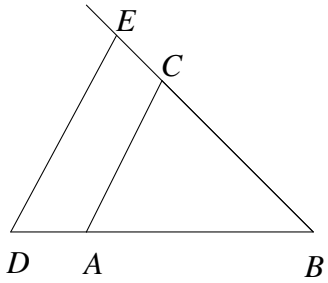


FIGURE III.10 – Représentation géométrique de la multiplication et de la division chez Descartes.

Ainsi, pour multiplier les segments BD et BC, il faut procéder de la sorte. Un segment unité est fixé comme étant AB. Il suffit alors de joindre les points A et C, de tracer la parallèle à AC passant par D. Le produit de BD et de BC donne le segment BE. En ce qui concerne la division du segment BE par le segment BD, le procédé est similaire. Un segment unité AB est fixé. Il suffit de joindre les points E et D et de tracer une parallèle à ED passant par A. La division de BE par BD donne le segment BC. Cette construction est correcte si on utilise le théorème de Thalès. En effet, la proportion suivante est donnée : $\frac{BE}{BD} = \frac{BC}{BA}$. Or, BA est l'unité. Ceci nous donne bien $BC.BD = BE$. Nous nous intéressons désormais à la construction de l'extraction de la racine carrée à la figure III.11.

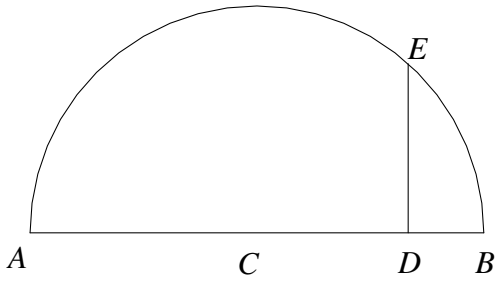


FIGURE III.11 – Représentation géométrique de la racine carrée chez Descartes.

Ainsi, pour déterminer la racine carrée de AD, le procédé est le suivant. Un segment unité DB est ajouté au segment AD. Le segment AB est divisé en deux parties égales. Cela détermine le point C. Un cercle de centre C et de rayon AC est tracé. Il reste à dessiner une perpendiculaire au segment AB passant par D. La racine carrée de AD est alors DE. Nous notons que cette construction est quasiment identique à celle d'Euclide que nous avons présentée à la figure III.7.

Dans la suite du Livre I, Descartes explique comment obtenir une équation algébrique à partir du problème géométrique et trouver les solutions. Cette méthode est constituée d'une partie analytique et d'une partie synthétique (Bos, ibid.). L'analytique

consiste à traduire les problèmes géométriques en une équation et la synthétique permet de trouver la solution du problème sur une construction en se basant sur l'équation donnée. Cette procédure ressemble beaucoup à la méthode algébrique de Viète. En effet, nous pouvons faire un parallèle d'une part entre la partie analytique et l'étape de la Zététique et d'autre part entre la partie synthétique et l'étape de l'Exégétique. Pourtant, leurs méthodes se distinguent l'une de l'autre. En effet, l'approche de Descartes amène la donnée d'un segment unitaire. Cela permet de ne plus se limiter aux formules homogènes ; ce que faisait Viète. Par exemple, la formule $ab + c$ n'a pas de sens chez Viète car il s'agit de la somme d'une aire (ab) et d'un segment c. Des objets de dimensions différentes ne peuvent être joints. Or, pour Descartes, la multiplication ab représente un segment et donc cette formule consiste à sommer des segments entre eux. Ainsi, la principale différence entre Viète et Descartes est leur objectif final. Pour Viète, la représentation géométrique est l'aboutissement du calcul algébrique (Dorier, ibid.). L'algèbre est justifiée par la géométrie, tandis que pour Descartes, l'algèbre est utilisée pour résoudre des problèmes géométriques. C'est en cela qu'il y a une tentative d'algébrisation de la géométrie (Dorier, ibid.).

La méthode est résumée par Descartes (1886) de la façon suivante :

> « Ainsi, voulant résoudre quelques problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis, sans considérer aucune différence entre ces lignes connues et inconnues, on doit parcourir la difficulté selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusques à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons, ce qui se nomme une équation ; car les termes de l'une de ces deux façons sont égaux à ceux de l'autre. Et on doit trouver autant de telles équations qu'on a supposé de lignes qui étoient inconnues » (p. 3).

Nous allons présenter un exemple d'application de cette méthode proposé par Descartes afin de résoudre une équation du second degré de la forme $z^2 = az + b^2$ (figure III.12) où a et b représentent des quantités connues et z une quantité inconnue.

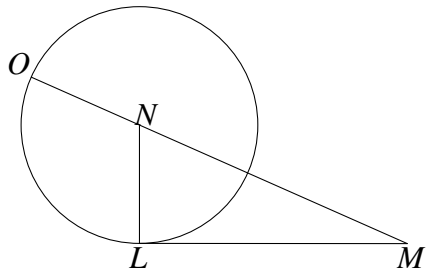


FIGURE III.12 – Résolution de $z^2 = az + b^2$ par Descartes (1886).

Il se donne un triangle NLM dont le côté LM est égal à b (la racine carrée de la quantité connue b^2) et le côté LN est égal à $\frac{1}{2}a$ (la moitié de l'autre quantité connue). La ligne inconnue est z. Pour la trouver, nous devons prolonger le segment MN jusqu'au

point O de sorte que NO soit égale à NL. La ligne cherchée est alors le segment OM et peut être exprimée par :

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}.$$

Nous savons actuellement que les solutions de l'équation $z^2 - az - b^2 = 0$, données par le discriminant, valent $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ et $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$. Nous remarquons que la première solution est bien celle trouvée par Descartes. La deuxième solution n'est pas donnée par Descartes car il « ignore - volontairement - les nombres négatifs » (Warusfel, ibid., p. 4). La construction donnée est bien celle du problème. En effet, si on pose la quantité $z = OM$, nous avons $z = ON + NM$. Or, la quantité ON est connue car elle est égale à NL et la quantité NM est trouvée par le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle rectangle NML. Ainsi, z correspond bien à celui proposé.

Descartes étudie aussi les équations du second degré de la forme $z^2 = -az + b^2$ et $z^2 = az - b^2$. Pour la première de ces deux formes, la méthode est presque identique que la précédente. Il suffit d'enlever NP de MN pour obtenir que la ligne cherchée z est PM (figure III.13).

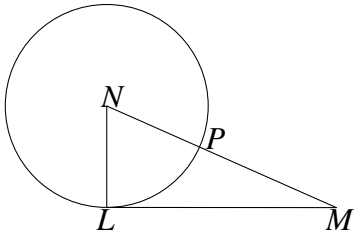


FIGURE III.13 – Résolution de $z^2 = -az + b^2$ par Descartes.

Pour la deuxième forme d'équations, Descartes propose une construction différente. Celle-ci est illustrée à la figure III.14. Il faut tracer MN égale à $\frac{1}{2}a$ et LM égale à b. La droite parallèle à MN passant par L est dessinée. Nous devons ensuite construire le cercle de centre N et de rayon NM. Ce cercle coupe la droite aux points Q et R. La ligne cherchée z est LQ ou bien LR.

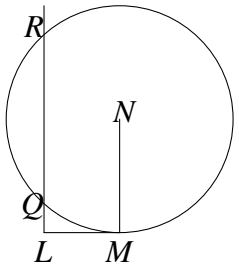


FIGURE III.14 – Résolution de $z^2 = az - b^2$ par Descartes.

Nous savons que les solutions de l'équation $z^2 - az + b^2 = 0$ sont $\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$ et $\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$. Nous allons montrer que ces solutions correspondent bien aux grandeurs LQ et LR. Il s'agit dans un premier temps de projeter orthogonalement les points R et Q sur la droite prolongée NM. Nous obtenons les points R' et Q' comme illustré à la figure III.15.

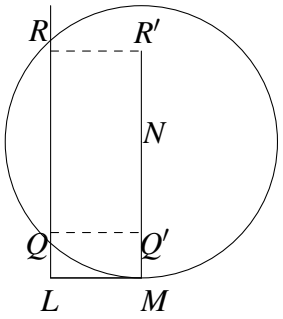


FIGURE III.15 – Explications de la construction de Descartes.

Ainsi, nous avons construit deux triangles rectangles $QQ'N$ et $RR'N$. Puisque QN et RN sont des rayons du cercle, ils valent $\frac{1}{2}a$. Comme LQR et NM sont parallèles, nous avons $QQ' = RR' = b$. Par Pythagore, nous trouvons $NR' = NQ' = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$. Nous pouvons alors déduire LQ et LR. En effet, $LQ = MQ' = MN - NQ'$ et $LR = MR' = MN + NR'$. Ceci nous donne les bonnes solutions de l'équation. Les deux solutions de l'équation sont dans ce cas-ci positives.

Ces exemples illustrent la façon dont Descartes passe du problème géométrique à une équation et comment il construit la solution des équations du deuxième degré. Afin de tester sa méthode, il explore dans la suite du Livre I, le problème dit de Pappus et en propose une démonstration. Nous en parlons au point suivant.

7 Le problème de Pappus

Le problème de Pappus est issu de la *Collection*. Il a déjà été étudié, notamment par Euclide et Pappus, mais uniquement d'un point de vue géométrique. L'objectif de Descartes est le suivant :

> « Et Pappus dit que lorsqu'il n'y a que trois ou quatre lignes droites données, c'est en une des trois sections coniques ; mais il n'entreprend point de la déterminer ni de la décrire, non plus que d'expliquer celles où tous ces points se doivent trouver, lorsque la question est proposée en un plus grand nombre de lignes. Seulement, il ajoute que les anciens en avoient imaginé une qu'ils montroient y être utile, mais qui sembloient la plus manifeste, et qui n'étoit pas toutefois la première. Ce qui m'a donné occasion d'essayer si, par la méthode dont je me sers, on peut aller aussi loin qu'ils ont été » (1637, p. 307).

Descartes a alors comme ambition de tester sa méthode et de prouver les résultats des anciens voire d'aller plus loin qu'eux dans la résolution du problème. Selon Warusfel (2005), le problème de Pappus est significatif de la naissance de la géométrie analytique, notamment pour deux raisons :

> « légitimisation de la géométrie analytique par l'exposé d'une solution neuve à un défi ancien, et mise au point d'un atelier fournissant à la demande des courbes de plus en plus complexes car définies par des équations de degré de plus en plus élevé, mais néanmoins introduites à partir des préoccupations géométriques où le statut de l'algèbre était considéré comme mineur par rapport à la science reine : la géométrie » (p. 5).

Nous présentons le problème de Pappus [4] à n lignes mais nous nous limitons par la suite à l'étude du problème à trois ou quatre lignes résolu par Descartes (figure III.16).

Le problème de Pappus

Given n straight lines L_i in the plane, n angles θ_i, and a line segment a. For any point P in the plane, the oblique distances d_i to the lines L_i are defined as the (positive) lengths of segments that are drawn from P toward L_i making the angle θ_i with L_i. It is required to find the locus of points P for which a certain ratio, involving the d_i and depending on the number of lines, is constant. The relevant ratios are :

For 3 lines :	d_1^2	=	$d_2 d_3$
For 4 lines :	$d_1 d_2$	=	$d_3 d_4$
For 5 lines :	$d_1 d_2 d_3$	=	$a d_4 d_5$
For 6 lines :	$d_1 d_2 d_3$	=	$d_4 d_5 d_6$
In general for an even number $2k$ of lines :	$d_1 \dots d_k$	=	$d_{k+1} \dots d_{2k}$
and for an uneven number $2k+1$:	$d_1 \dots d_{k+1}$	=	$a d_{k+2} \dots d_{2k+1}$

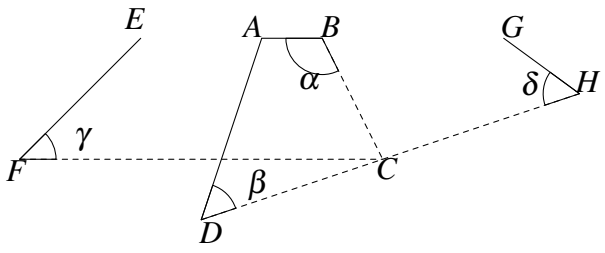


FIGURE III.16 – Le problème de Pappus à 4 lignes.

Afin de résoudre ce problème, Descartes considère que le problème est déjà résolu. Il pose que certaines lignes données sont connues et rapporte toutes les autres à celles-là. Par exemple, il choisit $AB = x$ et $CB = y$. Cela correspond à se fixer un repère dans

4. Ce problème, énoncé dans Bos (2001) à la page 314, est repris de Pappus (1588) pages 507–510 et Jones (1986) pages 118–123.

lequel A est l'origine, AB est l'axe des abscisses et la parallèle à CB passant par A est l'axe des ordonnées. Ensuite, il prolonge tous les segments jusqu'à ce qu'ils coupent les deux lignes principales, si elles ne sont pas parallèles. Cela nous donne la figure III.17.

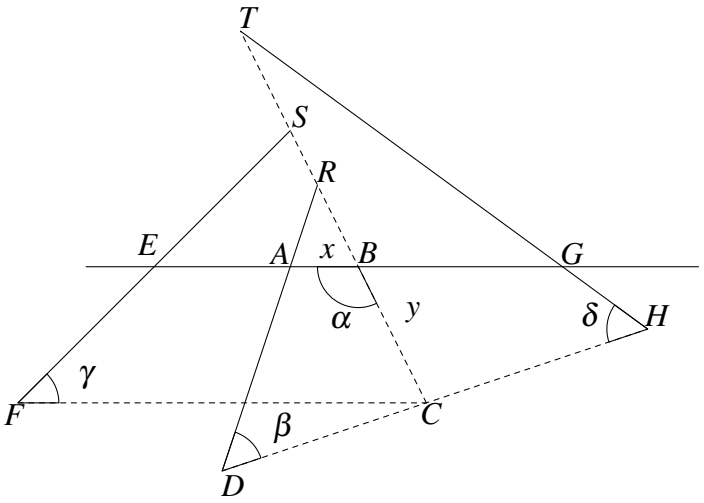


FIGURE III.17 – Résolution du problème de Pappus à 4 lignes par Descartes (1637, p. 309).

Son objectif est d'exprimer chacune des droites données dans le repère qu'il s'est fixé. Cela revient donc à décrire les droites du plan par une équation. Pour exprimer la droite BR par rapport aux droites AB et BC, Descartes se place dans le triangle ARB. Il dit que tous les angles de ce triangle sont connus. En effet, l'énoncé nous donne les droites AB et AD, ainsi que l'angle α. De ce fait, nous connaissons l'angle $\widehat{A}$ et nous pouvons dire que $\widehat{B} = 180° - \alpha$ et $\widehat{R} = 180° - \widehat{A} - \widehat{B}$. Il déduit alors $\frac{AB}{BR} = \frac{z}{b}$, où z est le segment unitaire donné dans l'énoncé. Nous pouvons exprimer cette relation comme étant $BR = \frac{bx}{z}$. Puisque BR est connu, il donne $CR = CB + BR = y + \frac{bx}{z}$. Descartes discute ensuite de la position du point B par rapport aux points C et R et donne en fonction l'expression de CR. Nous choisissons de garder la figure III.17 comme modèle.

Étant donné que A, EF et GH sont donnés par l'énoncé, il pose $AE = k$ et $AG = l$. D'où, $EB = x + k$ et $BG = l - x$. Pour exprimer CD, EF, CF, BT, CH par rapport aux droites AB et BC, il se place respectivement dans les triangles DRC, ESB, FSC, BGT et TCH. Par les mêmes arguments que précédemment, tous les angles de ces triangles sont connus. Il en déduit alors :

$$\frac{CR}{CD} = \frac{z}{c}; \qquad \frac{BE}{BS} = \frac{z}{d}; \qquad \frac{CS}{CF} = \frac{z}{e}; \qquad \frac{BG}{BT} = \frac{z}{f}; \qquad \frac{CT}{CH} = \frac{z}{g}.$$

En utilisant ces relations, il obtient les équations suivantes :

$$CD = \frac{cyz + bcx}{z^2}; \quad BS = \frac{dk + dx}{z}; \quad CF = \frac{ezy + dek + dex}{z^2}; \quad CH = \frac{gzy + fgl - fgx}{z^2};$$

$$BT = \frac{fl - fx}{z}; \qquad CS = CB + BS = \frac{zy + dk + dx}{z}; \qquad CT = CB + BT = \frac{zy + fl - fx}{z}.$$

Ainsi, pour le problème de Pappus à 4 lignes, les points C doivent tous vérifier l'égalité $CB.CF = CD.CH$. Descartes a alors déterminé avec cette méthode que le lieu géométrique des points $C(x,y)$ est décrit par l'équation :

$$y \cdot \frac{ezy+dek+dex}{z^2} = \frac{cyz+bcx}{z^2} \cdot \frac{gzy+fgl-fgx}{z^2}.$$

C'est la première fois, que la solution à ce problème est décrite par une équation. Selon Kouki (2008), bien que les mathématiciens étaient capables de dire qu'une infinité de points vérifiant tous une condition précise est un lieu géométrique, ils n'ont jamais pu exprimer les courbes par des équations. Cette vision cartésienne permet donc de considérer une courbe comme « une solution géométrique d'un problème indéterminé qui a une infinité de solutions » (Kouki, ibid., p. 66).

Selon la méthode cartésienne, les solutions de cette équation doivent être déterminées et puis seulement construites géométriquement. Nous nous intéressons à cette question. L'équation donnée ci-dessus peut être réécrite de la façon suivante :

$$y^2 = \frac{(cfglz-dekz^2)y-(dez^2+cfgz-bcgz)xy+bcfglx-bcfgx^2}{z^2(ez-cg)}.$$

Descartes suppose $ez-cg>0$, sinon les signes changent, et $y>0$, car si $y=0$ l'équation est impossible. Le cas où $y<0$ n'est pas considéré par Descartes. Afin de simplifier l'équation, il pose :

$$2m = \frac{cfglz-dekz^2}{z^2(ez-cg)}; \qquad \frac{2n}{z} = \frac{dez^2+cfgz-bcgz}{z^2(ez-cg)}.$$

De la sorte, l'équation devient :

$$y^2 = 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfglx-bcfgx^2}{z^2(ez-cg)}.$$

Puisque cette équation est de la forme $y^2 = ay+b^2$, Descartes utilise le fait que sa solution est donnée par $y = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}$. Ainsi, la solution de l'équation étudiée est :

$$y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{m^2 - \frac{2mnx}{z} + \frac{n^2x^2}{z^2} + \frac{bcfglx-bcfgx^2}{z^2(ez-cg)}}.$$

Pour simplifier encore ceci, il pose :

$$o = -\frac{2mn}{z} + \frac{bcfgl}{z^2(ez-cg)}; \qquad \frac{p}{m} = \frac{n^2}{z^2} - \frac{bcfg}{z^2(ez-cg)}$$

Ainsi, l'équation devient :

$$y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{m^2+ox+\frac{p}{m}x^2}.$$

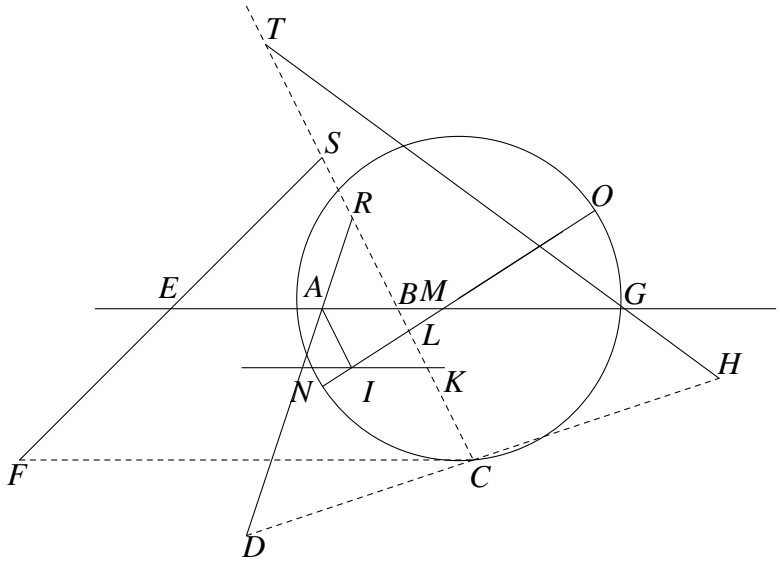


FIGURE III.18 – Partie synthétique pour le problème de Pappus à 4 lignes (Descartes, 1886, p. 15).

Cette solution représente la longueur de la ligne BC dans la figure III.17. Pour le prouver, réalisons la partie synthétique de la méthode cartésienne.

Pour construire la solution du problème de Pappus, nous devons tracer une droite parallèle à AB. Cette droite coupe BC en K de telle sorte que $BK = m$. Nous plaçons le point I sur cette nouvelle droite tel que $IK = AB$. Nous traçons ensuite la droite IL pour que la relation suivante soit vérifiée $\frac{IK}{KL} = \frac{z}{n}$. Notons que comme $IK = x$, nous avons $KL = \frac{nx}{z}$. Nous plaçons K entre L et C puisque nous avons le terme $\frac{-nx}{z}$. Nous avons également la relation $\frac{KL}{IL} = \frac{n}{a}$. D'où, $IL = \frac{ax}{z}$.

Avec cette construction, l'équation donnée peut être vue comme étant $CB = CL - LK + KB$. De cette façon, $LC = \sqrt{m^2 + ox + \frac{p}{m}x^2}$. En discutant sur cette expression, nous trouvons les différentes solutions possibles, c'est-à-dire les différents lieux géométriques. Sans rentrer dans les détails de calculs, si $\frac{p}{m}x^2 = 0$ alors nous avons une parabole ; si $\frac{p}{m}x^2 > 0$ alors nous avons une hyperbole ; si $\frac{p}{m}x^2 < 0$ alors nous avons une ellipse. Il y a certains cas particuliers : si $m = 0 = ox$ ou $ox = 0 = \frac{p}{m}x^2$ alors nous avons une droite ; si l'angle $\widehat{ILC}$ est un angle droit, $\frac{p}{m}x^2 < 0$ et $a^2m = pz^2$ alors nous avons un cercle de centre M et de rayon MC. C'est le cas sur la figure III.18, où LC représente la hauteur du triangle rectangle NOC.

Le problème de Pappus est désormais résolu avec la méthode cartésienne. L'objectif de Descartes est atteint ; il a été aussi loin que les anciens en s'aidant de l'algèbre. Cependant, Descartes trouve que la partie synthétique de sa méthode est trop longue et non évidente. Cela le pousse à vouloir que les constructions géométriques soient les plus simples possibles (Bos, ibid.). C'est pourquoi dans le Livre II de *La Géométrie*, il s'intéresse aux courbes utilisées lors de la construction et les classe selon un critère d'acceptabilité. Si les courbes peuvent être décrites par des équations algébriques, alors

elles sont acceptées et dites géométriques. Au contraire, les autres courbes ne sont pas valides et sont dites mécaniques. C'est par exemple le cas de la spirale. Ainsi, seuls les courbes géométriques peuvent être utilisées dans la partie synthétique de la méthode. De plus, pour que les constructions soient simples, ces courbes doivent être les plus simples possibles. Autrement dit, elles doivent avoir une équation avec un degré le plus bas possible. Il discute de ce critère de simplicité dans le Livre III. Les critères d'acceptabilité et de simplicité amènent à définir ce que Descartes appelle l'exactitude géométrique. Une construction est exacte si elle est réalisée à partir de courbes géométriques dont les équations sont irréductibles. Descartes explique alors comment réduire les équations à des formes standards irréductibles.

Les règles suivantes sont données par Descartes et reformulées par Jullien (1996) :

① Le degré de l'équation donne le nombre possible de solutions. Elles peuvent être vraies (positives) ou fausses (négatives). Ainsi, un polynôme de degré n a au plus n solutions.

② Un polynôme ayant α comme solution est factorisable par $(x-\alpha)$ et réciproquement.

③ Le nombre des vraies et fausses solutions peut être découvert sans qu'elles soient connues. Descartes (1886) explique la règle des changements de signes des coefficients [5] comme étant :

> « à savoir il y en peut avoir autant de vraies que les $+$ et $-$ s'y trouvent de fois être changés, et autant de fausses qu'il s'y trouve de fois deux signes $+$ ou deux signes $-$ qui s'entre-suivent » (p. 42).

④ Une équation peut être modifiée et simplifiée par des subtitutions linéaires de la forme $x = ay + \alpha$.

Par exemple, l'équation $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$ a quatre solutions au plus car elle est de degré quatre. Il y a trois solutions vraies et une solution fausse. En effet, le signe du coefficient de x^4 est positif et celui du coefficient de x^3 est négatif. Il y a un changement de signe. Il en est de même entre le coefficient de x^2 et celui de x et entre celui de x et celui de x^0. Ces trois changements de signes donnent trois vraies solutions : 2, 3 et 4. Puisque le signe du coefficient de x^3 est le même que celui de x^2, il y a une solution fausse : -5. Ainsi, l'équation $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$ peut être factorisée par $(x-2)$, $(x-3)$, $(x-4)$ et $(x+5)$.

Ces règles sont utilisées pour aborder la résolution des équations dont le degré va jusqu'à six. Si l'équation est de degré trois, alors il suffit d'obtenir une solution α grâce aux transformations et ensuite de diviser les deux membres de cette équation par $(x-\alpha)$. Cela donne une équation du second degré. S'il n'est pas possible de trouver α, alors l'équation est irréductible. La procédure est similaire pour une équation de degré quatre. Si l'équation est divisible par $(x-\alpha)$, alors l'équation obtenue est de degré trois et le processus est identique. Si ce n'est pas le cas, les transformations sont appliquées pour éliminer le terme en x^3. De la sorte, l'équation de degré quatre peut être écrite comme un produit de deux équations de degré deux. La technique est similaire pour les

5. Argument mis en défaut avec les complexes.

équations de degré 5 et 6. Descartes ajoute qu'il en sera de même pour les équations de degré plus élevé (Bos, ibid.).

La nouvelle définition de l'exactitude géométrique chez Descartes l'a poussé à classifier les problèmes géométriques tout comme Pappus [6] l'avait fait avant lui. Il reprit d'ailleurs son classement en précisant le degré des équations des courbes géométriques les plus simples à utiliser. Les problèmes plans sont décrits par des équations linéaires ou quadratiques ; les constructions se font avec les droites et les cercles. Les problèmes solides amènent des équations du troisième et du quatrième degré ; les constructions se font avec les paraboles et les cercles. Les problèmes linéaires donnent des équations de degrés plus élevés et nécessite l'utilisation de coniques pour les constructions.

Cette partie montre que Descartes a développé une théorie importante sur les équations mais son but est resté purement géométrique. L'utilisation de l'algèbre en géométrie « se révéla un outil des plus puissants et les mathématiciens s'en emparèrent rapidement, avidement, et avec grand profit » (Bos, 1998, p. 314). L'apport principal de l'étude cartésienne du problème de Pappus concerne la nouvelle classification des courbes (Dubouclez, 2012). Celle-ci permet de faire correspondre la complexité de la construction géométrique avec le degré de l'équation. Selon Bos (2001), cela a permis de mettre en évidence qu'une courbe et son équation sont équivalentes. L'étude des relations entre les courbes et leurs équations, principe même de la géométrie analytique, a été importante dans les travaux des mathématiciens après Descartes, bien qu'aucun domaine mathématique nouveau ne soit reconnu et développé. Nous nous intéressons désormais aux travaux ultérieurs à Descartes.

8 L'émergence de la géométrie analytique

Nous avons présenté au point 7 la méthode cartésienne pour résoudre des problèmes géométriques. Cette méthode se base sur un ensemble de règles : traduire le problème géométrique en une équation ; si l'équation est à une inconnue alors il s'agit de la rendre irréductible pour pouvoir l'écrire sous une certaine forme standard ; trouver les solutions de l'équation ; construire géométriquement la solution du problème. Si l'équation a deux inconnues, les points du lieu à construire se trouvent en donnant une valeur arbitraire à une des inconnues pour étudier l'équation à une inconnue résultante. Cette méthode permet un traitement plus systématique des questions et aussi d'aborder les problèmes différemment (Dorier, 2000a). Cela amène notamment les mathématiciens à concevoir la notion de courbes et de surfaces algébriques comme étant plus générale que les coniques et les quadriques (Dieudonné, 1978).

Cette méthode analytique a été créée de façon indépendante chez Descartes et Fermat. Selon Bourbaki (1969), le premier à concevoir le principe de la géométrie analytique (équivalence entre courbe et équation) est Fermat en 1636. Or, ses travaux ne sont publiés qu'en 1679. Il est donc difficile de dire qui de Descartes ou Fermat a créé la géométrie analytique. Dans tous les cas, ils se « partagent le rôle principal » (Jullien,

6. Nous avons présenté la classification de Pappus au point 3.

1996). En effet, selon l'auteur, même si la méthode de Descartes est plus générale et mieux fondée que celle de Fermat, ce dernier traite de façon plus affirmée des lieux géométriques définis algébriquement.

Une droite est un lieu géométrique. Nous avons vu, au point 7, que l'étude du problème de Pappus par Descartes permet de décrire la droite par une équation du premier degré à deux inconnues. Cela nécessite de se fixer un repère et d'utiliser les propriétés des triangles d'Euclide. Fermat décrit les équations des lieux géométriques avec une méthode assez similaire. Bien que sa méthode analytique soit dans le prolongement de celle de Viète, dont nous avons parlé au point 5, il se fixe une origine et un axe du repère et exprime les autres quantités en fonction de celles-ci. Il cherche ensuite à décrire le lieu occupé par tous les points I tels que le rapport a sur e est constant (figure III.19).

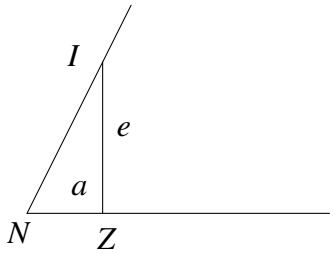


FIGURE III.19 – Equation d'une droite dans le plan par Fermat (Smith, 1959).

Tout comme Descartes, la preuve se base sur les similitudes des triangles. La droite est alors décrite en fonction de sa pente et d'un point donné. Descartes et Fermat ont tous deux convergés vers la même utilisation de l'algèbre en géométrie. C'est de cette algébrisation de la géométrie qu'a émergé la géométrie analytique. Selon Dorier (1990),

> « Une nouvelle ère était née, présidée par la scission entre géométrie synthétique et géométrie analytique. Chacune des deux méthodes devait réunir ses adeptes et bientôt de vastes polémiques entre puristes et "pervertis" verraient le jour, mais pour l'heure le vent était en poupe et les résultats accessibles par la méthode analytique s'étendirent à tous les domaines connus en géométrie donnant des démonstrations souvent fort simples et permettant par une nouvelle approche des découvertes jusqu'alors inaccessibles » (p. 41).

La méthode cartésienne a donc eu un grand succès auprès des mathématiciens de l'époque. Cependant, certaines critiques ont été formulées. Selon Dieudonné (ibid.), l'usage des coordonnées cartésiennes est souvent lourd et pénible car les axes du repère sont choisis de façon arbitraire. La partie analytique engendre un allongement des démonstrations et des calculs et mène « à des étapes du raisonnement où le sens "géométrique" se trouvait enfoui sous des masses d'équations et de notations » (Dorier, ibid., p. 41). C'est pourquoi la recherche d'invariants, d'un repère à l'autre, a été une préoccupation de l'époque. Celle-ci a conduit à effectuer des changements de repères et a favorisé l'étude des transformations linéaires (Dorier, 2000 ; Nguyen, 2018). C'est en 1649 que Van Schooten donne les premières formules de changements de repères. En parallèle, l'étude des courbes qui suivit le traité de géométrie de Descartes ne dépasse pas celle de

quelques exemples particuliers et c'est principalement la notion de degré d'une courbe plane qui est mise en avant jusqu'en 1680 (Dieudonné, ibid.). Les méthodes de résolution d'équations algébriques consistent à intersecter des courbes planes et à éliminer les inconnues entre les équations pour pouvoir déterminer leurs points communs. De ce fait, plusieurs mathématiciens se sont intéressés à pouvoir résoudre des équations et des systèmes d'équations sans forcément tenir compte de l'aspect géométrique du problème. Selon Dorier (1990), cette méthode cartésienne, bien qu'amenant naturellement la réponse au problème géométrique, éloigne le mathématicien du sens géométrique de la situation en jetant « un voile sur la perception visuelle que l'on pourrait avoir du problème » (p. 41). Cette critique a également été formulée par Leibniz en 1679 ; il écrit :

> « Je ne suis toujours pas satisfait de l'algèbre, parce qu'elle ne donne pas les méthodes les plus courtes ni les constructions les plus belles en géométrie. C'est pourquoi je crois que, pour ce qui concerne la géométrie, nous avons toujours besoin d'une analyse qui soit distinctement géométrique ou linéaire et qui exprimera directement les situations comme l'algèbre exprime directement les grandeurs. Et je crois que j'en ai trouvé le moyen et que nous pouvons représenter les figures et même les machines et les mouvements par des lettres comme l'algèbre représente les nombres ou les grandeurs » (Dorier, ibid., p. 42).

Le moyen dont Leibniz parle est résumé de la façon suivante :

> « J'ai découvert certains éléments d'une caractéristique qui est entièrement différente de l'algèbre, qui aura de grands avantages en représentant à l'esprit exactement et d'une façon fidèle à sa nature, même sans figure, tout ce qui dépend du sens de la perception. L'algèbre est seulement la caractéristique des nombres et des grandeurs indéterminés, mais elle n'exprime pas directement les situations, les angles, et les mouvements. Or il est souvent difficile d'analyser les propriétés d'une figure par le calcul, et encore plus de trouver des constructions et des démonstrations géométriques adéquates, même quand on a fini le calcul algébrique. Mais cette nouvelle caractéristique, qui s'appuie sur les figures visuelles, ne peut pas manquer de nous donner la solution, la construction et la démonstration géométrique tout dans le même temps, et de façon naturelle et dans une même analyse, c'est-à-dire dans une procédure déterminée » (Dorier, ibid., p. 42).

Ainsi, la méthode proposée par Leibniz consiste à utiliser un calcul algébrique rendant compte des aspects géométriques dans la résolution de problèmes géométriques. Ceux-ci n'étant pas forcément pris en compte dans la résolution analytique traditionnelle. Cette méthode aurait l'avantage d'être maniable, fiable et de pouvoir reconstruire le sens géométrique du problème. Selon Dorier (ibid.), Leibniz espère ainsi réconcilier l'algèbre et la géométrie en proposant de prendre en compte dans une méthode de nature analytique le côté intuitif de la méthode synthétique. Bien que des essais soient proposés par Leibniz, il n'est pas arrivé à atteindre son objectif. Cependant, selon Belaval (1960), le système cartésien dans lequel une courbe est décrite par une équation à deux inconnues a inspiré Leibniz et l'a amené à introduire le concept de fonction. Une équation à deux inconnues $P(x,y) = 0$ est alors associée à une fonction telle que $y = f(x)$. La notion

de fonction est alors définie bien après que les équations soient utilisées. Nous n'avons trouvé aucune définition formelle des équations dans nos recherches avant l'introduction des fonctions. Les liens entre les fonctions et les équations appuyent notre choix, présenté au chapitre II, de définir les équations comme Rogalski (1991) le propose.

Selon Dorier (ibid.), la géométrie analytique n'a été étendue à l'espace qu'à la fin du XVII^{e} siècle et elle acquiert ses lettres de noblesse dans la deuxième moitié du XVIII^{e} siècle avec les travaux de Lagrange et Monge. Les apports du travail de Monge en géométrie sont importants. Il étudie d'une part la géométrie analytique mais aussi la géométrie descriptive. Pour lui, la géométrie descriptive est « l'art de représenter sur une feuille de dessin qui n'a que deux dimensions, les corps de l'espace qui en ont 3 et qui sont susceptibles d'une définition rigoureuse » (Itard, 1952, p. 184). Que ce soit en géométrie analytique ou en géométrie descriptive, Monge rapporte tout à trois plans de coordonnées (Dupin, 1819). Chaque objet de l'espace est alors représenté par la distance de chacun de ses points aux trois plans de coordonnées. Pour plus de simplicité, il choisit ces trois plans comme étant perpendiculaires deux à deux. De la sorte, la position d'un point de l'espace est donnée par trois équations représentant la distance entre ce point et chaque plan. La position d'une courbe dans l'espace est définie par les équations représentant les projections de cette courbe dans les plans de coordonnées. Deux équations suffisent car la troisième est une conséquence des deux autres. La position d'une surface dans l'espace est donnée par une seule équation. Cette méthode lui a permis d'étudier la position relative des objets entre eux et de réaliser un examen général des surfaces du second degré, de déterminer une équation du plan tangent à une surface et de décrire les ellipsoïdes et les hyperboloïdes comme des cercles de rayon variable. Nous sommes en présence des notions de géométrie différentielle que nous avons présentées au chapitre I. Selon Taton (1949), c'est la coopération constante entre les méthodes géométriques et analytiques qui est une des caractéristiques essentielles de l'œuvre de Monge. Cela va dans le sens de la proposition de Leibniz. Au contraire, Lagrange définit la mécanique analytique et préfère ne pas faire appel au sensible géométrique pour résoudre des problèmes, et ce, afin de laisser se dérouler l'enchaînement des équations et des raisonnements (Dhombres, 1989). Le point de vue de Lagrange s'explique certainement par les sujets auxquels il s'est intéressé : les solutions des équations indéterminées, la théorie de l'élimination, la résolution des équations algébriques de degré quelconque (Rouse Ball, 1907). Ainsi, en fonction des domaines de recherche (algèbre ou géométrie), certains mathématiciens prônent une combinaison des méthodes synthétique et analytique tandis que d'autres n'en voient pas l'utilité.

Nous revenons désormais sur les méthodes visant à obtenir les équations de droites et de plans dans l'espace. Celles-ci sont issues de (Garnier, 1813). Nous les écrivons en termes modernes. Un repère orthonormé d'origine A est fixé. Soit d une droite de l'espace (non parallèle à un plan ou à un axe). La construction est illustrée à la figure III.20.

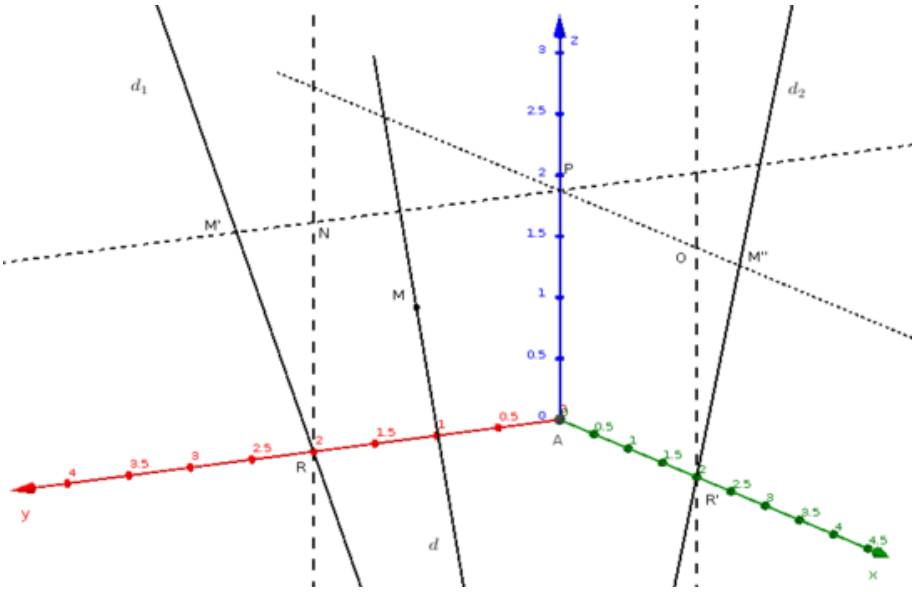


FIGURE III.20 – Équations cartésiennes de droites dans l'espace.

Soient d_1 et d_2 les projections de la droite d respectivement dans les plans Ayz et Axz. Soit M un point de la droite d. Les projetés du point M dans les plans Ayz et Axz sont respectivement M' et M''. Nous traçons une perpendiculaire au plan Axz passant par M' et une perpendiculaire au plan Ayz passant par M''. Ces deux droites se coupent au point P. La droite d_1 coupe l'axe des ordonnées en R et la droite d_2 coupe l'axe des abscisses en R'. Il reste à tracer les droites parallèles à l'axe Az passant par R et R'. Nous obtenons les triangles rectangles $RM'N$ et $R'M''O$. Les relations suivantes sont alors vérifiées :

$$\tan\widehat{NRM'} = \frac{M'N}{RN} \qquad \text{et} \qquad \tan\widehat{OR'M''} = \frac{OM''}{R'O}.$$

Posons $\tan\widehat{NRM'} = a$ et $\tan\widehat{OR'M''} = b$. Nous avons :

$$M'N = aRN \tag{III.1}$$

$$OM'' = bR'O \tag{III.2}$$

Mais $M'N = PM' - PN$ et $PN = AR$, d'où $M'N = PM' - AR$. De la même façon, $OM'' = PM'' - AR'$. Nous posons ensuite α et β comme étant la distance entre A et R et entre A et R'. Ceci nous donne :

$$M'N = PM' - \alpha \tag{III.3}$$

$$OM'' = PM'' - \beta \tag{III.4}$$

En égalant les équations III.1 et III.3 ainsi que les équations III.2 et III.4, nous obtenons donc :

$$aRN = PM' - \alpha \qquad \text{et} \qquad bR'O = PM'' - \beta.$$

Or, les coordonnées de M sont (PM', PM'', AP). Ainsi, $x = PM'$, $y = PM''$ et $z = AP$. De ce fait, puisque $RN = R'O = AP$, nous obtenons :

$$az = x - \alpha \qquad \text{et} \qquad bz = y - \beta.$$

ou encore :

$$x = az + \alpha \qquad \text{et} \qquad y = bz + \beta.$$

Ces équations représentent les équations des droites d_1 et d_2. Comme il suffit de connaître la position de deux des trois projections d'une droite pour déterminer la position de la droite d dans l'espace, l'équation d'une droite dans l'espace est le système des équations de deux de ses projections. Ce résultat et cette démarche nous donnent donc le système d'équations cartésiennes d'une droite quelconque de l'espace.

Si la droite d est parallèle à un des plans composants le repère, par exemple Axz, alors la projection de cette droite dans le plan Axy est une droite parallèle à l'axe Ax. La distance de tous les points de la droite au plan Axz est constante et vaut β. L'équation de cette projection est donc $y = \beta$. Celle de la projection de la droite d dans le plan Axz est toujours $x = az + \alpha$.

Si la droite d est désormais parallèle à un axe, par exemple Az, alors la projection de cette droite dans le plan Axy est un point de coordonnées $(\alpha, \beta, 0)$. La projection de la droite dans le plan Axz a pour équation $x = \alpha$.

Dans tous les cas, nous avons défini un système d'équations cartésiennes de la droite d dans l'espace. La méthode cartésienne, ainsi que les propriétés des triangles définies par Euclide, sont utilisées dans cette construction des équations cartésiennes de droites dans l'espace. Nous nous intéressons désormais aux équations cartésiennes d'un plan.

Nous nous basons toujours sur la construction réalisée par Garnier (ibid.). Il part du principe que la position d'un plan dans l'espace est déterminée par celles de ces traces dans deux des trois plans de coordonnées. La méthode est illustrée à la figure III.21.

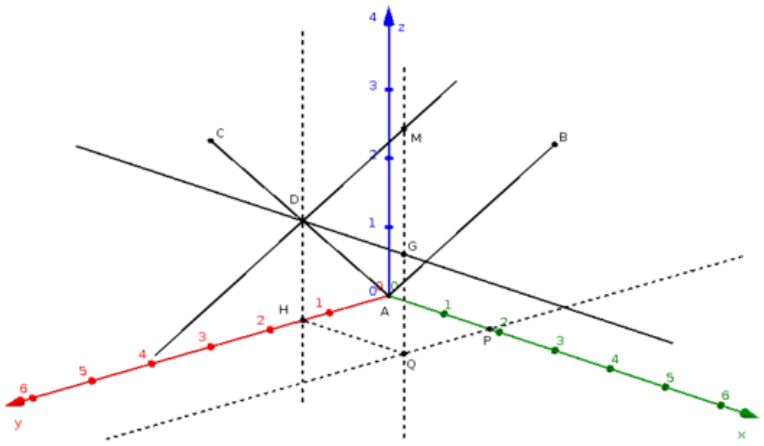


FIGURE III.21 – Équation cartésienne de plans passant par l'origine du repère.

Un repère orthonormé d'orgine A est fixé. Supposons dans un premier temps que le plan passe par l'origine du repère et n'est pas parallèle à un des plans du repère. Soient AB et AC les traces du plan ABC dans les plans Axz et Ayz. Soit M un point du plan ABC. La projection orthogonale du point M sur le plan Axy est le point Q. Nous traçons une parallèle à l'axe Ay passant par Q. L'intersection de cette droite avec l'axe Ax est P. De ce fait, les coordonnées du point M sont (MQ, QP, AP). Ainsi, $x = MQ$, $y = QP$ et $z = AP$. Dans le plan ABC, nous traçons une parallèle à AB passant par M. L'intersection entre cette droite et la droite AC est D. Par D, nous traçons une parallèle à l'axe Ax. Cette droite coupe la droite MQ en G. Alors, les droites DM, DG, et MQ sont dans un même plan. Nous avons en particulier :

$$MQ = MG + GQ. \tag{III.5}$$

Nous dessinons ensuite une droite perpendiculaire à l'axe Ay passant par le point D. L'intersection entre l'axe Ay et cette droite donne le point H. Nous obtenons ainsi le rectangle $DGQH$. Puisque $GQ = DH$, nous pouvons exprimer DH dans le triangle rectangle DHA. Nous avons :

$$DH = AH \tan \widehat{DAH}. \tag{III.6}$$

Comme $AH = PQ = y$, nous obtenons $DH = y \tan \widehat{DAH}$. De plus, si nous nous plaçons dans le triangle rectangle MGD, nous avons :

$$MG = DG \tan \widehat{MDG}. \tag{III.7}$$

Les triangles MGD et $M'AP$ sont semblables, où M' est la projection du point M dans le plan Axz. Nous en déduisons alors : $MG = DG \tan \widehat{M'AP}$. En insérant les équations III.6 et III.7 dans l'équation III.5 et en utilisant le fait que $DG = HQ = AP = x$, nous obtenons :

$$z = x \tan \widehat{M'AP} + y \tan \widehat{DAH}.$$

Posons $a = \tan \widehat{M'AP}$ et $b = \tan \widehat{DAH}$. D'où :

$$ax + by = z.$$

Nous avons déterminé une équation cartésienne d'un plan quelconque passant par l'origine du repère. Si nous supposons que le plan ne passe plus par l'origine du repère (sans être particulier), alors la démarche est similaire. La figure III.22 représente la situation.

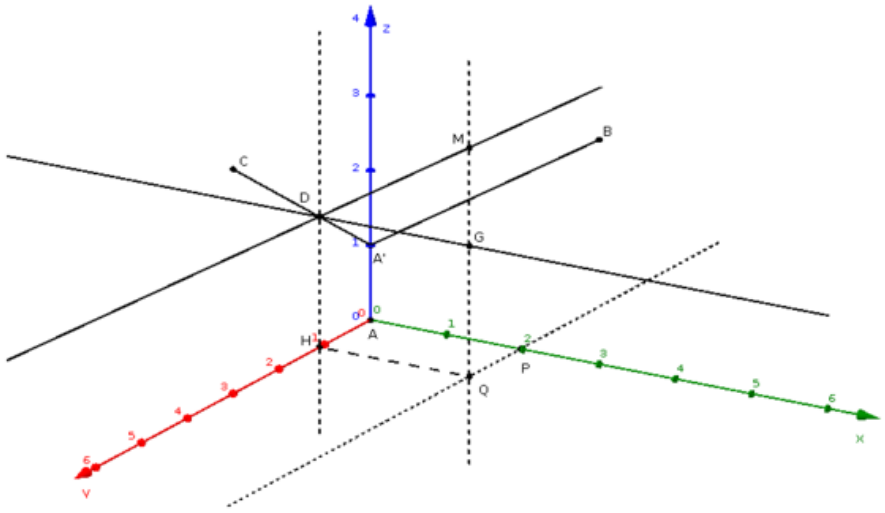


FIGURE III.22 – Équation cartésienne de plans ne passant pas par l'origine du repère.

Dans ce cas, les coordonnées du point M sont (x,y,z') où $z' = z+d$ avec d la distance entre l'origine du repère A et le point A'. La situation précédente a été translatée de d (ici vers le haut). Nous avons donc :

$$z = ax + by + d.$$

Nous avons désormais déterminé une équation cartésienne d'un plan ne passant pas par l'origine du repère. Tous les plans particuliers sont issus de l'équation générale donnée ci-dessus en prenant une ou plusieurs valeurs nulle(s). La méthode utilisée ici consiste également à se fixer un repère cartésien et à utiliser les propriétés des triangles rectangles définies chez Euclide.

Dans le plan ou dans l'espace, les équations cartésiennes des droites sont déterminées de façon similaire. Il suffit de se fixer un repère et d'utiliser les propriétés des triangles semblables ou des triangles rectangles pour déterminer les coordonnées d'un point quelconque de la droite. La seule différence est qu'une étape est ajoutée dans l'espace : projeter la droite de l'espace sur deux des plans de coordonnées. Ainsi, il s'agit de déterminer deux équations cartésiennes de droites dans un plan précis pour trouver un système d'équations cartésiennes de la droite de l'espace. La méthode utilisée dans le plan n'est pas directement appliquée à l'espace dans un plan quelconque. Il est d'abord nécessaire de recourir aux projections dans les plans de coordonnées avant d'appliquer telle quelle la méthode du plan. Selon nous, la méthode du plan n'est pas étendue sans accident à l'espace. En ce qui concerne les équations de plans, il s'agit encore une fois de déterminer les coordonnées d'un point quelconque du plan. Pour ce faire, ce point est projeté dans les plans de coordonnées et les propriétés des triangles semblables et des triangles rectangles sont encore une fois essentielles. Ainsi, les objectifs sont identiques peu importe la dimension et l'objet étudiés. Cependant, les étapes à suivre pour déterminer les coordonnées du point quelconque ne sont pas les mêmes dans le plan et dans l'espace et pour les droites et les plans. Le passage du plan à l'espace amène donc certaines ruptures.

En conclusion, la méthode cartésienne développée par Descartes et Fermat a permis à leurs successeurs d'étudier les courbes et les équations algébriques qui les décrivent. De ce fait, l'émergence de la géométrie analytique a duré environ un siècle. Cette nouvelle géométrie s'est d'abord attelée à décrire par des équations algébriques des courbes du plan. En particulier, nous avons présenté la manière dont les équations de droites dans le plan sont déterminées chez Descartes et Fermat. Elle a ensuite été étendue à l'espace et les travaux de Monge ont permis à la géométrie analytique de ressembler à celle que nous connaissons aujourd'hui. Nous avons alors montré comment les équations de droites et de plans dans l'espace sont déterminées. Nous remarquons également que la géométrie analytique se résume à des équations cartésiennes. Le point de vue paramétrique dans le cadre de la géométrie vectorielle et de la géométrie analytique n'apparait que dans le courant du XVIII^{e} et XIX^{e} siècles et a permis à l'algèbre linéaire de voir le jour. C'est pourquoi, au point suivant, nous nous intéressons à la naissance de l'algèbre linéaire.

9 La naissance de l'algèbre linéaire

Nous avons précédemment montré comment sont déterminées les équations cartésiennes des droites et des plans dans l'espace. Nous nous intéressons maintenant aux équations paramétriques de ces objets. Pour cela, il nous semble nécessaire de porter notre attention sur l'émergence des vecteurs et de la notion de rang, laquelle permet de déterminer le nombre de paramètres dans une équation. Alves-Dias (1998) confirme que la genèse du point de vue paramétrique, ainsi que son articulation avec le point de vue cartésien, sont fortement liées à la genèse de cette notion. Dorier (1993) explique qu'elle n'est pas issue des travaux sur l'algèbre linéaire mais bien de ceux traitant de l'étude des systèmes linéaires. En effet,

> « Pour ce qui concerne plus précisément le concept de rang, il apparaît que le cadre des systèmes d'équations linéaires est celui dans lequel la quasi totalité des idées maîtresses se sont élaborées jusqu'au début du XX^{e} siècle. [...] Pour ce qui concerne la période antérieure au XX^{e} siècle, l'autre domaine essentiel dans lequel se sont constitués les concepts d'algèbre linéaire est la géométrie. Or le rang me semble être un concept assez pauvrement représenté en géométrie, essentiellement du fait de la limitation à la dimension trois. De plus la géométrie en dimension n, où le rang a un rôle plus crucial, ne s'est vraiment développée qu'à partir de la deuxième moitié du XX^{e} siècle et elle utilise beaucoup de résultats issus de l'étude des systèmes linéaires et de la théorie des déterminants, au point que le concept de rang apparaît comme une exportation du second cadre dans le premier. [...] Pourtant à l'exception notoire des travaux de Grassmann, il me semble que l'essentiel de la genèse du concept de rang est lié à l'étude des systèmes linéaires » (p. 160).

Dans cette perspective, nous nous sommes intéressée aux travaux concernant les systèmes linéaires, terrain fécond à l'émergence de l'algèbre linéaire (Dorier, 1997),

et aux travaux traitant de la géométrie vectorielle. Cela nous donne alors une idée des relations existantes entre la géométrie analytique et l'algèbre linéaire.

9.1 La genèse de la notion de rang

Selon Dorier (1993), la notion de rang possède plusieurs aspects. L'auteur relève l'aspect direct (nombre maximal de vecteurs indépendants), l'aspect générateur (nombre minimal de vecteurs qui génèrent la famille) et l'aspect dual (nombre minimal d'équations indépendantes). Il précise que ces trois aspects sont relativement autonomes bien qu'ils soient étroitement liés, comme nous allons le voir dans la suite. Le rang tel que nous le connaissons aujourd'hui a émergé une fois que ces trois aspects ont été dégagés et reliés entre eux par les mathématiciens. Nous présentons donc leur développement.

Jusqu'au XVIII^{e} siècle, les systèmes d'équations linéaires sont étudiés et possèdent autant d'inconnues que d'équations (Bourbaki, 1969). Leur résolution ne pose pas de problème majeur aux mathématiciens car ils disposent de méthodes qui fonctionnent lorsque les coefficients sont des nombres (Dieudonné, 1978). Cependant, lorsque les coefficients sont définis en fonction de paramètres variables, ces méthodes sont inefficaces. C'est pourquoi, selon Dieudonné (ibid.), vers 1750, une théorie générale des systèmes d'équations linéaires commence à se développer dans laquelle la solution est explicitement exprimée en fonction de ces paramètres. C'est seulement à partir de cette étape que les différents aspects du rang commencent à apparaitre.

L'aspect dual du rang est entrevu en 1750 grâce à Euler lors de la résolution du paradoxe de Cramer. Ce paradoxe est un résultat issu de l'étude des courbes algébriques, reconnu comme vrai bien qu'il ne soit pas démontré. Il est le suivant :

> « 1) Deux courbes algébriques planes d'ordres respectifs m et n se coupent en au plus mn points. Le nombre de points d'intersection est en général plus petit, quelques points s'éloignant à l'infini, ou devenant imaginaires, mais on sait, qu'en certains cas, il vaut exactement mn.
> 2) Il faut et il suffit de $n(n+3)/2$ points pour déterminer entièrement une courbe algébrique d'ordre n. » (Dorier, ibid., p. 162).

Nous avons vu qu'en géométrie analytique une courbe algébrique plane d'ordre n peut être décrite par une équation de degré n à deux variables. Ainsi la deuxième proposition peut être traduite de la façon suivante :

> « une équation polynômiale de degré n en deux variables comporte $(n+1)(n+2)/2$ coefficients, qui déterminent à un facteur multiplicatif près une seule équation, il faut donc $n(n+3)/2$ relations, donc points, pour déterminer une courbe algébrique plane d'ordre n » (Dorier, ibid., p. 163).

Par exemple, une droite dans le plan est représentée par une équation du premier degré à deux inconnues de la forme $ax+by=c$. Cette proposition dit qu'il y trois coefficients (a, b et c) et qu'il suffit de deux points pour la déterminer. Cette proposition est vraie pour les droites du plan mais soulève des questions chez Cramer dès que $n \geq 3$. Selon lui, puisque $n^2 > n(n+3)/2$, cela signifie que deux courbes algébriques planes de même ordre ont plus de points en commun qu'il n'en suffit pour les déterminer. Ce qui

explique le paradoxe. Euler étudie alors sous quelles conditions n équations suffisent à déterminer autant de coefficients (Dorier, ibid.). Il examine les systèmes carrés avant d'énoncer la règle suivante :

> « Quand on soutient que pour déterminer n quantités inconnues, il suffit d'avoir n équations qui expriment leur rapport mutuel, il faut y ajouter cette restriction que toutes les équations soient différentes entre elles, ou qu'il n'y en ait aucune qui soit déjà renfermée dans les autres » (Dorier, ibid., p. 164).

Dorier (ibid.) montre que le travail d'Euler sur ce paradoxe l'a conduit à expliciter la notion de dépendance des équations linéaires, bien que cette notion reste rhétorique et purement opératoire. Euler aborde ensuite la question de la réduction d'un système d'équations à un système équivalent ayant un nombre minimal d'équations. Pour ce faire, il utilise une méthode de substitution aujourd'hui apparentée à la méthode du pivot de Gauss. L'aspect dual du rang est présent car Euler aborde la question du nombre (maximal) d'équations indépendantes (Dorier, ibid.).

Selon Alves-Dias (ibid.), la première prise en compte de l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique, bien qu'elle soit implicite et intuitive, est réalisée par Euler lorsqu'il établit les liens entre le rang du système et la dimension du sous-espace solution (en termes modernes). L'articulation se fait alors dans le sens cartésien vers paramétrique. Selon Dorier (ibid., p. 167), les travaux d'Euler « posent les jalons pour le concept de rang » en développant de façon intuitive les aspects dual et générateur. Cependant, les questions de l'invariance et de l'aspect direct n'y sont pas soulevées.

Une seconde étape dans la genèse du rang dépend fortement de la théorie des déterminants. Celle-ci est introduite par Cramer en 1750 et étendue aux déterminants d'ordre n par Vandermonde et Laplace après 1770 (Dieudonné, ibid.). Jusqu'en 1840, seule la résolution des systèmes de Cramer est étudiée et il faut attendre Sylvester pour que l'étude des cas d'indétermination devienne systématique (Dorier, ibid.). Sylvester s'intéresse aux systèmes homogènes et exprime à l'aide des déterminants une condition nécessaire et suffisante pour que ce type de systèmes possède des solutions non nulles [7]. L'intérêt étant porté sur la description de l'ensemble des solutions d'un système, Alves-Dias (ibid.) repère encore une articulation des points de vue dans le sens cartésien vers paramétrique. Cependant, selon l'auteure, une avancée importante est proposée par Cayley en 1843 en fournissant désormais des moyens pour contrôler le nombre d'équations indépendantes.

> « Cayley considère un tableau de $(q+1)$ lignes et n colonnes, $q < n$, la première ligne étant constituée des inconnues x_i, les autres des coefficients $Ai, \cdots, Ki$. Il explique ensuite que l'on peut extraire C_n^{q+1} mineurs d'ordre $(q+1)$ de ce tableau qui correspondent à des fonctions linéaires en les x_i. Il dit alors, sans démonstration, que si on annule chacune de ces fonctions, les équations ainsi obtenues se réduisent à $(n-q)$ indépendantes, et qu'alors

7. En termes actuels, cette condition est que le rang du système homogène soit inférieur au nombre d'inconnues composant le système.

> chacune des autres équations s'écrit comme une combinaison linéaire, dont les coefficients ne dépendent pas des x_i, de ces $(n-q)$ équations indépendantes » (Dorier, ibid., p. 170).

En 1864, Baltzer étudie les systèmes indéterminés et énonce un théorème important :

> « Dans un système de n équations en n inconnues, si un mineur d'ordre k ne s'annule pas et si tous les mineurs d'ordre $(k+1)$ construit sur celui-ci s'annulent, alors le système est consistant et $(n-k)$-uple indéterminé » (Dorier, ibid., p. 173).

Jusqu'ici, les résultats donnés apportent une amélioration technique importante mais ne participent pas directement à la genèse du rang (Dorier, ibid.). L'auteur ajoute même que l'outil très technique des déterminants a pu constituer un obstacle épistémologique à une bonne perception de cette notion. À l'inverse des résultats précédents, celui de Baltzer constitue un premier pas fondamental dans l'émergence de la notion de rang (Dorier, ibid.). Bien que l'aspect direct soit encore absent et le problème de l'invariance non envisagé, les aspects dual et générateur émergent explicitement de ce résultat. Selon Alves-Dias (ibid.), c'est également la première fois que sont articulés le nombre d'équations indépendantes et la taille de l'ensemble des solutions. Cependant, elle émet deux reproches : cela reste encore restreint au sens cartésien vers paramétrique ; le résultat ne concerne que les systèmes carrés.

En 1867, Dogdson énonce plusieurs résultats dans lesquels l'ordre d'indétermination d'un système est évalué pour tous les cas de figures possibles en fonction de la dimension d'un système d'équations linéaires (Dorier, ibid.). Mais, il ne parvient pas à les synthétiser. En 1880, cette synthèse est proposée par Rouché lorsqu'il s'intéresse à un système de n équations à m inconnues, dont les premiers membres ne sont pas nuls (Dorier, ibid.). Ainsi, le résultat de Baltzer est désormais étendu aux systèmes non carrés.

En 1861, Smith étudie un système homogène de n équations en $n+m$ inconnues, dont les mineurs d'ordre n ne sont pas tous nuls (Dorier, ibid.). Il explique alors que le système contient des équations indépendantes et que l'ordre d'indétermination est m. Selon Dorier (ibid.), une définition descriptive du rang vu sous son aspect dual est ainsi donnée et l'ordre d'indétermination est mis en relation avec le degré de dépendance des équations. De plus, la question de l'invariance est désormais posée et résolue car Smith dit clairement que le nombre maximal de solutions indépendantes du système ne dépasse pas m.

Les trois aspects de la notion de rang sont apparus mais celle-ci a été définie comme un objet mathématique en 1879 par Frobenius. Dans ses travaux, il commence par étudier un système homogène composé de m équations indépendantes à n inconnues tel que $m < n$ (Dorier, ibid.). Il le note comme étant :

$$a_1^{(\mu)} u_1 + \cdots + a_n^{(\mu)} u_n = 0 \tag{III.8}$$

où $u_1, \cdots, u_n$ sont les inconnues, $a_1, \cdots, a_n$ sont les coefficients et μ un naturel entre 1 et m. Ainsi, la valeur de μ désigne de quelle équation du système il s'agit.

Deux remarques sont ensuite formulées (Alves-Dias, ibid. ; Dorier, ibid.) : toute équation linéaire homogène qui admet au moins les mêmes solutions que celles du système III.8 peut être écrite comme une combinaison linéaire des équations formant ce système ; les mineurs d'ordre m du système III.8 sont égaux, à un facteur multiplicatif non nul près, à ceux d'un système dans lequel les m équations indépendantes sont construites à partir des m équations indépendantes du système III.8. Ce facteur multiplicatif est en réalité le déterminant de la matrice de passage lors d'un changement de bases. L'équivalence des systèmes est alors démontrée.

Frobenius s'attèle ensuite à caractériser l'ensemble des solutions d'un tel système. Cela lui permet d'associer les équations linéaires homogènes à n inconnues comme des n-uplets (Dorier, ibid.). C'est la première fois que la notion de vecteur apparait dans l'étude des systèmes d'équations linéaires. Grâce à cette nouvelle relation entre les objets, Frobenius peut s'appuyer sur la dualité pour lier les aspects direct, générateur et dual du rang (Dorier, ibid.). En effet, l'aspect direct émerge dans ses travaux quand il montre que le nombre maximal de solutions indépendantes du système de m équations linéaires à n inconnues est $n-m$. Lorsqu'il dit que m est le nombre maximal d'équations indépendantes ayant le même ensemble de solutions, c'est l'aspect dual qui apparait. Finalement, l'aspect générateur se dégage avec le fait que m est le nombre minimal d'équations nécessaires pour définir cet ensemble. Cependant, Dorier ajoute :

> « La possibilité d'assimiler une équation à un n-uplet (et même plutôt l'inverse) a été un des éléments décisifs qui a permis à Frobenius, essentiellement en jouant sur les rapports de dualité, d'arriver à cette explicitation quasi-exhaustive des différents aspects du rang » (ibid., p. 184).

La genèse du rang s'est donc étendue sur une période de plus d'un siècle. La théorie des déterminants constitue un outil important dans le développement de l'étude des systèmes linéaires. Bien que certains aspects de la notion émergent relativement tôt, il faut attendre Frobenius pour qu'ils soient tous présents et reliés entre eux. En ce qui concerne l'articulation des points de vue cartésien et paramétrique, Alves-Dias (ibid.) explique que c'est le fait de pouvoir désormais relier le nombre minimal d'équations indépendantes du système au nombre minimal de vecteurs qui engendrent l'ensemble des solutions qui est fondamental pour celle-ci. En effet, sans la notion de rang, il nous semble difficile de pouvoir décrire une droite ou un plan dans le point de vue paramétrique car il n'y aucun contrôle possible du nombre de vecteurs nécessaires pour générer ces objets et donc forcément du nombre de paramètres à utiliser.

Ainsi, il est clair que la genèse du rang est une étape essentielle pour que les droites et les plans puissent se décrire par une équation paramétrique. Nous retenons de celle-ci, tout comme Alves-Dias (ibid.), plusieurs éléments. Tout d'abord, il y a une évolution des questionnements dans l'étude des systèmes d'équations linéaires. L'intérêt ne se porte plus sur la détermination des solutions des systèmes mais bien sur leurs conditions d'existence. Ce nouveau questionnement émerge principalement de l'étude des systèmes indéterminés. De plus, la théorie des déterminants a joué un rôle important dans la genèse du rang, et donc des équations paramétriques, aussi bien comme élément producteur de la connaissance qu'obstacle à l'émergence des différents aspects de la no-

tion. Finalement, notre préoccupation quant à l'articulation des points de vue cartésien et paramétrique nous pousse à constater que c'est principalement l'articulation dans le sens cartésien/paramétrique qui apparaît dans l'histoire. L'articulation dans le sens paramétrique/cartésien, plus difficile à mettre en place, nécessite de considérer à la fois les solutions et les équations d'un système comme des n-uplets et n'aboutit que lorsque la description de l'ensemble des solutions est suffisamment efficace (Alves-Dias, ibid.). Nous avons désormais une meilleure idée des étapes historiques cruciales pour l'émergence des équations paramétriques. Nous regardons maintenant les liens entre la géométrie analytique et l'algèbre linéaire. Cela nous éclaire alors sur l'introduction des vecteurs, autre étape essentielle pour que les objets soient décrits vectoriellement.

9.2 De la géométrie analytique à l'algèbre linéaire

D'un point de vue épistémologique, les liens entre la géométrie analytique et l'algèbre linéaire sont évidents. Or, selon Dorier (1997), d'un point de vue historique, ces liens sont plus complexes. Nous y revenons brièvement.

Au point 8, nous avons montré que la géométrie analytique, aussi puissante soit elle, a subi certaines critiques. L'une d'elles, notamment formulée par Leibniz, concerne la grande complexité des preuves et des calculs que la méthode cartésienne engendre et a pour conséquence la perte du côté visuel du problème. Pour pallier ce problème, Leibniz propose de créer un calcul tenant compte à la fois de la géométrie synthétique et de la géométrie analytique. Plus d'un siècle s'est écoulé avant que ce calcul n'apparaisse chez Wessel.

> « Savoir comment la direction doit être représentée analytiquement, c'est-à-dire comment on devrait exprimer les segments de droite, si on voulait, au moyen d'une équation unique entre un seul segment inconnu et d'autres donnés, trouver une expression représentant à la fois la longueur et la direction du segment inconnu » (Wessel, 1897, p. 1).

Ainsi, Wessel est le premier à essayer de prendre en compte la direction des grandeurs géométriques. Il aborde également l'addition de deux vecteurs, sans que la notion de vecteurs soit définie. Il ne s'agit encore pour le moment que de segments dont la direction est connue. En 1818, Möbius définit le calcul barycentrique, qui se rapproche beaucoup du calcul vectoriel actuel (Dorier, 1990). Ce dernier introduit aussi une règle pour l'addition et le rapport entre des lignes de même direction. C'est le premier à noter que le sens de parcours de la ligne est important. En effet, il explique que si la ligne AB est parcourue dans le sens contraire alors cela correspond à un changement de signe, c'est-à-dire à $-BA$. Selon Dorier (ibid.), ce calcul barycentrique constitue une étape importante dans la genèse du calcul vectoriel et permet de travailler directement sur les objets géométriques. De la sorte, Möbius a réussi à fournir une méthode analytique prenant en compte les aspects géométriques comme le suggérait Leibniz.

Möbius décrit un point géométrique par un système de nombres (Granger, 1988), ce qui correspond aujourd'hui aux coordonnées du point dans une certaine base. Partant de trois points dans le plan, Möbius constate qu'il est toujours possible de faire en

sorte qu'un point quelconque soit le centre de gravité du triangle. Il suffit pour y arriver de donner à chacun des trois points fixés une pondération (positive ou négative). Les coordonnées du barycentre sont alors déterminées par la valeur des pondérations. Cette méthode a certains avantages et certains inconvénients. En effet, avec cette idée de coordonnées barycentriques, toutes les courbes peuvent alors être représentées au moyen d'un point courant P en l'exprimant comme :

$$P_{(v)} = p_{(v)} \cdot A + q_{(v)} \cdot B + r_{(v)} \cdot C.$$

Ce point est donc une combinaison linéaire des points A, B et C donnés. Un inconvénient important par rapport à la méthode de Descartes consiste en le fait qu'ici, l'idée de la distance entre le point et les axes du repère est absente (Granger, ibid.). Selon Dorier (ibid.), ce nouveau type de calcul permet d'exprimer les droites et les plans comme les barycentres de deux et de trois points. Nous revenons sur ce mode de description des objets avec des termes modernes.

Pour décrire une droite, il suffit de se donner deux points distincts A et B dont les poids respectifs sont $1-k$ et k avec k un réel. En effet, tous les barycentres G doivent respecter la relation $(1-k)\overrightarrow{GA} + k\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AB}$. Nous retrouvons bien le fait que les points G appartiennent à la droite AB. La méthode est similaire pour décrire un plan si ce n'est que trois points A, B et C doivent être donnés et dont les poids respectifs sont $k+l-1$, $-k$ et $-l$ avec k et l des réels. Il est clair que de nos jours ce calcul barycentrique permet de décrire les droites et les plans par des équations vectorielles. Or, la notion de vecteur n'a réellement émergé qu'en 1832 avec Bellavitis.

C'est le premier à définir la notion de vecteur, sans que le terme vecteur soit utilisé, comme une classe d'équivalence de bipoints (Nguyen, 2018). Il dit que deux lignes sont équipollentes si elles sont égales, c'est-à-dire parallèles, de même sens et de même longueur. Les trois caractéristiques du vecteur sont prises en compte par les travaux de Bellavitis. Il fournit également les règles d'addition de deux lignes et du produit d'une ligne par un nombre. Nous reconnaissons ici les propriétés opératoires sur les vecteurs.

Pour que la notion formelle de vecteur émerge, deux nouvelles avancées sont nécessaires : l'apparition des nombres complexes et des quaternions. En effet, selon Ba (2007), c'est grâce à la volonté des mathématiciens de l'époque d'interpréter géométriquement des quantités imaginaires et de leur extension à l'espace qui permet à la notion de vecteur de voir le jour. Juste après Descartes, la question des racines des nombres négatifs se pose. Wallis, en 1685, est le premier à s'intéresser à ce problème et à trouver à ces nombres un correspondant géométrique dans le plan, comme pour apporter une certaine légitimité à ceux-ci (Dorier, ibid.). Nous les appelons aujourd'hui les nombres complexes. Bien plus tard, en 1843, Hamilton crée les quaternions dans le but de généraliser les quantités imaginaires à l'espace (Dorier, ibid.). Un quaternion est de la forme $w+ix+jy+kz$ où w,x,y et z sont des nombres réels et i, j et k sont des éléments tels que $ij=k$, $jk=i$, $ki=j$, $ji=-k$, $kj=-i$, $ik=-j$ et $i^2=j^2=k^2=-1$. En réalité, i, j et k représentent des rotations de 90° autour de trois axes rectangulaires (Dorier, ibid.). Il distingue dans un quaternion la partie scalaire w de la partie vectorielle $ix+jy+zk$ dite quaternion pur. C'est donc Hamilton qui introduit le premier le vocabulaire « vecteur » pour désigner le quaternion pure ainsi qu'une représentation du vecteur par une

flèche joignant deux points. La somme, le produit par un scalaire, le produit scalaire et le produit vectoriel sont alors définis. La renommée des quaternions a été très importante mais, tout comme pour la méthode cartésienne, certaines critiques sont survenues. En particulier, en 1894, une critique des quaternions est faite par Cayley.

> « [il] soulignait le caractère restrictif de leur représentation limitée à la dimension trois mais aussi pensait que leur application à la géométrie n'était qu'une façon déguisée de faire des calculs sur les coordonnées cartésiennes. Il montra sur des exemples, que les simplifications apportées dans les calculs par l'emploi des quaternions, qui rendent les raisonnements plus synthétiques, masquent la signification du résultat qu'il faut traduire en termes de coordonnées cartésiennes pour le comprendre » (Dorier, ibid., p. 53).

Cette critique concerne encore une fois le fait que la partie algébrique surplombe la partie géométrique du problème.

L'introduction des quaternions ainsi que l'utilisation de triplets en géométrie analytique ont poussé Cayley à généraliser les opérations effectuées sur les triplets à des n-uplets pour un n quelconque (Dorier, ibid.). L'auteur ajoute que les travaux de Cayley ont permis de définir la structure des espaces vectoriels en dimension finie de manière descriptive et de dégager la plupart des concepts d'algèbre linéaire dans le cadre des matrices.

> « Ces débuts de l'algèbre linéaire, qui commence à exister en tant que champ unifié de concepts, voient la généralisation du langage géométrique à tous les domaines où l'on appliquait jusqu'à maintenant les résultats de la théorie des déterminants » (Dorier, 1990, p. 62).

En parallèle, Grassmann propose en 1840 sa théorie de l'extension. Son travail n'est pas reconnu immédiatement car les mathématiciens ne mesurent pas à l'époque l'ampleur de ses découvertes. Cela peut s'expliquer par le fait que sa théorie est très formelle bien qu'elle se fonde sur une certaine intuition de la géométrie (Dorier, 1997). Pourtant, son rôle est central dans l'élaboration de l'algèbre linéaire (Dorier, 1990). Il y développe tous les grands concepts du calcul vectoriel et son approche ressemble à celle utilisée dans la théorie des espaces vectoriels actuels (Ba, ibid.). En 1862, il définit formellement les notions d'indépendance linéaire, de base et de dimension (Dorier, ibid.). Cependant, ces travaux ne prennent réellement de l'ampleur qu'en 1888 lorsque Peano, un des fondateurs de la logique mathématique, axiomatise les espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

En 1932, l'analyse fonctionnelle a permis de faire émerger la notion de dualité et d'étendre les résultats d'algèbre linéaire, jusqu'alors en dimension finie, à une dimension infinie. De ce fait, l'algèbre linéaire moderne est née après 1930 et cette nouvelle branche des mathématiques « rassemblera autour de la théorie des déterminants et de celle des matrices, les principaux résultats sur les espaces vectoriels vus comme des ensembles de n-uplets de nombres » (Dorier, ibid., p. 61).

Ces faits historiques précédents montrent que la géométrie analytique joue un rôle important dans l'émergence et le développement du calcul vectoriel. Au contraire, il est minimisé dans le développement de la théorie des espaces vectoriels. Ainsi, « si le cadre géométrique a joué un rôle essentiel dans la genèse de l'algèbre linéaire, il ne peut

se substituer au cadre des équations linéaires pour une part essentielle du développement des concepts élémentaires de la théorie » (Dorier, 2000a, p. 41). Cependant, Dorier (ibid.) a remarqué plusieurs fois dans son étude historique de l'émergence des notions élémentaires d'algèbre linéaire que le cadre géométrique constitue une source importante de représentations visuelles et d'intuitions pour les notions linéaires. Il ajoute :

> « Dans ce contexte, ce n'est pas seulement la géométrie vectorielle qui est en jeu mais aussi la géométrie analytique. En particulier, la question de la représentation des droites ou des plans affines et vectoriels par des équations cartésiennes et paramétriques peut être un point d'appui pour illustrer des concepts tels que les générateurs, la dualité, et aborder les questions d'intersection de sous-espace. Cependant, dans le cadre de l'algèbre linéaire, il est nécessaire de pouvoir dépasser la dimension trois. Ainsi, le cadre des équations linéaires vient ici s'insérer dans un cadre géométrique élargi, ce qui constitue un contexte riche pour élaborer les concepts d'algèbre linéaire » (Dorier, ibid., p.54).

Ainsi, la géométrie analytique augmentée de l'étude des systèmes linéaires, dont nous avons vu qu'elle permet d'introduire la notion de rang, peut aider à mieux comprendre les notions d'algèbre linéaire. C'est pourquoi il nous semble important que les notions de droites et de plans soient conceptualisées par les étudiants de BAB1 afin d'aborder plus facilement la suite de leur cursus. Nous avons désormais une vision assez complète des pratiques mathématiques en géométrie et en algèbre avant Descartes et nous avons une idée claire de l'impact de l'émergence de la géométrie analytique dans le calcul vectoriel et l'algèbre linéaire. Nous pouvons donc revenir sur notre étude historique et la mettre en lien avec notre étude cognitive réalisée au chapitre II.

10 Bilan de l'étude historique

Dans ce chapitre, nous nous sommes placée du côté du savoir savant et nous avons mené une étude de la genèse historique de la géométrie analytique. Un de nos objectifs est de déterminer les spécificités des notions de droites et de plans dans l'espace. En particulier, nous voulons caractériser l'aspect sémantique des équations et l'aspect généraliseur de ces notions. C'est pourquoi nous avons analysé d'une part l'introduction de la géométrie analytique dans le plan par Descartes et la façon dont les équations de droites et des plans sont étendues à l'espace. Nous présentons désormais les premières conclusions de cette étude historique.

10.1 Un panorama de l'étude menée

Un des premiers résultats de cette étude concerne les rapports entretenus par l'algèbre et la géométrie jusqu'en 1637. L'histoire montre que ces deux domaines sont apparus et se sont développés dès la préhistoire. La géométrie est celle d'Euclide et l'algèbre se restreint à la résolution d'équations et de systèmes d'équations. Dans les travaux d'Euclide, les objets sont définis de façon descriptive et les raisonnements es-

sentiellement basés sur un dessin bien fait se font en langue naturelle. Il n'est d'ailleurs pas rare de trouver des preuves se limitant à une construction géométrique. Cela se marque particulièrement dans les travaux de Pappus dans lesquels résoudre un problème géométrique revient uniquement à trouver une bonne construction du problème. L'importance de la construction est telle qu'elle n'est généralement pas associée à des commentaires. C'est au lecteur de puiser dans ses connaissances de géomètre pour comprendre les constructions réalisées. Du côté de l'algèbre, bien que les équations ne soient pas définies comme un objet mathématique, des résolutions d'équations du premier et du deuxième degrés apparaissent dans les travaux d'Euclide. Les méthodes utilisées sont essentiellement géométriques et rhétoriques. L'apport de la géométrie dans les travaux des algébristes est important. À partir du IX^{e} siècle, les équations sont considérées comme des objets de l'algèbre et des méthodes de susbtitution, voire de fausse position apparaissent. Ainsi, jusqu'à la fin du XVI^{e} siècle, la géométrie et l'algèbre sont deux domaines bien distincts. Ils sont unifiés pour la première fois dans l'algèbre nouvelle de Viète. L'objectif de cette nouvelle algèbre est de faciliter la résolution des problèmes géométriques. Pour ce faire, la méthode à suivre est composée de trois étapes. La première (Zététique) consiste à traduire les problèmes géométriques en équation. Viète décide alors d'introduire en algèbre les lettres que la géométrie emploie depuis longtemps. La deuxième étape (Poristique) demande de résoudre les équations avec les méthodes algébriques de l'époque. Finalement, il justifie la solution ainsi trouvée en la construisant géométriquement lors de la troisième étape (Exégétique). De cette façon, Viète pense donner une méthode permettant de construire géométriquement les solutions de n'importe quelle équation. Il y a alors une volonté de géométrisation de l'algèbre qui apparait chez Viète. Ainsi, la géométrie, considérée comme la science reine, intervient en algèbre pour justifier les calculs effectués et les solutions trouvées.

Les notions de géométrie analytique apparaissent relativement tard dans l'histoire. D'un point de vue chronologique, la géométrie analytique plane émerge avec les travaux de Descartes et Fermat avant d'être étendue à l'espace à la fin du XVII^{e} siècle. La résolution du problème de Pappus y a joué un rôle important. En effet, Descartes, voulant aller plus loin dans sa résolution que les mathématiciens avant lui, a créé en 1637 une méthode pour résoudre le problème à n lignes. La méthode cartésienne consiste à convertir le problème géométrique en une équation algébrique qu'il faut résoudre (partie analytique) et ensuite de construire la solution géométrique du problème en s'appuyant sur la solution algébrique trouvée (partie synthétique). Ainsi, Descartes utilise l'algèbre pour résoudre des problèmes géométriques. Il y a plutôt une algébrisation de la géométrie. Grâce à cette méthode, il prouve que la solution trouvée par Euclide et Pappus pour les problèmes à 3 et 4 lignes est correcte et il fournit la solution des problèmes à 5 et 6 lignes. Il généralise ensuite son argument pour résoudre les problèmes à n lignes. Pour ce faire, il se fixe un repère et décrit les droites du problème par des équations algébriques. Les principaux outils utilisés sont les propriétés euclidiennes des triangles rectangles et des triangles semblables. Ainsi, Descartes s'appuie sur les connaissances géométriques connues depuis longtemps pour introduire le nouveau. Les travaux de Monge ont permis d'étendre la méthode cartésienne à l'espace en considérant trois variables et trois axes orthogonaux. Les coordonnées sont également introduites ; chaque

coordonnée représente la distance d'un point aux plans de coordonnées. Nous avons montré au point 8 comment les équations de droites et de plans dans l'espace sont déterminées. Il s'agit, tout comme dans le plan, de décrire les coordonnées d'un point quelconque M de la droite ou du plan. L'objectif est donc le même dans le plan et dans l'espace. Cependant, au niveau des outils utilisés dans l'espace, s'ajoutent les projections orthogonales. De ce fait, la méthode consiste à projeter les objets dans les plans de coordonnées et ensuite à utiliser la même démarche que dans le plan. L'émergence de la géométrie analytique a duré un peu plus d'un siècle et ne concerne jusqu'à présent uniquement les équations cartésiennes des courbes.

L'histoire montre également une préoccupation principale des mathématiciens à rendre légitime les constructions géométriques réalisées. Cette question de la légitimité des procédures de constructions se pose dans les travaux de Pappus. Cela l'amène à définir une classification des problèmes et à préciser les courbes autorisées pour construire exactement leurs solutions géométriques. Il propose donc trois classes de problèmes : les plans, les solides et les linéaires. Il explique que les problèmes plans sont tous ceux dont la résolution se cantonne à l'utilisation des droites et des cercles. Les problèmes solides peuvent être résolus avec les coniques. La classe linéaire regroupe tous les problèmes dont la construction demande des courbes plus complexes. Cette classification est utilisée jusqu'à la fin du XVI^{e} siècle. Avec l'algèbre de Viète, une nouvelle classification des problèmes apparait. Il propose de classer les problèmes en fonction du degré des équations obtenues par la Zététique. De ce fait, deux classes de problèmes sont définies : les problèmes dont les équations sont quadratiques et les problèmes dont les équations ont des degrés plus haut. Or, l'inconvénient majeur de cette classification est que certains problèmes peuvent être résolus en utilisant des courbes dont les équations ont des degrés inférieurs à celui du problème. Pour pallier cela, Viète propose de résoudre tous les types de problèmes avec la méthode neusis. Quelques années plus tard, Descartes se rend compte de la complexité que peut avoir la partie synthétique de sa méthode. Cela le pousse à définir deux critères : le critère d'acceptabilité et le critère de simplicité. Il explique alors que seules les courbes possédant une équation algébrique irréductible pouvaient être utilisées dans la construction des problèmes. S'ensuit une nouvelle classification des problèmes géométriques en fonction du degré des équations. Ainsi, les problèmes plans sont construits avec les équations du premier et du deuxième degrés, les problèmes solides avec les équations du troisième et du quatrième degrés et les problèmes linéaires avec des équations de plus haut degré. Descartes donne alors des méthodes pour rendre les équations algébriques irréductibles. Cette nouvelle classification résout la question de la légitimité des courbes utilisées dans les constructions géométriques.

L'apport de la géométrie analytique dans l'histoire des mathématiques est conséquent car elle a eu un grand succès auprès des mathématiciens de l'époque. Cependant, plusieurs critiques ont été formulées : beaucoup d'équations et de notations dans les raisonnements, perte du côté intuitif et visuel du problème géométrique. Ces deux critiques ont fait l'objet de nombreux travaux dans le courant du XVIII^{e} et XIX^{e} siècle. C'est pourquoi notre travail s'est élargi à l'émergence des notions d'algèbre linéaire.

Leibniz en 1679 veut créer une méthode dans laquelle la méthode analytique de Descartes serait combinée à une méthode synthétique permettant ainsi de rendre compte des aspects géométriques du problème. Cependant, il n'y arrive pas et il faut attendre 1818 pour que Möbius introduise le calcul barycentrique dans le plan. Nous avons vu que cette méthode permet de décrire les droites dans le plan et le plan lui-même comme des ensembles de barycentres de deux ou trois points. Nous sommes ici en présence du point de vue paramétrique dans le cadre de la géométrie vectorielle bien que les vecteurs ne soient pas encore définis. Le mot vecteur est introduit par Hamilton en 1843 dans ses travaux sur les quaternions, quantités généralisant les complexes à l'espace. Les travaux de Cayley en 1894 ont permis d'étendre les vecteurs et les opérations vectorielles pour un espace à n dimensions. Une théorie des espaces vectoriels en dimension finie est axiomatisée par Peano en 1888 sur la base des résultats déterminés par Grassmann. L'analyse fonctionnelle élargit ces résultats à une dimension infinie.

L'étude des équations et des systèmes d'équations linéaires et en particulier leur résolution a intéressé de nombreux mathématiciens à la suite de Descartes. Il faut attendre la théorie des déterminants par Cramer en 1750 pour que les systèmes étudiés soient indéterminés et que l'intérêt se porte sur les conditions pour qu'un ensemble de solutions existe. Cette étude de l'ensemble des solutions amène Frobenius à définir la notion de rang d'un système en 1879. La genèse du rang s'est donc déroulée sur plus d'un siècle et est fondamentale pour l'émergence du point de vue paramétrique dans le cadre de la géométrie analytique. Finalement, l'algèbre linéaire naît de l'étude des systèmes d'équations linéaires et de la théorie axiomatique des espaces vectoriels.

L'histoire retracée montre également que de nombreuses notions, qui n'appartiennent pas au domaine de la géométrie analytique, ont joué un rôle essentiel dans l'émergence de certaines de ses notions. C'est par exemple le cas des nombres complexes et des quaternions qui ont permis d'introduire la notion de vecteur et ainsi de considérer les équations et les solutions des systèmes d'équations comme des n-uplets. Or, nous avons vu que c'est principalement cette considération qui est à l'origine de la notion de rang, essentielle pour articuler les points de vue cartésien et paramétrique. Nous avons également montré que la géométrie analytique nourrit certains questionnements engendrant à leur tour des nouvelles notions comme la théorie des déterminants et les fonctions.

Cette étude historique nous amène à pouvoir préciser les spécificités des notions de droites et de plans dans l'espace.

10.2 Les spécificités des notions de géométrie analytique

Le chapitre II a mis en évidence des difficultés des étudiants liées à l'interprétation géométrique des objets (aspect sémantique des équations) et liées au caractére généralisateur des notions de droites et de plans dans l'espace. Notre étude historique permet de caractériser les spécificités des notions et d'expliquer d'où pourraient venir certaines difficultés repérées chez nos étudiants.

Avant 1637, les cadres de la géométrie synthétique et de l'algèbre se développent de façon relativement distincte. Pour répondre à un problème géométrique qui n'avait pas

encore été résolu, Descartes unifie les deux domaines de telle sorte que l'algèbre est au service de la géométrie synthétique. Les lettres utilisées jusqu'ici en géométrie servent alors à écrire des équations. La géométrie analytique unifie alors des méthodes propres aux domaines algébriques et géométriques tout en apportant un nouveau formalisme algébrique. Nous en déduisons donc que la géométrie analytique apparait historiquement comme la réponse à un problème. Nous constatons dans les travaux étudiés que la géométrie analytique a pris le pas sur la géométrie synthétique. Les systèmes d'équations linéaires et la théorie des espaces vectoriels s'appuient sur la géométrie analytique. C'est d'ailleurs une critique qui est formulée à plusieurs reprises dans l'histoire des mathématiques. Une solution est proposée par Leibniz, consistant à mélanger les deux cadres géométriques. La géométrie vectorielle permettrait alors de mettre en relation la géométrie synthétique et la géométrie analytique.

En ce qui concerne spécifiquement la géométrie analytique dans l'espace, elle est apparue comme une extension naturelle de la géométrie analytique plane. Le nombre d'axes et de variables passent de deux à trois. La méthode cartésienne utilisée dans le plan est identique à l'espace. L'aspect généralisateur apparait donc ici. Cependant, le point de vue cartésien n'est pas étendu à l'espace sans accident. En effet, nous avons montré que l'outil des projections orthogonales est essentiel pour expliquer que dans l'espace, deux équations sont nécessaires pour décrire une droite contrairement au plan. De plus, le point de vue paramétrique dans le cadre de la géométre analytique apparait une fois que le rang est défini. Or, celui-ci n'émerge que de l'étude des systèmes de n équations à m inconnues ($n < m$). Il est alors possible que les équations paramétriques dans le plan et dans l'espace apparaissent comme des particularisations des résultats définis en dimension n. Nous ne pouvons attester que le point de vue paramétrique dans ce cadre a été historiquement étendu du plan à l'espace. Le point de vue paramétrique dans le cadre de la géométrie vectorielle plane est quant à lui généralisé sans accident à l'espace puisque c'est le cas du calcul barycentrique. L'histoire montre également que le caractère généralisateur est très développé dans les travaux succédant à Descartes. Il y a une extension des complexes à l'espace, des triplets aux n-uplets, des systèmes linéaires de 2 équations à 2 inconnues à des systèmes linéaires de n équations à m inconnues, de la théorie des espaces vectoriels en dimension finie à une dimension infinie, ... Ainsi, l'aspect généralisateur est moins évident pour les notions de géométrie analytique dans l'espace que pour les domaines étudiés à sa suite.

La chronologie historique montre que le point de vue cartésien est le premier à avoir émergé. Vient ensuite le point de vue paramétrique dans le cadre de la géométrie vectorielle et finalement dans le cadre de la géométrie analytique. Au sein du cours de Mathématiques élémentaires, analysé au chapitre II, l'ordre dans lequel les points de vue émergent est similaire mais ne passe pas par le cadre de la géométrie vectorielle. Il est possible que cela explique les difficultés des étudiants à articuler les points de vue entre eux. De plus, le point de vue paramétrique en géométrie analytique n'apparait que lorsque les mathématiciens se sont intéressés à l'ensemble des solutions des systèmes indéterminés et en particulier à ses conditions d'existence. Dans le cours étudié au chapitre II, le point de vue paramétrique est donné sans que les étudiants aient à réaliser un tel travail. Puisqu'ils n'ont probablement dû à aucun moment s'interroger sur l'en-

semble des solutions d'un système, leurs difficultés à interpréter géométriquement les ensembles de points peuvent en partie s'expliquer. De plus, la notion de rang est primordiale à l'articulation des points de vue. Il est possible alors que l'absence de cette notion, comme c'est le cas dans le cours de Mathématiques élémentaires, peut être un obstacle à la bonne compréhension du point de vue paramétrique et de son articulation avec le point de vue cartésien.

En ce qui concerne la dimension outil-objet, nous déduisons des travaux d'Euclide que les droites et les plans sont définis comme des objets et considérés comme des outils pour résoudre des problèmes appartenant au cadre de la géométrie synthétique. En ce qui concerne les équations, nous n'en n'avons pas trouvé de réelle définition, bien qu'elles soient définies en tant qu'objet de l'algèbre. Elles interviennent dans leur dimension outil lorsque l'algèbre est utilisée pour résoudre des problèmes géométriques. Finalement, les équations sont à nouveau étudiées en tant qu'objet dans l'étude des systèmes linéaires. Les équations de droites et plans dans l'espace apparaissent dans leur dimension objet. Les travaux utilisés ici ne témoignent presque pas de leur dimension outil. Nous avons cependant relevé qu'elles sont utiles pour décrire les courbes et les surfaces de la géométrie différentielle par les droites tangentes et les plans tangents.

En conclusion, l'aspect généralisateur des notions de droites et de plans dans l'espace est tout autant présent dans l'histoire que dans le cours de Mathématiques élémentaires. Par contre, il est apparu que les notions de géométrie analytique unifient les domaines algébrique et géométrique en apportant un nouveau formalisme. Nous retenons également que les cadres de la géométrie synthétique et de la géométrie analytique sont relativement distincts et la géométrie vectorielle permettrait de les mettre en relation. Cela nous semble important pour conserver l'aspect sémantique des équations et donc leur interprétation géométrique. En ce qui concerne les points de vue, l'ordre dans lequel ils apparaissent semble différent de celui suivi dans l'enseignement, de part l'absence de la géométrie vectorielle. Cela peut avoir des conséquences sur leur articulation et expliquer certaines difficultés rencontrées par nos étudiants. La notion de rang, l'étude des solutions d'un système et la théorie des déterminants sont des éléments importants pour le développement du point de vue paramétrique. Nous allons voir que ces éléments sont au moins en partie absents de l'enseignement au chapitre IV.

10.3 Limites méthodologiques

Nous sommes bien consciente que notre travail reste non exhaustif. Notre lecture de l'histoire, bien qu'elle soit intéressante, est dirigée par nos besoins didactiques. Ainsi, en nous centrant sur les liens entre la géométrie analytique et l'algèbre linéaire pour faire émerger les différents points de vue, nous n'avons pas accordé d'attention aux travaux propres à la géométrie différentielle. Celle-ci aurait pu nous informer plus amplement sur la dimension outil des notions de droites et de plans dans l'espace. Cependant, nous avons choisi de ne pas nous y intéresser car nous visons l'enseignement des notions de droites et de plans dans l'espace dans l'enseignement secondaire. Il nous a alors semblé plus judicieux d'étudier l'émergence et les liens entre les différents points de vue.

Afin de compléter l'étude de la transposition didactique, nous analysons dans le chapitre suivant le savoir à enseigner grâce aux programmes de l'enseignement secondaire. Nous pourrons alors au chapitre V formuler notre question de recherche.

Chapitre IV

Les programmes de l'enseignement secondaire belge

Nous avons réalisé une étude cognitive au chapitre II et une étude historique et épistémologique au chapitre III sur les notions de droites et de plans dans l'espace. Il nous reste à compléter l'étude du relief sur ces notions par une analyse du savoir à enseigner. Notre objectif final étant de concevoir une séquence d'enseignement de ces notions pour l'enseignement secondaire, nous nous tournons vers les programmes scolaires. Cette analyse des recommandations institutionnelles permet de terminer l'étude de la transposition didactique des notions de droites et de plans dans l'espace et ainsi de mettre en évidence les spécificités de ces notions du côté du savoir à enseigner.

1 Éléments méthodologiques

Notre objectif depuis le chapitre II est de préciser les spécificités des notions de droites et de plans dans l'espace. Nous nous sommes d'abord placée du côté du savoir enseigné et puis du côté du savoir savant. Nous complétons ces études, tout en gardant le même objectif, en nous plaçant désormais du côté du savoir à enseigner. Pour ce faire, nous réalisons une analyse des programmes de l'enseignement secondaire.

L'étude du savoir savant a permis de mettre en évidence les rapports entre les cadres de la géométrie synthétique et de la géométrie analytique. La mise en relation de ces deux cadres est importante pour que le côté visuel du problème géométrique ne soit pas perdu. C'est pourquoi nous cherchons dans les programmes les éventuels liens mis en évidence entre ces deux cadres géométriques. Afin d'obtenir des informations consistantes, nous nous sommes intéressée à l'ensemble des programmes pour l'enseignement secondaire. En Belgique, l'enseignement secondaire se déroule sur six années et est découpé en trois degrés. Le premier degré correspond à la première et la deuxième année, le deuxième degré à la troisième et la quatrième année, le troisième degré à la cinquième et la sixième année. Un programme est donné par la Fédération Wallonie-Bruxelles pour chaque degré de l'enseignement secondaire. Nous avons donc cherché dans ces trois programmes les rapports qu'entretiennent les cadres de la géométrie synthétique et de la géométrie analytique.

Les études cognitive et historique ont également montré l'importance de l'aspect sémantique des équations pour pouvoir les interpréter géométriquement. Nous ciblons alors dans les trois programmes le travail demandé sur les équations et leur interprétation géométrique. Nous pouvons ainsi déterminer si les équations sont définies à un moment donné de la scolarité. Nous nous concentrons ensuite sur le chapitre des droites et des plans dans l'espace. Nous nous intéressons aux notions présentes dans ce chapitre ainsi qu'aux registres et points de vue qui doivent être mis en jeu. Nous regardons également si un ordre d'introduction des points de vue est imposé et une articulation entre ceux-ci est recommandée. De plus, nous étudions le chapitre de géométrie analytique plane pour être capable de caractériser l'aspect généralisateur des notions de droites et de plans dans l'espace du côté du savoir à enseigner. Nos analyses précédentes ont aussi montré que la notion de rang d'un système d'équations et la théorie des déterminants ont été fondamentales dans l'émergence du point de vue paramétrique. De ce fait, nous cherchons dans les programmes des traces de celles-ci.

Il s'agit donc dans un premier temps de préciser la flexibilité cognitive demandée entre les cadres, les registres et les points de vue dans le savoir à enseigner. Nous pouvons également déterminer si les équations sont définies et si l'interprétation géométrique des équations et des ensembles de solutions est un des objectifs de l'enseignement secondaire belge. Ensuite, dans le but d'organiser les connaissances mathématiques à enseigner, nous utilisons l'outil des niveaux de conceptualisation [1] dont nous avons parlé au chapitre II. Cet outil nous aide à mieux comprendre les rapports entre ce qui est nouveau pour les élèves et ce qu'ils ont déjà travaillé et ainsi mieux apprécier le processus de conceptualisation élaboré pour enseigner les droites et les plans dans l'espace.

De nouveaux programmes sont entrés en vigueur ces trois dernières années pour le deuxième et le troisième degré. Puisque le public auquel nous nous sommes intéressée dans l'étude cognitive a suivi les programmes précédents, nous avons analysé à la fois ces anciens programmes et ceux actuels. Nous pouvons ainsi pointer les éventuelles différences. Celles-ci pouvant influencer (ou non) les pratiques en classe des enseignants, il nous a semblé important de réaliser une analyse comparative.

Nous analysons donc les programmes séparement pour ensuite comparer leurs injonctions. Nous les abordons de la façon suivante :

- une présentation générale des programmes ;
- une analyse des aspects ciblés par notre recherche ;
- un bilan sur la conceptualisation attendue.

1. Un niveau de conceptualisation est un domaine de travail spécifié par des fondements, un arsenal, des modes de raisonnement, des démarches, un niveau de rigueur et un corps de problèmes (Robert, 2003a).

Les programmes de l'enseignement secondaire belge s'inscrivent dans une appoche par compétences. Un décret gouvernemental fixe les compétences à atteindre à la fin du premier degré de l'enseignement secondaire et les compétences terminales pour les deux autres degrés [2]. Parmi les compétences à atteindre, il y a des compétences disciplinaires et des compétences transversales. Les compétences transversales sont listées au début de chaque programme. Les compétences disciplinaires, comme son nom l'indique, sont associées à la matière qui doit être étudiée. Ainsi, dans la présentation générale des programmes, nous revenons sur leurs objectifs principaux et sur les compétences transversales qui peuvent alimenter notre réflexion. Dans l'analyse des programmes, nous pointons la matière étudiée, les conseils méthodologiques associés et les compétences disciplinaires à développer. Nous terminons cette étude du savoir à enseigner en mettant en évidence les spécificités des notions de droites et de plans dans l'espace.

2 Les programmes avant 2018

Nous analysons les programmes pour les trois degrés de l'enseignement secondaire. Ceux du deuxième degré ne sont plus appliqués depuis 2016 et ceux du troisième degré depuis 2018.

2.1 Présentation générale des programmes

Nous ne revenons pas sur toutes les compétences transversales. Cependant, nous en avons sélectionné une en lien avec notre recherche. Dans les programmes du deuxième et du troisième degrés, la compétence « Traiter, argumenter, raisonner » est à développer. Il est entre autres précisé que les élèves doivent être capables de :

> « traduire une information d'un langage dans un autre, par exemple passer du langage courant au langage graphique ou algébrique et réciproquement » (Ministère de la Communauté française, 2000b, p. 8).

De ce fait, nous en déduisons que des conversions de registres doivent être travaillées avec les élèves. Cela peut nous aider à préciser dans l'analyse des programmes la flexibilité cognitive attendue des élèves.

Avant de rentrer à proprement parler dans l'analyse des programmes, nous nous sommes intéressée à leur introduction et en particulier leurs objectifs. Dans l'introduction du programme du premier degré, nous pouvons lire :

> « Le calcul algébrique, introduit au départ de situations géométriques (périmètres, aires, volumes, ...) ou numériques (suites de nombres, ...), permet de donner du sens aux symboles utilisés » (Ministère de la Communauté française, 2000a, p. 5).

2. Le socle de compétences pour le premier degré est disponible sur `http://www.enseignement.be/index.php?page=24737`. Les compétences terminales sont téléchargeables via `http://www.enseignement.be/index.php?page=25189&navi=296`.

L'introduction au calcul algébrique se fait notamment à partir de situations géométriques. Ainsi, tout comme dans l'histoire que nous avons retracée au chapitre III, c'est à partir de la géométrie que l'algèbre est introduite et que la résolution d'équations semble prendre tout son sens.

La géométrie occupe une place importante dans l'enseignement au vu des objectis du programme du deuxième degré. Il est dit :

> « La géométrie s'organise d'abord autour de quelques grands théorèmes : Thalès, Pythagore, les cas d'isométrie et de similitude des triangles. Le programme demande d'articuler les aspects numérique et géométrique de ces énoncés qui ont joué un rôle fondamental dans l'histoire des mathématiques. [...] Les outils vectoriels et analytiques introduisent des procédés calculatoires à l'intérieur de la géométrie. On s'en sert pour exprimer et démontrer des propriétés d'alignement, de parallélisme. [...] En troisième année, la géométrie se prête à des applications intéressantes dans l'espace pour lesquelles on utilise des propriétés du plan (après avoir choisi les "bons" plans de section) » (Ministère de la Communauté française, 2000b, p. 5).

Il y a dans cet extrait une allusion à l'histoire des mathématiques et en particulier à la mise en relation entre les aspects numériques et géométriques du théorème de Thalès, par exemple. Nous avons effectivement montré dans le chapitre III l'importance de la traduction des opérations arithmétiques en géométrie. Il y a aussi une algébrisation de la géométrie de la part des programmes puisque les calculs s'intègrent à la géométrie et servent à résoudre des problèmes géométriques. De plus, la démarche utilisée dans l'histoire pour déterminer des équations semble ici présente : un problème dans l'espace est restreint à un problème dans le plan. En effet, le programme mentionne la résolution de problèmes géométriques dans l'espace en se restreignant à un plan bien choisi. Nous pouvons donner comme exemple le calcul de la diagonale d'un cube qui se détermine en utilisant le théorème de Pythagore dans un triangle rectangle particulier.

Le programme du troisième degré mentionne quant à lui l'aspect cumulatif des mathématiques.

> « Aux premiers degrés, la géométrie s'est d'abord organisée autour de quelques grands théorèmes (Thalès, Pythagore, cas d'isométrie et de similitudes des triangles) en reliant les aspects numériques et géométriques. Les outils vectoriels et analytiques ont ensuite introduit des procédés de calcul à l'intérieur de la géométrie. Quelques constructions et recherches de lieux ont permis d'intégrer différentes matières. Au 3ème degré quelle que soit l'option, on utilise les acquis antérieurs. [...] Les notions de calcul vectoriel, y compris le produit scalaire, rencontrées en quatrième année sont étendues à l'espace et on utilise la géométrie analytique des droites et des plans. [...] Le calcul matriciel permet de manipuler de nombreuses informations géométriques, économiques ou autres. Avec le calcul vectoriel et le produit scalaire, il constitue une première approche de l'algèbre linéaire dont l'étude se poursuivra dans l'enseignement supérieur » (Ministère de la

Communauté française, 2000c, p. 6–7).

Il y a clairement une mise en réseau des notions antérieures de géométrie à celles du troisième degré, mais aussi avec celles de l'enseignement supérieur. De plus, l'aspect généralisateur de la géométrie vectorielle dans l'espace apparait clairement dans ce passage. Les notions de droites et de plans dans l'espace et le calcul matriciel sont étudiés au troisième degré.

À la lecture de ces objectifs, l'enseignement de la géométrie semble s'appuyer fortement sur l'histoire de la géométrie que nous avons retracée. Nous étudions maintenant la façon dont le savoir savant est découpé dans le savoir à enseigner.

2.2 Analyse des programmes

►► Premier degré

Dans le programme du premier degré, deux grands thèmes sont abordés : les nombres et la géométrie. Un plan relativement détaillé des notions abordées pour ces deux premières années est donné en annexe A. Bien que notre travail concerne des notions géométriques, nous nous sommes intéressée également aux notions liées à l'algèbre puisque nous voulons notamment étudier les liens entre l'algèbre et la géométrie dans l'enseignement. À plusieurs reprises, dans ce programme, il est conseillé d'introduire les nombres par une situation géométrique ou d'utiliser la géométrie pour donner du sens aux nombres, aux expressions et aux équations. Les allers-retours entre les deux cadres sont importants. Voici quelques extraits du programme montrant l'apport de la géométrie en algèbre et inversement.

• Déterminer le PGCD et le PPCM de deux nombres	✓ On introduira les notions de PGCD et de PPCM par des exemples concrets tels que rechercher : - le côté du plus grand carré qui quadrille un rectangle ; - la plus grande arête de cube qui remplit un parallélépipède ; - le plus petit carré qu'il est possible de former à partir de rectangles superposables ; - le plus petit cube construit avec des parallélépipèdes identiques

FIGURE IV.1 – Extrait du programme du premier degré - PGCD et PPCM (Ministère de la Communauté française, 2000a, p. 16).

• Calculer des périmètres et des aires.	✓ Cette matière permet : - de relier des notions géométriques à la représentation littérale des nombres ; - de représenter géométriquement le carré d'un nombre.

FIGURE IV.2 – Extrait du programme du premier degré - périmètres et aires (Ministère de la Communauté française, 2000a, p. 32).

Ces deux extraits montrent que certaines notions d'algèbre sont introduites à partir d'une analyse de situations géométriques ; d'autres notions de géométrie permettent de faire intervenir les nombres. Ainsi, certaines notions du premier degré permettent d'articuler les cadres algébrique et géométrique. Or, nous avons vu dans notre étude historique que les rapports entre ces deux cadres se résumaient à l'utilisation de la géométrie en algèbre. Il y a donc une première transformation entre le savoir savant et le savoir à enseigner.

Du côté de l'algèbre, les équations du premier degré à une inconnue sont introduites et résolues. Plusieurs éléments dans le programme semblent intéressants et sont en partie illustrés à la figure IV.3.

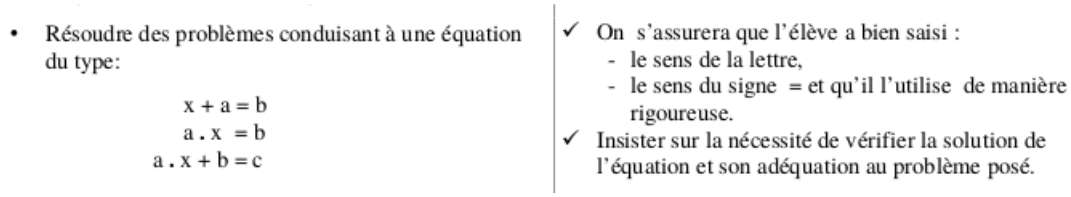
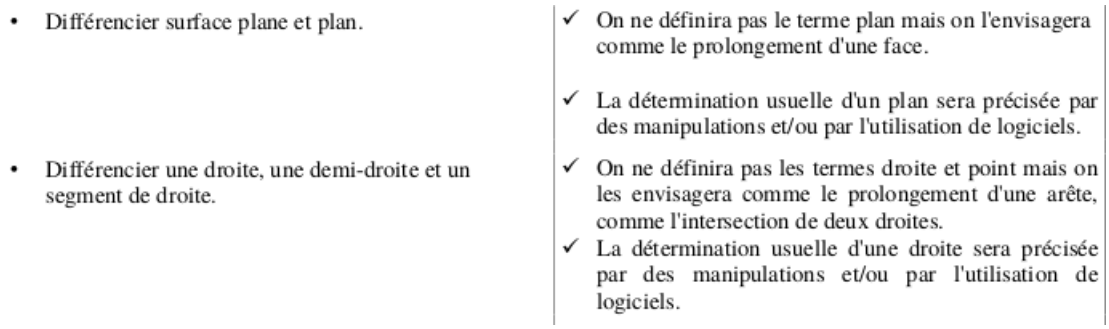


FIGURE IV.3 – Extrait du programme du premier degré - résolution de problèmes (Ministère de la Communauté française, 2000a, p. 14).

Les conseils méthodologiques indiquent qu'il faut donner du sens aux lettres et en particulier aux inconnues. Un peu plus loin, une distinction entre les variables et les inconnues est demandée. Cependant, nous ne trouvons aucun conseil quant à la distinction entre les coefficients et les variables. Bien qu'un travail sur le sens des équations semble amorcé par le programme, il n'est nulle part indiqué que la notion d'équation doit être définie. Ce qui ne veut pas dire que les enseignants ne la définissent pas en classe. La figure IV.3 met en évidence également certains aspects liés à la vérification des solutions des équations. De la sorte, il est possible que les élèves soient habitués dès la première année à vérifier leurs réponses et à les valider en fonction du contexte dans lequel ils sont amenés à résoudre l'équation. Par exemple, ils peuvent trouver une solution correcte d'une équation mais qui serait invalidée si jamais cette solution représentait une distance négative. L'aspect sémantique des équations semble travaillé à ce degré.

Du côté de la géométrie, ce sont principalement les solides, les figures planes, les transformations du plan et la notion de distance qui sont abordés. Il s'agit principalement de décrire les objets géométriques, de les classer et de les construire. Les notions appartiennent donc au cadre de la géométrie synthétique. Nous repérons que les notions de plans et de droites sont travaillées dès la première année. La figure IV.4 illustre les compétences à développer chez les élèves et les conseils méthodologiques proposés.



• Différencier surface plane et plan.	✓ On ne définira pas le terme plan mais on l'envisagera comme le prolongement d'une face. ✓ La détermination usuelle d'un plan sera précisée par des manipulations et/ou par l'utilisation de logiciels.
• Différencier une droite, une demi-droite et un segment de droite.	✓ On ne définira pas les termes droite et point mais on les envisagera comme le prolongement d'une arête, comme l'intersection de deux droites. ✓ La détermination usuelle d'une droite sera précisée par des manipulations et/ou par l'utilisation de logiciels.

FIGURE IV.4 – Extrait du programme du premier degré - figures géométriques élémentaires (Ministère de la Communauté française, 2000a, p. 26).

Les notions de droites et de plans ne sont apparemment pas définies mais sont considérées comme le prolongement d'une face et d'une arête d'un solide. Ainsi, un premier état formalisé (au sens de Pouyanne dans Pariès & al., 2007) de ces notions de l'espace apparait dans le cadre de la géométrie synthétique. Le programme demande ensuite d'aborder les positions relatives de deux droites, d'une droite et d'un plan dans le cadre de la géométrie synthétique. L'objectif principal est la construction d'objets en connaissant leur position relative par rapport à d'autres. Globalement, le travail géométrique au premier degré consiste à observer des objets géométriques, analyser leurs propriétés et effectuer diverses constructions. Le cadre géométrique de référence à ce niveau de l'enseignement est le cadre de la géométrie synthétique. Le savoir à enseigner semble suivre le même développement que le savoir savant.

Toutefois, des notions appartenant au cadre de la géométrie analytique apparaissent à deux endroits du programme. Le repère cartésien et les coordonnées de points du plan sont introduites en première. Seul le repérage de couples de nombres est travaillé. Ensuite, il est demandé de « décrire les effets de quelques transformations sur les coordonnées d'un point » (Ministère de la Communauté française, 2000a, p. 32). Par exemple, une symétrie orthogonale d'axe Oy envoie les coordonnées de la forme (x,y) sur celles de la forme $(-x,y)$. De ce fait, quelques isométries abordées en première dans le cadre de la géométrie synthétique doivent être décrites en deuxième année comme des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Or, la notion d'application linéaire ne sera jamais formalisée dans l'enseignement secondaire. Ainsi, le programme met en évidence des liens entre les cadres de la géométrie synthétique et analytique. Cependant, ceux-ci apparaissent de façon ponctuelle au sein d'un travail important dans le cadre de la géométrie synthétique ou mettent en jeu des notions pas encore formalisées à ce stade de l'enseignement.

►► Deuxième degré

Nous nous intéressons maintenant au programme du deuxième degré. Les notions abordées au sein de ce programme sont listées en annexe A. L'analyse, l'algèbre et la géométrie sont les trois domaines principalement travaillés. La notion d'équation de droite dans le plan n'apparait pas dans le domaine de la géométrie mais plutôt dans le domaine de l'analyse lors de l'étude des fonctions du premier degré. Ainsi, le cadre

dans lequel les équations de droites dans le plan sont introduites est très différent de l'histoire que nous avons retracée au chapitre III. Dans le programme en analyse, la notion de fonction de la forme $f(x) = ax$ et de droite d'équation $y = ax$ apparaissent dans un premier temps. Pour ces notions, il est conseillé d'associer les points du graphique de la fonction à la droite. De plus, il est recommandé d'effectuer cette démonstration en appliquant les cas de similitude des triangles. Ainsi, bien que les cadres soient différents, la méthode utilisée dans l'enseignement pour obtenir une équation de droite dans le plan est la même que celle de Descartes et Fermat. Cependant, les cas de similitude des triangles interviennent dans le contexte d'une démonstration. L'utilisation de cette méthode est donc différente. Ensuite, le programme demande d'introduire les fonctions de la forme $f(x) = ax + b$ et les droites d'équations $y = ax + b$ en appliquant une translation de la droite $y = ax$ de b unités vers le haut ou le bas en fonction de la valeur de b. Encore une fois, les outils utilisés dans l'enseignement sont assez différents de ceux repérés dans l'histoire. Finalement, les droites verticales et la forme canonique des équations de droites dans le plan sont abordées (figure IV.5).

	Droite d'équation $x = a$.
Dessiner la droite d'équation ax + by + c = 0 Savoir réduire cette équation à une des deux formes canoniques y = mx + p ou x = k.	Equation $ax + by + c = 0$.

FIGURE IV.5 – Extrait du programme du deuxième degré - fonctions (Ministère de la Communauté française, 2000b, p. 10).

La figure IV.5 montre que les équations de droites verticales font partie du chapitre des fonctions. Selon nous, ce choix peut s'expliquer de plusieurs façons. D'une part, il est important de donner un exemple de droites qui n'est pas une fonction du premier degré afin de mieux saisir la notion même de fonction. D'autre part, il est possible que cette deuxième forme d'équations de droites justifie l'introduction d'une équation générale afin de décrire par une seule équation toutes les droites du plan. La forme $ax + by = c$ serait alors introduite comme une généralisation des deux formes précédentes. Dans la suite du programme, il est demandé d'introduire le coefficient angulaire et d'étudier avec ce dernier la position relative de deux droites. C'est donc la forme $y = mx + p$ qui est employée pour l'analyse des positions relatives. L'introduction des équations de droites dans le plan montre que la forme $y = mx + p$ est plus présente que la forme $ax + by = c$. Nous pensons que cela peut expliquer en partie les difficultés repérées chez nos étudiants à reconnaître les équations de la forme $ax + by = c$ comme étant des droites dans le plan.

Du côté de l'algèbre, la résolution d'équations (premier et deuxième degrés) ainsi que des systèmes de deux équations à deux inconnues est abordée. Les extraits des programmes concernant les équations sont présentés aux figures IV.6 et IV.7.

Reconnaître si un nombre est ou n'est pas solution d'une équation. Résoudre algébriquement et graphiquement une équation du premier degré à une inconnue. Vérifier la solution d'une équation. Reconnaître ce que sont des équations impossibles et indéterminées.	Résolution algébrique d'une équation du premier degré à une inconnue. Interprétation graphique. Equations impossibles et indéterminées.

FIGURE IV.6 – Extrait du programme du deuxième degré - équations (Ministère de la Communauté française, ibid., p. 13).

L'extrait du programme à la figure IV.6 montre que la résolution des équations du premier degré à une inconnue doit pouvoir se faire à la fois algébriquement et graphiquement. Le conseil méthodologique associé à ce point est « L'interprétation graphique de $ax+b=0$ est l'occasion de rencontrer la notion de zéro de la fonction $y=ax+b$ » (Ministère de la Communauté française, ibid., p. 13). Nous en déduisons que la notion d'équation à cette étape de l'enseignement est très liée à la notion de fonction. Cela nous amène à penser qu'il est possible d'introduire une définition de l'objet « équation » en termes de fonctions comme Rogalski (2001) le propose. Cependant, les programmes assimilent les fonctions et les équations de leurs graphes. Il aurait été plus approprié de dire « la fonction $f(x)=ax+b$ » ou « la fonction dont le graphe a pour équation $y=ax+b$ ». Si cette distinction n'est pas prise en compte dans les classes, il sera peut être difficile pour les élèves de distinguer les deux notions. Le programme appuie une fois de plus sur la validité d'une solution et sur la vérification. D'ailleurs dans les conseils méthodologiques se trouve la phrase suivante : « On habituera les élèves à vérifier si la solution trouvée est exacte » (Ministère de la Communauté française, ibid., p. 14). Nous pensons que ce travail engendré sur les équations du premier degré peut amener les élèves à interpréter géométriquement les systèmes et leurs solutions.

Reconnaître si un couple de nombres est ou n'est pas solution d'un système de deux équations à deux inconnues. Par l'examen des coefficients, reconnaître si un système a une solution unique ou présente une impossibilité ou une indétermination. Résoudre algébriquement et graphiquement un système de deux équations à deux inconnues. Vérifier la solution d'un système et l'interpréter graphiquement.	Résolution algébrique et graphique d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues. Systèmes impossibles et indéterminés.

FIGURE IV.7 – Extrait du programme du deuxième degré - systèmes (Ministère de la Communauté française, ibid., p. 14).

Il est encore une fois demandé, à la figure IV.7, de résoudre algébriquement et graphiquement les systèmes de deux équations à deux inconnues. Cette compétence est selon nous importante et permet d'interpréter chaque équation du système comme

étant une droite et d'interpréter la résolution algébrique d'un système comme étant la détermination des éventuels points d'intersection des deux objets. De plus, il est aussi demandé de pouvoir déterminer à partir du système s'il a une solution unique ou s'il est impossible ou indéterminé. Une étude de l'ensemble des solutions des systèmes est donc présente, tout comme dans l'histoire que nous avons retracée. Or, cette étude ne se fait pas à la place de la résolution mais bien en complément de celle-ci comme pour la valider. Bien que la théorie des déterminants ne soit pas encore formalisée à cette étape de l'enseignement, elle est cachée dans l'analyse de la proportionnalité des coefficients. Il y a donc encore une fois utilisation d'une notion non encore formalisée. Finalement, l'interprétation géométrique des systèmes apparait pour valider et vérifier les solutions trouvées. De ce fait, la géométrie vient justifier les calculs algébriques. Il y a une géométrisation de l'algèbre.

Du côté de la géométrie, les théorèmes de Pythagore et de Thalès ainsi que les cas d'isométries et de similitudes des triangles sont abordés en troisième année. Il s'agit principalement d'identifier dans une situation géométrique les propriétés et les théorèmes à utiliser en vue de faire quelques démonstrations. Bien que le registre du dessin occupe une place encore très importante, l'activité géométrique est plutôt tournée vers la démonstration dans le registre algébrique et/ou de la langue naturelle. Le travail algébrique est amené dans le cadre de la géométrie. L'algébrisation de la géométrie commence peu à peu. Il y a aussi une différence notoire entre les pratiques attendues dans le cadre de la géométrie synthétique avant et pendant la troisième année. Au premier degré, la géométrie synthétique amène essentiellement des constructions et des mesures. Au deuxième degré, les constructions sont moins courantes et il s'agit d'observer des figures géométriques et d'en déduire certaines informations. La mesure n'est plus essentielle. Ainsi, les pratiques et les démarches évoluent au sein du cadre de la géométrie synthétique. L'algébrisation de la géométrie amène donc l'introduction en quatrième du calcul vectoriel. Une fois toutes les opérations vectorielles définies dans le plan, cet outil sert principalement à réaliser des démonstrations en géométrie. D'ailleurs, le langage vectoriel permet d'« exprimer de manière concise certaines propriétés » (Ministère de la Communauté française, ibid., p. 26) et de « démontrer des propriétés géométriques » (Ministère de la Communauté française, ibid., p. 26) telles que l'alignement de points et le parallélisme de droites. Le produit scalaire dans le plan est également défini et utilisé pour exprimer la perpendicularité de deux droites. Ainsi, le cadre de la géométrie vectorielle dans le plan apparait pour la première fois en quatrième comme une aide pour faciliter les preuves de la géométrie synthétique plane.

Dans le programme du deuxième degré se trouve un chapitre intitulé « Géométrie » dans lequel quelques lieux géométriques sont étudiés. Par exemple, le lieu de points situés à une distance donnée d'un point donné ou d'une droite donnée. Cela amène à écrire les équations cartésiennes des cercles, des paraboles et des médiatrices. C'est la première fois dans notre étude curriculaire que les objets géométriques sont décrits par des ensembles de points vérifiant une certaine propriété, principalement ici liée à la notion de distance. Le cadre de la géométrie analytique est donc en jeu et une interprétation des objets à partir d'un ensemble de points est travaillée. Jusqu'ici le cadre de la géométrie analytique n'est pas lié au cadre de la géométrie synthétique ou de la géométrie

vectorielle.

►► Troisième degré

Nous étudions désormais le programme du troisième degré. Quatre domaines mathématiques sont abordés : l'analyse, la géométrie, l'algèbre et les probabilités. Les notions qui nous intéressent dans ce travail n'apparaissent que dans les domaines algébrique et géométrique.

Du côté de l'algèbre, de nombreux types d'équations sont résolues : les équations trigonométriques, les équations du second degré à solutions complexes, les équations logarithmiques et exponentielles. Seule la résolution algébrique de ces différents types d'équations est une compétence à développer. Le calcul matriciel et la théorie des déterminants sont également introduits en cinquième année pour étudier des systèmes de m équations à n inconnues. Le programme précise néanmoins que dès que m et n dépassent trois, la résolution se fera à l'aide d'un logiciel. Un extrait du programme est présenté à la figure IV.8.

Utiliser les principes d'équivalence, les matrices, les déterminants pour résoudre des systèmes d'équations linéaires.	Résolution de systèmes $m \times n$.
Distinguer les systèmes ayant une infinité de solutions, une solution ou aucune solution.	Unicité de la solution d'un système de Cramer n x n. Discussion de systèmes $n \times n$ à 1 paramètre ($n \leq 3$).

FIGURE IV.8 – Extrait du programme du troisième degré - déterminant (Ministère de la Communauté française, 2000c, p. 13).

La théorie des déterminants est spécifiquement introduite pour résoudre les systèmes d'équations. Le calcul du déterminant de la matrice associée au système permet de déterminer si le système a une solution unique ou non. De ce fait, l'étude des systèmes reste entièrement algébrique. Cependant, il est conseillé que « la discussion d'un système d'équations sera interprétée géométriquement si m et n ne dépassent pas 3 » (Ministère de la Communauté française, ibid., p. 13). Or, ce chapitre est vu en cinquième et les équations cartésiennes des droites et des plans dans l'espace ne sont étudiées qu'en sixième. L'interprétation géométrique dans le cas où il y a trois inconnues n'est donc pas abordée en cinquième mais peut l'être pour les systèmes à deux inconnues. Dans ce cas, la géométrie vient justifier l'algèbre. Il y a une géométrisation de l'algèbre pour valider les solutions. Le développement des notions dans le programme semble donc aller dans le sens contraire à celui retracé par notre étude historique. En effet, nous avons montré au chapitre III que le point de départ de l'étude des systèmes linéaires et donc de la théorie des déterminants est la géométrie analytique. Or, dans le programme analysé, la théorie des déterminants et l'étude des systèmes 3x3 arrivent avant les notions de géométrie analytique. De plus, ce chapitre n'est pas réexploité avant la sixième. Nous nous questionnons donc sur son utilité à ce moment-là du cursus.

Beaucoup de notions de géométrie plane et spatiale sont abordées pendant le troisième degré. Le calcul vectoriel et le produit scalaire sont étendus à l'espace. L'aspect généralisateur de ces notions apparait de manière très explicite dans le programme

(voir annexe A). En cinquième, l'intérêt est porté sur les notions de géométrie synthétique dans l'espace. Les notions de perspective cavalière, de positions relatives de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans sont étudiées. De plus, certains problèmes de construction dans l'espace sont abordés comme les sections d'un cube ou d'un tétraèdre par un plan ou les points de percée d'une droite dans un cube ou un tétraèdre. Le programme demande également de caractériser les droites et les plans. Ainsi, les droites et les plans sont désormais caractérisés en fonction du nombre de points nécessaires pour les définir. Nous avons alors un deuxième état formalisé pour les notions de droites et de plans dans l'espace dans le cadre de la géométrie synthétique. De la sorte, quatre années se sont écoulées entre les deux formalisations de ces notions dans l'enseignement. Nous ne trouvons aucun conseil méthodologique permettant de lier ces deux états.

La géométrie analytique dans l'espace est un chapitre de sixième (figure IV.9).

Etablir les équations vectorielles, paramétriques ou cartésiennes d'une droite, d'un plan à partir d'éléments qui les déterminent.	Géométrie analytique des plans et des droites. Equations vectorielle(s), paramétrique(s), cartésienne(s) d'un plan, d'une droite.
Calculer analytiquement la distance entre deux points, d'un point à une droite, d'un point à un plan.	Distance entre deux points. Distance d'un point à une droite. Distance d'un point à un plan.

FIGURE IV.9 – Extrait du programme du troisième degré - géométrie analytique dans l'espace (Ministère de la Communauté française, ibid., p. 21).

Les points de vue paramétrique et cartésien sont introduits, comme le montre la figure IV.9. L'ordre entre les points de vue n'est *a priori* pas imposé et il n'est mentionné nulle part qu'il faut les articuler. Les conseils méthodologiques proposent de traiter « quelques problèmes d'incidence, de parallélisme, d'orthogonalité de droites, de plans faisant intervenir des calculs simples » (Ministère de la Communauté française, ibid., p. 21). Certains de ces problèmes peuvent amener à la résolution de systèmes d'équations. La théorie des déterminants est alors réexploitée dans ce chapitre. Il est également conseillé de pouvoir interpréter géométriquement ces problèmes, mais il n'est pas explicitement mentionné si c'est pour valider les solutions ou pour déterminer le nombre de solutions du système. Il est possible que l'interprétation géométrique soit utilisée et développée dans le but de valider les solutions des systèmes. En effet, depuis le début de l'enseignement secondaire, la vérification et la validité des solutions sont deux points importants travaillés en algèbre. C'est plutôt les déterminants qui permettent de connaître le nombre de solutions du système. Dans l'histoire que nous avons retracée, l'étude des systèmes a fait émerger la notion de rang d'un système et puis le point de vue paramétrique des équations puisque le rang permet de connaître le nombre de vecteurs et de paramètres nécessaires pour décrire les objets. Or, la notion de rang est totalement absente des programmes de l'enseignement secondaire. Pourtant le point de vue paramétrique est étudié. Nous nous demandons donc comment il peut être introduit et lié au point de vue cartésien. Aucun lien n'est explicite dans les programmes entre les cadres de la géométrie synthétique, de la géométrie vectorielle et de la géométrie analytique.

Bien que les liens soient évidents pour un mathématicien expert, tout se passe dans les programmes comme s'il s'agissait de trois domaines bien distincts ayant chacun leurs propres objets, méthodes et raisonnements.

Nous sommes maintenant capables de déduire de cette analyse certaines spécificités du savoir à enseigner.

2.3 Bilan

Nous avons pour objectif de caractériser à la fois les spécificités des notions du côté du savoir à enseigner mais aussi de préciser la conceptualisation des notions de droites et de plans dans l'espace attendue chez les élèves. Pour cela, nous avons analysé les programmes qui sont restés en vigueur jusqu'en 2016 pour chaque degré de l'enseignement secondaire belge.

Notre étude révèle que les cadres de la géométrie synthétique, de la géométrie vectorielle et de la géométrie analytique sont travaillés tout au long de l'enseignement secondaire. Nous constatons également qu'ils n'apparaissent pas dans le même ordre que dans notre étude historique. En effet, l'histoire retracée dans le chapitre III montre que la géométrie synthétique est apparue en premier. La géométrie analytique est née suite à l'unification des domaines géométrique et algébrique. La géométrie vectorielle émerge en dernier lieu. Or, dans les programmes, la géométrie synthétique intervient à chaque degré (première, deuxième, troisième, quatrième) ; la géométrie vectorielle est abordée en quatrième et en cinquième ; la géométrie analytique n'apparait clairement qu'en sixième. Ainsi, les cadres géométriques peuvent se juxtaposer. Ce choix des programmes de modifier l'ordre dans lequel les cadres apparaissent peut s'expliquer par le fait que la géométrie vectorielle lie efficacement la géométrie synthétique à la géométrie analytique. Cela a déjà été relevé dans notre étude historique. Pourtant, les liens entre les cadres géométriques ne sont que peu voire pas mis en avant dans les programmes. Le calcul vectoriel survient pour faciliter les démonstrations de géométrie synthétique et est utilisé pour décrire les droites et les plans dans le point de vue paramétrique, mais à aucun moment, dans les compétences à développer ou dans les conseils méthodologiques, il n'est indiqué qu'un jeu entre les cadres doit être travaillé. Selon nous, ce manque de liens peut amener, tout comme dans l'histoire, les élèves à perdre le côté visuel du problème lorsqu'ils vont aborder la géométrie analytique.

La géométrie analytique plane émerge dans le cadre des fonctions en troisième année. Historiquement, c'est de l'étude de la géométrie analytique plane que Leibniz définit les fonctions. L'enseignement prend alors le contre-pied de l'histoire. De plus, ce domaine n'émerge pas dans l'enseignement comme une algébrisation de la géométrie synthétique. De ce fait, la géométrie analytique plane n'apparait pas dans ses aspects unificateur et formalisateur. Ce choix effectué dans les programmes amène selon nous des avantages et des inconvénients. En effet, nous pensons qu'il est alors possible de définir formellement la notion d'équation comme Rogalski (2001) le propose. Cependant, ce choix peut également expliquer une des difficultés des étudiants. Puisque les équations de droites sont étudiées dans le contexte des fonctions, la forme $y = mx + p$

est alors plus travaillée que la forme $ax + by = c$. Cela contribue certainement à expliquer la difficulté relevée chez nos étudiants à décrire une droite du plan à partir de la deuxième forme. Ce choix implique aussi la mise en jeu du point de vue cartésien. Le point de vue paramétrique pour les droites dans le plan n'est pas développé dans ce chapitre.

L'analyse des programmes révèle que la notion d'équation n'est jamais explicitement définie bien qu'elle soit utilisée à de nombreuses reprises et dans des contextes différents. En effet, tout au long de l'enseignement secondaire, les élèves apprennent à résoudre algébriquement des équations du premier, du deuxième, du troisième, voire du quatrième degré, des équations trigonométriques, des équations logarithmiques et exponentielles, des équations à solutions complexes. Cela explique certainement pourquoi, face à une équation en géométrie analytique, les étudiants ont souvent le réflexe d'essayer de résoudre l'équation et non de décrire géométriquement l'objet associé. Pourtant, la résolution graphique des équations doit être une compétence à développer. Cependant, nous ne la trouvons que pour les trois premières années du secondaire. En outre, il est souvent conseillé d'interpréter géométriquement les équations et les solutions des systèmes d'équations mais cela apparait principalement comme une aide pour vérifier et valider les solutions et non comme une compétence nécessaire à développer. En ce qui concerne l'interprétation géométrique des ensembles de points, elle peut être abordée par l'étude de quelques lieux géométriques bien que la théorie des ensembles soit absente des programmes. Cela peut expliquer en partie les difficultés rencontrées par nos étudiants à interpréter géométriquement les équations et les ensembles de points. Une étude du travail effectivement réalisé dans les classes permettrait de confirmer (ou non) cette hypothèse.

La géométrie analytique dans l'espace est travaillée en sixième. Dans ce chapitre, il est demandé d'introduire les équations selon le point de vue paramétrique (en géométrie vectorielle et analytique) et cartésien. Cependant, le programme ne précise pas comment les articuler. L'étude des positions relatives des droites et des plans amène à devoir résoudre des systèmes de 3 équations à 3 inconnues. Notre analyse montre que la théorie des déterminants est spécifiquement introduite pour résoudre ces systèmes. En outre, l'interprétation géométrique des problèmes d'incidences est conseillée à la fois dans le chapitre de géométrie analytique dans l'espace et dans le chapitre sur les systèmes d'équations. Or, les systèmes sont étudiés en cinquième et la géométrie analytique dans l'espace en sixième. Il est donc possible que l'interprétation géométrique des systèmes 3x3 ne soit pas travaillée avant la sixième. Notre analyse curriculaire révèle que l'aspect généralisateur des notions de droites et de plans dans l'espace est beaucoup moins marqué que dans notre étude cognitive. En effet, la géométrie analytique dans l'espace n'apparait pas comme une extension de la géométrie analytique plane. Cette dernière se résumant aux équations cartésiennes de la forme $y = mx + p$ dans le cadre des fonctions. Il y a non seulement une durée de trois ans qui s'écoule entre les deux chapitres mais aussi un changement de domaine entre l'analyse et la géométrie à effectuer pour étendre le point de vue cartésien. Il se peut donc qu'il ne soit pas introduit dans l'espace comme une extension du point de vue dans le plan. De plus, le point de vue paramétrique est totalement absent des programmes pour la géométrie analytique plane. Il ne peut donc

être étendu à l'espace. Par contre, le programme mentionne explicitement l'extension du calcul vectoriel entre le plan et l'espace. L'alignement de points dans le plan et dans l'espace est traduit dans le cadre de la géométrie vectorielle. De ce fait, le point de vue paramétrique en géométrie vectorielle s'étend du plan à l'espace. Notre étude historique révèle que l'émergence du point de vue paramétrique et son articulation avec le point de vue cartésien ne peuvent se faire que lorsque la notion de rang d'un système est introduite. Or, cette notion est absente des programmes de l'enseignement secondaire. Cela peut certainement expliquer les difficultés des étudiants à articuler les points de vue et à comprendre combien de vecteurs et de paramètres sont nécessaires pour décrire les objets.

L'étude curriculaire montre qu'il y a deux niveaux de conceptualisation en géométrie dans l'enseignement secondaire. Nous sommes arrivée aux mêmes conclusions que Robert (2003a) lorsqu'elle a analysé l'enseignement au collège et au lycée en France. Nous reprenons alors le vocabulaire qu'elle a introduit. Les deux niveaux identifiés sont la géométrie « à la Euclide » et la géométrie affine et affine-euclidienne. Robert (ibid.) précise les fondements de chacun des niveaux. Pour le premier niveau, les fondements sont principalement ceux d'Euclide. Nous avons montré dans l'étude historique que les définitions proposées sont peu rigoureuses, que les axiomes sont admis sans être prouvés et que les preuves se font essentiellement en langage rhétorique et où parfois la construction d'un dessin exact suffit. Les fondements de ce premier niveau ont été complétés pour qu'il soit enseigné par l'utilisation des nombres réels et des transformations du plan et de l'espace. Notre analyse du programme montre que ce niveau de conceptualisation couvre les trois premières années de l'enseignement secondaire belge et concerne également un chapitre de cinquième. Ainsi, les démarches associées à ce niveau consistent à observer un dessin, effectuer des constructions, classer des solides, comparer des figures en termes de longueurs, d'aires et d'angles et utiliser les cas des isométries et des similitudes des triangles. Le travail mathématique dans ce niveau de conceptualisation peut se faire dans le cadre de la géométrie synthétique (avec ou sans mesure) et dans plusieurs registres (algèbrique, dessin, langue naturelle). Le deuxième niveau de conceptualisation a comme fondements tous ceux de l'algèbre linéaire en dimension finie (Robert, ibid.). Notre analyse des programmes révèle que ce niveau n'est que peu développé dans l'enseignement secondaire belge. Les démarches associées sont principalement celles de la géométrie vectorielle et de la géométrie analytique. Pariès et Robert (2009) expliquent que ce niveau ne peut apparaitre que de façon subreptice au lycée parce que la notion d'espace vectoriel n'y est pas abordée. Ce deuxième niveau couvre alors les trois dernières années de l'enseignement secondaire belge. Le passage entre le premier niveau et le second est flou. Il arrive même qu'ils se juxtaposent comme en cinquième année où le calcul vectoriel et la géométrie synthétique dans l'espace sont étudiés. Les niveaux de conceptualisation permettent de bien mettre en évidence la différence significative entre leurs fondements, leurs démarches et le niveau de rigueur qui est attendu. De ce fait, il peut être difficile pour les élèves de développer une flexibilité cognitive suffisante en géométrie.

À ce stade du travail, nous avons désormais une meilleure idée des spécificités des notions de droites et de plans dans l'espace du côté du savoir à enseigner. Le savoir

géométrique est très découpé dans les programmes avant 2018. Le niveau de conceptualisation « à la Euclide » est celui le plus développé dans le cursus scolaire. Or, pour conceptualiser les notions de droites et de plans dans l'espace, notions du niveau de conceptualisation de la géométrie affine et affine-euclidienne, les élèves doivent changer d'arsenal, de démarches et de niveau de rigueur. En effet, l'observation d'un dessin ne suffit plus à prouver quoique ce soit. Ces modifications importantes semblent laissées à la charge des élèves puisque le programme ne permet pas de travailler sur le passage du premier au deuxième niveau. En outre, nous savons qu'il est difficile pour les élèves de passer d'une justification basée sur le « vu » [3] à une justification basée sur le « su » (Bridoux & Nihoul, 2015). De ce fait, la flexibilité cognitive est importante pour effectuer ce changement de niveau de conceptualisation. De plus, notre étude cognitive montre qu'une flexibilité supplémentaire doit être développée chez les élèves entre les cadres, les registres et les points de vue. Notre analyse des programmes montre qu'aucun travail n'est demandé dans ce sens pour les notions de droites et de plans dans l'espace. Le travail réalisé dans ce chapitre est essentiellement algébrique et l'interprétation géométrique n'est que secondaire. Elle vient en aide aux élèves pour vérifier et valider les solutions d'un système. Nous en déduisons qu'elle n'est pas essentielle dans la démarche des élèves et qu'il se peut qu'elle passe à la trappe au vu de l'importance de la résolution des équations dans l'enseignement. Cela peut en partie expliquer le manque de sens accordé par les étudiants aux équations. De plus, au vu de la place minime qu'occupent les lieux géométriques dans l'enseignement, il est possible que l'interprétation géométrique des ensembles de points ne soit pas développée. Finalement, nous avons mis en évidence dans cette analyse curriculaire que la conceptualisation attendue des élèves pour les notions de droites et de plans dans l'espace à la fin de la sixième se résume à décrire les objets par des équations et à être capable de résoudre des systèmes d'équations. Elle est donc bien loin de la conceptualisation attendue chez nos étudiants en début de BAB1. Ceci peut sans doute expliquer beaucoup de leurs difficultés.

3 Les programmes actuels

Nous nous intéressons ici aux nouveaux programmes pour le deuxième et le troisième degré. Rappelons que le programme du premier degré n'a pas subi de changement.

3.1 Présentation générale des programmes

Nous revenons dans cette présentation sur les compétences transversales à développer dans le cours de mathématiques et sur les objectifs des programmes.

Parmi les compétences transversales, nous avons entre autres « Mathématique et logique », « Mathématique et communication » et « Mathématique et esprit critique ». Les extraits suivants illustrent ces trois objectifs.

3. Parzysz (1988) introduit ce vocabulaire. Le « vu » regroupe ce que l'objet géométrique donne à voir et le « su » concerne ce qu'on sait de l'objet géométrique.

> « Les concepts et méthodes de la logique ne font pas l'objet d'un cours spécifique, mais prennent naturellement leur place dans la plupart des unités » (Administration générale de l'Enseignement, 2015, p. 7).

> « La communication intervient lors de différentes étapes d'une démarche mathématique notamment dans la traduction du langage mathématique en un langage usuel et réciproquement » (Administration générale de l'Enseignement, ibid., p. 8).

Ainsi, la logique est désormais étudiée dans l'enseignement secondaire. Cependant, les connaissances en logique doivent être découpées et sont développées au gré des besoins dans les différents chapitres du cours. Puisque les notions de droites et de plans permettent de travailler certaines notions de logique comme les quantificateurs, la négation d'une proposition, les implications, etc., nous analysons dans ce chapitre si les programmes permettent un tel travail. Tout comme dans les anciens programmes, des conversions de registres doivent être travaillées avec les élèves.

> « Etre capable de raisonner, de justifier, de démontrer, d'argumenter est indispensable dans un monde en perpétuelle évolution. Dans une perspective d'apprentissage tout au long de la vie, il permet d'acquérir un esprit critique, une démarche scientifique et une faculté d'adaptation. L'élève sera régulièrement invité à les exercer lors d'activités telles que comparer diverses méthodes de résolution, [...], examiner la plausibilité d'une solution [...] » (Administration générale de l'Enseignement, ibid., p. 8).

Les nouveaux programmes semblent alors mettre l'accent sur le développement de l'esprit critique en analysant par exemple diverses méthodes de résolution pour un même exercice. Nous pensons que cela peut être fait dans le chapitre des notions de droites et de plans dans l'espace. En effet, ces notions nous semblent propices pour comparer les démarches de géométrie synthétique, vectorielle et analytique. Nous regardons alors si le programme demande un tel travail.

Contrairement aux programmes précédents, le rôle de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement de la géométrie n'est pas mis en avant dans leur introduction. Nous allons désormais analyser la façon dont le savoir savant est découpé dans ces nouveaux programmes.

3.2 Analyse des programmes

►► Deuxième degré

Un aperçu des notions vues dans le programme du deuxième degré est présenté en annexe A. Il y a peu de différence entre les programmes du côté de l'algèbre. Il s'agit encore de résoudre des équations du premier et du deuxième degrés ainsi que des systèmes de 2 équations à 2 inconnues. Cependant, l'interprétation géométrique de ces équations et la vérification/validation des solutions n'apparaissent plus. Pourtant,

nous avons vu au point précédent que la vérification des résultats est un des objectifs du programme.

Pour la troisième année, les notions de géométrie à étudier sont les mêmes que dans les anciens programmes. Les cas d'isométries et de similitudes des triangles, le théorème de Pythagore, le théorème de Thalès, etc. Par contre, les liens entre l'algèbre et la géométrie sont moins présents dans ce programme que dans les anciens. Seuls les nombres irrationnels sont introduits lors de l'étude des triangles rectangles. Ainsi, l'analyse de problèmes géométriques permet de définir de nouveaux nombres en algèbre. Il y a selon nous une possible algébrisation de la géométrie à cet endroit.

En quatrième, deux chapitres [4] de géométrie sont abordés : la géométrie dans l'espace et la géométrie analytique plane. En géométrie spatiale, il s'agit de réaliser des constructions en perspective cavalière, d'étudier les positions relatives de deux droites, de deux plans, d'une droite et d'un plan mais aussi de caractériser les droites et les plans. De plus, certains problèmes de construction dans l'espace tels que les points de percée et les sections de solides par des plans sont également abordés. Le cadre de la géométrie synthétique est en jeu. Les notions vues dans ce chapitre sont celles vues en cinquième dans les anciens programmes. Les notions d'implication, d'appartenance, d'inclusion et d'intersection doivent également être étudiées au sein de ce chapitre. La logique et la théorie des ensembles prennent donc place dans l'enseignement de la géométrie.

Contrairement aux anciens programmes, la géométrie analytique plane constitue un chapitre à part entière. La figure IV.10 illustre les notions à étudier dans celui-ci.

4. Le programme parle plutôt d'unité d'acquis d'apprentissage (UAA). Une UAA désigne « un ensemble cohérent d'acquis d'apprentissage susceptible d'être évalué » (Administration générale de l'Enseignement, 2015, p. 2). Un acquis d'apprentissage est « ce qu'un élève sait, comprend, est capable de réaliser au terme d'un processus d'apprentissage » (Administration générale de l'Enseignement, ibid., p. 2).

Ressources
Vecteurs
Addition de deux vecteurs
Multiplication d'un vecteur par un réel
Vecteurs colinéaires
Repère orthonormé
Composantes d'un vecteur
Vecteur directeur d'une droite
Équations vectorielle, paramétriques et cartésienne d'une droite
Droite d'équation $ax+by+c=0$
Coefficient angulaire d'une droite
Condition de parallélisme et de perpendicularité de deux droites
Distance entre un point et une droite
Milieu d'un segment
Définition de la parabole en tant que lieu géométrique
Équation cartésienne d'une parabole d'axe vertical
Équation cartésienne d'un cercle

FIGURE IV.10 – Extrait du programme du deuxième degré - géométrie analytique plane (Administration générale de l'Enseignement, ibid., p. 25).

La figure IV.10 montre que le calcul vectoriel est introduit dans ce chapitre. Le travail demandé consiste principalement à effectuer des opérations sur les vecteurs et représenter un vecteur dans le plan. Les équations de droites dans le plan sont ensuite abordées dans les deux points de vue. Il est possible qu'alors la géométrie vectorielle est utilisée comme un outil pour décrire les objets. Cela se justifie notamment par le fait que les vecteurs directeurs sont introduits. De ce fait, les liens entre les cadres de la géométrie vectorielle et de la géométrie analytique sont plus mis en évidence que dans les anciens programmes. Par contre, la géométrie synthétique ne semble pas intervenir dans ce chapitre. En ce qui concerne les points de vue, leur articulation n'est pas demandée explicitement et leur ordre d'introduction n'est pas imposé. Il est également demandé d'introduire le coefficient angulaire d'une droite. Cela laisse supposer un rapprochement entre les équations de la forme $ax + by = c$ avec celles de la forme $y = mx + p$ vues dans le cadre des fonctions. Notons au passage que les équations cartésiennes de droites ne sont pas explicitement étudiées lors de l'introduction de la notion de fonction du premier degré. D'ailleurs le mot « droite » est totalement absent de ce chapitre. Plusieurs lieux géométriques sont aussi abordés tels que la médiatrice, la parabole et le cercle et leurs équations cartésiennes doivent être fournies. De ce fait, ces objets géométriques sont décrits comme des ensembles de points vérifiant tous une même propriété. L'interprétation géométrique des ensembles de points est alors travaillée au sein de ce chapitre. Nous notons toutefois qu'il n'est indiqué nulle part dans le programme que l'interprétation géométrique est nécessaire et doit être développée chez les élèves.

►► Troisième degré

Un plan détaillé des points de matière abordés dans ce programme se trouve en annexe A. Dans celui-ci, la résolution d'équations occupe une place importante dans le domaine algébrique. Tout comme dans les anciens programmes, il s'agit de résoudre des équations trigonométriques, des équations logarithmiques et exponentielles et des équations dans les complexes. La résolution algébrique de ces différents types d'équations est une compétence à développer chez les élèves.

Dans ce programme, la géométrie vectorielle dans le plan et dans l'espace est abordée en cinquième. Les vecteurs ont déjà été introduits en quatrième dans le chapitre de géométrie analytique dans le plan. Cet outil a permis de décrire les droites dans le plan ainsi que leurs positions relatives. Dans ce chapitre, les notions à étudier sont les suivantes (figure IV.11).

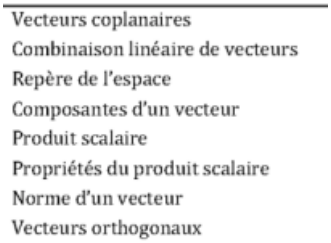

Vecteurs coplanaires
Combinaison linéaire de vecteurs
Repère de l'espace
Composantes d'un vecteur
Produit scalaire
Propriétés du produit scalaire
Norme d'un vecteur
Vecteurs orthogonaux

FIGURE IV.11 – Extrait du programme du troisième degré - géométrie vectorielle (Administration générale de l'Enseignement, ibid., p. 50).

Certaines notions vues au deuxième degré sont présentes dans cet extrait telles que les composantes d'un vecteur. L'extension des notions de géométrie vectorielle est moins explicite dans ce programme par rapport aux anciens programmes. Cependant, le fait d'aborder en même temps les notions du plan et de l'espace met en évidence cette extension. L'aspect généralisateur est alors présent pour les notions de géométrie vectorielle. Il est demandé que les élèves puissent, dans des problèmes nouveaux, démontrer certaines propriétés géométriques avec l'outil vectoriel (alignement de points, parallélisme, orthogonalité). Ainsi, certains liens entre le cadre de la géométrie synthétique et celui de la géométrie vectorielle peuvent apparaitre. De plus, une conversion entre les registres de représentation est souhaitée dans ce chapitre. Il n'est pas précisé de quels registres il s'agit.

Dans le document accompagnant le programme, le schéma suivant est fourni :

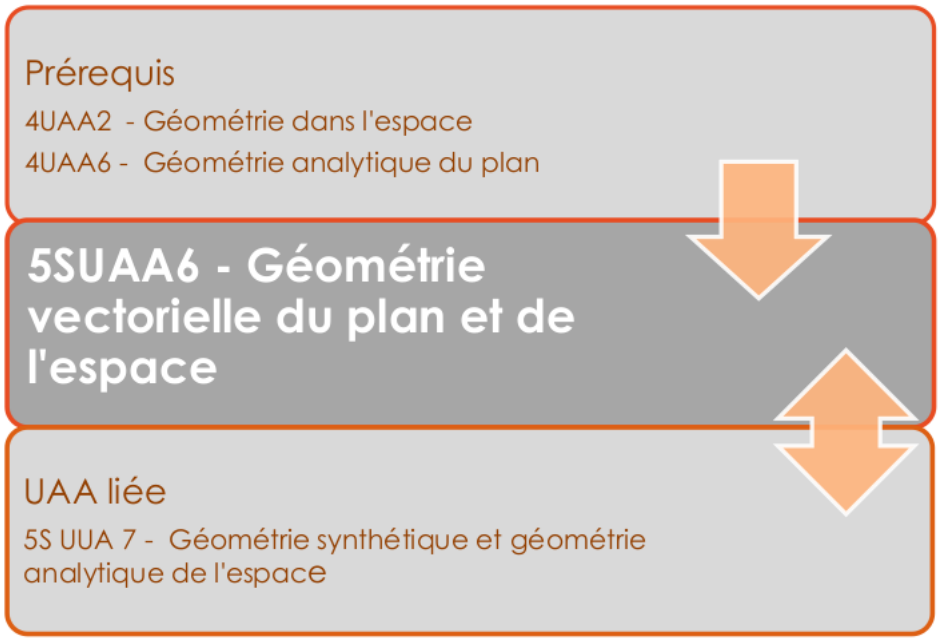


FIGURE IV.12 – Extrait du corpus sur les compétences terminales (Administration générale de l'Enseignement, ibid., p. 42).

Ce schéma permet de bien organiser les connaissances de géométrie, d'identifier voire de rebondir sur les connaissances anciennes et de préparer correctement le terrain pour les notions suivantes. Nous pouvons lire dans ce référentiel :

> « L'ordre dans lequel l'enseignant abordera les volets vectoriel, analytique et synthétique de la géométrie de la 5SUAA6 et 5SUAA7 n'est pas imposé. Cependant, dans une optique de construction plus concrète de la géométrie, on peut aborder le volet synthétique (UAA7) avant la partie vectorielle (UAA6) et terminer par la géométrie analytique (UAA7) » (Administration générale de l'Enseignement, ibid., p. 42).

L'ordre conseillé par les programmes est celui que nous avons retenu de notre étude historique. La géométrie vectorielle permet d'établir les liens entre les géométries synthétique et analytique. Rappelons que ces liens sont importants pour ne pas perdre le sens du problème géométrique à cause de l'importance du travail algébrique en géométrie analytique.

Un chapitre intitulé « Géométrie synthétique et analytique de l'espace » est vu en cinquième. Il y a donc deux différences avec les anciens programmes : la géométrie analytique dans l'espace passe de la sixième à la cinquième ; la géométrie synthétique et la géométrie analytique font partie du même chapitre. Ce choix laisse supposer que les liens peuvent être renforcés entre la géométrie synthétique et la géométrie analytique. Les figures IV.13 et IV.14 illustrent les notions étudiées respectivement pour la géométrie synthétique et pour la géométrie analytique.

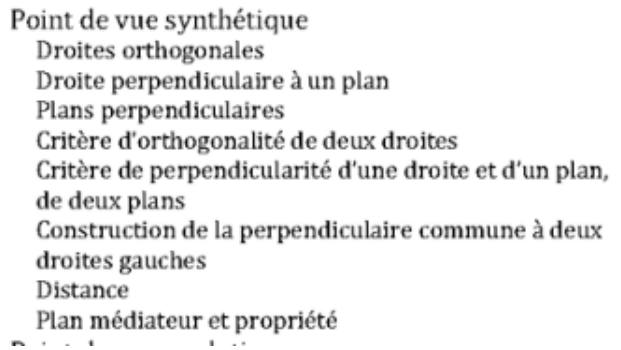

Point de vue synthétique
Droites orthogonales
Droite perpendiculaire à un plan
Plans perpendiculaires
Critère d'orthogonalité de deux droites
Critère de perpendicularité d'une droite et d'un plan, de deux plans
Construction de la perpendiculaire commune à deux droites gauches
Distance
Plan médiateur et propriété

FIGURE IV.13 – Extrait du programme du troisième degré - géométrie synthétique de l'espace (Administration générale de l'Enseignement, ibid., p. 51).

La figure IV.13 montre que les notions abordées dans le cadre de la géométrie synthétique sont identiques aux anciens programmes. Il s'agit également d'introduire les différentes positions relatives que peuvent avoir deux droites, deux plans, une droite et un plan. Il est principalement demandé aux élèves d'identifier les positions relatives de droites et de plans dans un polyèdre. La géométrie se base encore sur les solides.

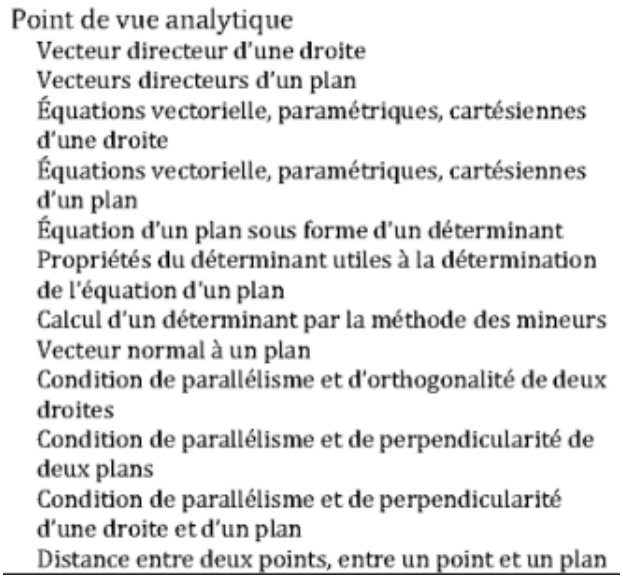

Point de vue analytique
Vecteur directeur d'une droite
Vecteurs directeurs d'un plan
Équations vectorielle, paramétriques, cartésiennes d'une droite
Équations vectorielle, paramétriques, cartésiennes d'un plan
Équation d'un plan sous forme d'un déterminant
Propriétés du déterminant utiles à la détermination de l'équation d'un plan
Calcul d'un déterminant par la méthode des mineurs
Vecteur normal à un plan
Condition de parallélisme et d'orthogonalité de deux droites
Condition de parallélisme et de perpendicularité de deux plans
Condition de parallélisme et de perpendicularité d'une droite et d'un plan
Distance entre deux points, entre un point et un plan

FIGURE IV.14 – Extrait du programme du troisième degré - géométrie analytique de l'espace (Administration générale de l'Enseignement, ibid., p. 51).

Du côté de la géométrie analytique, les droites et les plans sont définis par leurs vecteurs directeurs. Notons que les notions de rang, de base d'un espace vectoriel, de dimension n'apparaissent pas dans l'enseignement secondaire. Il est donc difficile de pouvoir justifier le nombre de vecteurs directeurs nécessaires pour décrire ces objets autrement qu'en s'appuyant sur les connaissances de la géométrie synthétique vues en quatrième et en cinquième. Ainsi, il se peut que les deux cadres géométriques soient mis en relation via l'outil vectoriel. Les équations de droites et de plans sont données selon les deux points de vue. Encore une fois, aucune articulation n'est souhaitée et

l'ordre d'introduction des points de vue n'est pas imposé. Les équations cartésiennes de plans sous forme de déterminant doivent également être étudiées. Ainsi, le calcul des déterminants par la méthode des mineurs mais aussi les propriétés liées à la proportionnalité des lignes et des colonnes sont introduits dans ce chapitre. La théorie des déterminants intervient après avoir donné le point de vue paramétrique des objets. Elle ne sert d'ailleurs que comme un outil pour introduire une méthode « plus rapide » pour écrire une équation de plan selon le point de vue cartésien. L'ordre dans lequel les notions sont introduites est différent de l'histoire que nous avons retracée. Les positions relatives sont ensuite étudiées dans le cadre de la géométrie analytique.

Les compétences à développer au sein de ce chapitre consistent à « démontrer des propriétés géométriques en utilisant les outils synthétiques et/ou analytiques » (Administration générale de l'Enseignement, ibid., p. 51) et de « résoudre un problème géométrique en utilisant des équations de plans et de droites » (Administration générale de l'Enseignement, ibid., p. 51). La première compétence amène probablement à proposer des exercices permettant de mobiliser à la fois des outils des deux cadres géométriques et ainsi de comparer les démarches associées. Rappelons que c'est un objectif du programme. La deuxième compétence indique que les équations de droites et de plans interviennent également dans leur caractère outil pour résoudre d'autres problèmes. C'est par exemple le cas lorsque les coniques sont étudiées en sixième. Au sein de ce chapitre, il est demandé de « déterminer l'intersection de trois plans, de deux droites, d'une droite et d'un plan et en déduire leurs positions relatives » (Administration générale de l'Enseignement, ibid., p. 51). Il s'agit ici de résoudre des systèmes d'équations et d'interpréter géométriquement les objets et leurs positions relatives. Cette interprétation se fait certainement à la fois à partir des équations (pour identifier les objets) et des ensembles de solutions (pour identifier les positions relatives). Les nouveaux programmes semblent mettre l'accent sur l'interprétation géométrique dans le cadre de la géométrie analytique. Cette hypothèse se justifie notamment par l'extrait suivant :

> « Là où la géométrie synthétique est plus difficile à mettre en œuvre, la géométrie analytique se révèle être un outil puissant de démonstration qui permet de résoudre plus simplement certains problèmes. Toutefois, elle peut masquer le côté visuel des objets de l'espace » (Administration générale de l'Enseignement, ibid., p. 46).

Nous pouvons désormais revenir sur les spécificités des notions qui nous intéressent.

3.3 Bilan

Nous pouvons désormais caractériser les spécificités des notions de droites et de plans du côté du savoir à enseigner pour ces nouveaux progammes. Nous précisons ensuite la conceptualisation qui est attendue des élèves dans ce chapitre. Le programme du premier degré n'a pas subi de changement. Nos conclusions pour ce niveau d'enseignement sont donc identiques à celles exposées précédemment. Au contraire, les programmes pour le deuxième et le troisième degrés ont été renouvelés. Cette refonte des programmes engendre plusieurs changements relativement importants dans le cadre

de cette recherche.

Les cadres de la géométrie synthétique, de la géométrie vectorielle et de la géométrie analytique sont tous abordés dans les programmes. Les trois premières années de l'enseignement secondaire travaillent des notions de géométrie synthétique. En quatrième, la géométrie analytique est vue dans le plan. Les premières notions vectorielles sont introduites et utilisées pour décrire une droite en fonction d'un de ses vecteurs directeurs. Ainsi, l'entrée dans le cadre de la géométrie analytique se fait grâce à une description vectorielle de l'objet droite vue dans le cadre de la géométrie synthétique. De ce fait, tout comme notre étude historique le montre, la géométrie vectorielle permet d'établir les liens entre les cadres des géométries synthétique et analytique. En cinquième, les notions des trois cadres géométriques sont étendues à l'espace. Les continuités entre le plan et l'espace pour les notions de géométrie vectorielle et de géométrie synthétique sont flagrantes. En ce qui concerne la géométrie analytique, la description des droites et des plans dans l'espace sont étendues avec continuité. En effet, en quatrième, les droites sont déterminées par un vecteur directeur ayant deux composantes. En cinquième, les droites sont désormais décrites à partir d'un vecteur directeur ayant trois composantes. De plus, l'extension à l'espace de cette description se fait elle aussi avec continuité. Puisque deux droites sécantes déterminent un plan, deux vecteurs directeurs non colinéaires sont nécessaires pour décrire le plan. Des jeux entre les trois cadres géométriques sont alors possibles d'autant plus que les programmes appuient sur l'importance de pouvoir comparer les démarches géométriques entre elles au sein d'un même exercice ou d'une même démonstration.

Notre analyse révèle également que les équations de droites dans le plan de la forme $ax + by = c$ n'apparaissent plus au sein du cadre des fonctions comme dans les programmes précédents. Ce choix fait que l'aspect généralisateur de ces équations est moins développé dans ces nouveaux programmes. En effet, au lieu de généraliser les formes $y = mx + p$ et $x = k$ (où $k \in \mathbb{R}$), il y a plutôt une particularisation de la forme $ax + by = c$. Ces notions sont donc introduites en quatrième dans un chapitre dédié à la géométrie analytique plane dans lequel les deux points de vue sont abordés. Bien qu'aucun ordre ne soit imposé, les notions sont certainement décrites d'abord dans le point de vue paramétrique et puis cartésien. En effet, la description des droites en termes de vecteurs nous pousse à penser que le point de vue paramétrique dans le cadre de la géométrie vectorielle sera le premier introduit. Les programmes n'insistent pas sur une articulation quelconque des points de vue.

Du côté algébrique, la notion d'équation n'est encore une fois jamais définie. Il semble cependant que les mises en relation entre les fonctions et les équations soient possibles à plusieurs endroits du programme du deuxième degré. La résolution algébrique d'équations de plusieurs types (du premier au quatrième degré, exponentielle, logarithmique, complexe, trigonométrique) est encore une fois la compétence que les élèves doivent développer. L'interprétation géométrique des équations n'est pas un objectif de l'enseignement de l'algèbre. Contrairement aux anciens programmes, elle n'est pas conseillée pour vérifier et valider les solutions des équations. Pourtant, cet aspect de vérification des solutions est un des objectifs énoncés par les programmes pour dévelop-

per l'esprit critique des élèves. La résolution algébrique des équations semble renforcée dans ces nouveaux programmes.

La géométrie analytique dans l'espace est désormais étudiée en cinquième. Nos constatations en ce qui concerne les points de vue sont les mêmes que pour la géométrie analytique plane. L'extension des deux points de vue est clairement marquée bien qu'implicite dans les programmes. Le document accompagnant les programmes conseille même d'interpréter la droite comme l'intersection de deux plans pour expliquer qu'elle est décrite par un système de deux équations cartésiennes [5]. Il est évident aussi que l'interprétation géométrique est une compétence à développer pour l'étude des positions relatives des objets entre eux. Elle se fait donc à partir des équations et des ensembles de solutions. À l'inverse des anciens programmes, la résolution des systèmes d'équations ne semble plus s'effectuer grâce à la théorie des déterminants. En effet, elle ne survient que pour décrire un plan dans le point de vue cartésien. De ce fait, les déterminants ne semblent pas intervenir explicitement dans la résolution des systèmes d'équations. Le point de vue paramétrique est abordé sans que la notion de rang d'un système et la théorie des déterminants n'apparaissent. Cependant, la description des droites et des plans en termes vectoriels permet de donner les moyens de contrôle nécessaires pour établir le point de vue paramétrique. En réalité, cette étape consiste à considérer les objets comme des espaces vectoriels (ou affines) et d'en déterminer une base. Les aspects direct et générateur de la notion du rang sont donc cachés derrière cette description bien qu'elle ne soit pas au programme. De façon transversale, les programmes mettent l'accent sur la théorie des ensembles, la logique et les conversions de registres. Or, pour ce chapitre, aucune recommandation n'est formulée. Pourtant, l'étude cognitive que nous avons réalisée met bien en évidence qu'il est possible de travailler ces notions et les conversions de registres. Il se peut que ces points n'apparaissent pas dans les classes. Seule une analyse des pratiques en classe permettrait de le savoir. Nous réalisons cette analyse dans le chapitre VIII.

En ce qui concerne les niveaux de conceptualisation, nous avons remarqué certaines différences par rapport aux anciens programmes. Le niveau de la géométrie affine et affine-euclidienne est un peu plus travaillé dans ces nouveaux programmes, bien que le niveau de la géométrie « à la Euclide » soit encore le plus présent. Cependant, le passage entre ces deux niveaux de conceptualisation semble un peu moins laissé à la charge de l'élève. En effet, le fait de pouvoir comparer au sein d'un même exercice les outils et les démarches propres aux différents cadres géométriques permet de mettre en évidence les différences entre les fondements, l'arsenal, les démarches et le niveau de rigueur de chacun des niveaux. Ainsi, la flexibilité cognitive nécessaire pour passer d'un niveau à un autre peut, selon nous, être plus développée chez les élèves suivant ces programmes.

Tout comme dans les anciens programmes, le savoir géométrique est très découpé. Bien que les deux niveaux de conceptualisation se juxtaposent à certains moments, les liens entre les deux niveaux peuvent être établis. De plus, des jeux de cadres entre la géométrie synthétique, vectorielle et analytique peuvent être mis en œuvre. Des conversions entre les différents registres sont également possibles. De la sorte, ces nouveaux

5. L'aspect dual de la notion du rang apparait ici implicitement.

programmes pourraient permettre de développer une certaine flexibilité cognitive entre les cadres et les registres. Par contre, bien que les deux points de vue soient présents, leur articulation n'est jamais explicite. La flexibilité entre les points de vue ne semble donc pas développée dans les programmes. Ensuite, bien que le travail reste essentiellement algébrique au niveau des équations, leur interprétation géométrique est importante au sein du chapitre des droites et des plans dans l'espace. L'aspect sémantique des équations pourrait être développé. Puisque la théorie des ensembles et la logique prennent place au sein de ce chapitre, l'interprétation géométrique des ensembles de points vérifiant tous une même propriété peut être développée par les élèves. Finalement, la conceptualisation attendue des élèves pour les notions de géométrie analytique dans l'espace est beaucoup plus proche de celle attendue des étudiants de BAB1. En effet, une flexibilité entre les cadres et les registres est attendue d'eux et l'interprétation géométrique des objets doit pouvoir se faire à partir d'une équation ou d'un ensemble de points. Cependant, nous savons qu'une articulation des points de vue est nécessaire pour bien conceptualiser ces notions. Ces nouveaux programmes laissent cet aspect de côté.

4 Bilan de l'étude curriculaire

Dans ce chapitre, nous avons complété notre étude du relief sur les notions de droites et de plans dans l'espace en réalisant une étude curriculaire. Afin de préciser les spécificités de ces notions du côté du savoir à enseigner et la conceptualisation attendue des élèves, nous nous sommes intéressée à l'ensemble des programmes pour l'enseignement secondaire belge francophone. Cela nous permet de mieux apprécier l'organisation des connaissances en géométrie et en particulier la façon dont les nouvelles connaissances de géométrie analytique dans l'espace s'insèrent dans les connaissances antérieures des élèves. Nous avons alors étudié les programmes pour les trois degrés d'enseignement. De plus, de nouveaux programmes sont récemment entrés en vigueur pour le deuxième et le troisième degré. Nous avons donc choisi d'analyser ces cinq programmes. D'une part, notre étude cognitive concerne les étudiants ayant suivi les anciens programmes. Il nous semblait donc important de les analyser afin de mieux comprendre les difficultés que nous avons repérées chez eux. D'autre part, notre objectif étant de réaliser une séquence d'enseignement afin de favoriser la conceptualisation des notions de droites et de plans dans l'espace, nous avons jugé nécessaire d'étudier les programmes dans lesquels notre séquence doit s'insérer.

L'analyse des anciens programmes a permis de comprendre certaines difficultés repérées chez nos étudiants de BAB1. Nous avons montré que la flexibilité entre les cadres, les registres et les points de vue est difficile à développer par les élèves à la fin de la sixième année. En effet, le découpage du savoir choisi par les programmes ne permet pas d'établir les liens entre les cadres de la géométrie synthétique, vectorielle et analytique relevés dans notre étude historique. Les conversions entre les différents registres de représentation ne semblent pas être un enjeu de l'enseignement des notions de droites et de plans dans l'espace. Il s'agit principalement de décrire les objets par

une équation selon un point de vue précis et de résoudre des systèmes de trois équations à trois inconnues. Le registre principalement présent est le registre algébrique. En ce qui concerne les points de vue, l'ordre dans lequel ils doivent être introduits n'est pas précisé et leur articulation n'est pas mentionnée. De plus, certaines notions du niveau de conceptualisation de la géométrie affine et affine-euclidienne sont absentes des programmes de l'enseignement secondaire bien que jugées nécessaires par notre étude historique. En outre, le travail encore une fois très algébrisé au niveau des équations dans le cursus scolaire ne semble pas aider les élèves à développer leur interprétation géométrique. Bien qu'elle soit à de nombreuses reprises conseillée, elle n'est jamais une compétence à développer par les apprenants. Enfin, la théorie des ensembles et la logique ne sont pas des notions abordées par les programmes de l'enseignement secondaire. L'interprétation géométrique des ensembles de points est très peu mise en jeu. Cette analyse des anciens programmes nous aide à mieux comprendre pourquoi les étudiants rencontrent des difficultés à effectuer des changements de cadres (géométriques), des conversions de registres et à articuler les points de vue, mais aussi à interpréter géométriquement les objets à partir des équations et des ensembles de points.

Notre analyse des programmes actuels montre qu'il est possible de proposer un travail consistant permettant de développer une certaine flexibilité pour les notions de droites et de plans dans l'espace et ainsi probablement favoriser la conceptualisation des notions par les élèves. En effet, bien que le savoir savant reste très découpé dans l'enseignement, les liens entre les différents cadres géométriques et l'intégration des nouvelles connaissances de géométrie analytique dans les connaissances déjà-là des élèves semblent mieux pris en compte par ces programmes. De plus, la flexibilité nécessaire entre les domaines de travail (niveaux de conceptualisation) parait moins laissée à la charge des élèves, contrairement aux anciens programmes. Cependant, nous avons montré au chapitre II qu'une articulation des points de vue est importante et celle-ci n'apparait pas explicitement comme un enjeu de l'enseignement de ces notions. L'aspect généralisateur des notions est présent au sein de ces nouveaux programmes, notamment lorsque les droites et les plans sont définis en fonction de leurs vecteurs directeurs. Ces programmes mettent en avant les trois aspects (générateur, direct et dual) de la notion de rang. Toutefois, nous avons montré dans notre étude historique que la notion de rang n'a émergé que lorsque ces trois aspects ont été reliés entre eux, ce qui ne semble pas être le cas dans les programmes puisque la notion de rang y est absente, bien qu'importante pour le point de vue paramétrique. Ce dernier apparait uniquement à partir des aspects direct et générateur du rang. La place occupée par la théorie des ensembles et la logique peut amener à décrire les objets comme des ensembles de points vérifiant tous une même propriété. Ce travail peut permettre de développer l'interprétation géométrique des objets. Elle est d'ailleurs un enjeu explicite de l'enseignement de ces notions, enjeu que nous retrouvons dans le document accompagnant les programmes.

Le croisement des résultats issus des études cognitive, historico-épistémologique et curriculaire nous permet de mettre du relief sur les notions enseignées dans l'enseignement secondaire et ainsi de formuler notre question de recherche.

Chapitre V

Mise en relief des notions à enseigner

Dans ce chapitre, nous croisons les résultats issus des trois études que nous avons réalisées. Ceci nous permet de mettre du relief sur les notions de droites et de plans dans l'espace. Les spécificités des notions que nous avons décrites nous fournissent des pistes à explorer pour favoriser la conceptualisation de ces notions par les élèves du secondaire. Nous présentons ensuite une première formulation de notre question de recherche.

1 Notre objectif initial

Notre expérience d'enseignante dans un cours de géométrie différentielle en BAB3 à l'Université de Mons nous a permis de repérer une difficulté récurrente chez nos étudiants. Ils ne sont généralement pas capables d'interpréter géométriquement des objets dans l'espace, c'est-à-dire de décrire un objet géométrique par une équation et inversement d'associer à une équation l'objet géométrique qu'elle décrit. Cette difficulté concerne à la fois des objets géométriques nouveaux pour les étudiants, comme le tore, mais également des objets rencontrés à de nombreuses reprises dans leur cursus scolaire, comme les droites et les plans. Notre objectif premier est de mieux comprendre les difficultés des étudiants à interpréter géométriquement les droites et les plans dans l'espace. Ce questionnement est guidé par une volonté de pouvoir agir sur un enseignement de géométrie analytique et d'aider les apprenants à surmonter cette difficulté. C'est pourquoi nous avons réalisé une étude du relief sur les notions de droites et de plans dans l'espace permettant de mettre en évidence les spécificités des notions du côté du savoir savant, du savoir à enseigner et du savoir enseigné en BAB1. Nous allons donc confronter les résultats issus de l'étude historique et épistémologique (réalisée au chapitre III) et de l'étude des programmes de l'enseignement secondaire belge (effectuée au chapitre IV) à l'enseignement étudié dans le chapitre II. Cela nous amène à pointer différents moyens d'action que nous avons sur l'enseignement de ces notions. Avant de confronter nos différents résultats, nous revenons sur l'enseignement des notions de droites et de plans dans l'espace au sein du cours de Mathématiques élémentaires.

L'enseignement dont il est question ici introduit les notions dans l'espace comme généralisant les notions de la géométrie analytique plane rencontrées au préalable par les étudiants. C'est pourquoi les équations de plans sont étudiées avant les équations de droites dans l'espace. Les connaissances des cadres de la géométrie vectorielle et de la géométrie analytique y sont mises en jeu. La géométrie synthétique n'intervient que ponctuellement. Nous avons également constaté que les notions interviennent dans de nombreux registres tels que les registres graphique, algébrique, de la langue naturelle et ensembliste. Les points de vue cartésien et paramétrique y sont abordés et l'articulation se fait essentiellement dans le sens paramétrique/cartésien. Les exercices proposés nécessitent un travail très complexe de la part des étudiants lié à la variété et à la quantité des adaptations des connaissances à réaliser. Des jeux entre les trois cadres géométriques, des conversions de registres, des articulations de points de vue doivent être mis en œuvre par les étudiants. De ce fait, ils doivent développer une certaine flexibilité cognitive entre les cadres, les registres et les points de vue pour conceptualiser ces notions. Celle-ci est laissée au moins partiellement à la charge des étudiants. L'interprétation géométrique est très présente au sein des exercices proposés et doit pouvoir se faire à partir de n'importe quelle équation mais aussi à partir d'ensembles. Elle repose alors sur l'aspect sémantique des équations et sur les notions ensemblistes, tous deux très difficiles pour les étudiants.

Ainsi, l'aspect généralisateur de ces notions, la flexibilité à développer en termes de cadres, de registres et de points de vue, la place occupée par la logique et la théorie des ensembles et l'aspect sémantique des équations constituent des sources de difficultés pour les étudiants. Pourtant, nous savons que l'aspect sémantique des équations et la flexibilité font partie intégrante du processus de conceptualisation. Il ne s'agit donc pas de supprimer de l'enseignement un tel travail mais bien de guider beaucoup plus les apprenants dans le développement de ces aspects. C'est pourquoi nos analyses historique et curriculaire ont cherché à déterminer les spécificités des notions en termes de cadres, de registres, de points de vue et de caractériser les aspects généralisateur et sémantique.

Les résultats de nos études mettent en évidence des décalages parfois importants entre cet enseignement, le savoir savant et le savoir à enseigner. Néanmoins, ils permettent de pointer quelques pistes didactiques à prendre en compte dans l'élaboration de la séquence d'enseignement que nous voulons créer pour l'enseignement secondaire. Nous revenons sur ces décalages au point suivant.

2 Des décalages entre le savoir savant, le savoir à enseigner et le savoir enseigné

2.1 Les cadres

Dans nos analyses historique et curriculaire, nous avons montré que les notions de géométrie analytique spatiale s'insèrent dans un ensemble plus large de notions dont font partie l'algèbre et la géométrie (synthétique et vectorielle). En particulier, l'articu-

lation des différents cadres est très différente dans l'enseignement étudié par rapport à celle dans le savoir savant et le savoir à enseigner. En effet, l'émergence historique de la géométrie analytique apparait comme une unification des domaines géométrique et algébrique ce qui amène une nouvelle formalisation des équations. C'est également le cas dans le savoir à enseigner dans lequel l'algébrisation de la géométrie est de plus en plus présente au fur et à mesure de la scolarité. Dans l'enseignement étudié, ces caractères unificateur et formalisateur de la géométrie analytique n'apparaissent pas. Nous supposons qu'il y a deux explications à ce décalage. Tout d'abord, un des objectifs du cours est d'assurer la transition secondaire-université. De ce fait, les notions qui y sont abordées ont déjà fait l'objet d'un enseignement préalable. Il ne s'agit donc pas de reproduire tout le développement des notions mais bien de revenir sur certaines notions essentielles pour bien débuter les autres cours universitaires tel que l'algèbre linéaire. Ensuite, nous pensons que cela nécessite d'introduire un chapitre de géométrie synthétique dans le cours dont il est question ici afin de bien mettre en avant ces aspects. Or, au vu de la durée du cours de Mathématiques élémentaires et du peu d'utilisation de cette géométrie pour la suite du cursus, il nous semble pertinent que l'enseignement ne choisisse pas de les aborder.

De plus, l'articulation des cadres géométriques n'apparait pas de la même façon tant dans l'enseignement étudié que dans l'histoire ou les programmes. L'étude historique révèle que la géométrie est purement synthétique jusqu'en 1637. Vient ensuite la géométrie analytique (plane et spatiale) notamment avec les travaux de Descartes et Fermat. La géométrie vectorielle émerge en dernier suite à une critique de Leibniz. Il reprochait à la géométrie analytique d'être trop algébrique et de ne plus être liée au problème géométrique étudié. Möbius donne alors une première description des droites et des plans en termes vectoriels pour pallier cette critique. Ainsi, la géométrie vectorielle apparait comme la méthode géométrique permettant de lier la géométrie synthétique et la géométrie analytique. Bien que d'un point de vue chronologique les cadres géométriques n'émergent pas dans cet ordre, notre étude historique montre qu'il est mieux d'aborder la géométrie synthétique, puis la géométrie vectorielle et enfin la géométrie analytique. C'est ce cheminement qui est suivi dans les programmes actuels. Dans l'enseignement étudié, nous avons montré que ce n'est pas le cas et que les jeux de cadres se limitent à la géométrie vectorielle et analytique.

2.2 Les registres

Au niveau des registres, nous avons repéré des décalages importants entre les trois savoirs. L'enseignement étudié met en jeu les registres du dessin, graphique, de la langue naturelle, algébrique, ensembliste et de la logique. Or, les notions de logique et de théorie des ensembles sont beaucoup trop modernes par rapport à la période de l'histoire que nous avons retracée. Ils n'apparaissent donc pas dans notre analyse historique. L'étude du savoir à enseigner met quant à elle clairement en avant les registres algébrique et de la langue naturelle. Les registres ensembliste et de la logique peuvent également apparaitre grâce aux nouveaux programmes puisqu'il est demandé de travailler ces notions au gré des besoins.

2.3 Les points de vue

Le décalage le plus flagrant, pour nous, concerne les points de vue. Chronologiquement parlant, le point de vue cartésien est le premier à émerger dans l'histoire des mathématiques retracée au chapitre III. Ensuite, le point de vue paramétrique, dans le cadre de la géométrie vectorielle, est apparu grâce au calcul barycentrique. Il faut attendre que la notion de rang soit définie par Frobenius pour que le point de vue paramétrique apparaisse dans le cadre de la géométrie analytique et s'articule avec le point de vue cartésien. Or, la notion de rang ne survient qu'après avoir considéré les équations et les solutions d'un système comme des n-uplets. De la sorte, l'histoire montre que les points de vue sont articulés entre eux. Or, cette articulation n'est pas du tout évoquée dans les programmes et se résume bien souvent au sens paramétrique/cartésien dans l'enseignement étudié. De plus, la notion de rang n'apparait pas dans le savoir à enseigner et dans le savoir enseigné. Cela ne permet pas de donner des moyens de contrôle aux apprenants quant au nombre de vecteurs et de paramètres à utiliser. Cependant, les trois aspects du rang apparaissent implicitement dans les nouveaux programmes. Ce qui nous laisse supposer qu'une articulation est désormais possible.

2.4 L'interprétation géométrique

Le savoir enseigné appuie également sur l'interprétation géométrique des objets décrits par des équations et des ensembles. L'aspect sémantique des équations et certaines notions de théorie des ensembles et de logique interviennent dans l'enseignement étudié. Or, cela ne semble pas être le cas dans l'histoire de la géométrie analytique et dans notre analyse des anciens programmes. Comme nous l'avons déjà dit, cela s'explique notamment par le fait que la logique et la théorie des ensembles sont des domaines assez récents par rapport à la géométrie analytique. De plus, l'histoire montre que la méthode cartésienne a permis de décrire les objets par des équations et qu'un travail très algébrique sur ces équations a mené les mathématiciens de l'époque à perdre le côté visuel du problème géométrique, c'est-à-dire de relier les équations aux objets qu'elles décrivent. L'aspect sémantique a donc été minoré tout un temps avant d'être remis en avant par les critiques de Leibniz. Il y a donc un décalage entre l'enseignement et l'histoire de la géométrie analytique. Au contraire, les nouveaux programmes de l'enseignement secondaire belge mettent l'accent sur l'intégration des notions de logique et de théorie des ensembles au sein des chapitres et sur l'interprétation géométrique des objets décrits par des équations ou des ensembles de points. Le décalage entre le savoir à enseigner et le savoir enseigné est désormais moins important.

2.5 Le caractère généralisateur des notions

Notre étude historique a mis en évidence à plusieurs endroits le caractère généralisateur des notions. Nous avons par exemple une extension des démarches entre la géométrie analytique plane et la géométrie analytique dans l'espace. Il en est de même pour les points de vue cartésien et paramétrique dans le cadre vectoriel. Ce caractère est surtout présent dans la majorité des travaux issus de la géométrie analytique (géométrie

vectorielle, algèbre linéaire, etc.). Nous constatons que les résultats de nos analyses de l'enseignement étudié et des nouveaux progammes sont assez similaires. Ainsi, le décalage entre les anciens programmes et les savoirs savant et enseigné est diminué par l'arrivée de ces nouveaux curricula.

3 Question de recherche

Les résultats précédents nous amènent à la conclusion que l'enseignement étudié propose une genèse artificelle des notions de droites et de plans dans l'espace dans laquelle plusieurs décalages avec le savoir à enseigner et le savoir savant apparaissent. Nous avons montré que le décalage entre cet enseignement et le savoir savant est moins important que celui avec le savoir à enseigner au secondaire. Cela peut certainement s'expliquer par le contexte institutionnel dans lequel le cours dont il est question se situe, mais aussi expliquer les nombreuses difficultés repérées chez nos étudiants. Bien que le cours de Mathématiques élémentaires soit plus proche de l'histoire, certains décalages ont été pointés. Ceux-ci concernent principalement la prise en compte des éléments de logique et de théorie des ensembles dans l'enseignement ainsi que le développement de l'interprétation géométrique des équations.

Afin que les apprenants conceptualisent les notions de droites et de plans dans l'espace, une certaine flexibilité entre les cadres, les registres et les points de vue doit être développée. Un travail d'interprétation géométrique des objets à partir des équations et des ensembles de points est important pour donner du sens aux notions. Or, les anciens programmes ne mettaient pas l'accent sur ces spécificités. Les nouveaux programmes semblent quant à eux le permettre. Ce nouveau savoir à enseigner est ainsi plus proche du savoir enseigné. En réalité, nous faisons l'hypothèse qu'ils permettent une transposition didactique « plus douce » que les programmes précédents. En effet, les décalages entre le savoir savant et le savoir à enseigner mais aussi ceux entre le savoir à enseigner et le savoir enseigné sont moins grands.

En conclusion, de nouvelles injonctions apparaissent et permettent de proposer aux élèves des activités favorisant leur conceptualisation des notions de droites et de plans dans l'espace. Ces programmes sont appliqués depuis septembre 2018. Or, les ressources (au sens de Gueudet & Trouche, 2009) conformes à ceux-ci et accessibles aux enseignants, comme les manuels scolaires, sont peu nombreuses. De plus, les auteurs de manuels scolaires n'ont en général qu'une perception partielle des modifications apportées par des nouveaux programmes (Négrier & Kermen, 2011). Ils expliquent que cela peut notamment provenir d'un laps de temps trop court entre la publication du programme et la rentrée scolaire où il entre en vigueur mais aussi parfois d'un bouleversement des habitudes établies depuis longtemps par les auteurs de manuels. De ce fait, nous nous intéressons particulièrement à la façon dont les enseignants vont s'adapter à ces nouveaux programmes, ce qui amène une première formulation de notre problématique de recherche.

Comment les enseignants prennent en compte les nouvelles injonctions des programmes, sur les droites et les plans dans l'espace, dans les activités qu'ils proposent aux élèves, afin de développer leur interprétation géométrique des objets et favoriser la conceptualisation de ces notions ?

Nous allons tout d'abord préciser le cadre théorique retenu pour aborder notre questionnement. Nous pourrons alors reformuler notre problématique à l'aide des outils de la Théorie de l'Activité. Avant de nous rendre sur le terrain et d'analyser les pratiques des enseignants et les activités qu'ils proposent à leurs élèves, nous analysons les manuels scolaires belges pour délimiter les scénarios potentiels des cours. Nous pouvons ensuite confronter ces scénarios avec ce qu'il se passe effectivement en classe. Ce travail fait l'objet de la partie 2.

Deuxième partie

Cadrage théorique – Problématique – Analyses didactiques

Partie 2 — Introduction

Dans la partie 1 de notre travail, nous avons mené une étude du relief sur les notions de droites et de plans dans l'espace. L'analyse curriculaire faite au chapitre IV met en évidence de nouvelles injonctions dans les programmes de l'enseignement secondaire. Celles-ci semblent donner la possibilité aux enseignants de proposer aux élèves un scénario pouvant développer leur flexibilité entre les cadres, les registres et les points de vue. Nous nous sommes donc questionnée sur la façon dont les enseignants tiennent compte de celles-ci pour le chapitre de géométrie analytique spatiale. Notre problématique de recherche nous amène à nous intéresser aux pratiques des enseignants en classe. En particulier, nous cherchons à déterminer les choix qu'ils effectuent lors de l'élaboration de leur scénario sur ces notions et aux apprentissages correspondants des élèves. Nous choisissons d'inscrire notre questionnement au sein du cadre de la Théorie de l'Activité (Abboud-Blanchard, Robert, Rogalski, & Vandebrouck, 2017 ; Vandebrouck, 2008) dont les fondements sont présentés au chapitre VI.

Afin d'apporter des éléments de réponse à notre problématique, nous avons réalisé plusieurs analyses didactiques. Dans un premier temps, nous avons complété notre étude du relief sur les notions de géométrie analytique dans l'espace (cf. partie 1) par une analyse de manuels belges (francophones). En effet, ceux-ci constituent la principale ressource utilisée par les enseignants de l'enseignement secondaire. Ils nous éclairent alors sur les scénarios potentiels des cours et sur les activités possibles des élèves pour les notions qui nous intéressent. Cette analyse est présentée dans le chapitre VII. Nous sommes ensuite allée dans plusieurs classes de l'enseignement secondaire. Nous y avons étudié la façon dont l'enseignant développe la flexibilité entre les cadres, les registres et les points de vue, ainsi que l'interprétation géométrique des élèves. Nous analysons alors les choix que l'enseignant effectue dans l'élaboration du scénario, notamment les tâches qu'il prévoit mais aussi les déroulements effectifs de ces scénarios en classe. Nous présentons à la fois l'analyse *a priori* des scénarios envisagés par les cinq enseignants observés et les déroulements en classe dans le chapitre VIII. Une comparaison entre les scénarios potentiels et les scénarios effectifs permet de mieux mettre en évidence la façon dont les enseignants tiennent compte des nouvelles injonctions des programmes [1]. La mise en regard des différents scénarios et des déroulements associés nous permet de déterminer la conceptualisation attendue des élèves pour ces notions et ainsi de fournir des éléments de réponse à notre problématique.

1. Rappelons qu'au moment de nos analyses, les manuels n'étaient pas conformes aux nouveaux programmes.

Chapitre VI

Cadrage théorique et questionnement didactique

Notre question de recherche nous amène à analyser le travail que les enseignants proposent à leurs élèves afin de favoriser leur conceptualisation des notions de droites et de plans dans l'espace. Pour cela, nous nous intéressons à la façon dont l'enseignant va essayer d'enclencher des apprentissages chez les élèves mais aussi aux apprentissages réels des élèves suite à l'enseignement proposé. Nous voulons donc étudier et mettre en regard le travail mathématique développé par les élèves et leurs apprentissages mais aussi les enseignants et leurs pratiques. Pour ce faire, nous choisissons d'inscrire notre questionnement dans le cadre de la Double Approche didactique et ergonomique (DA) au sein de la Théorie de l'Activité (TA). Ce cadre théorique permet d'approcher les apprentissages des élèves grâce aux activités qu'ils peuvent potentiellement développer en classe à partir des tâches mathématiques prescrites par l'enseignant. Dans ce chapitre, nous présentons les hypothèses sur lesquelles ce cadre théorique s'appuie. Celui-ci nous permet ensuite de formuler une problématique plus précise et de proposer une méthodologie générale adéquate guidant nos analyses didactiques et légitimant nos résultats (Robert & Roditi, 2019).

1 La Théorie de l'Activité

Nous cherchons à étudier les effets des pratiques enseignantes sur les apprentissages des élèves pour un contenu mathématique précis à un moment donné de l'enseignement. Le cadre de la Théorie de l'Activité (Leontiev, 1984 ; Leplat, 1997) contextualisé à l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques en situation scolaire grâce à la Double Approche (Robert & Rogalski, 2002) des pratiques enseignantes, nous permet de caractériser à la fois les apprentissages visés par le scénario élaboré par l'enseignant et les apprentissages qui peuvent être réalisés à la suite de cet enseignement. Nous présentons ici les fondements de ce cadre et les outils théoriques que nous utilisons dans notre travail.

1.1 La construction des connaissances chez Piaget et Vygotski

La TA postule qu'il est possible d'articuler les théories constructivistes proposées par Piaget et Vygostki. Nous revenons brièvement sur ces théories et montrons comment elles peuvent se compléter.

La théorie du constructivisme piagétien (Piaget, 1971, 1985) permet au sein du triangle didactique savoirs-élèves-enseignants de tenir compte des liens entre le sujet et la connaissance (Rogalski, 1983). Chez Piaget, ce sont les actions (réelles ou intériorisées) que le sujet réalise sur les objets qui permettent de construire ses connaissances sur ceux-ci. L'activité du sujet est déterminée par ses connaissances sur les objets et leurs propriétés et est régulée avant l'action. Selon Robert et al. (2012), l'activité du sujet peut être modifiée suite à une comparaison entre les effets attendus sur les objets et l'impact de l'action réalisée sur ceux-ci. Une telle modification amène une régulation de l'action par le sujet et ainsi une restructuration de ses connaissances. Piaget utilise une dialectique assimilation/accommodation au sein d'un processus de déséquilibration/rééquilibration pour décrire le mécanisme de restructuration des connaissances (Robert et al., ibid.). Le sujet assimile la situation nouvelle à laquelle il est confronté et ses connaissances permettent d'anticiper le résultat d'une action sur un objet. Si le résultat attendu est mis en défaut lorsque l'action a été réalisée, il y a une déséquilibration. Le sujet doit alors accommoder ses connaissances dans la phase de rééquilibration. Rogalski (ibid.) explique ce processus de la manière suivante :

> « Dès que l'action du sujet conduit à une connaissance sur l'objet celui-ci peut se transformer : de nouvelles questions peuvent se poser à propos de cet objet et sur ces rapports avec d'autres. Des contradictions peuvent surgir aussi bien des nouvelles questions devenues possibles que de la confrontation de la nouvelle connaissance avec les anciennes » (Rogalski, ibid., p. 3).

Cette théorie permet de prendre en compte l'organisation des connaissances du sujet au sein d'un processus interne individuel. Il s'agit donc pour le sujet de construire de façon autonome ses connaissances à partir des actions qu'il peut effectuer. Toutefois, cette théorie se limite aux liens entre le savoir et les élèves et ne nous renseigne pas sur les interventions des enseignants dans la construction des connaissances (Robert et al., ibid.). La théorie de Vygotski permet, quant à elle, de tenir compte des relations entre l'enseignement et l'apprentissage et complète ainsi, selon Rogalski (Vandebrouck, 2008), la théorie de Piaget.

Une hypothèse admise par Vygotski (1997) est que les processus mentaux sont influencés par les relations socio-culturelles qui les médiatisent (Boschet, 1988). Ainsi, contrairement à Piaget, la construction des connaissances ne se fait pas par le biais de mécanismes internes au sujet mais plutôt grâce à un « processus d'assistance entre l'enfant et l'adulte, l'adulte agissant comme médiateur de la culture » (Boschet, ibid., p. 2). Chez Vygotski, les activités cognitives du sujet existent dans l'interaction sociale et il les intériorise par la suite (Vandebrouck, Robert, Rogalski, Abboud-Blanchard, Cazes,

Chesnais, & Hache, 2013). Le sujet chez Vygotski est alors un « sujet individuel et social, qui va construire les instruments de sa pensée dans l'interaction sociale » (Vandebrouck et al., ibid., p. 9), alors que chez Piaget, il s'agit plutôt d'un sujet épistémique.

Ainsi, au sein de la TA, l'apprentissage d'un élève sur un contenu mathématique donné à un moment précis de l'enseignement peut survenir à la fois quand l'élève travaille en toute autonomie et quand l'élève prend part à un travail collectif possiblement guidé par les médiations de l'enseignant (Grenier-Boley, 2019).

Une autre hypothèse fournie par Vygotski (ibid.) est que l'apprentissage scolaire se doit d'anticiper le développement des concepts et de les faire progresser. C'est pourquoi il a introduit la notion de zone proximale de développement (ZPD). La ZPD se situe entre tout ce que le sujet est capable de faire seul et ce qu'il peut faire avec l'aide d'autrui, comme par exemple un enseignant. Selon lui, ce qui est présent dans la ZPD à un moment donné se transforme au stade suivant pour constituer le niveau de développement actuel du sujet (Boschet, ibid.). Pour ce faire, les situations proposées au sujet doivent relever de la ZPD. En effet :

> « Tout se passe comme si lorsqu'on est « au-delà » de la ZPD, les aides ne produisent pas un apprentissage mais une copie ou une récitation, mécanique verbale sans suite, alors que si on est « en deçà », l'élève n'a rien à apprendre. En agissant dans cette zone, l'aide de l'enseignant, en particulier, va permettre aux concepts en développement de se transformer en concepts scientifiques. [...] Dans la ZPD, le développement permet l'apprentissage et l'apprentissage agit sur le développement » (Robert et al., 2012, p. 260).

Nous retenons de cette théorie l'importance des médiations de l'enseignant dans les apprentissages des élèves et d'un travail au sein des ZPD des élèves. Notons également que la notion de ZPD est rapportée à un sujet individuel alors que l'enseignant s'adresse à un collectif. Il ne peut donc en classe se faire qu'une représentation « moyenne » des différentes ZPD (Robert & Vandebrouck, 2014b). Par abus de langage, nous parlons souvent de la ZPD des élèves pour référer à celle-ci.

L'articulation de ces deux théories permet de prendre en compte les activités des élèves et des enseignants. En effet, la théorie piagétienne aide à étudier les acquisitions de connaissances chez les élèves. Nous avons notamment montré le processus réalisé par les élèves en autonomie pour que les connaissances nouvelles s'intègrent aux connaissances qu'ils ont déjà. La théorie vygotskienne aide à rendre compte des médiations de l'enseignant entre le savoir et l'élève. Ces interventions peuvent conduire l'élève à s'approprier de nouvelles connaissances à la condition qu'elles ne soient pas trop éloignées de ce qu'il connait déjà. Les théories piagétienne et vygotskienne ont été spécifiées aux mathématiques dans le contexte scolaire au sein de la TA. Celle-ci vise à mettre en relation les apprentissages des élèves et les pratiques enseignantes en étudiant les activités des différents sujets. Nous verrons aux points suivants comment poursuivre cet objectif.

1.2 Les activités comme intermédiaires pour étudier les liens enseignement/apprentissage

Le cadre de la TA étudie les liens entre l'enseignement d'un contenu mathématique et les apprentissages correspondants par l'intermédiaire des activités des sujets en classe. Selon Rogalski (Vandebrouck, 2008) :

> « L'objet de cette théorie est une activité finalisée et motivée : le sujet vise l'atteinte de buts d'action, et ce sont les mobiles de son activité qui sont le moteur de ses actions. La théorie vise l'analyse des processus en jeu chez le sujet agissant, et les processus par lesquels son activité évolue et par lesquels il se développe » (Vandebrouck, ibid., p. 23).

Nous nous intéressons dans ce cadre à un sujet [1] (élève ou enseignant) singulier, qui possède des compétences et qui, dans une approche vygotskienne, est inséré socialement au sein d'une classe (Robert et al., 2012). En particulier, nous voulons caractériser les apprentissages des élèves en mathématiques en relation avec les pratiques enseignantes. En effet, ce sont les choix réalisés par les enseignants, lors de l'élaboration du scénario sur une notion donnée, qui permettent de déterminer les apprentissages visés des élèves. De plus, ce sont aussi les choix effectués par l'enseignant dans la manière dont le scénario se déroule qui permettent de reconstituer *in fine* les apprentissages potentiels des élèves. C'est pourquoi les apprentissages des élèves sont décrits non seulement par le processus de conceptualisation mais aussi par le produit de cette conceptualisation [2], c'est-à-dire ce qui a été conceptualisé par les élèves pour une notion mathématique donnée et à un niveau précis de l'enseignement. La caractérisation de cette conceptualisation se fait en reconstruisant les activités des élèves en classe, car celles-ci sont considérées au sein de ce cadre théorique « comme pouvant engendrer des connaissances mathématiques » (Vandebrouck, ibid., p. 33). Ainsi, les liens enseignement/apprentissage sont étudiés par l'intermédiaire des activités des élèves, elles-mêmes influencées par les activités des enseignants. Nous précisons ce que nous entendons par « activité ».

La notion d'« activités » est très liée à celle de « tâches ». Ces deux notions clés en Théorie de l'Activité sont pourtant distinctes. Rogalski (Vandebrouck, ibid.) les définit de la façon suivante :

> « La tâche est ce qui est à faire ; le « but qu'il s'agit d'atteindre sous certaines conditions », selon la définition de la notion proposée par Leontiev (1984) » (Vandebrouck, ibid., p. 24).

> « L'activité est ce que développe un sujet lors de la réalisation de la tâche : non seulement ses actes extériorisés, mais aussi les inférences, les hypothèses qu'il fait, les décisions qu'il prend, dans ce qu'il fait et ce qu'il se retient de faire » (Vandebrouck, ibid., p. 24).

1. Chesnais (2019) parle de « sujet-personne » car les dimensions cognitive, psychologique, sociale, voire affective sont prises en compte.

2. Nous avons présenté au chapitre II une opérationnalisation de la définition proposée par Vergnaud (1991).

Nous retrouvons ici l'apport de la théorie piagétienne dans laquelle l'activité est liée au sujet alors que la tâche est liée aux actions qui vont être mises en œuvre pour la réaliser. Par exemple, l'élaboration d'un scénario est une tâche qu'un enseignant doit réaliser et pour ce faire il développe certaines activités comme choisir une progression des contenus ou un ensemble de tâches qu'il va proposer aux élèves. Du côté des élèves, une tâche désigne l'énoncé mathématique qui leur est proposé et les activités correspondent à ce que la tâche déclenche et qui va permettre le développement de connaissances (Bridoux, 2011). Les activités des sujets comprennent aussi ce qu'ils font, ce qu'ils ne font pas, ce qu'ils disent, ce qu'ils ne disent pas, ce qu'ils pensent, ce qu'ils ne pensent pas (Vandebrouck, ibid. ; Robert et al., ibid.). De ce fait, les activités des sujets sont en partie inaccessibles et nous n'avons accès qu'à des traces de celles-ci via les actions qu'ils mettent en œuvre pour réaliser les tâches. L'étude des activités des sujets passe donc en grande partie par une analyse des tâches (et donc des actions) qui leur sont proposées. C'est l'objet des points suivants.

1.3 Les pratiques enseignantes

La Double Approche didactique et ergonomique développée par Robert et Rogalski (2002) permet d'analyser les pratiques d'enseignants de mathématiques. L'objectif est de mieux comprendre les choix effectués par l'enseignant, vu comme un professionnel exerçant un métier, pour faire apprendre les élèves mais aussi de pouvoir déterminer les régularités et les variabilités dans les pratiques de plusieurs enseignants (Vandebrouck, ibid.).

Les pratiques des enseignants sont considérées comme un système complexe, cohérent et stable (Chesnais, 2009) dans lequel de nombreux déterminants du métier interviennent. Ils sont classés suivant cinq composantes (Robert, 2004 ; Vandebrouck, ibid.) :

- la composante cognitive (choix pour les contenus, les tâches, l'organisation du contenu, itinéraire cognitif, ...) ;
- la composante médiative (choix des déroulements, discours, les expositions des connaissances, ...) ;
- la composante institutionnelle (programme, horaire, manuels, la nature des mathématiques à enseigner, ...) ;
- la composante personnelle (représentations, expérience, connaissances de l'enseignant, ...) ;
- la composante sociale (collègues, parents, élèves, exigences ou contraintes liées à l'établissement, ...).

Toutes ces composantes sont très imbriquées les unes aux autres. En effet,

> « La composante personnelle, qui reflète notamment les conceptions globales de l'enseignant, ses connaissances, ses expériences, ses représentations métacognitives, oriente ses choix cognitifs et médiatifs, qui doivent aussi s'inscrire dans la manière dont l'enseignant veut tenir compte des contraintes institutionnelles et s'adapter à la réalité sociale qui lui est propre, sur un temps long » (Robert & Vandebrouck, 2014a, p. 23).

Il est toutefois possible d'inférer des éléments sur chacune des composantes. Les deux premières composantes des pratiques enseignantes sont dégagées à partir d'une ou plusieurs séances de classe. Il s'agit de reconstituer des logiques d'action guidant les décisions de l'enseignant dans l'objectif de faire apprendre les élèves (Chesnais, ibid.). Bien que les apprentissages mathématiques des élèves se font sur un temps long (Rogalski, 2003), il est possible de parvenir à reconstituer les logiques d'action des enseignants sans considérer un tel laps de temps. En effet, Robert (2007) a montré que les pratiques d'un même enseignant (non débutant) sont stables. De ce fait, des éléments sur ces deux premières composantes peuvent être déduits à partir d'analyses fines de quelques séances (temps court, le temps d'un chapitre). Les régularités qui en sont inférées pour un temps long permettent de lier les activités des élèves à leurs apprentissages. Elles permettent aussi de comparer les interventions de plusieurs enseignants dans le cadre d'un même chapitre et ainsi établir une palette de possibles. Les trois dernières composantes du métier peuvent être précisées à partir de l'analyse de séances de classe, de documents tels que les programmes scolaires mais aussi d'entretiens menés auprès des enseignants.

L'étude des pratiques enseignantes passe en partie par l'analyse des composantes cognitive et médiative du métier d'enseignant de mathématiques. Nous pouvons inférer des éléments sur la composante cognitive en étudiant le scénario que l'enseignant propose aux élèves, c'est-à-dire

> « l'ensemble ordonné des exercices et des cours prévus pour un chapitre ou une notion, y compris les évaluations, et le travail à la maison, avec des prévisions grossières de gestion (durée, répartition du travail) » (Robert et al., ibid., p. 18).

D'autres éléments peuvent être déduits pour la composante médiative par l'intermédiaire de l'analyse des déroulements en classe. En particulier, l'analyse de ces deux composantes du métier nous permet de relever ce qui dans les pratiques enseignantes peut influencer les activités des élèves comme, par exemple, les tâches choisies et les modalités du travail retenues par l'enseignant. À cette fin, nous présentons la méthodologie de recherche à suivre pour l'analyse (locale et globale) du scénario et des déroulements correspondants.

1.4 Méthodologie d'analyse des pratiques enseignantes

Notre objectif est d'étudier les effets potentiels de l'enseignement proposé par l'enseignant sur les apprentissages des élèves. La méthodologie générale issue de la TA propose dans un premier temps d'analyser le scénario élaboré en termes d'activités attendues des élèves à partir des tâches mathématiques prescrites par l'enseignant tout en prenant en compte le cours [3] et le bagage mathématique des élèves. La conceptualisation visée - et donc les apprentissages visés - par l'enseignant peut être définie.

3. Selon Grenier-Boley (2019), le cours réfère à la mise en forme cohérente par l'enseignant d'un texte de savoir sur un domaine précis. Il est le plus souvent présenté oralement et par écrit et participe à mettre en relation les connaissances antérieures et nouvelles des élèves.

Les activités attendues des élèves peuvent être modifiées lors des déroulements en classe. Il est possible que l'élève ne réalise pas directement la tâche prescrite par l'enseignant ; il peut la redéfinir, s'en faire une représentation, s'autoriser ou s'interdire de faire certaines actions, enlever ou poser certaines contraintes. L'élève réalise alors la tâche effective. Il se peut donc que cette tâche effective n'enclenche pas les mêmes activités chez les élèves que celle prescrite. De plus, les conditions de travail des élèves en classe influent aussi sur la qualité de leurs activités (Vandebrouck, ibid.). Des facteurs tels que la nature du travail organisé en classe (individuel, collectif, chercher, recopier, corriger, ...), la durée du travail des élèves, l'ordre dans lequel les tâches sont réalisées et les interventions de l'enseignant (questions, rappels, indications, aides, explications, ...) sont aussi à prendre en compte. C'est pourquoi, dans un second temps, une analyse du scénario qui s'est effectivement réalisé en classe est à accomplir. L'analyse des déroulements en classe permet de préciser, au regard des activités attendues des élèves, celles qui ont potentiellement eu lieu lors des séances de classe ordinaires. Celle-ci tient compte du travail organisé par l'enseignant en classe et permet de dégager l'autonomie qui est laissée aux élèves (Vandebrouck, ibid.). C'est donc le croisement de ces analyses *a priori* et *a posteriori* qui permet de reconstruire les activités possibles des élèves en classe. Rappelons que nous n'avons pas accès aux activités réelles des élèves mais uniquement à des traces de celles-ci, mais nous postulons que les activités possibles des élèves sont proches de leurs activités réelles et donnent accès à leurs apprentissages potentiels.

Nous inférons des éléments sur les pratiques enseignantes à partir de l'analyse *a priori* des scénarios et de l'analyse *a posteriori* des déroulements en classe correspondants. Afin de reconstituer les choix de l'enseignant, nous étudions la façon dont il organise et peut influencer les activités des élèves. Nous cherchons alors à déterminer les activités attendues des élèves, suite au scénario proposé par l'enseignant, et puis les activités possibles des élèves en tenant compte du travail organisé et des interventions de l'enseignant en classe. Nous distinguons dans nos analyses les moments de cours et les exercices. En effet, les activités des élèves sont plus facilement observables lors des phases d'exercices que lors des moments de cours (Bridoux, Chappet-Pariès, Grenier-Boley, Hache, & Robert, 2015). De ce fait, les outils utilisés sont différents pour ces deux moments.

►► Analyses *a priori* et *a posteriori* des moments de cours

Comme nous l'avons dit précédemment, le cours est une mise en forme d'un texte de savoir par l'enseignant tenant compte des contraintes institutionnelles et parfois même des difficultés rencontrées par les élèves. Il contient généralement des activités d'introduction, des définitions, des théorèmes, des propriétés, des démonstrations, des exemples, des exercices résolus, ... Le cours constitue, selon Bridoux, Grenier-Boley, Hache et Robert (2016b), une référence pour les élèves dont ils doivent emprunter les mots, les formulations et les notions (outils et objets). Ces auteurs font l'hypothèse que l'enseignant essaie durant les moments de cours de faire progresser les connaissances des élèves en restant « proche » d'eux, c'est-à-dire en activant des connexions entre les mots et leurs activités passées, actuelles ou futures (notion de pseudo-concepts de Vy-

gotski). L'étude des moments de cours passe donc à la fois par une analyse du texte du savoir, de sa mise en forme (organisation des contenus, formalisations, cadres, registres, points de vue, ...) et des différents rapprochements que l'enseignant effectue entre ce texte et les élèves.

Afin de mieux cerner les choix des enseignants, il est nécessaire de prendre en compte les contraintes institutionnelles, les difficultés des élèves sur les notions visées mais aussi les spécificités des notions mathématiques. Une étude de relief sur les notions à enseigner nous sert alors de référence pour l'analyse *a priori* du cours. Selon Robert (Vandebrouck, ibid., p. 45), elle « permet de réfléchir d'une manière globale à l'enseignement d'une notion donnée, inscrite dans un programme d'enseignement donné, et d'étudier le scénario correspondant ». Par exemple, elle peut nous servir de référence pour évaluer la correspondance entre l'introduction choisie par l'enseignant pour une notion et les spécificités de celle-ci (type de la notion). Il s'agit alors, sur la base de l'étude de relief, d'étudier comment la distance entre les connaissances antérieures des élèves et les nouvelles connaissances a été prise en compte dans l'introduction (cf. chapitre II, point 2.1). Nous illustrons ce point dans l'analyse des manuels au chapitre VII. L'étude de relief, plus généralement, permet de déterminer les aspects majorés ou minorés dans le scénario pour les moments de cours (Bridoux, Grenier-Boley, Hache, & Robert, 2016a).

Dans une visée vygotskienne, nous savons que la qualité des médiations de l'enseignant en classe peut influencer les activités des élèves (Abboud-Blanchard et al., 2017). Par exemple, l'enseignant peut mettre en évidence l'organisation des connaissances et établir les liens entre le cours et les exemples ou entre les différentes parties du cours. Il peut également attirer l'attention des élèves sur les erreurs fréquentes occasionnées par les nouvelles notions. Il peut expliquer aux élèves à quoi servent les connaissances étudiées, comment les utiliser ou dire quel est le travail mathématique à réaliser (Robert & Robinet, 1996). Il peut également faire des rappels, reprendre certaines choses, donner quelques éclaircissements. Il est donc important, dans l'objectif d'étudier les liens entre les activités des élèves et leurs apprentissages, de prendre en compte tout ce que l'enseignant peut ajouter aux contenus mathématiques dans son discours lors des moments d'exposition des connaissances (lors des cours).

Robert et Robinet (1993) ont introduit les « commentaires méta » pour faire référence aux commentaires ajoutés par l'enseignant sur les mathématiques en jeu. Elles précisent que ce terme désigne :

> « des éléments d'information ou de connaissances SUR les mathématiques, sur leur fonctionnement, sur leur utilisation, sur leur apprentissage, qu'ils soient généraux ou tout à fait liés à un domaine particulier » (Robert & Robinet, 1996, p. 156).

Les commentaires méta sont des ajouts dans le discours de l'enseignant qui portent notamment sur les mathématiques, sur la nature des notions, leur fonctionnement, le type de travail qu'elles permettent de faire, le « jeu auquel on joue », les mises en relation entre cours/exercices, les mises en relation entre les connaissances que les élèves ont déjà et les connaissances nouvelles, les éléments de structuration dans le temps ou la

mémoire de la classe (Chappet-Pariès, Pilorge, & Robert, 2017 ; Chappet-Pariès, Robert, Millon-Fauré, & Drouhard, 2014 ; Bridoux et al., 2016a). Tenaud (1991) distingue les commentaires sur le fonctionnement des mathématiques (pourquoi ? pour quoi ?), sur la structuration globale (comment ?) et ceux liés au contexte rencontré prenant en compte les données, les hypothèses et la conclusion dans la résolution d'une tâche. Nous repérons alors dans le discours de l'enseignant les commentaires méta donnés car ce type de médiations de la part des enseignants entre les élèves et les mathématiques peuvent intervenir dans la construction des connaissances par les élèves (Robert & Robinet, ibid.). Ces auteurs ajoutent :

> « Tout se passerait comme si, [...], ces éléments jouaient, pour certains élèves, un rôle de catalyseur dans l'acquisition des connaissances [...] » (Robert & Robinet, 1993, p. 21).

Cependant, il reste difficile de savoir quels sont les effets de ces commentaires sur la construction des connaissances par les élèves. Toutefois, plusieurs recherches sur les notions FUG (Dorier, 1995 ; Bridoux, 2011) montrent que les commentaires méta constituent un levier important pour les apprentissages des élèves car ils aident à compenser l'éloignement entre la nouvelle notion et les connaissances déjà-là des élèves.

Parmi les commentaires méta que le chercheur repère dans l'analyse des déroulements, il y en a qui tentent un rapprochement entre ce qui est visé et les élèves et relèvent donc de la ZPD [4] des élèves. C'est le cas par exemple des rappels que l'enseignant peut donner en classe. Pour qualifier les activités enseignantes pendant les déroulements en classe - en particulier le discours de l'enseignant - interprétées par le chercheur comme une tentative de rapprochement avec les élèves, Robert et Vandebrouck (2014a, 2014b) ont introduit la notion de proximité-en-acte. Selon Bridoux et al. (2016a), ce sont la quantité et la qualité de ces proximités qui déterminent « l'efficacité » d'un cours en termes d'apprentissage. En effet :

> « L'efficacité des cours dépendrait alors notamment des occasions et de la qualité de l'activation de ces connexions, de ces liens entre des connaissances contextualisées (exercices, activités) et du savoir décontextualisé [...] en particulier des [tentatives de] rapprochements entre activités, connaissances déja-là et connaissances nouvelles des élèves » (Bridoux et al., ibid., p. 193).

Le chercheur doit analyser le discours de l'enseignant en termes de proximités. Cette analyse est donc en partie subjective. En effet, le chercheur doit se représenter ce que l'enseignant a admis comme étant proche des élèves et de leurs connaissances (dans la ZPD) pour mieux repérer les proximités possibles. L'étude de relief l'aide à apprécier ce qui est nouveau, ce qui est supposé connu par les élèves, ce qui est difficile pour eux (Bridoux et al., ibid.), ce qui est supposé être dans leur ZPD. En s'appuyant sur cette référence, le chercheur analyse *a priori* les contenus pour traquer les occasions de proximités. L'analyse des déroulements des cours est ensuite réalisée pour repérer *a*

4. Rappelons qu'il est important de travailler au sein de la ZPD des élèves pour les faire apprendre (Vygotski).

posteriori les proximités possibles dans le discours de l'enseignant. Il est à noter que les proximités repérées par le chercheur sont toujours potentielles :

> « d'une part il n'est pas certain que l'enseignant l'ait conçu comme telle, mais, d'autre part, il n'est pas certain que cela soit efficace pour les élèves, que la proximité soit reconnue et source de progrès » (Bridoux et al., ibid., p. 197).

Il se peut donc que la représentation de la ZPD des élèves par le chercheur ne corresponde pas à celle que se donne l'enseignant et réciproquement. Cela peut donner lieu à des occasions de proximités manquées de la part de l'enseignant ou à des proximités qui ne sont pas prévues par le chercheur (proximités imprévues). Il se peut aussi que l'enseignant se fasse une idée de la ZPD des élèves qui soit trop éloignée de la ZPD « réelle » d'un ou de plusieurs élèves. Dans ce cas, les proximités potentiellement présentes dans le discours de l'enseignant peuvent être ratées. Nous aurons des exemples de telles proximités dans le chapitre VIII.

Pour dégager ces proximités potentielles du discours, nous étudions le discours de l'enseignant pendant l'exposé du texte du savoir, lors des échanges avec les élèves et lors des jeux de questions/réponses (Bridoux et al., ibid.). Les proximités dépendent fortement de la classe, des élèves, des contenus, du moment des apprentissages et des enseignants (Vandebrouck & Robert, 2017). En particulier, nous repérons les médiations ayant trait à la présentation des éléments décontextualisés, aux liens entre ces éléments et les activités que les élèves ont déjà réalisées, aux exemples et/ou aux exercices résolus, aux mises en relation entre les connaissances nouvelles et celles que les élèves ont déjà et à la contextualisation de ces éléments que les élèves ont à mettre en œuvre (Bridoux et al., ibid.). Autrement dit, nous ciblons, dans l'analyse des déroulements, tous les ajouts au contenu strictement mathématique dans le discours des enseignants concernant les passages décontextualisé/contextualisé et s'appuyant sur ce que les élèves ont déjà fait et connaissent déjà, c'est-à-dire dans leurs ZPD.

Trois types de proximités discursives ont été distingués dans le discours des enseignants (Bridoux et al., ibid.) : les proximités ascendantes, les proximités descendantes et les proximités horizontales. Cette catégorisation des proximités dépend des liens explicités entre décontextualisé/contextualisé. Ainsi, ces proximités sont déterminées par leur degré de généralité. Les proximités ascendantes se placent entre ce que les élèves ont déjà fait et le nouveau. Elles explicitent comment la nouvelle notion a été généralisée à partir de ce que les élèves ont déjà fait sur un cas particulier ou un exercice. Par exemple, l'enseignant peut proposer une tâche aux élèves demandant de décrire une droite par une équation vectorielle sachant qu'elle passe par les points $A(1,0,0)$ et $B(1,2,3)$ et de calculer les composantes des vecteurs. Les élèves doivent d'abord écrire une équation de la forme $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$ où P est un point quelconque de la droite AB et λ est un réel. Ils doivent ensuite calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AB}$. Une équation paramétrique de la droite AB est de la forme $(x,y,z) = (1,0,0) + \lambda(0,2,3)$ où λ est un réel. L'enseignant peut s'appuyer sur le travail déjà réalisé par les élèves sur ce cas particulier pour généraliser la forme d'une équation paramétrique d'une droite (Nihoul, 2018). Une proximité ascendante possible serait « Dans cette équation, vous

avez ici (membre de gauche) les coordonnées du point quelconque P. Ici (membre de droite), ce sont les coordonnées de votre point A donné dans l'énoncé. Là, ce sont les composantes que vous avez calculées du vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ en soustrayant des coordonnées du point B les coordonnées du point A. Si on veut décrire la droite passant par les points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ par une équation paramétrique, on aura : $(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + \lambda(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ où λ est un réel. Vous avez bien ici les coordonnées du point A et là les composantes du vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ de la droite. ».

Les proximités descendantes se placent entre ce qui a été exposé et des exemples ou des exercices à faire ensuite avec ou par les élèves. Elles explicitent comment la connaissance nouvelle peut être utilisée dans un exercice ou une démonstration. Par exemple, l'enseignant peut introduire en toute généralité qu'une équation paramétrique d'une droite dans l'espace passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur (x_v, y_v, z_v) est de la forme $(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + \lambda(x_v, y_v, z_v)$ où λ est un réel. Il peut ensuite proposer aux élèves une tâche dans laquelle une équation paramétrique d'une droite doit être déterminée sachant qu'elle passe par le point $A(1,2,3)$ et dont un vecteur directeur est $(2,5,6)$. Une proximité descendante possible serait « Puisque nous connaissons déjà les composantes d'un vecteur directeur et les coordonnées d'un point de la droite, nous pouvons directement appliquer le résultat du cours. On a : (x, y, z) égal les coordonnées du point A, c'est-à-dire $(1,2,3)$, plus le paramètre λ fois les composantes de votre vecteur directeur, c'est-à-dire $(2,5,6)$. Nous avons alors $(x, y, z) = (1,2,3) + \lambda(2,5,6)$ où λ est un réel. ».

Les proximités horizontales n'amènent pas de changement de degré de généralité. Elles peuvent porter sur le cours en train de se faire, sur la structuration du cours ou sur les méthodes en jeu. Elles peuvent également expliciter une suite de calculs ou le sens d'un théorème. Par exemple, si l'enseignant demande aux élèves de résoudre un système composé des équations $x = 3$ et $(x, y, z) = (0,1,2) + k(1,2,3)$, où k est un réel, et dit « pour résoudre ce système, vous devez substituer dans la deuxième équation x par 3 et utiliser les opérations sur les vecteurs pour trouver d'abord la valeur du paramètre k et puis celle du point d'intersection », alors il y a une proximité horizontale possible. En effet, il explique la méthode à appliquer dans cet exemple, sans pour autant donner un procédé général de résolution des systèmes linéaires (Nihoul, ibid.). Les types de proximités doivent donc être précisés dans les différentes analyses menées.

►► Analyses *a priori* et *a posteriori* des exercices

Lors des phases d'exercices, nous prenons en compte les variables dans les pratiques enseignantes qui peuvent influencer les activités des élèves. Nous avons déjà mentionné que le choix des tâches est une variable des apprentissages. Une autre variable influençant les activités des élèves - et donc leurs apprentissages - concerne les conditions de travail des élèves (Vandebrouck, 2008). Une troisième variable à étudier est la qualité et la nature des échanges entre l'enseignant et les élèves ou entre les élèves. Nous précisons ici comment inférer des éléments sur les pratiques enseignantes en fonction de ces variables.

Afin de déterminer les tâches qui ont été choisies par l'enseignant, nous analysons *a priori* toutes les tâches prescrites par celui-ci. L'objectif est de cerner ce qui est mathématiquement en jeu dans leurs résolutions, compte tenu du cours suivi et du bagage mathématique des élèves. Les activités attendues des élèves peuvent par ce biais être déterminées et l'itinéraire cognitif prévu par l'enseignant pour les élèves peut être reconstitué.

Dans l'analyse *a priori* des tâches, nous nous intéressons en particulier à l'utilisation que les élèves peuvent avoir de leurs connaissances (anciennes, en cours d'acquisition, nouvelles) lorsqu'ils réalisent chacune des tâches prescrites (Vandebrouck, ibid.). Pour ce faire, les tâches sont caractérisées par les mises en fonctionnement des connaissances des élèves dont nous avons parlé dans le chapitre II au point 2.3. Rappelons qu'il y a trois niveaux de mise en fonctionnement des connaissances : technique, mobilisable et disponible. Les niveaux sont déterminés à partir des différentes adaptations des connaissances (cf. chapitre II, point 2.3) que les élèves doivent réaliser pour résoudre la tâche. Si la résolution d'une tâche demande une application immédiate d'une définition ou d'une propriété alors le niveau de mise en fonctionnement est technique. Si des adaptations des connaissances sont à réaliser pour résoudre la tâche, le niveau de mise en fonctionnement est mobilisable ou disponible en fonction du fait qu'elles soient plus ou moins indiquées dans l'énoncé. Il est clair que pour cette analyse nous devons tenir compte des programmes scolaires, de la classe dans laquelle le scénario étudié est mis en œuvre, de la place occupée par les exercices dans le scénario et de la répétition des tâches proposées (Vandebrouck, ibid.) car ce sont des éléments qui peuvent modifier le niveau de mise en fonctionnement des connaissances. Ainsi, pour chaque scénario étudié, nous précisons deux variables des apprentissages (Robert et al., 2012) : la variété (quantité, qualité, ordre) des tâches et la diversité des adaptations proposées (et donc des niveaux de mise en fonctionnement des connaissances). Nous pouvons alors de cette classification des tâches et des activités attendues des élèves mettre en évidence certains manques éventuels (Robert & Roditi, 2019) au sein des scénarios.

Toutes les tâches prescrites par l'enseignant ne sont pas forcément réalisées en classe. L'analyse *a posteriori* des tâches permet de préciser lesquelles ont été effectivement réalisées, l'ordre dans lequel elles ont été réalisées et la durée associée à leur réalisation. Ces facteurs liés à la chronologie des tâches influencent également les activités des élèves.

Nous déduisons des déroulements provoqués par l'enseignant les conditions de travail des élèves. Il s'agit de repérer tout ce qui est imposé par l'enseignant et qui peut influencer les activités des élèves comme la nature du travail instauré en classe et la qualité des interventions. En effet,

> « on suppose en particulier que les apprentissages des élèves sont favorisés par deux conditions : que les élèves soient en autonomie face aux activités que l'enseignant leur propose (Piaget), mais aussi que soient pris en compte le caractère collectif du déroulement de la séance organisé par l'enseignant et la possibilité de travailler au sein des ZPD des élèves (Vygotski) » (Grenier-Boley, 2019, p. 76).

La nature du travail demandé par l'enseignant peut modifier les mises en fonctionnement des connaissances sur une tâche. Celle-ci est déterminée par les types et les formes de travail. De ce fait, les formes de travail (individuel, collectif), les enjeux du travail (recherche, écrit, écrit collectif, correction, ...) et les types de travail (chercher, écrire, parler, écouter, rédiger, recopier, ...) sont précisés pour chaque tâche (Vandebrouck, ibid.). Un autre facteur pouvant modifier les mises en fonctionnement des connaissances est la qualité et la nature des échanges entre l'enseignant et les élèves ou entre les élèves. Le chercheur doit alors analyser le jeu de questions et réponses en classe, dont font partie les relances, les reprises et les aides de l'enseignant. Ces interventions sont caractérisées à la fois par ce sur quoi elles portent mais aussi par le moment où elles se produisent en relation avec le travail des élèves (Vandebrouck, ibid.). Il s'agit alors pour le chercheur de repérer dans le discours de l'enseignant les commentaires méta [5] qui ont pour objectif d'aider les élèves dans la réalisation d'une tâche. Une fois ces aides repérées, nous devons préciser le type de l'aide et le moment où elle est donnée par l'enseignant. Deux types d'aides ont été distingués : les aides procédurales et les aides constructives (Pariès, Robert, & Rogalski, 2008 ; Robert, 2007). Les aides à fonction procédurale modifient les activités des élèves par rapport à celles qui sont prévues *a priori*. Selon Vandebrouck (ibid.), ces aides peuvent être données par l'enseignant avant ou pendant le travail des élèves et peuvent conduire à un découpage de la tâche en plusieurs sous-tâches. Elles peuvent donc modifier les adaptations des connaissances, et ainsi les niveaux de mises en fonctionnement, orientant parfois l'activité des élèves vers une application immédiate des résultats. Selon Pariès et al. (2014), il faut distinguer les aides procédurales indiquant explicitement ce qui est à faire ou à utiliser (directes), des aides procédurales questionnant ce qui est à faire ou à utiliser (indirectes). Les aides constructives « ajoutent quelque chose entre l'activité stricte de l'élève et la construction (espérée), dans sa tête, de la connaissance qui pourrait en résulter » (Vandebrouck, ibid., p. 51). Dans ce cas, l'enseignant s'appuie sur ce que les élèves ont fait pour apporter des commentaires. Les reprises du travail déjà réalisé, les rappels et les bilans en font partie, mais aussi tout ce qui aide l'élève à prendre de la distance par rapport au travail qu'il a déjà fait (dégager une méthode plus générale, discuter des résultats, ...). Cette analyse du discours de l'enseignant est encore une fois subjective car il est possible que l'enseignant ne soit pas conscient des aides qu'il fournit, mais aussi qu'une aide qualifiée d'un certain type, par le chercheur, ne soit pas entendue ou soit d'un autre type pour certains élèves (Pariès et al., 2014). Certaines aides constructives s'appuyent sur la ZPD des élèves et peuvent ainsi être qualifiées par le chercheur de proximités. D'autres aides fournies par l'enseignant peuvent rapprocher la tâche à résoudre des connaissances et des activités que les élèves ont déjà, pour pouvoir ensuite s'y appuyer et tenter des proximités. C'est pourquoi Robert et Vandebrouck (2014b) précisent que l'analyse des aides est complémentaire de celle des proximités. Des exemples d'aides sont présentés dans le chapitre VIII.

Toutes ces analyses nous aident à apprécier, par comparaison entre ce qui est attendu et ce qui est effectif, les déroulements et les activités possibles des élèves (Robert

5. Notons que certains commentaires méta ne sont ni des proximités, ni des aides. C'est par exemple le cas de tous les enrôlements que l'enseignant peut faire pour garder les élèves en activité.

& Vandebrouck, ibid.). Pour les reconstruire, nous sommes amenée à distinguer, en fonction des aides proposées par l'enseignant, les activités *a minima* et les activités *a maxima*. Les activités *a maxima* sont celles réalisées par les élèves dès que l'enseignant le demande et sans qu'il ait besoin de fournir une quelconque aide. Ce sont souvent les activités des élèves les plus forts. Les activités *a minima* sont celles réalisées par les élèves quand un maximum d'éléments ont été indiqués, après de nombreuses aides (souvent procédurales) fournies par l'enseignant. Ce sont souvent les activités des élèves les plus faibles. L'analyse des aides que l'enseignant donne en classe permet ainsi de déterminer les activités *a minima* et *a maxima*. Nous déterminons ainsi un empan d'activités possibles des élèves en classe compris entre les activités *a minima* et les activités *a maxima* (Chesnais, 2009).

2 Question de recherche et méthodologie générale

Dans la partie 1, nous avons réalisé une étude du relief sur les notions de droites et de plans dans l'espace. Nous avons ainsi pu déterminer que pour conceptualiser ces notions, il est nécessaire de développer chez les élèves une certaine flexibilité entre les cadres (synthétique, vectoriel et analytique), les registres et les points de vue (cartésien et paramétrique). De plus, l'interprétation géométrique des objets doit être travaillée car elle permet de donner du sens à ces notions. Les nouveaux programmes de l'enseignement secondaire belge semblent permettre de proposer de telles activités aux élèves. La première formulation de notre question recherche présentée au chapitre V est :

> Comment les enseignants prennent en compte les nouvelles injonctions des programmes, sur les droites et les plans dans l'espace, dans les activités qu'ils proposent aux élèves, afin de développer leur interprétation géométrique des objets et favoriser la conceptualisation de ces notions ?

Ce questionnement nous amène à nous intéresser à la fois à l'enseignement proposé sur ces notions par les enseignants et aux apprentissages correspondants des élèves. Nous voulons dans un premier temps étudier les pratiques des enseignants et en particulier les choix qu'ils effectuent dans l'élaboration du scénario d'enseignement et dans les déroulements en classe. Nous cherchons ensuite à déterminer les effets potentiels de ces pratiques sur les apprentissages des élèves pour les notions de géométrie analytique dans l'espace. Un cadre théorique permettant de tenir compte de cette double approche est celui de la Théorie de l'Activité. C'est pourquoi nous avons inséré notre questionnement au sein de celui-ci. Cela nous amène à caractériser la conceptualisation de ces notions, et donc les apprentissages correspondants, par l'intermédiaire des activités possibles des élèves provoquées par les activités des enseignants. En particulier, nous cherchons à déterminer les choix réalisés par les enseignants permettant potentiellement de provoquer des activités chez les élèves à partir de tâches mathématiques mettant en jeu une certaine flexibilité (cadres, registres, points de vue) et l'interprétation géométrique des objets. Dans ce qui suit, nous précisons les activités qui, selon nous, peuvent potentiellement être développées.

Nous considérons qu'un élève est capable d'interpréter géométriquement les objets de droites et de plans dans l'espace à partir du moment où ces deux aspects sont développés : reconnaître à partir de n'importe quelle description (équations, ensembles) l'objet géométrique associé et associer à un objet géométrique n'importe quelle description. Par exemple, si un élève peut dire que l'équation $2x+3y=5$ décrit un plan dans l'espace alors il est capable de reconnaître à partir d'une équation (cartésienne) l'objet géométrique correspondant. Cette reconnaissance de l'objet peut être plus précise si l'élève ajoute qu'il s'agit d'un plan dont un vecteur normal est $(2,3,0)$ et passant par le point $(1,1,3)$. Réciproquement, si un vecteur normal et un point d'un plan sont donnés et qu'une équation cartésienne de ce plan est écrite par un élève alors il est capable de décrire un objet géométrique par une équation (cartésienne). Il nous semble important que les élèves développent ces deux aspects pour être capable d'interpréter géométriquement les objets et ce pour les équations (dans tous les points de vue) et pour les ensembles.

Les activités des élèves liées à l'interprétation géométrique des objets peuvent être variées. En effet, elles dépendent fortement de ce qui a été fait et vu lors des moments de cours. Par exemple, une tâche peut être de déterminer l'objet décrit par l'ensemble des vecteurs orthogonaux à un vecteur donné. Il s'agit alors de travailler la reconnaissance des objets à partir d'un ensemble. S'il a déjà été établi en classe que cet ensemble représente un plan, cette tâche consiste en une application immédiate du résultat. À l'inverse, si ce résultat n'a pas été vu, des conversions de registres peuvent survenir. Il se peut qu'un élève représente cet ensemble par un dessin avant de reconnaître le plan. Il est possible également que la condition d'orthogonalité des vecteurs soit traduite grâce à un produit scalaire nul. Le plan est alors décrit par une équation cartésienne. Dans les deux cas, il s'agit d'une conversion entre le registre ensembliste et un autre registre (dessin ou algébrique). Les activités des élèves associées à l'interprétation géométrique dépendent aussi fortement des tâches. Par exemple, déterminer une équation cartésienne d'un plan dont on connait un point et un vecteur normal est une tâche qui relève du niveau technique de mise en fonctionnement des connaissances et travaille le deuxième aspect de l'interprétation géométrique (description d'un objet). D'autres tâches, travaillant aussi cet aspect de l'interprétation géométrique, peuvent amener des adaptations plus variées des connaissances. C'est par exemple le cas lorsqu'une équation cartésienne d'un plan doit être déterminée connaissant un point et deux vecteurs directeurs du plan. Une méthode pour résoudre cette tâche consiste à écrire une équation paramétrique du plan et à éliminer les paramètres. Une deuxième méthode amène à calculer un déterminant d'une matrice 3×3 et à l'égaler à zéro. Une troisième méthode consiste à chercher un vecteur simultanément orthogonal aux deux vecteurs directeurs donnés. Il y a donc un choix de méthode à effectuer. Le raisonnement est à chaque fois découpé en plusieurs étapes. Un changement de points de vue dans le sens paramétrique/cartésien peut apparaitre. Dans tous les cas, des adaptations des connaissances sont à réaliser. Ainsi, les activités d'interprétation géométrique des objets doivent être précisées en fonction du scénario étudié.

La flexibilité entre les cadres, les registres et les points de vue amène principalement des activités de traitements internes chez les élèves tels que les jeux de cadres,

les conversions de registres et les changements de points de vue. Nous avons donné des exemples de traitements internes possibles pour les tâches mettant en jeu l'interprétation géométrique des objets. D'autres tâches peuvent aussi provoquer de telles activités. C'est par exemple le cas lorsqu'il faut tester la perpendicularité de deux plans dont une équation cartésienne est donnée. Il s'agit de calculer un produit scalaire entre les deux vecteurs normaux et de vérifier s'il est nul ou non. Un changement de cadres entre la géométrie analytique et la géométrie vectorielle a lieu. Un autre exemple consiste à représenter sur un dessin les objets décrits par une équation. Une conversion entre les registres algébrique et du dessin/graphique est nécessaire. Dans ces deux cas, des traitements internes sont à réaliser bien que l'interprétation géométrique ne soit pas en jeu. En effet, il ne s'agit ni de reconnaître l'objet décrit par ces équations, ni d'en déterminer une équation. C'est pourquoi nous étudions également les activités de traitements internes dans les scénarios proposés par les enseignants.

Dès lors, nous nous intéressons au sein des scénarios proposés par les enseignants aux activités de traitements internes et d'interprétation géométrique des droites et des plans dans l'espace. Les programmes actuels semblent donner la possibilité aux enseignants de proposer des tâches qui vont potentiellement développer ces activités. Au vu de toutes les variables dans les pratiques enseignantes qui peuvent influencer les activités des élèves, notre question de recherche devient alors :

Est-il possible, dans l'enseignement secondaire belge francophone, de proposer un ensemble de tâches consistantes aux élèves, sur les notions de droites et de plans dans l'espace, permettant de développer potentiellement les activités de traitements internes et d'interprétation géométrique de ces objets ?

Afin d'obtenir des éléments de réponse à cette problématique, nous précisons la méthodologie générale que nous mettons en œuvre.

En amont de l'enseignement, une étude de relief sur les notions de droites et de plans dans l'espace est à mener. Elle constitue à la fois une référence pour nos analyses didactiques et pour la conception de notre séquence d'enseignement sur ces notions. Nous avons déjà réalisé une telle étude dans la partie 1. Nous la complétons par une analyse de plusieurs manuels belges au chapitre VII. Plusieurs arguments permettent de justifier ce choix. Tout d'abord, les manuels belges sont les seules ressources officielles à la disposition des enseignants. Leur analyse permet de déterminer les scénarios qui peuvent potentiellement se produire dans les classes et ainsi mettre plus facilement en évidence dans les scénarios des enseignants, les choix qu'ils ont eu à faire en termes de contenus, de tâches et de déroulement. De plus, les manuels constituent une interprétation possible des programmes à l'intérieur d'un système de contraintes (Mesnil, 2014). Or, comme ceux-ci ne sont pas encore conformes aux nouveaux programmes belges, leur analyse permet également de mettre en évidence les éventuels choix que les enseignants effectuent pour tenir compte des nouvelles injonctions. Finalement, une comparaison entre les manuels, dans lesquels l'enseignant est absent, et les scénarios proposés dans les classes, nous aide à mieux comprendre le rôle des interventions de l'enseignant en classe (Bridoux et al., 2016a).

Nous réalisons ensuite une analyse *a priori* des scénarios proposés par plusieurs enseignants belges. Nous analysons à la fois les cours (contenus, organisation des contenus, occasions de proximités) et les exercices (tâches, adaptations, niveaux de mise en fonctionnement) afin de déterminer les activités attendues des élèves par les enseignants. Nous nous sommes, par la suite, rendue sur le terrain et nous avons filmé les déroulements en classe de chacun des scénarios analysés précédemment. L'analyse *a posteriori* des déroulements (conditions de travail, aides, proximités possibles) permet, par comparaison avec l'analyse *a priori*, de reconstruire les activités possibles des élèves en classe. Cette étude de terrain est réalisée au chapitre VIII. Nous pouvons finalement apporter des éléments de réponse à notre problématique.

Cet état des lieux des pratiques enseignantes belges nous amène à proposer une séquence d'enseignement sur les notions de droites et de plans dans l'espace. Celle-ci fera l'objet de la partie 3.

Chapitre VII

Analyse des manuels scolaires belges

La première étape de notre méthodologie générale est de compléter notre étude de relief sur les notions de droites et de plans dans l'espace par une analyse des manuels belges francophones. Puisque les manuels scolaires sont souvent utilisés par les enseignants lorsqu'ils élaborent leur séquence d'enseignement (Gueudet & Trouche, 2010), leur analyse permet d'avoir un accès aux scénarios que nous pouvons potentiellement trouver dans les classes. Dans ce chapitre, nous précisons la méthodologie suivie et les résultats de cette analyse.

1 Éléments méthodologiques

Nous avons étudié l'ensemble des manuels de mathématiques pour la sixième année [1] de l'enseignement secondaire disponibles sur le marché belge francophone pour l'option « mathématiques pour scientifiques ». Les élèves ayant choisi cette option ont 6 heures (voire parfois 8 heures) de mathématiques hebdommadaires. Nous avons selectionné ces manuels car nous pensons qu'ils sont les plus « complets ». Nous avons ainsi analysé trois manuels : *CQFD* (2014), *Espace Math* (2004) et *Actimath* (2015). Bien que ces manuels ne soient pas conformes aux programmes actuels, il est possible que les enseignants les utilisent encore en classe au vu du nombre très limité de manuels conformes à ceux-ci. Nous avons également analysé le seul manuel actuellement conforme à ces nouveaux programmes : *CQFD* (2019).

Notre question de recherche formulée dans le chapitre VI nous amène à étudier le scénario (potentiel) qui est proposé dans les manuels. Nous voulons déterminer les activités qui peuvent potentiellement être attendues des élèves à partir des tâches mathématiques présentes dans le scénario et en tenant compte à la fois de leurs connaissances antérieures et du cours exposé dans le manuel. L'étude de relief sur les notions de géométrie analytique dans l'espace, réalisée dans la partie 1, nous aide à définir ce qui peut

1. Rappelons que lors de notre analyse de manuels, ceux-ci n'étaient pas conformes aux nouveaux programmes. Le chapitre des droites et de plans dans l'espace était alors vu en sixième année.

être dans la ZPD des élèves et nous guide dans nos analyses. En nous appuyant sur cette référence, nous analysons la partie cours du manuel. Nous y traquons les cadres, les registres et les points de vue en jeu ainsi que les traitements internes réalisés. Nous analysons également les moments où une interprétation géométrique est effectuée. Nous cherchons à préciser les aspects de l'interprétation géométrique (reconnaître - décrire) abordés par le scénario et les activités qui peuvent en découler. De plus, nous avons relevé que ces notions ont la spécificité d'être des extensions avec accidents des notions de géométrie analytique plane. Nous repérons alors la façon dont le scénario intègre les connaissances nouvelles aux connaissances que les élèves ont déjà ainsi que la gestion des éventuelles ruptures. Bien qu'il s'agit d'un manuel et que l'enseignant est absent de ce média, nous repérons les occasions de proximités qui peuvent être tentées par un enseignant en classe. Cela nous aidera par la suite à mieux comprendre le rôle des échanges entre l'enseignant et les élèves dans la classe (Bridoux et al., 2016a). Finalement, nous analysons *a priori* l'ensemble des tâches à l'aide de l'outil des adaptations des connaissances exposé au chapitre II (point 2.3) parmi lesquelles nous retrouvons les traitements internes. Nous pointons aussi les aspects de l'interprétation géométrique qui sont développés (ou non) dans ces tâches.

Nous choisissons de découper nos analyses en trois parties : les activités d'introduction, le cours [2] et les exercices. Pour chacune de ces parties, nous présentons une analyse globale pour l'ensemble des manuels. Nous en déduisons ensuite les activités qui peuvent être potentiellement attendues des élèves.

2 Chapitres analysés dans les manuels

Trois collections ont été étudiées : *Espace Math*, *CQFD* et *Actimath*. Nous précisons ici les chapitres qui ont été analysés.

Pour la collection *Espace Math* nous avons analysé à la fois le manuel contenant la théorie sur la géométrie analytique (Adam & Lousberg, 2004a) et le manuel d'exercices (Adam & Lousberg, 2004b). En particulier, pour ces deux manuels, nous nous sommes concentrée sur le chapitre 5 intitulé « Géométrie analytique dans l'espace (1re partie) » et sur le chapitre 8 intitulé « Géométrie analytique dans l'espace (2e partie) ». Pour la collection *CQFD*, nous avons ciblé le chapitre 6 intitulé « Géométrie analytique de l'espace » dans la version conforme aux anciens programmes (Annoye, Gilon, Van Eerdenbrugghe, & Wilemme, 2014) et le chapitre 11 intitulé également « Géométrie analytique de l'espace » dans la nouvelle version (Annoye, Gilon, Van Eerdenbrugghe, & Wilemme, 2019). En ce qui concerne la collection *Actimath*, nous nous intéressons au chapitre 2 intitulé « Géométrie analytique des plans et des droites ».

Nous abordons maintenant les analyses de ces différents chapitres.

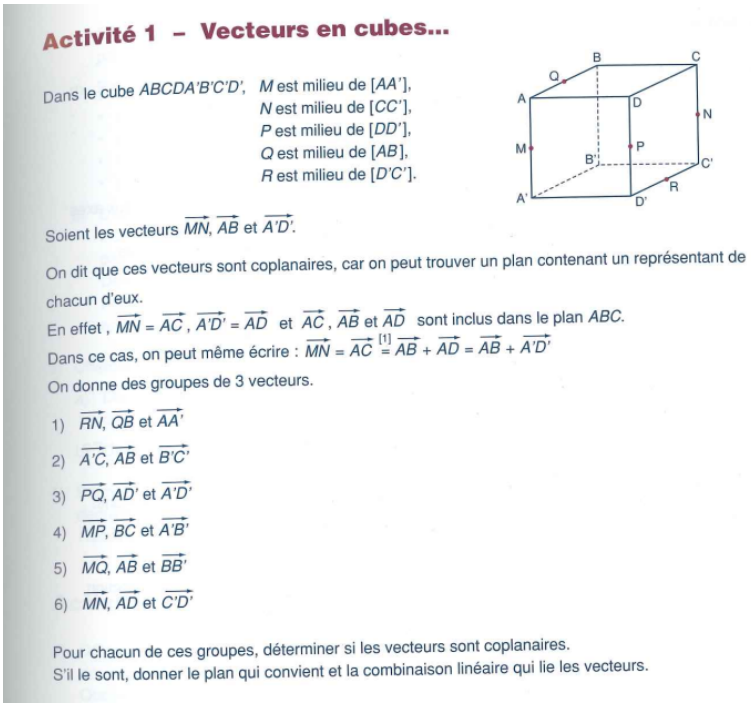
2. Nous étudions ici la mise en forme d'un texte du savoir proposé dans les manuels.

3 La géométrie analytique dans l'espace dans les « anciens » manuels

3.1 Les activités d'introduction

Le nombre d'activités d'introduction varie entre les trois manuels : 7 pour l'*Espace Math*, 10 pour le *CQFD* et 4 pour l'*Actimath*. Nous avons analysé l'ensemble de ces activités.

Dans tous les manuels, les activités s'appuient fortement sur les connaissances antérieures des élèves dans le cadre de la géométrie vectorielle. En effet, ils proposent tous au moins une activité dans laquelle un cube ou un parallélépipède rectangle est placé dans un repère orthonormé. Il est demandé de calculer les composantes des vecteurs et d'exprimer la colinéarité ou la coplanarité des vecteurs. Ainsi, le registre du dessin est un support important pour introduire les équations vectorielles des droites et des plans dans l'espace. C'est donc le point de vue paramétrique dans le cadre de la géométrie vectorielle qui est introduit en premier. La figure VII.1 illustre cet aspect.



Activité 1 – Vecteurs en cubes...

Dans le cube $ABCDA'B'C'D'$, M est milieu de $[AA']$,
N est milieu de $[CC']$,
P est milieu de $[DD']$,
Q est milieu de $[AB]$,
R est milieu de $[D'C']$.

Soient les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'D'}$.

On dit que ces vecteurs sont coplanaires, car on peut trouver un plan contenant un représentant de chacun d'eux.

En effet, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont inclus dans le plan ABC.

Dans ce cas, on peut même écrire : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} \overset{[1]}{=} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'}$

On donne des groupes de 3 vecteurs.

1) $\overrightarrow{RN}$, $\overrightarrow{QB}$ et $\overrightarrow{AA'}$
2) $\overrightarrow{A'C}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{B'C'}$
3) $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{AD'}$ et $\overrightarrow{A'D'}$
4) $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{A'B'}$
5) $\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BB'}$
6) $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{C'D'}$

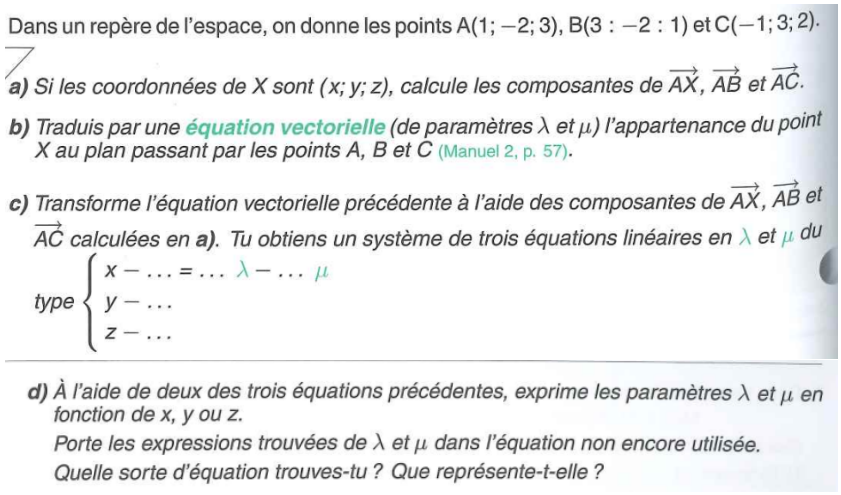
Pour chacun de ces groupes, déterminer si les vecteurs sont coplanaires.
S'il le sont, donner le plan qui convient et la combinaison linéaire qui lie les vecteurs.

FIGURE VII.1 – Activité issue du manuel *Actimath* (Delfeld, T'Kindt-Demulder, Sevrin, & Timmermans, 2015, p. 33).

Il est demandé de déterminer, à partir d'un solide, si les vecteurs donnés sont coplanaires. Cette activité mobilise des connaissances de géométrie synthétique (perspective cavalière, cube, Thalès, diagonale d'un carré, ...) et de géométrie vectorielle (égalité de vecteurs, combinaison linéaire de vecteurs, relation de Chasles, ...). Une conversion entre le registre du dessin et le registre algébrique est nécessaire pour écrire la relation

demandée. Si les vecteurs sont coplanaires, une équation paramétrique d'un plan dans le cadre de la géométrie vectorielle doit être fournie pour ces exemples précis. Il s'agit donc de décrire un plan par une équation (paramétrique). Le deuxième aspect de l'interprétation géométrique est alors abordé. Aucun des manuels ne demande de généraliser cette équation vectorielle déterminée pour des exemples précis.

Après avoir déterminé une équation vectorielle, que ce soit pour les droites de l'espace ou les plans, les activités introductives demandent de calculer les composantes des vecteurs et d'écrire une équation paramétrique. Il s'agit donc de passer du cadre de la géométrie vectorielle au cadre de la géométrie analytique pour le point de vue paramétrique. Cette équation paramétrique doit ensuite être écrite sous la forme d'un système de trois équations à trois inconnues et deux paramètres. Les opérations sur les vecteurs sont ainsi mobilisées. En éliminant les paramètres dans ce système, le point de vue cartésien dans le cadre de la géométrie analytique est alors introduit. La figure VII.2 illustre cette démarche. Le registre de la langue naturelle et le registre algébrique sont ici privilégiés.


Dans un repère de l'espace, on donne les points A(1; −2; 3), B(3 : −2 : 1) et C(−1; 3; 2).

a) *Si les coordonnées de X sont (x; y; z), calcule les composantes de* $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$.

b) *Traduis par une* ***équation vectorielle*** *(de paramètres* λ *et* μ*) l'appartenance du point X au plan passant par les points A, B et C* (Manuel 2, p. 57).

c) *Transforme l'équation vectorielle précédente à l'aide des composantes de* $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *calculées en* **a)**. *Tu obtiens un système de trois équations linéaires en* λ *et* μ *du type*

$$\begin{cases} x - \ldots = \ldots\ \lambda - \ldots\ \mu \\ y - \ldots \\ z - \ldots \end{cases}$$

d) *À l'aide de deux des trois équations précédentes, exprime les paramètres* λ *et* μ *en fonction de x, y ou z.*
Porte les expressions trouvées de λ *et* μ *dans l'équation non encore utilisée.*
Quelle sorte d'équation trouves-tu ? Que représente-t-elle ?

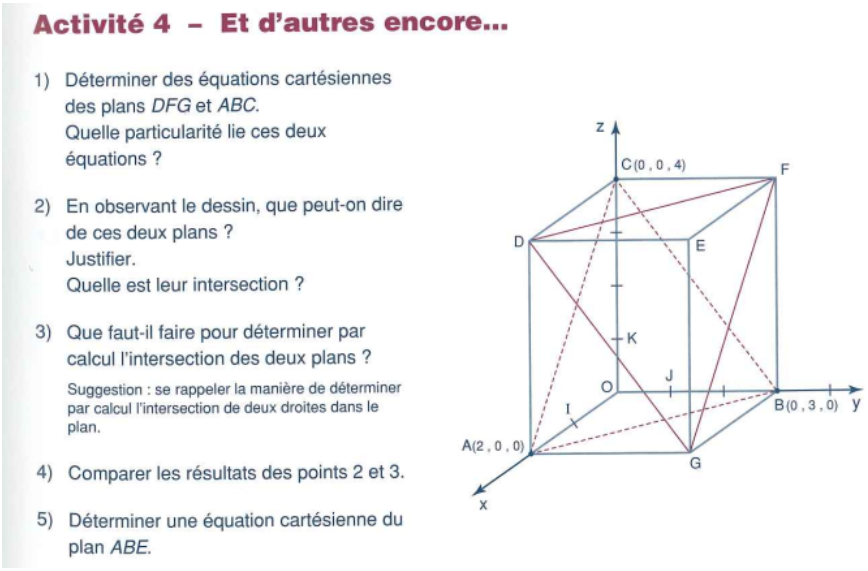
FIGURE VII.2 – Activité issue du manuel *Espace Math* (Adam & Lousberg, 2004b, p. 194–195).

Un deuxième point commun aux trois manuels concerne le découpage des tâches proposées. Toutes les tâches sont découpées en plusieurs sous-tâches, chacune se limitant à un calcul ou à une application d'une méthode donnée dans l'énoncé. Ainsi, des tâches initialement complexes sont fortement réduites. Cet aspect est illustré par les figures VII.1 et VII.2.

Selon notre étude de relief réalisée dans la partie 1, les notions de droites et de plans dans l'espace sont des extensions des notions de droites dans le plan. Il s'agit, au regard du type de ces notions, d'étudier comment la distance entre les connaissances anciennes et les connaissances nouvelles des élèves est prise en compte par le scénario. En particulier, Robert (Vandebrouck, 2008) précise que les extensions de notions peuvent être introduites en proposant un problème qui est construit sur les connaissances anciennes et où le nouveau est utilisé pour le résoudre. De plus, elle précise qu'un moyen de contrôle

interne doit être proposé aux élèves pour éviter les conceptions erronées qui peuvent se produire lors des différentes ruptures occasionnées par ces extensions. Bien que tous les manuels mettent en jeu des connaissances anciennes des élèves en géométrie vectorielle, aucun d'entre eux ne propose une activité d'introduction construite à partir des connaissances de géométrie analytique plane. Les droites et les plans dans l'espace ne sont pas introduits comme des extensions des droites dans le plan. Nous proposons une activité d'introduction étendant les notions et un moyen de contrôle interne dans notre séquence d'enseignement présentée dans la partie 3.

Les trois manuels se distinguent sur quelques aspects. Certaines connaissances anciennes des élèves en géométrie synthétique interviennent dans quelques activités pour les manuels *Espace Math* et *Actimath*. De plus, une comparaison entre les résultats obtenus dans les cadres de la géométrie synthétique et de la géométrie analytique est demandée dans le manuel *Actimath*, comme l'illustre la figure VII.3.



Activité 4 – Et d'autres encore...

1) Déterminer des équations cartésiennes des plans *DFG* et *ABC*.
Quelle particularité lie ces deux équations ?

2) En observant le dessin, que peut-on dire de ces deux plans ?
Justifier.
Quelle est leur intersection ?

3) Que faut-il faire pour déterminer par calcul l'intersection des deux plans ?
Suggestion : se rappeler la manière de déterminer par calcul l'intersection de deux droites dans le plan.

4) Comparer les résultats des points 2 et 3.

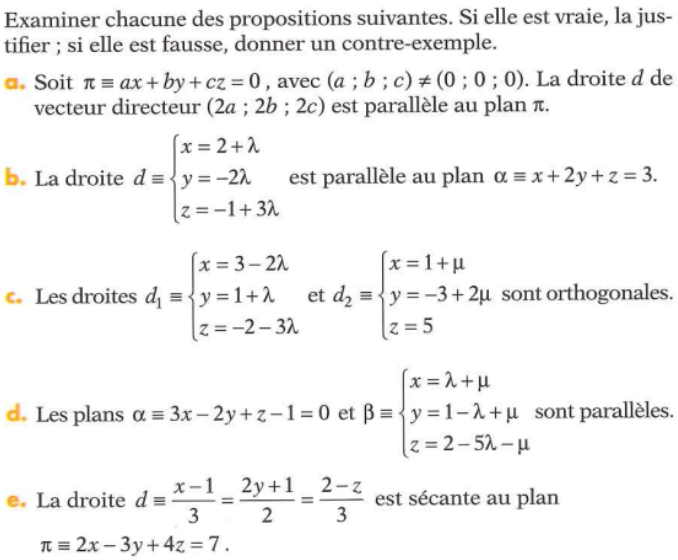
5) Déterminer une équation cartésienne du plan *ABE*.

FIGURE VII.3 – Activité issue du manuel *Actimath* (Delfeld et al., ibid., p. 35).

Dans cette activité, deux équations cartésiennes de plans doivent être trouvées. Le deuxième aspect de l'interprétation géométrique est donc abordé (la description). Il s'agit d'analyser les deux relations et de repérer que les vecteurs normaux sont colinéaires. L'analyse du dessin permet de déterminer la position relative des deux plans et d'en déduire leur intersection. Il est ensuite demandé de résoudre un système composé des deux équations cartésiennes trouvées à la question 1. Finalement, une comparaison entre l'ensemble des solutions du système et la position relative occupée par les deux plans est demandée. Elle offre la possibilité d'introduire le fait que deux plans parallèles ont des vecteurs normaux colinéaires.

Dans le manuel *Espace Math*, les activités se limitent à introduire les équations des droites et des plans dans l'espace. Pour les deux autres manuels, des activités sont aussi prévues pour introduire les positions relatives des objets. Un exemple est proposé à la figure VII.4. Il s'agit de déterminer si les affirmations proposées sont vraies ou fausses.

Les équations des droites et des plans sont présentes dans tous les points de vue, ainsi que la notion de vecteur directeur, vecteur normal et produit scalaire. Cette activité mobilise alors des connaissances anciennes et en cours d'acquisition. Pour chaque affirmation, il est nécessaire soit de calculer un produit scalaire entre deux vecteurs, soit de montrer la colinéarité de deux vecteurs. Puisque l'énoncé associe déjà les équations aux objets géométriques, aucun aspect de l'interprétation géométrique n'est en jeu dans ce type d'exercice.



Examiner chacune des propositions suivantes. Si elle est vraie, la justifier ; si elle est fausse, donner un contre-exemple.

a. Soit $\pi \equiv ax+by+cz=0$, avec $(a\,;b\,;c)\neq(0\,;0\,;0)$. La droite d de vecteur directeur $(2a\,;2b\,;2c)$ est parallèle au plan π.

b. La droite $d \equiv \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=-1+3\lambda \end{cases}$ est parallèle au plan $\alpha \equiv x+2y+z=3$.

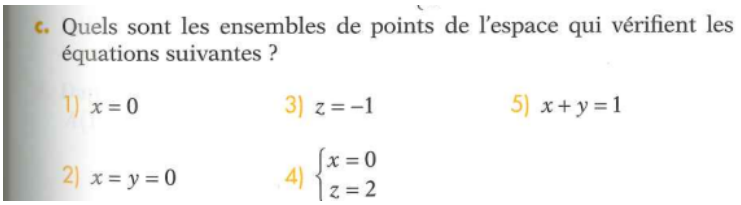
c. Les droites $d_1 \equiv \begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=-2-3\lambda \end{cases}$ et $d_2 \equiv \begin{cases} x=1+\mu \\ y=-3+2\mu \\ z=5 \end{cases}$ sont orthogonales.

d. Les plans $\alpha \equiv 3x-2y+z-1=0$ et $\beta \equiv \begin{cases} x=\lambda+\mu \\ y=1-\lambda+\mu \\ z=2-5\lambda-\mu \end{cases}$ sont parallèles.

e. La droite $d \equiv \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{2y+1}{2}=\dfrac{2-z}{3}$ est sécante au plan $\pi \equiv 2x-3y+4z=7$.

FIGURE VII.4 – Activité issue du manuel *CQFD* (Annoye, Gilon, Van Eerdenbrugghe, & Wilemme, 2014, p. 180).

Le manuel *CQFD* propose, contrairement aux deux autres manuels, une activité traitant des ensembles de points vérifiant une certaine condition. Cette activité est donnée à la figure VII.5.



c. Quels sont les ensembles de points de l'espace qui vérifient les équations suivantes ?

1) $x=0$ 3) $z=-1$ 5) $x+y=1$

2) $x=y=0$ 4) $\begin{cases} x=0 \\ z=2 \end{cases}$

FIGURE VII.5 – Activité issue du manuel *CQFD* (Annoye et al., ibid., p. 179).

Par exemple pour le premier exercice, il est possible de reconnaître directement le plan à partir de l'équation cartésienne $x=0$ car celle-ci a été introduite dans une activité préalable. Il est également possible que les ensembles de points soient explicitement écrits, bien que cela ne soit pas demandé par les anciens programmes. L'ensemble des points de l'espace vérifiant l'équation $x=0$ s'écrit comme $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 |\ x=0\}$ ou encore comme l'ensemble $\{(0,y,z)|\ y,z\in\mathbb{R}\}$. La reconnaissance du plan peut se faire à partir de l'ensemble, à partir d'un dessin ou à partir d'une équation paramétrique de

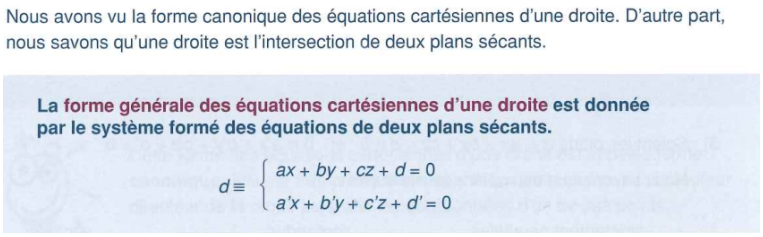
celui-ci. Des conversions de registres peuvent donc avoir lieu. Dans les deux cas, le premier aspect de l'interprétation géométrique est travaillé car il s'agit de reconnaître à partir d'un ensemble de points ou d'une équation les objets géométriques.

L'analyse *a priori* des activités d'introduction met en évidence que ce sont principalement les connaissances des élèves en géométrie vectorielle qui sont utilisées. La plupart des activités proposées ne lient pas la géométrie synthétique à la géométrie analytique. Or, notre étude de relief montre que ce changement de cadres est important pour favoriser la conceptualisation de ces notions. Les conversions entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique sont les plus travaillées. Des conversions entre le registre du dessin et le registre algébrique sont moins fréquentes mais présentes dans tous les manuels. Au niveau des points de vue, il s'agit de passer du point de vue paramétrique vers le point de vue cartésien uniquement. Aucune activité ne propose le changement de points de vue réciproque. Au niveau de l'interprétation géométrique, l'aspect de description des objets par une équation apparait plus souvent que la reconnaissance des objets à partir d'une équation ou d'un ensemble de points. D'ailleurs ce dernier aspect n'apparait que dans une seule activité du *CQFD*. Notre analyse montre aussi qu'il n'y a aucune activité d'introduction étendant à l'espace les équations vues en géométrie analytique plane.

Nous allons maintenant analyser la partie cours des trois manuels en question.

3.2 Les cours

L'analyse de la partie exposant le texte du savoir fournit des résultats assez semblables pour les trois manuels, bien qu'ils soient organisés différemment. Par exemple, les mêmes notions sont abordées dans les manuels mais l'ordre dans lequel elles sont introduites est très différent. En ce qui concerne le manuel *CQFD*, les équations de droites dans l'espace sont étudiées avant les équations de plans. Aucun lien n'apparait au sein de ce manuel entre les deux objets géométriques excepté lorsque les positions relatives sont abordées. Pour le manuel *Espace Math*, le premier chapitre analysé concerne principalement le cadre de la géométrie vectorielle. Dans ce chapitre, les équations de droites sont vues avant les équations de plans. Cependant, dans le deuxième chapitre (cadre de la géométrie analytique) et pour le manuel *Actimath*, les équations de plans sont introduites avant les équations de droites dans l'espace. L'ordre dans lequel ces notions apparaissent semble avoir une influence sur les commentaires méta, que nous pouvons trouver dans les manuels, liés à l'interprétation géométrique des équations. En effet, le fait d'étudier les équations de plans avant celles des droites de l'espace permet de décrire une droite comme l'intersection de deux plans et ainsi de donner un système d'équations cartésiennes d'une droite dans l'espace (voir figures VII.6 et VII.7). Ceci est totalement absent du manuel *CQFD*.

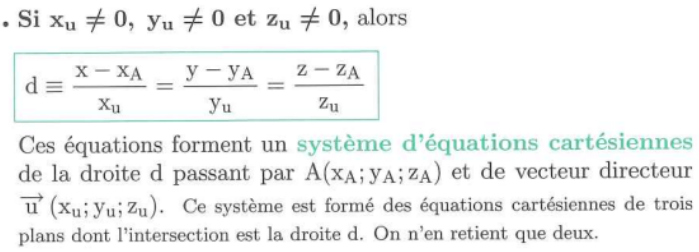

Nous avons vu la forme canonique des équations cartésiennes d'une droite. D'autre part, nous savons qu'une droite est l'intersection de deux plans sécants.

La forme générale des équations cartésiennes d'une droite est donnée par le système formé des équations de deux plans sécants.

$$d \equiv \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

FIGURE VII.6 – Extrait issu du manuel *Actimath* (Delfeld et al., ibid., p. 50).

Dans cet extrait, le deuxième aspect de l'interprétation géométrique est travaillé. En effet, il s'agit de décrire une droite dans l'espace par des équations cartésiennes. Pour ce faire, une connaissance ancienne de géométrie synthétique est rappelée. Il y a une occasion de proximité horizontale avec les connaissances des élèves. La forme canonique des équations cartésiennes de droites dans l'espace a été vue précédemment. Cette forme est équivalente à la forme générale donnée dans cet extrait. Aucune explication algébrique n'est donnée au lecteur pour expliquer cette équivalence. Un enseignant en classe peut éventuellement donner un exemple d'un système d'équations cartésiennes dans une des deux formes. Il y a alors une occasion de proximité descendante. De plus, il peut sur la base de cet exemple expliquer aux élèves comment passer d'une forme à l'autre et ainsi travailler la reconnaissance des plans à partir des équations cartésiennes. Il y a alors des explications algébriques ajoutées dans le discours de l'enseignant pour rapprocher ce que l'élève vient de voir à ce qu'il a déjà vu (forme canonique et équations cartésiennes de plans). Il y a donc une occasion de proximité horizontale et un travail possible du premier aspect de l'interprétation géométrique.


• **Si $x_u \neq 0$, $y_u \neq 0$ et $z_u \neq 0$,** alors

$$d \equiv \frac{x - x_A}{x_u} = \frac{y - y_A}{y_u} = \frac{z - z_A}{z_u}$$

Ces équations forment un **système d'équations cartésiennes** de la droite d passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(x_u; y_u; z_u)$. Ce système est formé des équations cartésiennes de trois plans dont l'intersection est la droite d. On n'en retient que deux.

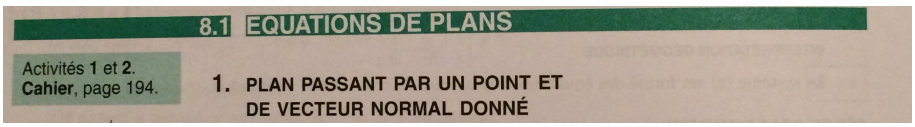
FIGURE VII.7 – Extrait issu du manuel *Espace Math* (Adam & Lousberg, 2004a, p. 96).

Dans ce passage du manuel *Espace Math*, le deuxième aspect de l'interprétation géométrique est abordé puisqu'il s'agit de décrire une droite par des équations cartésiennes dans le cas où toutes les composantes d'un vecteur directeur sont non nulles. Nous trouvons à la figure VII.7 un commentaire méta qui permet un rapprochement entre les équations cartésiennes de plans vues précédemment par les élèves et les équations cartésiennes de droites dans l'espace. Cependant, la mise en relation entre cette forme canonique et les équations cartésiennes des trois plans cités n'est pas effectuée. Un enseignant peut en classe écrire cette double égalité comme un système de trois équations à deux inconnues et faire reconnaître aux élèves les trois plans à partir d'une équation incomplète. Il y a donc une occasion de proximité horizontale et un travail

possible du premier aspect de l'interprétation géométrique des objets. De plus, aucune explication n'est donnée à propos de l'expression « on n'en retient que deux ». L'enseignant peut montrer qu'une des trois équations dans le système est inutile et amener la forme générale des équations cartésiennes de droites dans l'espace. Il peut aussi rappeler aux élèves qu'il n'est pas nécessaire d'avoir trois plans sécants pour décrire une droite mais que deux suffisent. Il y a donc une occasion de proximité horizontale supplémentaire.

Ainsi, l'étude des équations de plans avant celle des équations de droites permet de proposer une interprétation géométrique des équations de droites dans le point de vue cartésien. En effet, les deux aspects de l'interprétation géométrique peuvent être abordés. Toutefois, les commentaires qui sont donnés pourraient faire l'objet d'ajouts (compléments d'explications) par un enseignant en classe. De ce fait, il y a plusieurs occasions de proximités horizontales.

L'analyse des trois manuels révèle également qu'aucun d'entre eux ne s'appuie sur le travail déjà réalisé dans les activités introductives pour introduire les notions du cours. Il n'y a d'ailleurs aucune référence dans le cours à ces activités, sauf pour le manuel *Espace Math* (voir la figure VII.8). Les liens entre les activités d'introduction et le cours, c'est-à-dire les liens contextualisé/décontextualisé, sont laissés à la charge du lecteur (élève ou enseignant). Il est possible qu'un enseignant s'appuyant sur ces manuels intègre dans son discours des commentaires méta pour rapprocher ce que les élèves sont en train de voir avec les activités qu'ils ont déjà réalisées. Des occasions de proximités ascendantes seraient alors possibles. Un exemple est donné aux figures VII.9 et VII.10.

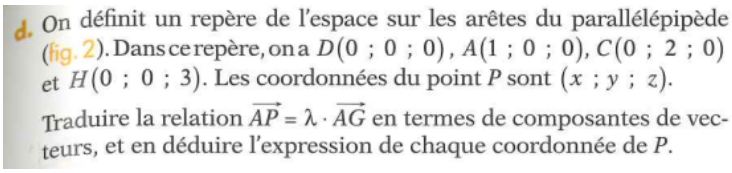

8.1 EQUATIONS DE PLANS

Activités 1 et 2. Cahier, page 194.

1. PLAN PASSANT PAR UN POINT ET DE VECTEUR NORMAL DONNÉ

FIGURE VII.8 – Extrait issu du manuel *Espace Math* (Adam & Lousberg, ibid., p. 92).

À la figure VII.9, nous présentons une activité d'introduction du manuel *CQFD*. Dans celle-ci, il s'agit de passer du cadre de la géométrie vectorielle au cadre de la géométrie analytique pour le point de vue paramétrique.

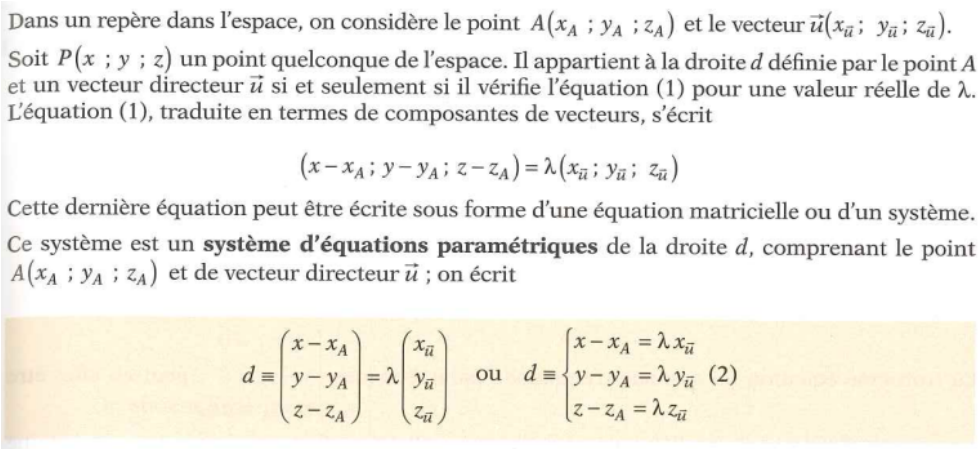

d. On définit un repère de l'espace sur les arêtes du parallélépipède (fig. 2). Dans ce repère, on a $D(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $A(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 2\ ;\ 0)$ et $H(0\ ;\ 0\ ;\ 3)$. Les coordonnées du point P sont $(x\ ;\ y\ ;\ z)$.

Traduire la relation $\overrightarrow{AP} = \lambda \cdot \overrightarrow{AG}$ en termes de composantes de vecteurs, et en déduire l'expression de chaque coordonnée de P.

FIGURE VII.9 – Activité issue du manuel *CQFD* (Annoye et al., ibid., p. 177).

Nous présentons à la figure VII.10 le point théorique correspondant à l'activité de la figure VII.9. Un repère de l'espace, les coordonnées des points A et P et les composantes des vecteurs directeurs sont donnés. La démarche consiste, tout comme dans l'activité

d'introduction, à traduire une équation vectorielle en termes de composantes pour obtenir une équation paramétrique d'une droite. Il y a une généralisation possible de la démarche et des résultats proposés dans l'activité d'introduction, donc une occasion de proximité ascendante.



Dans un repère dans l'espace, on considère le point $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et le vecteur $\vec{u}(x_{\vec{u}}\ ;\ y_{\vec{u}}\ ;\ z_{\vec{u}})$.

Soit $P(x\ ;\ y\ ;\ z)$ un point quelconque de l'espace. Il appartient à la droite d définie par le point A et un vecteur directeur $\vec{u}$ si et seulement si il vérifie l'équation (1) pour une valeur réelle de λ. L'équation (1), traduite en termes de composantes de vecteurs, s'écrit

$$(x - x_A\ ;\ y - y_A\ ;\ z - z_A) = \lambda(x_{\vec{u}}\ ;\ y_{\vec{u}}\ ;\ z_{\vec{u}})$$

Cette dernière équation peut être écrite sous forme d'une équation matricielle ou d'un système. Ce système est un **système d'équations paramétriques** de la droite d, comprenant le point $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$; on écrit

$$d \equiv \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{u}} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad d \equiv \begin{cases} x - x_A = \lambda\, x_{\vec{u}} \\ y - y_A = \lambda\, y_{\vec{u}} \\ z - z_A = \lambda\, z_{\vec{u}} \end{cases} (2)$$

FIGURE VII.10 – Extrait issu du manuel *CQFD* (Annoye et al., ibid., p. 183).

La démarche pour introduire les équations de droites dans l'espace est identique à celle suivie pour les équations de droites dans le plan (équation vectorielle, équation paramétrique, équation cartésienne). Un enseignant peut en classe rapprocher le travail qui est à réaliser ou qui a été réalisé pour l'espace avec le travail déjà effectué par les élèves pour les droites dans le plan. Il y a donc des occasions de proximités horizontales lors de cette extension de la démarche du plan à l'espace. L'analyse des trois manuels met également en évidence qu'aucune attention n'est portée sur les éventuelles continuités et ruptures entre les notions vues dans le plan et les notions de l'espace. Nous notons que les notions du plan n'apparaissent dans aucun des manuels pour les chapitres étudiés. Ainsi, ils ne semblent pas prendre en compte le type des notions de droites et de plans dans l'espace.

Un autre résultat est que les cadres de la géométrie synthétique, de la géométrie vectorielle et de la géométrie analytique sont tous présents dans les manuels. Cependant, les jeux de cadres sont peu nombreux. Les connaissances de géométrie synthétique ne servent que de point de départ pour introduire les vecteurs directeurs des objets et les positions relatives. Un changement de cadres a donc lieu entre la géométrie synthétique et la géométrie vectorielle. Nous illustrons ce point aux figures VII.11 et VII.12.

	Comment reconnaître le parallélisme de droites et de plans ?	**Comment reconnaître l'orthogonalité de droites et de plans ?**
Droites d_1 et d_2	Elles ont un même vecteur directeur.	Un vecteur directeur de d_1 est orthogonal à un vecteur directeur de d_2.
Plans α_1 et α_2	Ils ont un même couple de vecteurs directeurs (non parallèles) ou un même vecteur normal.	Un vecteur normal à α_1 est orthogonal à un vecteur normal à α_2.
Droite d et **plan** α	Un vecteur directeur de d est un vecteur directeur de α.	Un vecteur directeur de d est un vecteur normal à α_2.

FIGURE VII.11 – Extrait issu du manuel *Espace Math* (Adam & Lousberg, ibid., p. 105).

Dans cet extrait, les registres du tableau et de la langue naturelle sont en jeu. La position relative de deux droites, de deux plans et d'une droite avec un plan est traduite en termes de vecteurs directeurs et/ou normaux. Ce tableau permet de passer des connaissances de la géométrie synthétique sur les positions relatives des objets à des propriétés vectorielles.

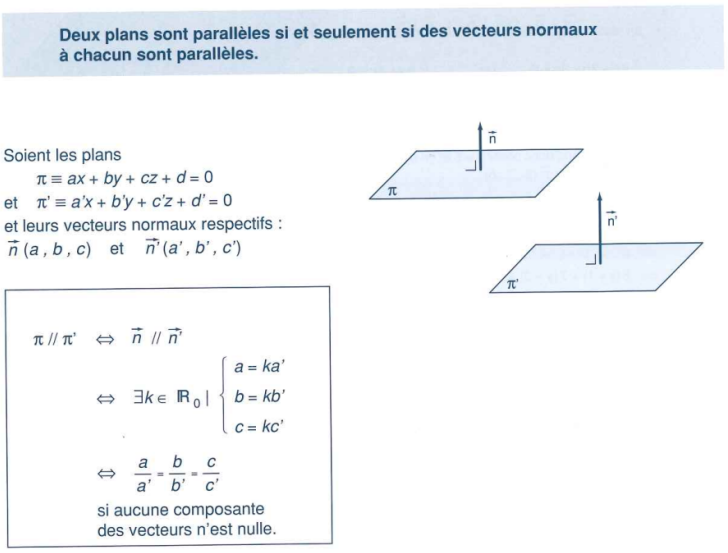


FIGURE VII.12 – Extrait issu du manuel *Actimath* (Delfeld et al., ibid., p. 56).

La figure VII.12 met en jeu d'autres registres que les précédents. Les registres symbolique, algébrique, de la langue naturelle et du dessin sont ici présents. La propriété donnée en langue naturelle pour le parallélisme de deux plans est illustrée par un dessin. Des équations cartésiennes générales sont données pour les deux plans. L'analyse du dessin permet de déterminer le parallélisme des vecteurs normaux. Ce dernier est traduit grâce à la colinéarité des vecteurs. Un changement de cadres entre la géométrie synthétique et la géométrie vectorielle a bien lieu.

Un autre changement de cadres entre la géométrie vectorielle et la géométrie analytique est effectué dans tous les manuels. Nous avons illustré à la figure VII.10 un tel changement concernant le point de vue paramétrique. Ainsi, bien que ces manuels ne

soient pas conformes aux nouveaux programmes, le cadre de la géométrie vectorielle permet de lier les cadres de la géométrie synthétique et de la géométrie analytique, comme le proposent les nouveaux programmes. Notons quand même que ces jeux de cadres sont très peu nombreux dans la partie théorique des manuels et se font principalement de la géométrie synthétique vers la géométrie vectorielle et ensuite vers la géométrie analytique.

Dans les trois manuels, les registres principaux sont le registre de la langue naturelle, le registre du dessin et le registre algébrique. Les registres du tableau et symbolique apparaissent de façon plus ponctuelle. Notre analyse met en évidence que le registre algébrique et le registre du dessin viennent généralement appuyer le registre de la langue naturelle. En effet, toute la théorie est formulée dans le registre de la langue naturelle. Le registre du dessin intervient souvent pour illustrer la théorie. Le registre algébrique est présent dans les exemples proposés ou dans les éventuelles démonstrations. Plusieurs conversions de registres sont réalisées dans les manuels mais elles sont toujours non explicitées. La figure VII.13 illustre ce fait.

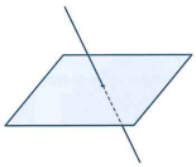
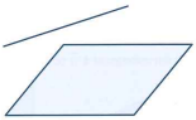
Position de la droite et du plan	Schéma	Nombre de solutions du système	L'intersection d'une droite et d'un plan est
Sécants		1	un point
Strictement parallèles		0 (le système est impossible)	vide
La droite est incluse au plan		Une infinité (le système est simplement indéterminé)	la droite

FIGURE VII.13 – Extrait issu du manuel *Actimath* (Delfeld et al., ibid., p. 65).

Il s'agit, dans cet extrait, de lier la position relative occupée par une droite et un plan avec le nombre de solutions du système composé des équations de ces objets. Ainsi, la position relative donnée dans le registre de la langue naturelle est traduite par un dessin. Le dessin permet de mettre en évidence les points communs aux deux objets et de déduire le nombre de solutions des systèmes. Les intersections possibles entre le plan et la droite sont décrites en fonction du nombre de solutions. Il y a donc plusieurs conversions de registres à effectuer : de la langue naturelle vers le dessin, du dessin vers l'algébrique, de l'algébrique vers la langue naturelle. Aucune explication n'est ajoutée dans ce manuel. Un enseignant s'appuyant sur cet extrait en classe peut donner des explications supplémentaires sur ces conversions, offrant ainsi des occasions

de proximités horizontales avec les connaissances des élèves en géométrie synthétique et en algèbre.

Les traitements dans le registre algébrique sont nombreux et ne sont pas justifiés dans deux des trois manuels. La figure VII.14 fournit un extrait dans lequel aucune justification n'apparait. Seul le manuel *Espace Math* justifie certaines étapes de calculs, comme nous pouvons le voir à la figure VII.15.

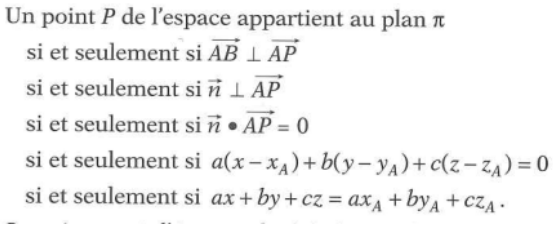

Un point P de l'espace appartient au plan π
si et seulement si $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AP}$
si et seulement si $\vec{n} \perp \overrightarrow{AP}$
si et seulement si $\vec{n} \bullet \overrightarrow{AP} = 0$
si et seulement si $a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$
si et seulement si $ax+by+cz=ax_A+by_A+cz_A$.

FIGURE VII.14 – Extrait issu du manuel *CQFD* (Annoye et al., ibid., p. 191).

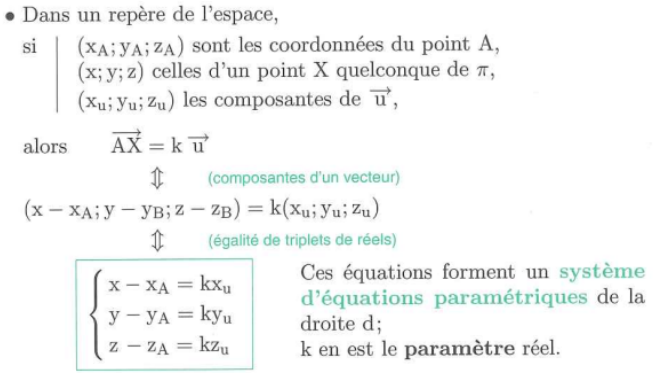


FIGURE VII.15 – Extrait issu du manuel *Espace Math* (Adam & Lousberg, ibid., p. 96).

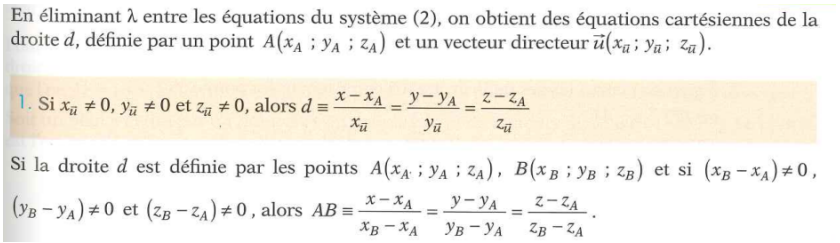
Il est possible qu'un enseignant ajoute certaines de ces justifications en classe. Les traitements et les conversions de registres sont donc une source importante d'occasions de proximités horizontales.

Un autre résultat de notre analyse est que les points de vue cartésien et paramétrique sont travaillés dans tous les manuels. Les changements de points de vue peuvent s'effectuer différemment selon les manuels et selon la notion. Le tableau VII.1 permet de mettre en évidence les changements de points de vue qui sont réalisés dans les trois manuels en distinguant les équations de plans des équations de droites. La lettre « P » désigne le point de vue paramétrique et la lettre « C » le point de vue cartésien. Nous y précisons également la démarche adoptée par chaque manuel pour les effectuer : soit de manière générale, soit sur un exemple.

	Actimath	*CQFD*	*Espace Math*
Droites	P → C Général	P → C Général	P → C Général
		C → P Exemple	C → P Exemple
Plans	P → C Exemple	P → C Exemple Général	P → C Exemple Général
			C → P Exemple

TABLE VII.1 – Les changements de points de vue proposés dans les manuels analysés.

Le tableau met en évidence que tous les manuels passent du point de vue paramétrique au point de vue cartésien pour les équations de droites dans l'espace. Pour les manuels *Actimath* et *Espace Math*, le paramètre λ dans une équation paramétrique générale est bien isolé pour écrire un système d'équations cartésiennes. La démarche est entièrement explicitée. Par contre, pour le manuel *CQFD*, la méthode est donnée mais les calculs ne sont pas effectués. La figure VII.16 illustre ce changement de points de vue.


En éliminant λ entre les équations du système (2), on obtient des équations cartésiennes de la droite d, définie par un point $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(x_{\vec{u}}\,;\,y_{\vec{u}}\,;\,z_{\vec{u}})$.

1. Si $x_{\vec{u}} \neq 0$, $y_{\vec{u}} \neq 0$ et $z_{\vec{u}} \neq 0$, alors $d \equiv \frac{x-x_A}{x_{\vec{u}}} = \frac{y-y_A}{y_{\vec{u}}} = \frac{z-z_A}{z_{\vec{u}}}$

Si la droite d est définie par les points $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$, $B(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ et si $(x_B-x_A)\neq 0$, $(y_B-y_A)\neq 0$ et $(z_B-z_A)\neq 0$, alors $AB \equiv \frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \frac{z-z_A}{z_B-z_A}$.

FIGURE VII.16 – Extrait issu du manuel *CQFD* (Annoye et al., ibid., p. 183).

Le passage du point de vue cartésien vers le point de vue paramétrique n'est pas effectué dans le manuel *Actimath*. Or, ce passage est proposé dans les deux autres manuels, mais uniquement sur un exemple comme l'illustre la figure VII.17.

EXEMPLE

La droite d a pour équations cartésiennes $\begin{cases} 2x+3y-z-4=0 \\ x-y+z-6=0. \end{cases}$

Trouver des équations paramétriques de d.

En résolvant le système, on trouve successivement

$$\begin{cases} 2x+3y-z-4=0 \\ x=y-z+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(y-z+6)+3y-z-4=0 \\ x=y-z+6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5y-3z+8=0 \\ x=y-z+6 \end{cases}$$

En donnant des valeurs arbitraires à z (par exemple), soit $z=\gamma$, on obtient

$y=\frac{3}{5}\gamma-\frac{8}{5}$ et $x=\frac{3}{5}\gamma-\frac{8}{5}-\gamma+6$. D'où $d \equiv \begin{cases} x=-\frac{2}{5}\gamma+\frac{22}{5} \\ y=\frac{3}{5}\gamma-\frac{8}{5} \\ z=\gamma. \end{cases}$

FIGURE VII.17 – Extrait issu du manuel *Espace Math* (Adam & Lousberg, ibid., p. 98).

En ce qui concerne les plans, le passage du point de vue paramétrique vers le point de vue cartésien est effectué dans les trois manuels. L'élimination des deux paramètres ne se fait que sur un exemple particulier. Les manuels *CQFD* et *Espace Math* proposent ce changement de points de vue en utilisant également la méthode des déterminants. Cette démarche est illustrée à la figure VII.18.

Un système d'équations paramétriques d'un plan π peut s'écrire sous forme matricielle (synthèse 5)

$$\pi \equiv \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{u}} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \\ z_{\vec{v}} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} x-x_A & x_{\vec{u}} & x_{\vec{v}} \\ y-y_A & y_{\vec{u}} & y_{\vec{v}} \\ z-z_A & z_{\vec{u}} & z_{\vec{v}} \end{pmatrix}$.

Puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs non parallèles du plan, ils sont non nuls et non multiples l'un de l'autre. De même, leurs composantes ne sont pas toutes nulles simultanément et ne sont pas proportionnelles. Dès lors, les deux dernières colonnes de la matrice M ne sont pas entièrement nulles et ne sont pas proportionnelles.

Par contre, l'écriture (4) signifie que les composantes du vecteur $\overrightarrow{AP}$ sont des sommes de multiples (ou combinaisons linéaires) des composantes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. La première colonne de la matrice M est donc combinaison linéaire des deux autres colonnes, ce qui entraîne (CQFD 5e 6 périodes/semaine, propriété e, synthèse 11, page 341) que

$$\begin{vmatrix} x-x_A & x_{\vec{u}} & x_{\vec{v}} \\ y-y_A & y_{\vec{u}} & y_{\vec{v}} \\ z-z_A & z_{\vec{u}} & z_{\vec{v}} \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

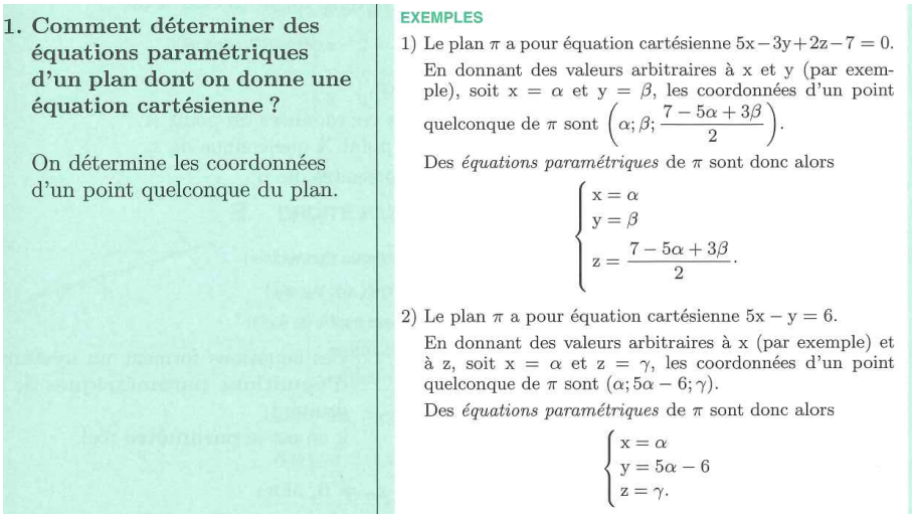
Cette équation est une équation cartésienne du plan π, comprenant le point $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et de vecteurs directeurs non parallèles $\vec{u}(x_{\vec{u}}\ ;\ y_{\vec{u}}\ ;\ z_{\vec{u}})$ et $\vec{v}(x_{\vec{v}}\ ;\ y_{\vec{v}}\ ;\ z_{\vec{v}})$. Un point $P(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de l'espace est un point du plan π si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation (5). On écrit

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-x_A & x_{\vec{u}} & x_{\vec{v}} \\ y-y_A & y_{\vec{u}} & y_{\vec{v}} \\ z-z_A & z_{\vec{u}} & z_{\vec{v}} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \pi \equiv \begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_{\vec{u}} & y_{\vec{u}} & z_{\vec{u}} \\ x_{\vec{v}} & y_{\vec{v}} & z_{\vec{v}} \end{vmatrix} = 0$$

FIGURE VII.18 – Extrait issu du manuel *CQFD* (Annoye et al., ibid., p. 188).

À la figure VII.18, il s'agit d'écrire une équation paramétrique sous la forme d'une matrice, de poser que le déterminant de cette matrice est nul, puis de le calculer. Cette démarche met en jeu des connaissances sur les matrices et les déterminants. Dans les anciens programmes, ces notions ont déjà été étudiées en cinquième année. Or, elles sont absentes des nouveaux programmes. Pourtant, il y est demandé de pouvoir déterminer une équation cartésienne de plans à l'aide des déterminants. Ce changement de points de vue demande, au sein des nouveaux programmes, une mise en œuvre de plusieurs connaissances nouvelles. Les enseignants abordant le passage du point de vue paramétrique au point de vue cartésien avec cette démarche peuvent ajouter dans leurs discours de nombreux commentaires méta. Cependant, comme les notions de matrices et de déterminants n'ont pas été étudiées auparavant, ces commentaires peuvent possiblement se trouver en dehors de la ZPD des élèves.

Le tableau met également en évidence que le passage du point de vue cartésien vers le point de vue paramétrique pour les plans n'est pas effectué dans deux des trois manuels. De plus, le troisième manuel ne le réalise que sur un exemple. La méthode est illustrée à la figure VII.19. Il s'agit, tout comme pour les droites, d'introduire deux paramètres dans une équation cartésienne.



1. Comment déterminer des équations paramétriques d'un plan dont on donne une équation cartésienne ?

On détermine les coordonnées d'un point quelconque du plan.

EXEMPLES

1) Le plan π a pour équation cartésienne $5x-3y+2z-7=0$.
En donnant des valeurs arbitraires à x et y (par exemple), soit $x=\alpha$ et $y=\beta$, les coordonnées d'un point quelconque de π sont $\left(\alpha;\beta;\frac{7-5\alpha+3\beta}{2}\right)$.
Des *équations paramétriques* de π sont donc alors

$$\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \\ z=\frac{7-5\alpha+3\beta}{2}. \end{cases}$$

2) Le plan π a pour équation cartésienne $5x-y=6$.
En donnant des valeurs arbitraires à x (par exemple) et à z, soit $x=\alpha$ et $z=\gamma$, les coordonnées d'un point quelconque de π sont $(\alpha;5\alpha-6;\gamma)$.
Des *équations paramétriques* de π sont donc alors

$$\begin{cases} x=\alpha \\ y=5\alpha-6 \\ z=\gamma. \end{cases}$$

FIGURE VII.19 – Extrait issu du manuel *Espace Math* (Adam & Lousberg, ibid., p. 95).

Un autre point commun dans les trois manuels concerne l'importance du point de vue cartésien dans le cours par rapport au point de vue paramétrique. En effet, le point de vue paramétrique est le premier abordé et permet d'introduire le point de vue cartésien par élimination du ou des paramètres. Une fois que le point de vue cartésien a été introduit, toutes les notions étudiées ensuite sont uniquement définies à partir de ce point de vue. C'est le cas, par exemple, pour les différentes positions relatives de deux droites, de deux ou trois plans, d'une droite et d'un plan.

L'analyse des trois manuels révèle également qu'il y a de nombreux exemples dans le cours. Il s'agit en général d'applications directes de la notion qui vient d'être introduite. Cependant, certains exemples demandent quelques adaptations des connaissances

de la part du lecteur (élève ou enseignant). C'est le cas, par exemple, pour la description d'un plan dans le point de vue paramétrique. La figure VII.20 fournit le résultat du cours. La figure VII.21 donne l'exemple qui suit ce point théorique.

$$\pi \equiv \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{u}} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \\ z_{\vec{v}} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \pi \equiv \begin{cases} x - x_A = \lambda \cdot x_{\vec{u}} + \mu \cdot x_{\vec{v}} \\ y - y_A = \lambda \cdot y_{\vec{u}} + \mu \cdot y_{\vec{v}} \\ z - z_A = \lambda \cdot z_{\vec{u}} + \mu \cdot z_{\vec{v}} \end{cases}$$

FIGURE VII.20 – Extrait issu du manuel *CQFD* (Annoye et al., ibid., p. 186).

Exemple

Équations paramétriques du plan π comprenant les trois points $A(1\ ;\ 3\ ;\ 7)$, $B(5\ ;\ 2\ ;\ 1)$ et $C(7\ ;\ 8\ ;\ 9)$.

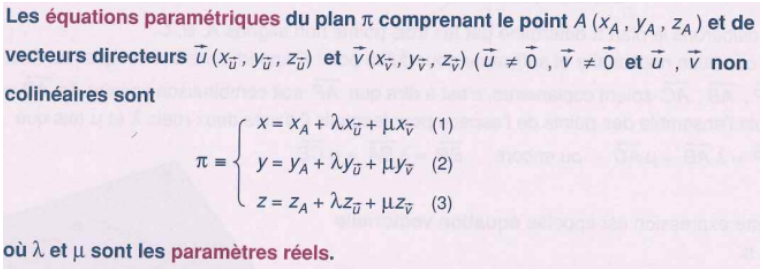
$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (4\ ;\ -1\ ;\ -6)\ ;\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (6\ ;\ 5\ ;\ 2).$$

On obtient $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\lambda + 6\mu \\ y = 3 - \lambda + 5\mu \\ z = 7 - 6\lambda + 2\mu \end{cases}$

FIGURE VII.21 – Extrait issu du manuel *CQFD* (Annoye et al., ibid., p. 186).

La figure VII.20 donne une équation paramétrique ou un système d'équations paramétriques pour un plan passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et dont deux vecteurs directeurs sont $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u, z_u)$ et $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v, z_v)$. Par contre, à la figure VII.21, trois points A, B et C sont donnés. Il s'agit donc de construire deux vecteurs directeurs non colinéaires à partir de ces trois points. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont choisis. Une reconnaissance des modalités d'application de la notion est nécessaire. Notons qu'il n'est pas précisé que les deux vecteurs choisis sont bien non colinéaires. D'ailleurs, le manuel n'y fait pas référence non plus dans le point théorique. Finalement, un système d'équations paramétriques est donné. La forme de celui-ci est légèrement différente de celle fournie dans le point théorique. En effet, ici, les coordonnées du point A sont mises à droite de l'égalité et non à gauche. Il est possible qu'un enseignant dans sa classe apporte des compléments d'explication. Ces commentaires peuvent s'appuyer sur les connaissances anciennes des élèves sur les systèmes d'équations et sur la colinéarité des vecteurs. Ils peuvent aussi s'appuyer sur les connaissances en cours d'acquisition et sur le passage du décontextualisé au contextualisé, amenant ainsi des occasions de proximités descendantes et horizontales.

Nous présentons un deuxième exemple, cette fois-ci pour le manuel *Actimath*. Une description du plan dans le point de vue paramétrique est donnée en toute généralité à la figure VII.22. L'exemple qui suit ce point théorique est donné à la figure VII.23.

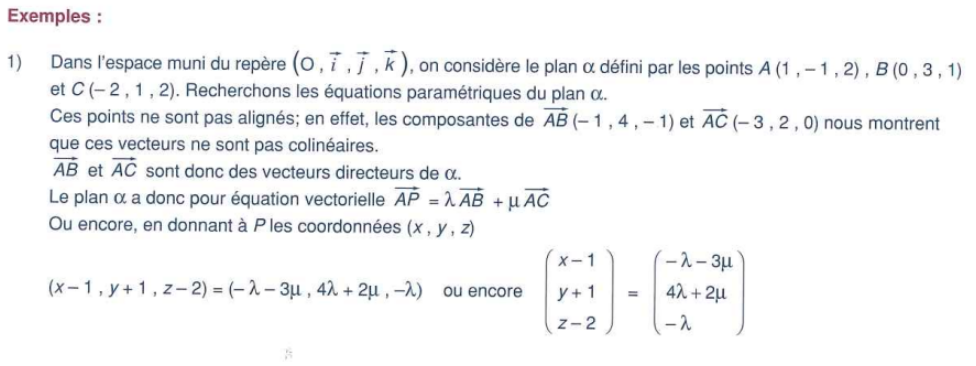


Les équations paramétriques du plan π comprenant le point $A\,(x_A\,,\,y_A\,,\,z_A\,)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\,(x_{\vec{u}}\,,\,y_{\vec{u}}\,,\,z_{\vec{u}})$ et $\vec{v}\,(x_{\vec{v}}\,,\,y_{\vec{v}}\,,\,z_{\vec{v}})$ $(\vec{u} \neq \vec{0}\,,\,\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\vec{u}\,,\,\vec{v}$ non colinéaires sont

$$\pi \equiv \begin{cases} x = x_A + \lambda x_{\vec{u}} + \mu x_{\vec{v}} & (1) \\ y = y_A + \lambda y_{\vec{u}} + \mu y_{\vec{v}} & (2) \\ z = z_A + \lambda z_{\vec{u}} + \mu z_{\vec{v}} & (3) \end{cases}$$

où λ et μ sont les paramètres réels.

FIGURE VII.22 – Extrait issu du manuel *Actimath* (Delfeld et al., ibid., p. 38).



Exemples :

1) Dans l'espace muni du repère $(O\,,\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\,)$, on considère le plan α défini par les points $A\,(1\,,-1\,,2)$, $B\,(0\,,3\,,1)$ et $C\,(-2\,,1\,,2)$. Recherchons les équations paramétriques du plan α.
Ces points ne sont pas alignés; en effet, les composantes de $\overrightarrow{AB}\,(-1\,,4\,,-1)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-3\,,2\,,0)$ nous montrent que ces vecteurs ne sont pas colinéaires.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc des vecteurs directeurs de α.
Le plan α a donc pour équation vectorielle $\overrightarrow{AP} = \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AC}$
Ou encore, en donnant à P les coordonnées $(x\,,\,y\,,\,z)$

$$(x-1\,,\,y+1\,,\,z-2) = (-\lambda-3\mu\,,\,4\lambda+2\mu\,,\,-\lambda) \quad \text{ou encore} \quad \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda-3\mu \\ 4\lambda+2\mu \\ -\lambda \end{pmatrix}$$

FIGURE VII.23 – Extrait issu du manuel *Actimath* (Delfeld et al., ibid., p. 38).

La figure VII.22 met plus en évidence les hypothèses sur les vecteurs directeurs que dans le manuel *CQFD*. Il est bien précisé ici qu'ils sont non nuls et non colinéaires. La figure VII.23 donne trois points A, B et C. Contrairement à la figure VII.21, il est bien justifié que les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Cependant, une traduction est laissée à la charge du lecteur entre « les points ne sont pas alignés » et « les vecteurs formés de ces trois points sont non colinéaires ». De plus, il n'est ni expliqué comment calculer les composantes des vecteurs, ni réellement pourquoi ils ne sont pas colinéaires. Dans ce manuel, il ne s'agit pas d'appliquer directement le résultat qui vient d'être introduit. En effet, une équation vectorielle est d'abord donnée et puis traduite avec les composantes des vecteurs. C'est la démarche appliquée pour obtenir le point théorique de la figure VII.22 qui est particularisée à cet exemple. Les deux formes d'équations dans l'exemple ont été données en toute généralité, mais il ne s'agit pas d'une application directe du résultat vu. Un enseignant peut mettre en évidence dans sa classe les liens décontextualisé/contextualisé et ajouter des explications, notamment pour la non colinéarité, ce qui donnerait lieu à des occasions de proximités descendantes et horizontales.

En ce qui concerne l'interprétation géométrique des objets, il s'agit principalement dans les trois manuels de décrire les droites et les plans par des équations. Le deuxième aspect de l'interprétation géométrique est omniprésent dans tous les manuels mais se limite à une description par des équations. Le premier aspect de l'interprétation géométrique à partir des équations est peu travaillé dans les trois manuels car bien souvent les objets sont explicités. Toutefois, les commentaires présents dans les cours sur

les systèmes d'équations cartésiennes des droites, comme illustrés aux figures VII.6 et VII.7, offrent la possibilité de travailler cet aspect pour les équations cartésiennes. La reconnaissance des objets à partir d'ensembles apparait dans une activité introductive (voir figure VII.5) et dans quelques tâches dans les trois manuels mais concerne uniquement les ensembles de solutions des systèmes. Pour les manuels *CQFD* et *Espace Math*, celle-ci n'est réalisée que pour les intersections de trois plans, comme le montre la figure VII.24. Le manuel *Actimath* en propose une pour les intersections entre deux droites, deux plans et une droite avec un plan (voir figure VII.13).

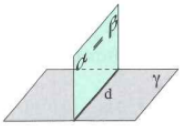
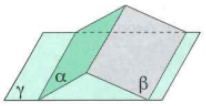
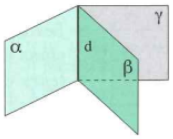
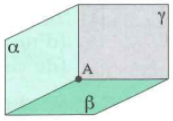
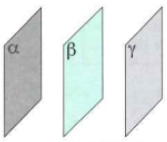
Deux plans sont parallèles confondus et non parallèles au troisième. L'ensemble des solutions est constitué des coordonnées des points de la **droite commune**. Le système est **simplement indéterminé**.		S = d
Les plans sont sécants deux à deux suivant trois droites parallèles distinctes. Le système n'admet **aucune solution**. Il est **impossible**.		S = ∅
Les plans sont sécants suivant une même droite. L'ensemble des solutions est constitué des coordonnées des points de la **droite commune**. Le système est **simplement indéterminé**.		S = d
Les plans sont sécants suivant un seul point. L'ensemble des solutions est constituée des coordonnées du **seul point commun**. Le système n'admet qu'**une seule solution**.		S = {A}
Les trois plans sont parallèles et distincts deux à deux. Le système n'admet **aucune solution**. Il est **impossible**.		S = ∅

FIGURE VII.24 – Extrait issu du manuel *Espace Math* (Adam & Lousberg, ibid., p. 101).

Nous déduisons de cette analyse du cours proposé dans les trois manuels quelques éléments de réponse à notre problématique. Nous nous intéressons à la possibilité de développer une flexibilité entre les cadres géométriques, les registres et les points de vue chez les élèves, ainsi que leur interprétation géométrique des équations et des ensembles de points. Notre analyse révèle que tous les manuels proposent des changements de cadres, des conversions de registres et des changements de points de vue. Cependant, ces traitements internes restent non explicités, ponctuels et à sens unique. En effet, en ce qui concerne les jeux de cadres, nous avons montré qu'il s'agit principalement de passer de la géométrie synthétique à la géométrie vectorielle et de cette dernière à la géométrie analytique. Les passages réciproques ne sont pas abordés. Il en est de même pour les conversions de registres qui s'effectuent le plus souvent du registre de la langue naturelle soit vers le registre du dessin, soit vers le registre algébrique. Nous avons également montré que l'explicitation de ces traitements internes, par un enseignant en

classe, peut occasionner de nombreuses proximités horizontales avec les connaissances que les élèves ont déjà. Nous pointons aussi des occasions de proximités descendantes lorsque les notions sont exemplifiées. Par contre, les trois manuels ne s'appuient pas sur les démarches et les résultats obtenus dans les activités d'introduction. Dans une classe, un enseignant pourra très bien lier le contextualisé au décontextualisé et tenter les occasions de proximités ascendantes repérées.

Nous avons également montré que l'interprétation géométrique des objets n'est que peu présente dans les trois manuels. En effet, les deux aspects de l'interprétation géométrique n'appraissent que pour le point de vue cartésien et uniquement pour les droites, à la condition que les équations de plans soient étudiées avant. Ainsi, l'ordre dans lequel les notions sont introduites peut avoir une influence sur l'interprétation géométrique des objets. Les ensembles et les notions ensemblistes associées (union, intersection, ...) sont peu travaillés dans les trois manuels. Cela peut expliquer que la reconnaissance des objets par des ensembles n'est travaillée que pour les ensembles de solutions des systèmes d'équations linéaires.

Bien que ces manuels soient conformes aux anciens programmes, les changements de points de vue sont abordés et la géométrie vectorielle établit un lien entre la géométrie synthétique et la géométrie analytique. Cependant, ces manuels proposent de passer du point de vue paramétrique au point de vue cartésien pour les plans grâce aux matrices et aux déterminants. Puisque ces notions ne sont plus présentes dans les nouveaux programmes, il se peut que ce changement de point de vue se fasse à partir d'un exemple et plus en toute généralité. De plus, ces manuels ne mettent pas en évidence l'extension des notions entre le plan et l'espace au sein de la partie théorique. Il se peut que cela soit fait dans les manuels conformes aux nouveaux programmes. Nous parlons de ceci au point 4.

Nous complétons maintenant ces premiers résultats par une analyse des exercices proposés dans les trois manuels.

3.3 Les exercices

Les exercices proposés dans les trois manuels sont nombreux. Le tableau VII.2 indique le nombre de tâches proposées par les trois manuels.

	Actimath	*CQFD*	*Espace Math*
Nombres de tâches	132	82	72

TABLE VII.2 – Le nombre de tâches proposées dans les manuels analysés.

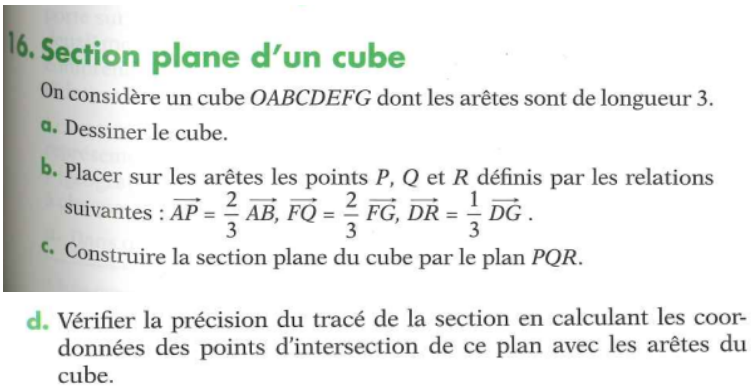
Afin d'inférer des éléments sur la flexibilité qui peut être développée chez les élèves sur les notions visées, nous avons regardé les adaptations des connaissances nécessaires pour la résolution des différentes tâches. Nous avons ainsi précisé le niveau de mise en fonctionnement des connaissances pour chacune des tâches et pour les trois manuels. Le tableau VII.3 regroupe cette information.

Niveaux de mise en fonctionnement	*Actimath*	*CQFD*	*Espace Math*
Technique	42	12	30
Mobilisable	78	49	35
Disponible	12	21	7

TABLE VII.3 – Niveaux de mise en fonctionnement des tâches dans les manuels.

Nous ne présentons pas l'analyse *a priori* de toutes les tâches proposées dans les trois manuels. Partant du tableau VII.3, nous exposons nos constatations et les exemplifions par une ou plusieurs tâches des manuels. Nous avons réalisé et encadré l'analyse *a priori* des tâches sélectionnées.

Le manuel *CQFD* propose beaucoup plus de tâches de niveau disponible car ce manuel est composé d'une section « résoudre un problème ». Dans cette partie du manuel, nous retrouvons huit tâches permettant de travailler les notions de droites et de plans dans l'espace dans leur dimension outil, mais aussi de lier les outils et les démarches de la géométrie synthétique et de la géométrie analytique (voir figure VII.25). Ce travail de comparaison entre les démarches propres aux géométries synthétique et analytique est préconisé dans les nouveaux programmes.



16. Section plane d'un cube

On considère un cube *OABCDEFG* dont les arêtes sont de longueur 3.

a. Dessiner le cube.

b. Placer sur les arêtes les points *P*, *Q* et *R* définis par les relations suivantes : $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{DR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DG}$.

c. Construire la section plane du cube par le plan *PQR*.

d. Vérifier la précision du tracé de la section en calculant les coordonnées des points d'intersection de ce plan avec les arêtes du cube.

FIGURE VII.25 – Extrait issu du manuel *CQFD* (Delfeld et al., ibid., p. 203–204).

Analyse *a priori* de la tâche présentée à la figure VII.25

Toutes les questions sont fermées.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie synthétique, cadre de la géométrie vectorielle, cadre de la géométrie analytique.

Registres d'écriture

Registre de la langue naturelle, registre algébrique, registre du dessin, registre ensembliste.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : perspective cavalière, cube, repère orthonormé de l'espace, repérage des points dans l'espace, opérations vectorielles, composantes d'un vecteur, section d'un cube par un plan, parallélisme, point de percée d'une droite dans un plan (GS), droites sécantes, vecteurs directeurs, systèmes d'équations.
- Connaissances en cours d'acquisition : équations paramétriques et cartésiennes de plans, équations paramétriques de droites de l'espace.

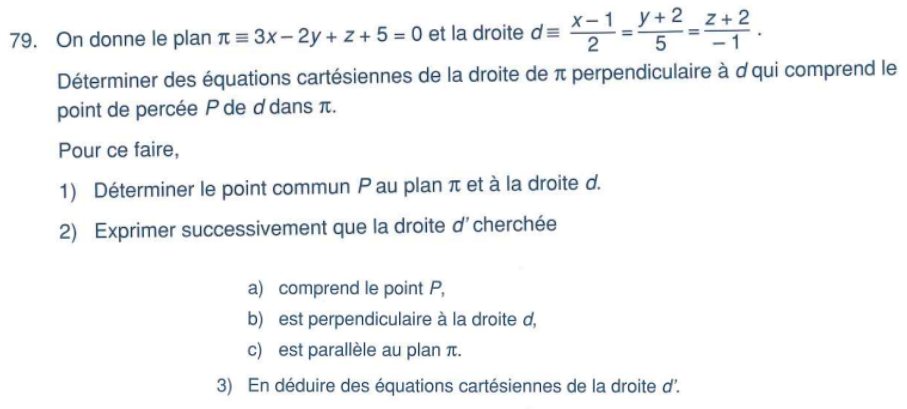
Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Un cube doit être dessiné à la première question (*conversion de registres*). Cela met en jeu les connaissances de géométrie synthétique sur la perspective cavalière et les propriétés du cube (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Les points P, Q et R sont définis via une relation vectorielle. Il s'agit de placer le cube dans un repère orthonormé de l'espace et de donner les coordonnées des sommets (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *changement de cadres*). Les coordonnées des points P, Q et R sont déterminées en utilisant les opérations vectorielles et le calcul des composantes d'un vecteur (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Le placement de ces trois points sur le cube amène à mesurer des distances entre deux points (*conversion de registres*). Une fois ces trois points placés, il s'agit de construire une section du cube par le plan PQR dans le cadre de la géométrie synthétique. Cette construction fait intervenir beaucoup de connaissances anciennes de ce cadre tels que le parallélisme des faces du cube, la recherche d'un point de percée d'une droite dans un plan, la recherche du point d'intersection de deux droites. La résolution détaillée de cette tâche est proposée en annexe B. Il est enfin demandé de vérifier la précision du tracé. Il s'agit donc de construire la section du cube par le plan PQR dans le cadre de la géométrie analytique. Pour cela, une équation du plan PQR et de chaque arête du cube doit être donnée dans un point de vue à choisir (*existence de choix*, *mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Des vecteurs directeurs peuvent facilement être donnés pour les différents objets (*mise en jeu de connaissances anciennes en géométrie vectorielle*). Une équation paramétrique est écrite pour le plan PQR et pour les arêtes. Il est possible de donner une équation cartésienne du plan pour faciliter les calculs suivants (*changement de points de vue*). Plusieurs systèmes doivent ensuite être résolus dans le registre algébrique (*mise en jeu de connaissances anciennes*). L'ensemble des solutions est ensuite donné (*conversion de registres*). Chaque ensemble représente les coordonnées d'un sommet de la section qu'il faut déterminer. Ces points sont placés sur le dessin (*conversion de registres*, *mise en jeu de connaissances anciennes*). Il reste à comparer les deux sections pour juger de la précision du tracé effectué dans le cadre de la géométrie synthétique.

Ainsi, cette tâche mélange les cadres de la géométrie synthétique, de la géométrie vectorielle et de la géométrie analytique. Elle peut aussi entrainer des changements de points de vue du paramétrique au cartésien. Elle met en œuvre des conversions entre le registre algébrique et le registre du dessin. De plus, la comparaison entre les deux constructions permet de travailler l'interprétation géométrique des équations. En effet, la mise en parallèle des objets et des équations qui les décrivent amène à travailler les deux aspects de l'interprétation géométrique. Cette tâche relève du niveau de mise en fonctionnement disponible et peut amener les élèves à développer une certaine flexibilité

et favoriser ainsi la conceptualisation des notions de géométrie analytique dans l'espace.

Dans le manuel *Actimath*, une partie « problèmes » est également proposée, ainsi qu'une partie « exercices dirigés ». Cependant, les tâches sont très découpées et elles ne comparent pas les démarches de géométrie synthétique et analytique, à l'inverse du *CQFD*. Le manuel *Espace Math* possède également une partie « pour chercher », mais les tâches qui y sont proposées sont similaires au manuel *Actimath*. Un exemple est fourni à la figure VII.26.



79. On donne le plan $\pi \equiv 3x - 2y + z + 5 = 0$ et la droite $d \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{5} = \frac{z+2}{-1}$.

Déterminer des équations cartésiennes de la droite de π perpendiculaire à d qui comprend le point de percée P de d dans π.

Pour ce faire,

1) Déterminer le point commun P au plan π et à la droite d.
2) Exprimer successivement que la droite d' cherchée
   a) comprend le point P,
   b) est perpendiculaire à la droite d,
   c) est parallèle au plan π.
3) En déduire des équations cartésiennes de la droite d'.

FIGURE VII.26 – Extrait issu du manuel *Actimath* (Delfeld et al., ibid., p. 88–89).

Analyse *a priori* de la tâche présentée à la figure VII.26

Toutes les questions sont fermées.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie vectorielle, cadre de la géométrie analytique.

Registres d'écriture

Registre de la langue naturelle, registre algébrique, registre ensembliste.

Point de vue

Point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : vecteurs directeurs, systèmes d'équations, produit scalaire.
- Connaissances en cours d'acquisition : équations cartésiennes de plans, équations cartésiennes de droites de l'espace, positions relatives d'une droite et d'un plan, point de percée d'une droite dans un plan, vecteurs normaux.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Une équation d'un plan et un système d'équations d'une droite sont donnés dans le point de vue cartésien. Il est demandé de déterminer une

description d'une droite dans le point de vue cartésien connaissant sa position relative par rapport aux deux autres objets (*reconnaissance des modalités d'application*). Le *raisonnement est organisé* et découpé par l'énoncé en plusieurs étapes. Il s'agit tout d'abord de déterminer le point de percée P de la droite d dans le plan π (*conversion de registres*). Afin de déterminer le point P, un système de trois équations à trois inconnues doit alors être résolu (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *conversion de registres*). L'ensemble des solutions de ce système sont les coordonnées du point P (*conversion de registres*). Puis, un vecteur directeur de la droite d' doit être recherché. Pour ce faire, il faut traduire la position relative de la droite d' par rapport à la droite d et au plan π en termes de vecteurs (*changement de cadres*, *mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Un vecteur directeur de la droite d et un vecteur normal du plan π sont donnés. Un vecteur directeur de la droite d' est orthogonal à ces deux vecteurs. Un système de deux équations à trois inconnues peut être écrit en développant le produit scalaire entre le vecteur recherché et le vecteur directeur ou le vecteur normal (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *conversion de registres*). L'ensemble des solutions du système fournit tous les vecteurs orthogonaux à ces deux vecteurs donnés (*conversion de registres*). Il s'agit de choisir un vecteur directeur de la droite d' (*existence d'un choix*). Un système d'équations cartésiennes de cette droite peut finalement être écrit (*changement de cadres*, *mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*).

La résolution de cette tâche amène des conversions entre les registres de la langue naturelle, algébrique et ensembliste, et des jeux de cadres entre la géométrie vectorielle et la géométrie analytique. De nombreuses connaissances anciennes et en cours d'acquisition sont mises en œuvre. Cependant, aucun changement de points de vue n'est nécessaire. De plus, la tâche est découpée en sous-tâches indiquant l'organisation du raisonnement à suivre. Cette tâche qui peut être de niveau de mise en fonctionnement disponible se voit ainsi devenir mobilisable (voire technique). La flexibilité attendue pour conceptualiser les notions ne nous semble pas être développée sur ce type de tâche.

Ainsi, les problèmes proposés par les manuels *Actimath* et *Espace Math* ne mettent pas en jeu des adaptations variées des connaissances. En effet, leur analyse *a priori* ne met en évidence que peu de traitements internes. Cela s'explique notamment par le fait que les tâches soient très découpées.

Le tableau VII.3 indique qu'il y a plus d'exercices techniques dans le manuel *Actimath*. Cela s'explique par la présence de nombreux exemples dans le cours. En effet, plusieurs tâches proposées dans la partie exercices sont considérées comme étant techniques car le travail à réaliser a déjà été effectué auparavant. Nous proposons un exercice résolu dans le cours à la figure VII.27 et une tâche similaire dans les exercices à la figure VII.28.

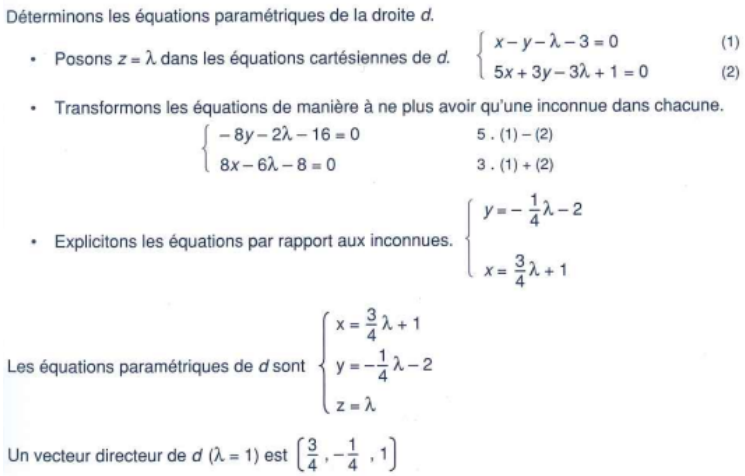


FIGURE VII.27 – Extrait issu du manuel *Actimath* (Delfeld et al., ibid., p. 53).

Dans cet extrait (figure VII.27), un système d'équations cartésiennes d'une droite est donné sous une forme générale [3]. Une méthode est proposée dans le cours pour déterminer une équation paramétrique et un vecteur directeur de la droite d à partir de cette forme générale. Il s'agit de poser une inconnue comme étant le paramètre et d'exprimer les deux autres inconnues en fonction de ce paramètre.

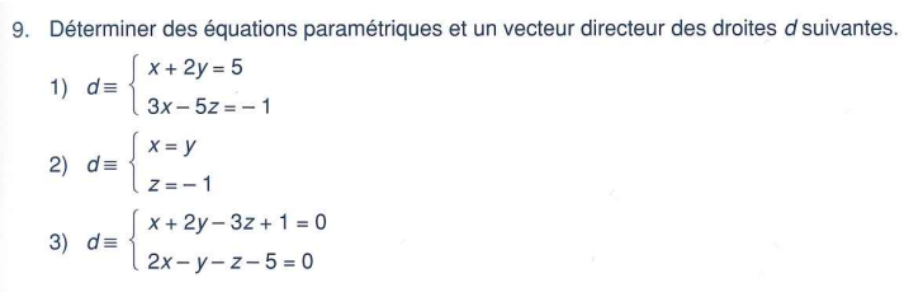


FIGURE VII.28 – Extrait issu du manuel *Actimath* (Delfeld et al., ibid., p. 77).

La figure VII.28 illustre un exercice qui est proposé par le manuel. Tout comme dans l'exemple traité au sein du cours, il s'agit de déterminer une équation paramétrique et un vecteur directeur d'une droite dont on connait un système d'équations cartésiennes sous forme générale. La même méthode s'applique donc ici. Ainsi, au regard du travail effectué dans le cours, la résolution de cette tâche amène à appliquer une méthode donnée. Le niveau de mise en fonctionnement est dès lors technique. Ainsi, le travail proposé dans le cours peut influencer les adaptations qui doivent être réalisées pour résoudre les tâches et donc le niveau de mise en fonctionnement des connaissances des élèves également.

Les manuels proposent majoritairement des tâches de niveau de mise en fonctionnement mobilisable. Un exemple est donné pour chaque manuel aux figures VII.29,

3. Il s'agit de décrire une droite par un système de deux équations cartésiennes de plans. Celles-ci sont explicites contrairement à la forme canonique des équations cartésiennes de droites dans l'espace

VII.30 et VII.31. Ces exemples nous amènent à pointer les similitudes et les différences en termes d'adaptations.

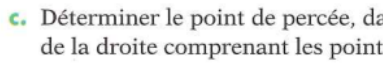

c. Déterminer le point de percée, dans le plan $\pi \equiv 2x - y + 3z - 2 = 0$, de la droite comprenant les points $A(-2\,;1\,;2)$ et $B(0\,;3\,;2)$.

FIGURE VII.29 – Extrait issu du manuel *CQFD* (Annoye et al., ibid., p. 200).

Analyse *a priori* de la tâche présentée à la figure VII.29

La question est fermée.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie vectorielle, cadre de la géométrie analytique.

Registres d'écriture

Registre de la langue naturelle, registre algébrique, registre ensembliste.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : vecteurs directeurs, composantes de vecteurs, systèmes d'équations.
- Connaissances en cours d'acquisition : équations cartésiennes de plans, équations paramétriques et cartésiennes de droites de l'espace.
- Connaissances nouvelles : positions relatives d'une droite et d'un plan.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Il s'agit de déterminer un point de percée entre une droite et un plan. La résolution algébrique d'un système composé des équations du plan et de la droite amène à cet objectif (*reconnaissance des modalités d'application*, *conversion de registres*). L'énoncé donne une équation du plan dans le point de vue cartésien. Il reste à rechercher une équation de la droite passant par les points A et B (*organisation du raisonnement*). Puisque les coordonnées des points A et B sont données, les composantes d'un vecteur directeur de la droite AB doivent être calculées (*mise en jeu de connaissances anciennes en géométrie vectorielle*). La droite peut être décrite dans un point de vue cartésien ou paramétrique (*existence de choix*). La résolution algébrique du système permet de déterminer le point de percée de la droite dans le plan (*mise en jeu de connaissances anciennes*). L'ensemble des solutions décrit le point (*conversion de registres*).

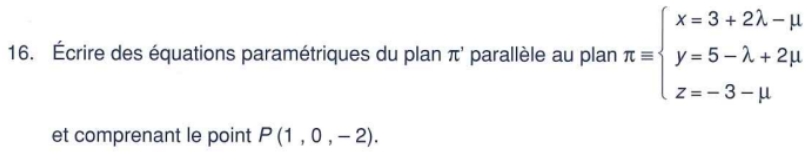


FIGURE VII.30 – Extrait issu du manuel *Actimath* (Delfeld et al., ibid., p. 78).

Analyse *a priori* de la tâche présentée à la figure VII.30

La question est fermée.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie vectorielle, cadre de la géométrie analytique.

Registres d'écriture

Registre de la langue naturelle, registre algébrique.

Point de vue

Point de vue paramétrique.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : vecteurs directeurs.
- Connaissances en cours d'acquisition : équations cartésiennes de plans.
- Connaissances nouvelles : positions relatives de deux plans.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Une équation du plan π' dans le point de vue paramétrique doit être déterminée. Un point et deux vecteurs directeurs de ce plan doivent être recherchés (*reconnaissance des modalités d'application*). Un point de ce plan est donné dans l'énoncé. Pour trouver deux vecteurs directeurs du plan π', il faut traduire la position relative des deux plans en termes de vecteurs (*changement de cadres*, *mise en jeu de connaissances nouvelles*). Deux vecteurs directeurs du plan π peuvent être donnés à partir du point de vue paramétrique (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Il faut choisir deux vecteurs colinéaires à ceux-ci (*existence de choix*). Ces deux vecteurs sont des vecteurs directeurs du plan π'. Une équation paramétrique du plan peut finalement être écrite (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*) dans le cadre de la géométrie analytique.

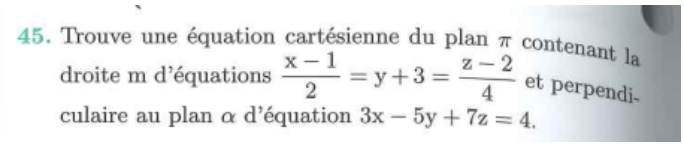

45. Trouve une équation cartésienne du plan π contenant la droite m d'équations $\frac{x-1}{2} = y+3 = \frac{z-2}{4}$ et perpendiculaire au plan α d'équation $3x - 5y + 7z = 4$.

FIGURE VII.31 – Extrait issu du manuel *Espace Math* (Adam & Lousberg, 2004b, p. 198).

Analyse *a priori* de la tâche présentée à la figure VII.31

La question est fermée.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie vectorielle, cadre de la géométrie analytique.

Registres d'écriture

Registre de la langue naturelle, registre algébrique.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : vecteurs directeurs, colinéarité de vecteurs, calculs de déterminants, produit scalaire.
- Connaissances en cours d'acquisition : équations cartésiennes de plans, vecteurs normaux, équations cartésiennes de plans sous forme de déterminants.
- Connaissances nouvelles : positions relatives d'une droite et d'un plan, de deux plans.

Adaptations à réaliser

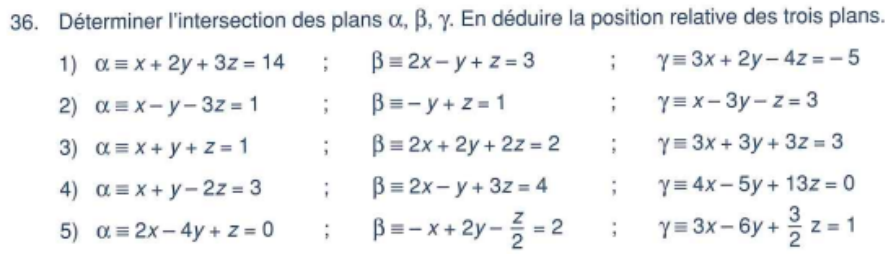
L'énoncé est donné en langue naturelle. Une équation cartésienne d'un plan sachant sa position relative par rapport à un autre plan et une droite doit être déterminée (*reconnaissance des modalités d'application*). Le *raisonnement est organisé* en plusieurs étapes : traduire les différentes informations liées aux positions relatives des objets entre eux, écrire une équation cartésienne du plan. Puisque la droite m est incluse au plan π, un vecteur directeur du plan π est colinéaire à un vecteur directeur de la droite m (*changement de cadres*, *mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Un vecteur directeur de la droite m est déterminé à partir du point de vue cartésien. Un vecteur qui lui est colinéaire est un vecteur directeur du plan π (*existence d'un choix*). Puisque le plan α et le plan π sont perpendiculaires, un vecteur directeur du plan π est colinéaire à un vecteur normal du plan α (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*, *changement de cadres*). Un vecteur normal du plan α peut être déterminé directement à partir du point de vue cartésien (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Un choix de vecteur colinéaire à ce vecteur normal est à faire (*existence de choix*). Une vérification de la non colinéarité des deux vecteurs directeurs du plan π est à effectuer (*mise en jeu de connaissances anciennes en géométrie vectorielle*). Plusieurs méthodes sont possibles pour trouver une équation cartésienne du

plan π (*existence de choix*). Une première méthode consiste à écrire une équation paramétrique du plan π et d'éliminer les deux paramètres pour obtenir une équation cartésienne (*changement de points de vue*, *mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Une deuxième méthode consiste à écrire un déterminant 3×3 nul et de le calculer par la méthode de son choix : Sarrus ou cofacteurs (*existence de choix*, *mise en jeu de connaissances anciennes et en cours d'acquisition*, *changement de points de vue*). Une troisième méthode consiste à tenter de déterminer un vecteur normal du plan π en cherchant un vecteur orthogonal aux deux vecteurs directeurs trouvés. Cela amène à résoudre un système de deux équations à trois inconnues dont chaque équation est obtenue en utilisant le produit scalaire (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Un vecteur normal est alors à choisir (*existence de choix*) et une équation cartésienne peut être écrite (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*).

Ces tâches mettent toutes en jeu une conversion de registres entre la langue naturelle et l'algébrique. Les seuls jeux de cadres effectués sont entre la géométrie vectorielle et la géométrie analytique. Dans toutes ces tâches, l'articulation des points de vue se réalise dans le sens paramétrique vers cartésien. Ainsi, certaines adaptations sont à réaliser. Le raisonnement n'est pas explicitement donné par l'énoncé mais il reste relativement proche de celui effectué dans les cours des trois manuels. Ces résultats peuvent être généralisés pour la majorité des tâches proposées. Certaines tâches nécessitent d'articuler les points de vue dans le sens cartésien/paramétrique, elles sont peu nombreuses. Les traitements internes développés dans la partie exercices des trois manuels sont donc similaires à ceux réalisés dans le cours.

Nous déduisons de cette analyse de tâches que les traitements internes travaillés par les manuels ne sont pas variés. Seules les tâches « problèmes » du manuel *CQFD* demandent de réaliser des changements de cadres entre la géométrie synthétique et la géométrie analytique et des conversions plus nombreuses et variées, notamment parce que le registre du dessin est présent. Ce type de tâches requiert une certaine disponibilité des connaissances et une plus grande flexibilité entre les cadres, les registres et les points de vue que les autres tâches. Ce sont aussi les seuls exercices proposant de travailler la dimension outil des notions de droites et de plans dans l'espace. La flexibilité nécessaire entre les cadres, les registres et les points de vue est donc peu exploitée.

Cette analyse met également en évidence que la reconnaissance des objets (premier aspect de l'interprétation géométrique) à partir d'équations n'est jamais explicitement travaillée dans les exercices des trois manuels. Cependant, elle est parfois demandée à partir de l'ensemble des solutions d'un système. Il s'agit alors de déterminer l'objet décrit par cet ensemble pour en déduire par la suite la position relative des objets entre eux. Un exemple de tâche demandant d'interpréter géométriquement les solutions d'un système est donné à la figure VII.32. Aucun des exercices dans les trois manuels ne demande de décrire une droite ou un plan par un ensemble de points ou de vecteurs.



36. Déterminer l'intersection des plans α, β, γ. En déduire la position relative des trois plans.

1) $\alpha \equiv x+2y+3z=14$; $\beta \equiv 2x-y+z=3$; $\gamma \equiv 3x+2y-4z=-5$

2) $\alpha \equiv x-y-3z=1$; $\beta \equiv -y+z=1$; $\gamma \equiv x-3y-z=3$

3) $\alpha \equiv x+y+z=1$; $\beta \equiv 2x+2y+2z=2$; $\gamma \equiv 3x+3y+3z=3$

4) $\alpha \equiv x+y-2z=3$; $\beta \equiv 2x-y+3z=4$; $\gamma \equiv 4x-5y+13z=0$

5) $\alpha \equiv 2x-4y+z=0$; $\beta \equiv -x+2y-\frac{z}{2}=2$; $\gamma \equiv 3x-6y+\frac{3}{2}z=1$

FIGURE VII.32 – Extrait issu du manuel *Actimath* (Delfeld et al., ibid., p. 82).

Analyse *a priori* de la tâche présentée à la figure VII.32

La question est fermée.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie synthétique.

Registres d'écriture

Registre de la langue naturelle, registre algébrique, registre ensembliste.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : systèmes d'équations, échelonnement de matrices, colinéarité de vecteurs.
- Connaissances en cours d'acquisition : équations cartésiennes et paramétriques de plans, équations paramétriques de droites de l'espace, vecteurs normaux.
- Connaissances nouvelles : positions relatives de trois plans.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Pour déterminer l'intersection des trois plans, il s'agit de résoudre algébriquement des systèmes de trois équations à trois inconnues (*conversion de registres*). La résolution de ces systèmes peut se faire selon plusieurs méthodes : substitution, combinaison linéaire, échelonnement de matrices (*existence de choix*, *mise en jeu de connaissances anciennes*). L'ensemble des solutions est à écrire pour chaque système (*conversion de registres*). Chaque ensemble doit ensuite être interprété géométriquement afin de déduire la position relative des trois plans. Dans trois cas sur les cinq, l'ensemble des solutions décrit un point. Il s'agit de reconnaître que les trois plans sont sécants en un point (*changement de cadres*). Dans le cas (3), l'ensemble des solutions décrit un plan. Il s'agit de reconnaître ce plan à partir du point de vue paramétrique (*conversion de registres*). Il faut en déduire que les trois plans sont confondus (*changement de cadres*). Pour le déterminer, il n'est pas nécessaire de résoudre le système puisque les équations

sont équivalentes. Dans le cas (5), l'ensemble des solutions est l'ensemble vide. Il faut en déduire que les trois plans sont parallèles distincts (*changement de cadres*). Encore une fois, il n'est pas nécessaire de résoudre le système pour le déterminer puisque les vecteurs normaux des plans sont colinéaires et que les termes indépendants ne respectent pas cette proportionnalité (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition et anciennes*).

Cette tâche met en jeu une conversion entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique mais aussi une conversion entre le registre algébrique et le registre ensembliste. Des changements de cadres entre la géométrie analytique et la géométrie synthétique sont possibles pour déterminer la position des trois plans. Cependant, aucun changement de point de vue n'est nécessaire. Cette tâche travaille le premier aspect de l'interprétation géométrique à la fois pour les ensembles de solutions d'un système et les équations (cartésiennes).

Comme nous l'avons déjà précisé, ces trois manuels ne sont pas conformes aux très récents programmes. Seul le manuel *CQFD* a été mis à jour, à l'heure actuelle, pour se conformer aux nouveaux programmes. Il nous semble intéressant d'analyser cette nouvelle version du manuel et de la comparer à celle que nous venons de présenter. Les éventuelles différences repérées nous guident dans l'analyse de la prise en compte des nouveaux programmes par les enseignants sur ces notions. Nous nous intéressons donc au manuel *CQFD* (2019) au point suivant.

4 La géométrie analytique dans l'espace dans le « nouveau » manuel

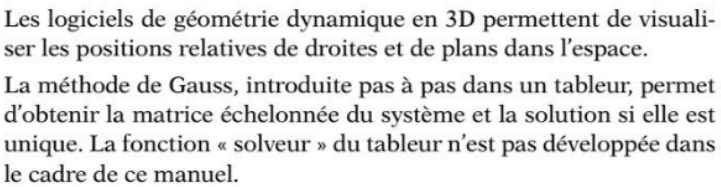
Le manuel *CQFD* (2019) est très similaire au manuel *CQFD* (2014). En réalité, le chapitre sur les équations de droites et de plans dans l'espace dans la nouvelle version constitue une fusion de deux chapitres de la version précédente. En effet, les notions du chapitre 14, intitulé « Systèmes d'équations », ont été intégrées à celles du chapitre 13 sur la géométrie analytique dans l'espace étudié au point précédent. Dans le chapitre 14 du manuel de 2014, les différentes méthodes de résolution des systèmes sont abordées comme par exemple l'échelonnement des matrices. Or, ces notions ne sont plus présentes dans les nouveaux programmes. Pourtant, il est demandé d'introduire une équation cartésienne d'un plan à l'aide d'un déterminant nul. Ceci peut expliquer pourquoi ces notions sont désormais introduites au sein du chapitre de la géométrie analytique dans l'espace. Nous nous intéressons ici qu'aux différences entre les deux versions du manuel dans les activités d'introduction, dans le cours et dans les exercices proposés.

En ce qui concerne les activités d'introduction, seule une nouvelle activité a été ajoutée concernant la résolution d'un système par la méthode du pivot de Gauss. Cette activité s'étend sur deux pages complètes du manuel. La notion de matrice et la méthode du pivot de Gauss sont introduites par un texte explicatif. Il est ensuite demandé d'appliquer directement cette méthode sur un système donné. Il s'agit donc d'écrire la matrice augmentée associée au système et de l'échelonner par la méthode du pivot de Gauss. Un système équivalent au premier ainsi que l'ensemble des solutions des systèmes peuvent

être écrits. Il est explicitement demandé de déterminer l'objet géométrique décrit par cet ensemble de solutions. Cette activité introductive met donc en jeu les cadres matriciel et de la géométrie analytique. Plusieurs conversions de registres sont nécessaires. En effet, une conversion entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique est réalisée lorsque la méthode donnée dans le texte explicatif est appliquée. Une conversion entre le registre ensembliste et le registre de la langue naturelle apparait également pour l'interprétation géométrique de l'ensemble des solutions. Il s'agit aussi de reconnaître une droite dans le point de vue paramétrique et trois plans dans le point de vue cartésien. Aucun changement de point de vue n'est abordé. Le premier aspect de l'interprétation géométrique semble être un peu plus développé à partir d'un ensemble dans ce manuel.

L'ordre dans lequel les notions du cours sont introduites est légèrement différent entre les deux versions du manuel. Jusqu'aux équations paramétriques, les deux manuels sont identiques (mots pour mots). Avant d'introduire les équations cartésiennes des plans, la nouvelle version du manuel aborde les matrices et les déterminants, ainsi que leurs propriétés et les méthodes de calculs des déterminants (Sarrus et cofacteurs). Le point de vue cartésien est ensuite amené comme dans l'ancienne version du manuel, c'est-à-dire de manière générale à l'aide des déterminants. Les différentes positions relatives sont présentées de façon identique à la version précédente du manuel. Finalement, les différentes méthodes de résolution des systèmes (substitution, Gauss, Cramer) sont présentées et exemplifiées. Ainsi, les résultats énoncés au point ci-dessus pour la version précédente du manuel restent inchangés pour cette version-ci.

Le manuel de 2019 ajoute une partie intitulée « Outils numériques ». Nous avons mis en évidence dans la partie 1 que l'outil numérique devait être intégré au besoin au sein des chapitres. Notons que le programme ne précise pas forcément quand et comment l'utiliser. La figure VII.33 illustre deux idées proposées par le manuel.



Les logiciels de géométrie dynamique en 3D permettent de visualiser les positions relatives de droites et de plans dans l'espace.

La méthode de Gauss, introduite pas à pas dans un tableur, permet d'obtenir la matrice échelonnée du système et la solution si elle est unique. La fonction « solveur » du tableur n'est pas développée dans le cadre de ce manuel.

FIGURE VII.33 – Extrait issu du manuel *CQFD* (Annoye, Gilon, Van Eerdenbrugghe, & Wilemme, 2019, p. 403).

L'outil numérique utilisé est le logiciel gratuit *GeoGebra*. Toutes les manipulations à effectuer sont indiquées par le manuel. Il s'agit d'introduire trois équations cartésiennes de plans et de visualiser leur position relative dans l'espace. Ensuite, il est demandé d'utiliser les fonctionnalités du logiciel pour déterminer la droite d'intersection des plans deux à deux. Finalement, le point d'intersection des droites doit être mis en évidence, toujours grâce aux fonctionnalités du logiciel. Cette démarche a pour objectif de faire visualiser aux élèves la position relative des trois plans et leur point d'intersection.

Dans la partie exercices de ce nouveau manuel, 7 exercices et 6 problèmes ont été ajoutés par rapport à la version précédente du manuel. Les problèmes concernent uniquement la résolution de systèmes d'équations linéaires. Le cadre de la géométrie analytique n'y est pas en jeu. Parmi les 7 exercices ajoutés, deux d'entre eux amènent à calculer des déterminants. Cela correspond à 17 tâches techniques. Trois d'entre eux demandent de résoudre un système comme l'illustre la figure VII.34.

Résoudre les systèmes suivants. On pourra utiliser différentes méthodes et comparer.

Série 1 (en guise de rappel ou pour tester de nouvelles méthodes)

a. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 4 \\ 5x_1 - 7x_2 = -5 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 8 \\ -6x_1 - 2x_2 = 3 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x_1 - \frac{x_2}{2} = 7 \\ 6x_1 - x_2 = -5 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 1 \\ -2x_1 + x_2 = -0{,}5 \end{cases}$

Série 2

a. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ 5x_1 - 2x_2 - 12x_3 = -5 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} \frac{5}{2}x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ -\frac{7}{2}x_1 + 5x_2 + x_3 = -\frac{5}{2} \\ -2x_1 + 2x_2 + \frac{3}{5}x_3 = \frac{8}{5} \end{cases}$

FIGURE VII.34 – Extrait issu du manuel *CQFD* (Annoye et al., ibid., p. 413).

La première série amène à résoudre des systèmes de deux équations à deux inconnues. La deuxième série amène à résoudre des systèmes de trois équations à trois inconnues. Le contexte dans lequel il faut résoudre ces systèmes n'est jamais précisé. En effet, pour la première série, il est certainement sous-entendu que nous sommes dans le plan $\mathbb{R}^2$. Or, il est possible de résoudre de tels systèmes dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Il est, selon nous, important de préciser ce contexte car les équations et l'ensemble des solutions ne décrivent pas les mêmes objets géométriques. Il se peut que cela renforce une difficulté des élèves, mentionnées à la partie 1, sur les équations incomplètes de plans.

Deux des exercices ajoutés permettent, selon nous, de travailler le premier aspect de l'interprétation géométrique à partir d'ensembles. Nous présentons ces deux exercices aux figures VII.35 et VII.36.

Les ensembles suivants peuvent-ils être des ensembles de solutions de systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$?

a. $\{(3;4;-2)\}$
b. $\{(3;4;-2);(1;6;-1)\}$
c. $\varnothing$
d. $\mathbb{R}^3$
e. $\{(\lambda;2\lambda;-2)|\lambda\in\mathbb{R}\}$
f. $\{4;-2;3\}$
g. $\{(\lambda;2\lambda;-2)|\lambda\in\mathbb{R}\}\cup\{(\mu;\mu+3;5)|\mu\in\mathbb{R}\}$
h. $\{(\lambda+3\mu;\lambda-\mu;\mu-2)|\lambda,\mu\in\mathbb{R}\}\cup\{(4;5;2)\}$
i. $\{(2\lambda+5\mu;2\lambda+3\mu;\lambda+4\mu-2)|\lambda,\mu\in\mathbb{R}\}\cup\{(12;8;7)\}$

FIGURE VII.35 – Extrait issu du manuel *CQFD* (Annoye et al., ibid., p. 406).

La tâche proposée à la figure VII.35 est assez différente de ce que nous avons pu trouver dans les manuels analysés. En effet, les tâches habituelles demandent de résoudre un système et de trouver l'ensemble des solutions. Ce type de tâches fait intervenir les registres algébrique et ensembliste. Ici, il s'agit de partir d'un ensemble et de déterminer si cela peut être ou non un ensemble de solutions d'un système. Un travail sur les notions ensemblistes est proposé ici, notamment l'union de deux ensembles. Les élèves peuvent ainsi rencontrer des ensembles qui ne sont pas des ensembles de solutions. La reconnaissance des objets géométriques à partir de ces ensembles est alors nécessaire pour résoudre ces tâches. Si l'ensemble donné est un ensemble de solutions, il reste encore à fournir les objets géométriques dont l'intersection peut être cet ensemble. Par exemple, l'ensemble (a) décrit un point dans l'espace. Cet ensemble peut être l'ensemble des solutions d'un système composé des équations de deux droites sécantes ou des équations de trois plans sécants. Le point de vue paramétrique des droites et des plans est en jeu pour plusieurs des ensembles donnés. Ce type de tâches peut être abordé en classe pour développer chez les élèves le premier aspect de l'interprétation géométrique.

Les systèmes ci-dessous ont-ils une solution unique ? Répondre le plus rapidement possible et avec un minimum de calculs.

a. $\begin{cases}2x+2y+3z=1\\x+y+z=-1\\x+y+z=7\end{cases}$
b. $\begin{cases}5x-2y+3z=6\\4x-y+2z=-5\end{cases}$
c. $\begin{cases}3x-2y+z=1\\36x-24y+12z=12\\2x-7y-z=2\end{cases}$
d. $\begin{cases}0x+0y+0z=0\\2x+3y+4z=-2\\5x+2y+3z=7\end{cases}$
e. $\begin{cases}5x-4y+2z=3\\4x+2y-z=9\\2x+3y-z=2\end{cases}$
f. $\begin{cases}3x-4y+2z=3\\4x+2y-z=9\\x+6y-3z=2\end{cases}$

FIGURE VII.36 – Extrait issu du manuel *CQFD* (Annoye et al., ibid., p. 407).

À la figure VII.36, il ne faut pas résoudre algébriquement le système et écrire l'ensemble des solutions. Deux méthodes peuvent être envisagées pour déterminer si le système a une unique solution. La première consiste à écrire la matrice associée à chaque système et de calculer son déterminant. Le système a une unique solution si ce détermi-

nant est non nul. Cette méthode amène à effectuer des calculs et peut être plus ou moins rapide en fonction des élèves. La deuxième méthode est selon nous plus rapide et amène moins de calculs. Pour que le système ait une solution unique, il faut que l'intersection des objets géométriques donne un point. Il est question ici de déterminer l'objet décrit par chacune des équations du système, d'étudier la position relative des objets entre eux et d'analyser si leur intersection peut donner un point. Par exemple, pour la tâche (a), chacune des équations décrit un plan dans le point de vue cartésien. Or, deux des trois plans sont parallèles car un vecteur normal du deuxième plan est un vecteur normal du troisième plan. Ainsi, il n'est pas possible que leur intersection donne un point. Dans ce cas-ci, le premier aspect de l'interprétation géométrique des objets peut être développé pour les équations cartésiennes de plans avec ce type de tâches. Cependant, aucune tâche ne propose un travail similaire avec des droites ou avec des équations dans le point de vue paramétrique.

L'analyse de ce « nouveau » manuel donne des résultats identiques aux analyses précédentes en termes de cadres, de registres, de points de vue et de traitements internes. Cependant, certaines tâches sont proposées dans ce manuel pour travailler le registre ensembliste et le premier aspect de l'interprétation géométrique des objets à partir des ensembles et des équations, comme le suggère les programmes qui viennent d'entrer en vigueur. Notons que le manuel *CQFD*, dans la version de 2014, propose déjà des comparaisons entre les outils et les démarches propres aux différents cadres géométriques, contrairement aux autres manuels. Ce point est aussi souligné par les nouveaux programmes.

Cette analyse de manuels fournit les premiers éléments de réponses à notre problématique de recherche développée à la page 170.

5 Conclusion

Nous nous intéressons aux différents scénarios que les enseignants proposent à leurs élèves pour les notions de géométrie analytique dans l'espace. Avant de nous rendre sur le terrain, nous avons complété l'étude de relief, réalisée dans la partie 1, par une analyse de plusieurs manuels scolaires belges en mathématiques pour l'option scientifique. Nous avons ainsi étudié quatre manuels : *Actimath*, *CQFD* (2014), *CQFD* (2019) et *Espace Math*. Cette analyse a permis d'étudier quelques scénarios qui peuvent potentiellement être réalisés en classe. De plus, nous avons analysé deux versions du manuel *CQFD*. La première est conforme aux anciens programmes et la deuxième est conforme aux programmes actuels. L'analyse des deux versions de ce manuel nous a aidé à mettre en évidence les éventuels changements qui peuvent apparaître lorsque les enseignants vont adapter leur scénario aux nouveaux programmes.

Dans un premier temps, nous avons cherché à préciser la flexibilité attendue des élèves pour ces notions. Nous avons analysé quels cadres, registres et points de vue sont abordés et quels sont les traitements internes développés dans ces manuels. De plus, nous avons pointé les moments où les aspects de l'interprétation géométrique des objets sont travaillés (pour les équations et les ensembles) car elle peut favoriser la conceptua-

lisation des notions. Ensuite, notre cadre théorique nous a amené à étudier le scénario dans sa globalité. Nous avons donc analysé les activités d'introduction, les cours et les tâches qui sont proposées dans les manuels. Nous avons alors réalisé une analyse *a priori* des différents scénarios dans l'objectif de déterminer les activités attendues des élèves.

L'analyse *a priori* des scénarios potentiels (activités introductives, cours, exercices) a mis en évidence plusieurs résultats. Bien que les cadres de la géométrie synthétique, vectorielle et analytique soient tous les trois utilisés, les jeux entre ces cadres restent peu développés et sont principalement présents dans les cours. La progression des contenus est similaire dans les manuels. Il s'agit de caractériser les droites et les plans dans le cadre de la géométrie synthétique. Cela amène à introduire le point de vue paramétrique dans le cadre de la géométrie vectorielle. Ces équations dites vectorielles sont ensuite traduites en termes de composantes pour écrire une équation paramétrique des objets dans le cadre de la géométrie analytique. Ainsi, la géométrie vectorielle apparaît bien comme le lien privilégié entre la géométrie synthétique et la géométrie analytique dans les manuels, comme le suggère notre étude historique réalisée au chapitre III. Cependant, la majorité des tâches proposées dans les manuels se résolvent dans le cadre analytique et il n'y a que peu de changements de cadres à réaliser. Ces activités peuvent ne pas être attendues de la part des élèves. Nous avons toutefois noté que les problèmes traités dans le manuel *CQFD* (les deux versions) permettent de comparer les démarches et les outils de la géométrie synthétique et de la géométrie analytique, comme le suggèrent les programmes actuels. Rappelons que ce type de tâches est important pour que les élèves puissent distinguer le niveau de conceptualisation « à la Euclide » et le niveau de conceptualisation de la géométrie affine et affine-euclidienne. Nous avons montré que les principaux registres en jeu sont le registre de la langue naturelle, le registre algébrique et le registre du dessin. Le registre de la langue naturelle est omniprésent. Le registre algébrique intervient principalement dans les différentes tâches à résoudre et les quelques démonstrations réalisées. Le registre du dessin intervient principalement dans le cours pour illustrer les notions. Les activités de conversions de registres sont peu variées et peuvent ne pas être attendues de la part des élèves.

Tous les manuels abordent le point de vue cartésien et le point de vue paramétrique. Leur articulation est prise en compte par chacun d'eux, bien que les programmes ne le demandent pas. Nous avons montré que certains changements de points de vue s'effectuent sur un exemple et d'autres se font en toute généralité. Principalement, le passage du point de vue paramétrique au point de vue cartésien se fait soit en éliminant le ou les paramètres dans une équation paramétrique, soit en utilisant les propriétés des déterminants. Nous avons repéré que le manuel conforme aux nouveaux programmes introduit les matrices, les déterminants et leurs propriétés, juste avant d'aborder le point de vue cartésien pour les plans. Ces éléments apparaissent donc après que le point de vue paramétrique soit introduit et ils constituent des outils pour trouver plus rapidement une équation cartésienne d'un plan. Nous en avons déduit que la théorie des déterminants sert à articuler les deux points de vue et non, comme historiquement, à introduire le point de vue paramétrique. Il est donc possible que ça soit le cas également dans notre étude de terrain. L'articulation des points de vue dans le sens cartésien/paramétrique

est effectué sur un exemple pour la notion de droite dans tous les manuels. Or, ce passage pour les plans n'est effectué sur un exemple que dans un seul des manuels. Cette articulation nous a donc semblé secondaire dans tous les manuels vu qu'elle n'est pas effectuée en toute généralité et que très peu de tâches permettent ce traitement interne. Ainsi, seul le passage paramétrique/cartésien peut être une activité attendue des élèves.

Dans le chapitre VI, nous avons considéré qu'une interprétation géométrique des objets est développée à la condition que la reconnaissance et la description de ces objets soient possibles pour les équations et les ensembles. L'analyse des manuels nous a amené à penser que l'interprétation géométrique des droites et des plans dans l'espace n'est que peu développée. En effet, nous avons montré que le travail proposé dans les manuels consiste principalement à décrire les droites et les plans par des équations bien souvent cartésiennes. La reconnaissance des objets par une équation ou un ensemble ainsi que leur description par des ensembles sont peu abordés dans tous les manuels. De ce fait, le deuxième aspect de l'interprétation géométrique pour les équations semble être une activité attendue des élèves. Nous avons également mis en évidence que l'ordre dans lequel les notions apparaissent au sein du cours peut avoir une influence sur l'interprétation géométrique des objets. L'étude des équations cartésiennes de plans avant celle des équations cartésiennes de droites semble faciliter un travail sur les deux aspects de l'interprétation géométrique. Nous serons donc particulièrement attentive dans notre étude de terrain à l'ordre dans lequel ces notions sont introduites et si, effectivement, les deux aspects de l'interprétation géométrique semblent apparaitre uniquement pour les droites dans le point de vue cartésien.

Cette analyse nous amène à nous demander s'il est possible de proposer un ensemble de tâches, sur les notions de géométrie analytique dans l'espace, permettant aux élèves de développer à la fois les activités de traitements internes et d'interprétation géométrique des objets. En effet, le travail qui vient d'être mené nous amène à penser que la flexibilité entre les cadres géométriques (synthétique, vectorielle, analytique), les registres de représentation sémiotiques (langue naturelle, algébrique, dessin, logique, ensembliste) et les points de vue (paramétrique et cartésien) n'est que peu développée dans les tâches proposées par les manuels. Les traitements internes sont principalement effectués dans les cours mais cela reste très ponctuel. Ils ne sont surtout ni explicités ni expliqués car ce n'est sans doute pas le rôle des manuels. Il est possible que les enseignants ajoutent des explications, des justifications, des reformulations, des rappels dans leur classe. C'est pourquoi nous avons relevé de nombreuses occasions de proximités horizontales avec les connaissances que les élèves ont déjà. De plus, l'analyse des manuels nous amène aussi à penser que l'interprétation géométrique des objets n'est que peu développée notamment parce que la reconnaissance des objets est minorée. Il est possible que les enseignants proposent des tâches permettant de développer à la fois la reconnaissance et la description des objets par des équations et des ensembles. Il se peut aussi que les enseignants ajoutent dans leur discours des commentaires permettant de développer les deux aspects de l'interprétation géométrique. Nous serons donc aussi particulièrement attentive à la prise en compte de l'interprétation géométrique par les enseignants. Ensuite, nous avons mis en évidence que les notions de géométrie analytique plane n'apparaissent à aucun moment dans les manuels. Nous en avons déduit que

les notions ne sont pas étendues du plan à l'espace et qu'aucune attention n'est portée sur les éventuelles ruptures et continuités lors de cette extension. Il se peut donc que les enseignants ne la prenne pas en compte dans leurs scénarios. Nous avons finalement montré que les exercices relèvent essentiellement du niveau mobilisable de mise en fonctionnement des connaissances. Les tâches disponibles sont peu courantes car elles sont parfois trop découpées. Nous avons tout de même retenu que les problèmes du manuel *CQFD* sont plus complexes et demandent plus d'adaptations. Il se peut que les enseignants ne proposent pas ce type de tâches ou qu'ils les découpent en plusieurs sous-tâches, réduisant ainsi les adaptations à réaliser. Nous allons donc maintenant regarder si ces manques relevés dans l'analyse de ces scénarios potentiels sont pris en compte par les enseignants dans les scénarios qu'ils proposent ou dans le déroulement en classe.

Chapitre VIII

Étude de terrain

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux activités qui sont potentiellement développées par les élèves dans les classes de l'enseignement secondaire belge pour les notions d'équations de droites et de plans dans l'espace. Afin d'inférer des éléments sur ces activités, nous nous sommes rendue dans cinq classes de l'enseignement secondaire belge. Après avoir contextualisé à notre recherche la méthodologie fournie par le cadre de la Théorie de l'Activité (voir chapitre VI), nous présentons nos analyses des différents scénarios proposés et des déroulements effectifs en classe.

1 Éléments méthodologiques

Nous précisons tout d'abord le profil des enseignants que nous avons suivi dans cette étude de terrain. Nous contextualisons ensuite la méthodologie appliquée dans nos analyses afin de déterminer les activités possibles des élèves pour le chapitre des droites et des plans dans l'espace.

1.1 Présentation générale des enseignants

Nous avons contacté par mail une vingtaine d'enseignants de l'enseignement secondaire. Cette liste comporte des enseignants diplômés d'un Master en mathématiques (principalement issus de notre université) et plus ou moins expérimentés. Ils acceptent souvent des stagiaires au sein de leur classe et/ou de faire passer des questionnaires à leurs élèves. Parmi eux, certains ont refusé soit parce qu'ils n'avaient pas une classe de mathématiques pour scientifiques, soit parce qu'ils n'enseignaient pas ce chapitre, soit parce qu'ils ne se sentaient pas à l'aise d'être filmés. Cinq enseignants se sont portés volontaires. Nous les nommons P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5. Nous présentons brièvement ces cinq enseignants.

Les enseignants P_2 et P_5 sont les plus expérimentés. Ils ont entre 25 et 30 ans de carrière. Ils sont considérés comme « experts » car ils participent à la formation des futurs enseignants de mathématiques pour les trois dernières années de l'enseignement secondaire. L'enseignant P_3 a entre 5 et 10 ans de carrière. Nous le considérons comme

un enseignant « expérimenté ». Les enseignants P_1 et P_4 ont moins de 5 ans de carrière et nous les considérons comme des débutants. En effet, bien qu'ils aient au moins un an d'enseignement derrière eux, nous nous sommes rendue dans leur classe la première année où ils ont dû enseigner le chapitre de géométrie analytique dans l'espace.

Chaque enseignant fournit aux élèves des documents au début d'un nouveau chapitre. Ces documents contiennent à la fois les énoncés des activités d'introduction, accompagnés parfois d'un espace pour répondre aux questions posées, de toutes les notions théoriques qu'ils vont introduire et de la liste des exercices sur ces notions. Les élèves notent donc très peu, principalement pour les activités d'introduction, les exemples ou les corrections des différents exercices. Nous avons donc accès très facilement au scénario conçu par tous.

Grâce à des discussions informelles avec ces enseignants, nous pouvons ajouter des éléments sur leur usage des outils numériques lors de séance de classe ordinaire. L'enseignant P_1 n'est pas toujours dans le même local. Dans son école, certains locaux sont équipés d'un tableau blanc interactif ou d'un projecteur. Cet enseignant n'utilise pas souvent ces outils numériques en classe. Il doit changer de classe avec un autre enseignant s'il en a besoin. L'enseignant P_2 possède un projecteur au sein de sa classe. Il l'utilise principalement pour projeter les énoncés des exercices et illustrer certaines notions avec un logiciel tel que *GeoGebra*. L'enseignant P_3 n'utilise aucun outil numérique car sa classe ne possède ni projecteur, ni tableau interactif. L'enseignant P_4 est presque tout le temps dans un local avec projecteur ou tableau interactif. Il l'utilise toujours pour projeter les notes de cours des élèves. Cet outil sert principalement à indiquer où et quoi compléter dans les notes aux élèves, à projeter les énoncés des exercices et à avoir recours à des logiciels tel que *GeoGebra*. L'enseignant P_5 possède dans sa classe un tableau blanc interactif et s'en sert comme l'enseignant P_4. Il se peut dès lors que quatre des enseignants aient recours à un outil numérique pour travailler les notions de droites et plans dans l'espace.

1.2 L'analyse des scénarios et des déroulements

Dans un premier temps, nous avons réalisé une analyse de chacun des scénarios proposés par les cinq enseignants. Comme nous l'avons expliqué au chapitre VI, cette analyse permet de préciser les activités des élèves attendues par chaque enseignant. Nous pouvons alors reconstruire l'itinéraire cognitif que les enseignants ont prévu pour leurs élèves.

Cette analyse *a priori* des scénarios nous amène à étudier à la fois les activités d'introduction, les contenus des cours et la liste des exercices en prenant comme référence l'étude de relief sur les notions de droites et de plans dans l'espace.

L'étude de relief réalisée dans la partie 1 met en évidence que les notions de géométrie analytique dans l'espace sont des extensions des notions de la géométrie analytique plane pour lesquelles des ruptures se produisent. Notre analyse des manuels présentée dans le chapitre VII suggère que le type des notions n'est pas pris en compte dans les scénarios potentiels. Nous étudions alors comment la distance entre les connaissances

antérieures des élèves et les nouvelles connaissances est prise en compte dans les activités introductives dans les scénarios des enseignants. De plus, nous cherchons à repérer si des moyens de contrôles internes sont proposés aux élèves afin que les ruptures n'engendrent plus de conceptions erronées.

Nous avons déjà expliqué dans le chapitre VI que l'analyse *a priori* des cours passe par une étude de la mise en forme du texte du savoir choisie par l'enseignant, mais aussi par les différents rapprochements qu'il peut effectuer entre ce texte et les élèves. De ce fait, nous étudions l'organisation des contenus proposée dans les cinq scénarios. En particulier, nous cherchons à déterminer l'ordre dans lequel les droites et les plans sont introduits puisque notre analyse des manuels a montré que cela peut avoir des répercussions sur les activités liées à l'interprétation géométrique des objets. De plus, notre question de recherche présentée à la page 170 nous amène également à repérer les cadres, les registres et les points de vue en jeu. Cela nous aide à déterminer les activités liées aux traitements internes qui peuvent être attendues des élèves à la suite du cours. Nous avons montré dans le chapitre VI que la qualité des médiations des enseignants est un facteur important qui peut influencer les activités possibles des élèves. C'est pourquoi nous traquons toutes les occasions de proximités entre ce qui est dans le cours et les connaissances que les élèves ont déjà ou les activités qu'ils ont déjà pu réaliser (ce qui est dans la ZPD des élèves).

Nous analysons finalement *a priori* les tâches proposées dans chaque scénario. Il s'agit de préciser, pour chaque tâche, les connaissances en jeu (anciennes, en cours d'acquisition, nouvelles), le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (et donc les adaptations à réaliser), la place et la fonction [1] de la tâche dans le scénario, ainsi que sa répétition. Nous pouvons préciser à la suite de ces analyses toutes les activités attendues des élèves pour chacun des cinq scénarios et éventuellement mettre en évidence quelques similitudes et variabilités dans les activités enseignantes (composante cognitive).

Les activités attendues des élèves peuvent ne pas être provoquées en classe ou être modifiées par les conditions de travail ou les interventions des enseignants. Nous étudions donc dans un deuxième temps les déroulements afin de déterminer tout ce qui peut influencer les activités des élèves. Afin d'y parvenir, nous avons filmé les cinq enseignants pendant toute la durée du chapitre de géométrie analytique dans l'espace. La caméra était installée au fond de la classe et dirigée uniquement sur l'enseignant et le tableau. Nous avons ainsi filmé 78 périodes [2]. Les interrogations n'ont pas été filmées. De ce fait, le chapitre dure environ 17 périodes par enseignant. Nous analysons *a posteriori* ces séances de classe afin de reconstituer les activités possibles des élèves en classe.

Nous cherchons à préciser à partir des séances filmées les conditions de travail organisées par l'enseignant ainsi que ses interventions à la fois lors des cours et lors des exercices. L'analyse *a posteriori* des différents scénarios passe notamment par la reconstruction de la chronologie globale suivie par chaque enseignant en classe. Cela nous donne une idée de la gestion en classe du texte du savoir, des dynamiques cours/exercices mais

1. Une tâche n'a pas le même rôle selon qu'elle se place avant ou après la notion institutionnalisée.
2. Une période dure 50 minutes.

aussi de l'ordre dans lequel les tâches ont été effectivement résolues. Cette vision globale des déroulements permet de reconstruire le scénario qui s'est réellement réalisé en classe, au regard du scénario prévu par l'enseignant et d'apprécier les choix effectués lors des déroulements.

Nous analysons ensuite pour certaines phases précises de l'enseignement le déroulement effectif en classe. Nous cherchons à préciser pour ces différentes phases la nature du travail mathématique (cours, rappels, correction, recherche, individuel, collectif, ...) proposé aux élèves, la durée de ce travail, les interventions de l'enseignant (commentaire méta, proximités, aides) et les activités potentiellement développées par les élèves. À cette fin, nous ciblons quelques-unes des tâches réalisées en classe [3] et deux moments clés dans le cours. Notre analyse des manuels belges a mis en évidence que l'articulation des points de vue dans le sens paramétrique/cartésien pour les plans peut s'effectuer soit sur un exemple, soit via la théorie des déterminants. Or, cette dernière n'est plus présente dans les programmes actuels. Nous voulons donc savoir comment les enseignants font en classe et s'ils introduisent la théorie des déterminants dans ce chapitre. L'analyse des manuels a également montré que le point de vue cartésien pour les droites est plus susceptible de développer les deux aspects de l'interprétation géométrique des objets. Nous étudions alors les interventions de l'enseignant correspondants à cette phase afin de déterminer si un tel travail est proposé dans les classes. Au vu du nombre d'heures filmées, nous ne proposons pas de transcription pour la totalité des séances mais nous exemplifions nos propos par quelques extraits du discours de l'enseignant pour les phases visées.

Nous décidons de présenter les résultats de cette analyse des déroulements sous la forme de tableaux. Cela permet, par comparaison aux analyses *a priori*, de spécifier les activités possibles des élèves tout en prenant en compte le cours et les interventions des enseignants. Ces activités peuvent varier d'un élève à l'autre. Nous distinguons alors dans nos analyses les activités *a minima* et *a maxima* des élèves.

Nous analysons maintenant le scénario proposé par les cinq enseignants volontaires.

2 Analyse des scénarios : documents « élèves »

Afin d'avoir accès au scénario de chaque enseignant, nous avons analysé *a priori* les documents fournis par ces cinq enseignants à leurs élèves. Nous disposons des énoncés des éventuelles activités d'introduction et des exercices ainsi que des contenus théoriques abordés avec une idée de l'ordre dans lequel ils sont introduits. Nous découpons notre analyse de ces scénarios en plusieurs étapes. Dans un premier temps, nous proposons une comparaison des chronologies globales pour chaque enseignant. Nous pouvons dès lors déduire certaines régularités ou variabilités dans les choix des enseignants. Nous analysons ensuite pour les cinq enseignants les activités d'introduction, les cours et les

3. Nous ne voulons pas submerger le lecteur par une trop grande quantité d'informations mais plutôt lui donner une idée claire et précise des analyses que nous avons menées et de nos résultats. C'est pourquoi nous ne présentons pas l'analyse *a posteriori* de toutes les tâches réalisées en classe.

exercices qu'ils proposent dans leurs scénarios. Nous présentons nos analyses globalement et non par enseignant. Nous évitons comme cela les répétitions et mettons plus en avant les régularités entre les scénarios. Nous terminons par donner un bilan de ces analyses pour avoir une idée des activités qui sont attendues des élèves.

2.1 Chronologie globale des scénarios

Nous nous intéressons à l'ordre dans lequel les notions sont introduites et aux dynamiques cours/exercices qui sont prévues *a priori* dans les cinq scénarios. Nous choisissons de présenter, sous la forme d'un tableau, les différentes étapes récoltées dans les documents « élèves », et ce pour chaque enseignant. La liste des exercices pour chaque enseignant se trouve dans l'annexe C. Le tableau VIII.1 donne une idée du scénario prévu par les enseignants. Nous mettons en parallèle ce que les cinq enseignants ont prévu. Nous choisissons de mettre en bleu les notions concernant les droites de l'espace, en vert les notions concernant les plans et nous laissons en noir les notions traitant des deux objets.

Plusieurs constats très globaux peuvent d'ores et déjà être effectués. Les cinq enseignants voient à peu de choses près les mêmes notions dans le même ordre. Il s'agit d'introduire les équations de droites dans l'espace, puis les équations de plans, les positions relatives et éventuellement la notion de distance. Les équations cartésiennes des droites sont donc étudiées avant les équations cartésiennes des plans. Puisque cet ordre peut impacter les activités des élèves liées à l'interprétation géométrique, nous portons une attention particulière aux interventions des enseignants lors de ces moments de cours. Le tableau VIII.1 met aussi en évidence que les points de vue cartésien et paramétrique sont abordés. Tout comme dans les manuels, les enseignants débutent par une équation vectorielle (point de vue paramétrique dans le cadre de la géométrie vectorielle), passent ensuite à une équation paramétrique et terminent par une équation cartésienne. L'articulation de ces points de vue est analysée dans la partie dédiée aux cours.

Les cinq enseignants proposent des exercices à plusieurs moments du scénario : sur les droites, sur les plans, sur les positions relatives. Nous regardons comment ces exercices mettent en œuvre les connaissances nouvelles dans la partie dédiée à l'analyse des tâches. Le tableau VIII.1 illustre que les enseignants P_3 et P_4 proposent plus d'étapes dans le scénario que les trois autres. En effet, ils proposent un plus grand découpage entre les moments de cours et les exercices. Les notions abordées à chaque moment de cours sont moins nombreuses que pour les autres enseignants. À l'inverse, il y a plus de phases d'exercices.

Étapes	**P**$_1$	**P**$_2$	**P**$_3$	**P**$_4$	**P**$_5$
Activité(s) d'introduction	éq. des droites dans le plan		éq. des droites dans le plan	éq. incomplètes de plans, éq. des droites dans l'espace	éq. de plans et de droites particulières
Exercices			1		
Moments de cours	éq. vectorielles, paramétriques et cartésiennes de droites, éq. cartésiennes de droites particulières	éq. vectorielle de droites, éq. vectorielle de plans, éq. paramétriques et cartésiennes de droites, éq. paramétriques et cartésiennes de plans	éq. vectorielles et paramétriques de droites	éq. vectorielles, paramétriques et cartésiennes de droites, éq. cartésiennes de droites particulières	éq. vectorielles, paramétriques et cartésiennes de droites, éq. cartésiennes de droites particulières
Exercices	1 à 6	1 à 3	2 à 4	1 à 8	1 à 6
Activité(s) d'introduction	éq. cartésiennes de plans			éq. de plans	
Moments de cours	éq. cartésiennes de plans, vecteurs directeurs et normaux, éq. vectorielles et paramétriques de plans, distance d'un point à un plan	vecteur normal, parallélisme et orthogonalité (2 droites, droite et plan, 2 plans), distance entre deux points, entre un point et un plan	éq. cartésiennes de droites, éq. cartésiennes de droites particulières	éq. vectorielles, paramétriques et cartésiennes de plans	éq. vectorielles, paramétriques et cartésiennes de plans, vecteur normal
Exercices	7 à 13	4 à 23	5 à 8	9 à 18	7 à 9

Étapes	**P**$_1$	**P**$_2$	**P**$_3$	**P**$_4$	**P**$_5$
Activité(s) d'introduction				éq. cartésiennes particulières de plans	
Moments de cours	parallélisme et orthogonalité (2 plans, 2 droites, droite et plan)	Rappels sur le produit scalaire	éq. vectorielles et paramétriques de plans	éq. cartésiennes particulières de plans, vecteur normal	parallélisme et orthogonalité (2 droites, 2 plans, droite et plan)
Exercices	14 à 29		9 à 12	19 à 23	10 à 13
Moments de cours	distance entre deux points, entre un point et une droite		éq. cartésiennes de plans	parallélisme et orthogonalité (2 droites, droite et plan, 2 plans)	positions relatives (2 droites, 2 plans, droite et plan)
Exercices			13 à 18	24 à 43	14 à 17
Moments de cours			éq. cartésiennes particulières de plans, vecteur normal, parallélisme et orthogonalité (2 droites, droite et plan, 2 plans)	distance entre deux points, entre un point et un plan, entre un point et une droite	
Exercices			19 à 28	44	
Moments de cours			point de percée d'une droite dans un plan		

TABLE VIII.1 – Chronologie globale des cinq scénarios étudiés.

Nous repérons également que deux enseignants prévoient, dans les activités d'introduction, de rappeler les connaissances des élèves en géométrie analytique plane et d'introduire, par la suite, les équations de droites dans l'espace. L'enseignant P_4 choisit lui de proposer une activité d'introduction sur les équations incomplètes de plans. L'enseignant P_5 aborde les équations cartésiennes particulières de plans, et donc les équations incomplètes de plans. Il est possible que ces enseignants prennent en compte l'extension des notions du plan à l'espace. Nous analysons ces quatre activités au point suivant.

2.2 Les activités d'introduction

Nous présentons les activités d'introduction proposées par les enseignants P_1, P_3, P_4 et P_5. Nous cherchons à déterminer comment les nouvelles connaissances de géométrie analytique sont intégrées aux connaissances anciennes des élèves en géométrie analytique plane.

►► Les enseignants P_1 et P_3

L'enseignant P_1 donne deux points $A(-2,0)$ et $B(4,3)$ placés dans un repère orthonormé du plan. Aucune consigne n'est écrite. Seule l'expression « $P(x,y) \in AB \Leftrightarrow$ » est présente sur la feuille. Il s'agit donc de traduire le fait qu'un point appartienne à une droite à la condition que les trois points soient alignés. Il est possible que l'enseignant en classe rappelle la notion de vecteurs colinéaires afin de traduire cette condition d'alignement des points en termes vectoriels. Il y a une occasion de proximité horizontale. Nous supposons ensuite que cette équation est écrite en termes de composantes des vecteurs. Il se peut que l'enseignant ajoute dans son discours des rappels concernant les opérations vectorielles (composantes, addition, multiplication par un scalaire, égalité). Il y a encore une fois une occasion de proximité horizontale. De l'équation paramétrique, le paramètre est éliminé pour obtenir une équation cartésienne de la droite AB. L'enseignant en classe peut généraliser chacune des équations écrites dans cette activité introductive afin de rappeler les différentes équations vues en géométrie analytique plane. Il y a donc une occasion de proximité ascendante. Cette activité d'introduction permet de décrire une droite par des équations. Le deuxième aspect de l'interprétation géométrique est donc travaillé et amène des jeux de cadres et des changements de points de vue. De plus, le point P est considéré ici comme étant un point quelconque de la droite AB. Il n'est pas indiqué que la droite AB est l'ensemble de tous les points P vérifiant les équations données. Il est possible que cette description de la droite par un ensemble de points soit ajoutée par l'enseignant en classe.

Après ce travail, une question est posée : « Comment pouvons-nous écrire l'équation cartésienne d'une droite sous forme générale dans $\mathbb{R}^2$? ». Il est possible que l'enseignant veuille attirer l'attention sur le fait qu'une équation de la forme $y = mx + p$, où m est la pente de la droite et p l'ordonnée à l'origine, ne permet pas de décrire toutes les droites du plan. Cette hypothèse est appuyée par le fait qu'avant cette question nous arrivons à une équation de la forme $y = mx + p$ et qu'après se trouve la phrase suivante : « Dans $\mathbb{R}^2$, la forme générale de l'équation cartésienne d'une droite d est

$d \equiv ax + by = c$ avec $(a,b) \neq (0,0)$ ». Notons que l'enseignant écrit « l'équation » et non « une équation ». Cela peut amener chez les élèves des difficultés à comprendre la non unicité des représentations d'un même objet. Il est possible aussi que ce passage entre les deux formes d'équations soit une source de difficultés pour les élèves. En effet, nous avons vu dans les programmes scolaires (voir chapitre IV) que la première forme apparait dans le cadre des fonctions et la deuxième dans le cadre de la géométrie analytique plane. Des commentaires méta, voire des proximités horizontales, peuvent être ajoutés par l'enseignant en classe.

Cette activité d'introduction a pour objectif de rappeler les connaissances des élèves en géométries synthétique, vectorielle et analytique planes. Les nouvelles connaissances n'émergent pas de celle-ci. Toutefois, l'extrait proposé à la figure VIII.1 suggère que l'enseignant va s'appuyer sur le travail déjà réalisé dans le plan pour les introduire.

Soient le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le point $A(x_a, y_a, z_a)$ et $\vec{v}(x_v, y_v, z_v)$.
QUESTION : Comment pourrions-nous définir une droite dans l'espace ?

Nous avons rappelé précédemment que par deux points distincts, passe une unique droite. Nous avons donc besoin de deux points distincts.

Grâce à ces deux points distincts, nous pouvons définir un vecteur directeur de la droite. Nous n'en avons pas besoin d'un autre car une droite n'a qu'une seule direction.

Cependant une infinité de droites ont cette même direction. Pour savoir de laquelle il s'agit, nous avons besoin d'un point de la droite.

Nous allons donc généraliser le raisonnement fait dans le plan.

FIGURE VIII.1 – Extrait issu des documents fournis aux élèves par l'enseignant P_1.

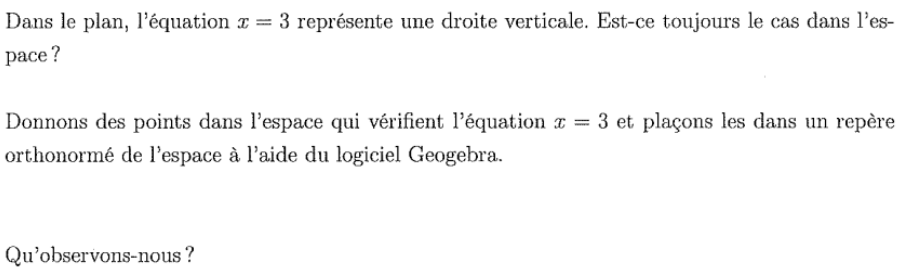
L'extrait VIII.1 appuie le fait que les connaissances de géométrie sont rappelées par l'activité d'introduction. L'objectif de l'enseignant n'est pas tellement d'étendre les notions du plan à l'espace, ni de mettre l'accent sur les éventuelles continuités et ruptures, mais bien de généraliser la démarche vue dans le plan. Il s'agit donc d'introduire une équation paramétrique d'une droite dans le cadre vectoriel, d'écrire cette équation dans le cadre de la géométrie analytique et d'éliminer le paramètre afin d'obtenir un système d'équations cartésiennes. L'enseignant peut s'appuyer sur la démarche effectuée dans l'exemple et la généraliser à chaque étape entraînant des occasions de proximités ascendantes.

L'introduction proposée par P_3 est assez similaire à celle de P_1. C'est pourquoi nous avons regroupé ces deux enseignants. Il donne, lui aussi, deux points $A(3,2)$ et $B(-1,4)$ et construit une équation vectorielle, une équation paramétrique et une équation cartésienne de la droite AB. Les résultats exposés pour P_1 sont valables pour cet enseignant. D'ailleurs, il parle lui aussi de « l'équation » et non « d'une équation ». À la différence de P_1, l'enseignant P_3 n'aborde pas dans son document la forme générale d'une équation cartésienne d'une droite dans le plan. Il est possible que l'enseignant ait choisi de ne pas aborder la forme $ax + by = c$ pour les droites afin d'éviter certaines erreurs et difficultés chez les élèves lorsque les équations incomplètes de plans sont travaillées. Dans le document « élèves » de cet enseignant, seules les connaissances de géométrie analytique

plane sont présentes. Les connaissances de géométries synthétique et vectorielle planes peuvent ne pas être rappelées dans cette introduction ou bien ne l'être qu'oralement, ce qui amènerait des occasions de proximités horizontales dans le discours de l'enseignant. De plus, aucun lien n'est réalisé dans le document « élèves » entre l'introduction et les équations de droites dans l'espace. Pourtant, des occasions de proximités ascendantes sont possibles.

►► Les enseignants P_4 et P_5

La première activité d'introduction proposée par P_4 s'intitule « Du plan à l'espace ... ». Cette activité est donnée à la figure VIII.2.



Dans le plan, l'équation $x = 3$ représente une droite verticale. Est-ce toujours le cas dans l'espace ?

Donnons des points dans l'espace qui vérifient l'équation $x = 3$ et plaçons les dans un repère orthonormé de l'espace à l'aide du logiciel Geogebra.

Qu'observons-nous ?

FIGURE VIII.2 – Extrait issu des documents fournis aux élèves par l'enseignant P_4.

Cet enseignant attire l'attention sur l'équation $x = 3$. Il précise qu'elle décrit une droite dans le plan. Il demande l'objet décrit par cette équation dans l'espace. Il s'agit donc de reconnaître le plan à partir d'une équation cartésienne. Pour cela, plusieurs points vérifiant cette équation doivent être donnés. Il est possible que l'enseignant attire l'attention des élèves sur le fait qu'ici des triplets doivent être donnés et non des couples comme dans le plan. Ces points sont placés dans un repère orthonormé grâce à un logiciel de géométrie dynamique. Les élèves doivent visualiser qu'il s'agit d'un plan. Il est possible que la visualisation de l'objet plan suffise à l'enseignant. Il est possible aussi qu'il demande de justifier cette affirmation en s'appuyant sur le fait que trois points non alignés déterminent un plan. Dans ce cas, il y a une occasion de proximité horizontale. Ce plan peut aussi être décrit comme un ensemble de triplets dont l'abscisse vaut 3. L'enseignant peut ajouter en classe cette description du plan comme un ensemble de points et ainsi travailler les deux aspects de l'interprétation géométrique pour l'objet plan. L'analyse des interventions de l'enseignant en classe permettra de le déterminer.

La deuxième activité d'introduction de P_4 s'intitule « Quelle forme pour une équation de droite dans l'espace ? ». L'objectif de l'enseignant est certainement de mettre en défaut le fait qu'une équation cartésienne de droite dans le plan ne décrit plus une droite dans l'espace. Il peut alors amener l'idée qu'ils vont désormais étudier comment décrire une droite dans l'espace. Le deuxième aspect de l'interprétation géométrique est travaillé. Cette activité d'introduction permet alors d'étendre les équations cartésiennes du plan à l'espace et d'attirer l'attention des élèves sur une rupture importante lors de cette extension. Dans cette activité, deux points de l'espace $A(-2,1,3)$ et $B(1,4,-2)$ sont donnés. Il s'agit de traduire $P(x,y,z) \in AB$. De la même façon que pour les enseignants P_1 et P_3 dans le plan, une équation vectorielle est écrite. Elle est ensuite traduite

en termes de composantes des vecteurs. Le paramètre dans cette équation paramétrique est éliminé. Un système d'équations cartésiennes peut finalement être donné. Des changements de cadres (synthétique vers vectoriel, vectoriel vers analytique) et de points de vue (paramétrique vers cartésien) sont en jeu dans cette activité. Les connaissances permettant d'effectuer ces changements peuvent être explicitées par l'enseignant en classe. Des occasions de proximités horizontales sont possibles. Tout comme pour l'enseignant P_1, l'enseignant P_4 peut donner des commentaires méta permettant de décrire la droite AB comme un ensemble de points. Le deuxième aspect de l'interprétation géométrique des droites peut être travaillé pour les équations et les ensembles. Nous repérons également que les équations de droites dans l'espace et la démarche pour passer d'une équation à une autre sont généralisées dans le cours. Il y a donc des occasions de proximités ascendantes entre les activités d'introduction proposées et la partie théorique du scénario de cet enseignant.

L'enseignant P_5 propose, comme l'enseignant P_4, une activité d'introduction traitant notamment des équations particulières des plans. Il fournit un repère orthonormé et demande de décrire les plans Oxy, Oxz et Oyz. Une caractéristique de ces plans est qu'ils ont tous une coordonnée fixée. Il est possible que l'enseignant décrive les plans comme des ensembles de points dont l'abscisse, l'ordonnée ou la cote est nulle. Cette hypothèse est appuyée par la figure VIII.3. Cet extrait est donné juste avant l'énoncé de l'activité d'introduction. La description des plans par des ensembles de points et par des équations peut être travaillée avec cette activité.

Ne perdons pas de vue que les équations d'objets qui seront établies sont des relations entre les coordonnées des points qui appartiennent à ces objets.
Ainsi, certaines droites et certains plans peuvent être décrits facilement par une équation en donnant la caractéristique commune des points qui les composent.

FIGURE VIII.3 – Extrait issu des documents fournis aux élèves par l'enseignant P_5.

Il est également demandé dans cette activité de décrire les axes Ox, Oy et Oz du repère. Cela amène à décrire ces droites comme des ensembles de points dont deux des coordonnées sont nulles ou comme l'intersection de deux plans. Le deuxième aspect de l'interprétation géométrique pour les droites peut être travaillé pour les équations et/ou les ensembles de points. Aucune occasion de proximité ascendante n'est repérée entre cette activité et les notions théoriques suivantes. En effet, ni la démarche, ni les résultats ne sont généralisés.

Ainsi, bien qu'une activité d'introduction sur les équations incomplètes de plans soit proposée par les enseignants P_4 et P_5, les activités attendues des élèves ne sont pas les mêmes. Il s'agit essentiellement de reconnaître le plan à partir d'une représentation visuelle dans le cours de l'enseignant P_4. Pour P_5, une description du plan par des équations et/ou des ensembles doit être déterminée. Cela peut, selon nous, s'expliquer par la différence entre les objectifs des enseignants : mettre en évidence une rupture lors de l'extension du plan à l'espace ou décrire des objets par des équations.

►► Bilan

Parmi les activités d'introduction proposées dans les notes des cinq enseignants, les connaissances nouvelles de géométrie analytique dans l'espace sont peu mises en relation avec les connaissances antérieures des élèves en géométrie analytique plane. Il s'agit principalement de rappeler les équations de droites dans le plan ou de décrire les droites et les plans dans l'espace par une équation. Nous avons toutefois pointé quelques éléments lors de l'étude des liens entre les activités d'introduction et le cours permettant d'établir qu'une extension entre les notions du plan et de l'espace a bien lieu. Les enseignants P_1 et P_3 étendent les démarches utilisées pour obtenir les équations de droites du plan à l'espace. De nombreuses connaissances anciennes de géométries synthétique, vectorielle et analytique plane sont mise en œuvre dans ces activités et ne sont pas explicitées dans les documents « élèves ». Leur explicitation et la généralisation des résultats peuvent être ajoutées par les enseignants en classe et ainsi amener des occasions de proximités horizontales et ascendantes. L'extension des démarches n'engendre pas de rupture. De ce fait, l'attention des élèves n'est pas attirée sur les éventuelles ruptures lors du passage du plan à l'espace, notamment pour le point de vue cartésien. Contrairement à ces deux enseignants, les enseignants P_4 et P_5 attirent explicitement l'attention sur les équations incomplètes de plans. Leurs objectifs sont pourtant différents. Dans le cas de P_4, il s'agit de montrer qu'une équation cartésienne ne décrit pas les mêmes objets dans le plan ou l'espace. La rupture est clairement mise en avant et justifie à nouveau l'étude des équations de droites. Dans le cas de P_5, il s'agit de déterminer des équations de plans particuliers. Le deuxième aspect de l'interprétation géométrique est travaillée dans l'activité d'introduction de cet enseignant pour les équations et les ensembles de points.

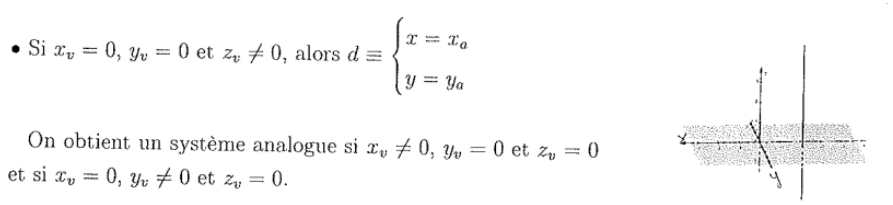
Tout comme pour les manuels, les activités d'introduction amènent principalement à travailler dans le registre algébrique et le registre de la langue naturelle. Dans trois des cinq activités analysées, il est nécessaire de changer de cadre géométrique (vectoriel vers analytique) et de passer du point de vue paramétrique au point de vue cartésien. La géométrie synthétique est en jeu dans les activités d'introduction mais dans une moindre mesure que les deux autres cadres géométriques. Les activités de traitements internes ne sont pas beaucoup développées à cette étape du scénario. Nous avons aussi montré que la plupart des activités introductives développent le deuxième aspect de l'interprétation géométrique pour les équations. Nous avons également repéré, comme pour les manuels, de nombreuses occasions de proximités horizontales. Ainsi, les résultats de cette analyse sont semblables à ceux des manuels étudiés dans le chapitre VII. Toutefois, les liens entre les activités introductives et le cours sont plus présents dans les scénarios des enseignants que dans les scénarios potentiels. De nombreuses généralisations peuvent avoir lieu lors des liens contextualisé/décontextualisé et amener des occasions de proximités ascendantes.

2.3 Les moments d'exposition des connaissances

Nous présentons l'analyse des cours pour les cinq enseignants. Comme précisé dans la méthodologie, nous étudions les traitements internes abordés dans les différents scénarios et l'interprétation géométrique des objets qui peut être donnée dans les documents. Nous présentons, dans un premier temps, l'analyse de deux moments précis : les équations cartésiennes de droites dans l'espace et le passage des équations paramétriques aux équations cartésiennes pour les plans. En effet, nous avons relevé dans la chronologie globale des scénarios (cf. point 2.1) que les cinq enseignants abordent les équations de droites avant celles des plans. Or, notre analyse des manuels scolaires laisse penser que ce choix peut influencer l'interprétation géométrique des objets dans l'espace. C'est pourquoi nous nous attardons sur cette notion. De plus, l'analyse des manuels pointe que le passage du point de vue paramétrique au point de vue cartésien pour les équations de plans peut s'effecteur sur un exemple ou à l'aide des déterminants. Nous analysons également ce point particulier. Nous donnons ensuite les résultats généraux de l'analyse des cours pour les cinq enseignants.

►► Les équations cartésiennes de droites dans l'espace

L'analyse de ce moment précis dans les cours révèle que les droites dans l'espace sont décrites dans les cinq scénarios par des équations dans le point de vue cartésien soit sous une forme canonique, soit sous une forme générale. Toutefois, nous ne repérons aucun commentaire dans les documents qui permettent de travailler en classe la reconnaissance des objets à partir des équations cartésiennes de droites dans l'espace, comme nous avons pu le constater dans certains manuels (voir chapitre VII). Cela peut s'expliquer par le fait que les équations cartésiennes de plans n'ont pas été étudiées à cette étape de l'enseignement. Il nous semble donc légitime que le premier aspect de l'interprétation géométrique soit absent. Contrairement aux manuels, la plupart des enseignants proposent une interprétation géométrique des équations cartésiennes de droites particulières (tous sauf P_2). Nous illustrons ce point avec un extrait de chaque scénario.


• Si $x_v = 0$, $y_v = 0$ et $z_v \neq 0$, alors $d \equiv \begin{cases} x = x_a \\ y = y_a \end{cases}$

On obtient un système analogue si $x_v \neq 0$, $y_v = 0$ et $z_v = 0$ et si $x_v = 0$, $y_v \neq 0$ et $z_v = 0$.

FIGURE VIII.4 – Extrait issu des documents fournis aux élèves par l'enseignant P_1.

Pour qu'une droite soit incluse dans un plan parallèle aux plans des axes, il faut **qu'une des composantes soit nulle**

a) La droite d est incluse dans un plan parallèle au plan Oyz, de vecteur directeur $\vec{v}$ et comprenant le point $A(x_A, y_A, z_A)$:

$$d \equiv \begin{cases} \frac{y-y_A}{b} = \frac{z-z_A}{c} & \vec{v} = (0,b,c) \\ x = x_A \end{cases}$$

FIGURE VIII.5 – Extrait issu des documents fournis aux élèves par l'enseignant P_3.

Soit d une droite comprenant le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et vecteur directeur $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$

- Si $u_1 = 0$, $u_2 \neq 0$ et $u_3 \neq 0$, alors $d \equiv \begin{cases} x = x_A \\ \dfrac{y-y_A}{u_2} = \dfrac{z-z_A}{u_3} \end{cases}$

La droite d est alors incluse à un plan parallèle au plan Oyz.

FIGURE VIII.6 – Extrait issu des documents fournis aux élèves par l'enseignant P_4.

Dans le cas où une composante du vecteur directeur est nulle, on obtient :

$v_1 = 0$ donne $\begin{cases} x = x_A \\ y = y_A + k\, v_2 \\ z = z_A + k\, v_3 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} x = x_A \\ \dfrac{y-y_A}{v_2} = \dfrac{z-z_A}{v_3} \end{cases}$ d // Oyz

FIGURE VIII.7 – Extrait issu des documents fournis aux élèves par l'enseignant P_5.

Des constats relativement similaires peuvent être donnés pour ces quatre extraits. Le registre de la langue naturelle avec des expressions algébriques est en jeu dans tous les documents. Il est parfois accompagné du registre du dessin ou du registre symbolique. Aucune indication sur la manière dont les systèmes sont obtenus algébriquement n'est proposée par ces enseignants. Seul l'enseignant P_5 écrit un système d'équations paramétriques pour chaque cas traité, mais le lecteur doit lui-même comprendre quels sont les traitements algébriques effectués lors de ce changement de points de vue. Ainsi, ces explications liées au passage du point de vue paramétrique au point de vue cartésien pour les droites particulières peuvent être ajoutées en classe par les enseignants. Puisqu'il a été effectué en toute généralité juste avant d'aborder les droites particulières, il y a des occasions de proximités horizontales avec le travail que les élèves ont déjà effectué.

Dans chacun de ces extraits, un dessin ou une phrase donne la position relative de la droite par rapport aux axes ou aux plans du repère. Pourtant, les démarches proposées par les enseignants P_3 et P_4 sont différentes de celles des enseignants P_1 et P_5. L'enseignant P_3 part de l'objet qu'il veut décrire et cherche à obtenir des équations qui le représentent. Il travaille alors la description des objets par des équations cartésiennes (deuxième aspect de l'interprétation géométrique). Les trois autres enseignants sont tous partis des équations pour arriver à une description de la position de l'objet dans l'espace.

Ils essayent alors de travailler la reconnaissance (avec précision [4]) de l'objet droite à partir d'équations. Le premier aspect de l'interprétation géométrique est donc en jeu pour les enseignants P_1, P_4 et P_5. L'organisation des contenus de l'enseignant P_4 est légèrement différente de celle des enseignants P_1 et P_5. Juste avant d'aborder les équations particulières de droites, il a introduit en toute généralité un système d'équations cartésiennes d'une droite de l'espace. Il propose ensuite deux exemples pour lesquels il s'agit de déterminer des équations cartésiennes de droites particulières. Dans le premier, une composante du vecteur directeur donné est nulle. Dans le deuxième, deux composantes sont nulles. L'élève ne doit pas appliquer le résultat qu'il vient de voir mais refaire la démarche liée au changement de points de vue. Les systèmes sont alors donnés pour des cas particuliers. Le deuxième aspect de l'interprétation géométrique est travaillé sur ces deux exemples. Il enchaîne avec les équations cartésiennes de droites particulières comme dans la figure VIII.6. Les nouvelles notions ne s'appuient pas sur les deux exemples traités. Il est possible que cet enseignant s'appuie en classe sur le travail déjà réalisé par les élèves dans ces deux exemples pour le généraliser. Il y aurait ainsi une occasion de proximité ascendante. De plus, les exemples ne demandaient pas de déterminer la position de la droite dans l'espace. Or, c'est bien le cas dans la figure VIII.6. L'enseignant peut également revenir sur les exemples traités et demander de reconnaître avec précision l'objet décrit, puis de généraliser le résultat obtenu à toutes les droites de la même forme. Dans ce cas, une occasion de proximité ascendante supplémentaire peut émerger. L'enseignant P_4 est le seul à travailler les deux aspects de l'interprétation géométrique des droites particulières pour les équations. Nous en déduisons qu'une interprétation géométrique de l'objet droite peut être travaillée en classe. Si les enseignants P_1 et P_5 expliquent en classe comment obtenir les équations cartésiennes données en articulant les points de vue dans le sens paramétrique/cartésien, alors les deux aspects de l'interprétation géométrique peuvent être abordés. Quel que soit le cours étudié, aucune explication n'est donnée pour lier la position de la droite avec le système d'équations cartésiennes. Il est possible que les explications liées à ces conversions entre les registres de la langue naturelle, du dessin, algébrique et symbolique soient ajoutées par les enseignants en classe. Des commentaires méta peuvent donc être ajoutés aux discours des enseignants en classe pour travailler l'interprétation géométrique de l'objet droite.

L'analyse des cinq scénarios sur l'interprétation géométrique des équations cartésiennes de droites dans l'espace révèle qu'elle n'est *a priori* pas travaillée dans le cas général puisque les équations de plans n'ont pas encore été étudiées. Cependant, une interprétation géométrique est possible pour les équations cartésiennes de droites particulières chez la majorité des enseignants. En effet, dans la plupart des documents fournis aux élèves le premier aspect de l'interprétation géométrique est abordé. Or, aucune explication n'est ajoutée lors des conversions entre les différents registres. De plus, le passage du point de vue paramétrique au point de vue cartésien pour les droites particulières est absent de la majorité des cours. Si ces liens ne sont pas initiés par l'enseignant lors des déroulements, il est possible que l'interprétation géométrique ne soit pas effectuée

4. Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre VI, il est possible de reconnaître une droite sans forcément déterminer de quelle droite il s'agit. Il est aussi possible de la décrire en donnant un point et un vecteur directeur de celle-ci.

par les élèves. À l'inverse, si l'enseignant ajoute dans son discours des commentaires méta sur ces traitements internes, alors les deux aspects de l'interprétation géométrique peuvent être travaillés au sein des cours. Nous étudierons les interventions des enseignants lors des déroulements afin de déterminer si une interprétation géométrique des droites particulières est réalisée.

►► Changement de points de vue pour les plans

Nous nous concentrons ici sur le passage entre le point de vue paramétrique et le point de vue cartésien pour les plans. Ce passage n'est pas effectué par l'enseignant P_1. En effet, celui-ci voit les équations cartésiennes de plans et puis seulement les équations paramétriques (voir la chronologie globale). Il n'articule pas les deux points de vue. L'enseignant P_3 n'effectue pas le changement de points de vue, mais il explique la méthode à suivre pour passer du point de vue paramétrique au point de vue cartésien en toute généralité. Le registre en jeu est uniquement celui de la langue naturelle. Cette méthode est proposée à la figure VIII.8.

L'élimination des paramètres λ et μ entre les équations paramétriques d'un plan conduit à l'équation cartésienne du plan. Pour cela, nous isolons λ et μ dans deux des trois équation paramétriques.
En remplaçant λ et μ par les valeurs trouvées dans la dernière équation, nous obtenons une relation entre les coordonnées d'un point du plan et les composantes de ses vecteurs directeurs. Cette équation ne contient plus de paramètre. C'est une relation entre x, y et z vérifiée par les coordonnées des points du plan et par eux seuls : c'est l'équation cartésienne.

plus généralement, lorsque nous éliminons λ et μ des équations paramétriques d'un plan, nous obtenons toujours une équation du premier degré en x, y et z qui est une équation cartésienne du plan.

FIGURE VIII.8 – Extrait issu des documents fournis aux élèves par l'enseignant P_3.

Les enseignants P_4 et P_5 réalisent le changement de points de vue sur un exemple comme la plupart des manuels. Ceci est illustré à la figure VIII.9 pour l'enseignant P_4.

Reprenons l'exemple précédent : Soit α le plan défini par les vecteurs directeurs $\vec{u}$ $(1,1,1)$ et $\vec{v}$ $(1,0,2)$ et passant par le point A de coordonnées $(1,2,3)$.

$$\alpha \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + \lambda + 2\mu \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Éliminons les paramètres λ et μ de ce système afin d'obtenir une équation cartésienne du plan :

FIGURE VIII.9 – Extrait issu des documents fournis aux élèves par l'enseignant P_4.

Après avoir introduit une équation paramétrique en toute généralité, l'enseignant P_4 demande aux élèves, en guise d'exemple, de déterminer une équation paramétrique d'un plan passant par le point $A(1,2,3)$ et de vecteurs directeurs $(1,1,1)$ et $(1,0,2)$. Il s'agit pour l'élève d'appliquer le résultat général dans ce cas particulier. L'enseignant peut potentiellement tenter une proximité descendante lors de la correction. Il profite de cet

exemple pour éliminer les deux paramètres et ainsi obtenir une équation cartésienne du plan. Les calculs s'effectuent uniquement dans le registre algébrique. Le passage entre le point de vue paramétrique et le point de vue cartésien se fait donc sur un exemple. L'enseignant introduit ensuite une équation cartésienne de plan en toute généralité. Il est possible que la démarche utilisée et la forme du résultat obtenu pour l'exemple soient généralisées par l'enseignant en classe offrant une occasion de proximité ascendante. Ces résultats sont identiques pour l'enseignant P_5. Cependant, celui-ci propose également, à la suite de ce travail sur un exemple, d'effectuer le changement de points de vue grâce aux déterminants. Nous illustrons cela à la figure VIII.10.

Dire qu'un point P appartient au plan π déterminé par le point A et le couple de vecteurs directeurs $(\vec{u}, \vec{v})$, c'est dire que les vecteurs $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.

On définit alors : $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires ssi $\det(\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$.

avec $\det(\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x - x_A & u_1 & v_1 \\ y - y_A & u_2 & v_2 \\ z - z_A & u_3 & v_3 \end{vmatrix}$, développé par la méthode de Sarrus.

L'expression du déterminant réduite donne une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ qui est celle du plan π.

FIGURE VIII.10 – Extrait issu des documents fournis aux élèves par l'enseignant P_5.

Cet enseignant s'appuie sur les connaissances anciennes et en cours d'acquisition des élèves. En effet, il traduit l'appartenance du point P au plan π en termes de vecteurs coplanaires, tout comme il l'a déjà fait pour introduire une équation vectorielle d'un plan. De plus, en discutant avec cet enseignant, nous apprenons que les notions de matrices, de déterminants et leurs propriétés ont été étudiées avec les élèves un peu avant d'aborder la géométrie analytique dans l'espace. Ces notions n'ont pas été vues au sein du cours de mathématiques, mais plutôt dans un cours de mathématiques préparant aux études supérieures. En effet, en Belgique, certaines écoles proposent une option dans laquelle les élèves ont 8 heures de mathématiques hebdomadaires : les 6 heures de l'option scientifique et deux heures supplémentaires préparant les élèves à leurs futures études. L'avantage de ces deux heures supplémentaires est qu'elles ne sont pas sujettes à un programme. L'enseignant y enseigne ce qu'il veut. L'enseignant P_5 a donc choisi d'étudier ces notions au sein de ce cours. Ainsi, une façon de détourner l'absence de ces notions dans les nouveaux programmes est de les étudier dans le cours préparatoire. Cependant, nous notons que toutes les classes de mathématiques pour scientifiques ne suivent pas forcément ce cours supplémentaire. L'enseignant P_5 s'appuie alors sur les notions que les élèves ont déjà vues pour introduire la forme générale des équations cartésiennes de plans. Le registre en jeu est celui de la langue naturelle accompagné de plusieurs expressions algébriques. L'enseignant peut rappeler en classe que des colonnes proportionnelles dans un déterminant amènent à ce qu'il soit égal à 0, ainsi que la méthode de Sarrus. Il y a des occasions de proximités horizontales avec les connaissances des élèves sur les déterminants.

L'enseignant P_2 a choisi d'introduire au sein de son cours un chapitre sur les matrices, les déterminants et leurs propriétés. Ce chapitre a été étudié préalablement au chapitre de géométrie analytique dans l'espace. Cet enseignant choisit alors d'aborder le passage du point de vue paramétrique au point de vue cartésien pour les plans avec la méthode des déterminants. L'extrait correspondant dans les documents est donné à la figure VIII.11.

$$\alpha \equiv \begin{cases} x = x_A + \lambda x_{\vec{u}} + \mu x_{\vec{v}} \\ y = y_A + \lambda y_{\vec{u}} + \mu y_{\vec{v}} \\ z = z_A + \lambda z_{\vec{u}} + \mu z_{\vec{v}} \end{cases}$$

et comme équation cartésienne :
$\alpha \equiv a.x + b.y + c = 0$

→ à partir d'un déterminant :

$$\begin{aligned} x - x_A &= \lambda(x_B - x_A) + \mu(x_C - x_A) \\ y - y_A &= \lambda(y_B - y_A) + \mu(y_C - y_A) \\ z - z_A &= \lambda(z_B - z_A) + \mu(z_C - z_A) \end{aligned}$$

on aura :

$$\alpha \equiv \begin{vmatrix} x - x_A & x_B - x_A & x_C - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A & y_C - y_A \\ z - z_A & z_B - z_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0$$

ou :

$$\alpha \equiv \begin{vmatrix} x - x_A & x_{\vec{u}} & x_{\vec{v}} \\ y - y_A & y_{\vec{u}} & y_{\vec{v}} \\ z - z_A & z_{\vec{u}} & z_{\vec{v}} \end{vmatrix} = 0$$

FIGURE VIII.11 – Extrait issu des documents fournis aux élèves par l'enseignant P_2.

L'enseignant part d'un système d'équations paramétriques d'un plan. Il donne ensuite une équation cartésienne de plans et explique comment l'obtenir à partir des déterminants. Puisqu'il ne s'agit pas de la forme canonique, il est possible que l'enseignant la corrige en classe. Les trois égalités paramétriques sont réécrites en faisant passer les coordonnées du point A dans le membre de gauche. Une équation cartésienne de plans est alors donnée sous la forme d'un déterminant nul. L'enseignant propose finalement une reformulation de cette relation où les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont devenus des vecteurs directeurs quelconques $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Le registre en jeu est le registre de la langue naturelle avec des expressions algébriques. Les différentes étapes du raisonnement ne sont pas expliquées. L'équivalence entre la forme générale d'une équation et la forme avec le déterminant nul n'est pas établie. Il est possible que l'enseignant rappelle en classe que les vecteurs sont coplanaires, que le déterminant est nul si les colonnes sont proportionnelles et comment calculer le déterminant pour revenir à la forme initialement donnée. Cela entraînerait plusieurs occasions de proximités horizontales dans le discours de l'enseignant.

L'analyse du passage du point de vue paramétrique au point de vue cartésien pour les plans met en évidence qu'il est effectué par la plupart des enseignants. Les méthodes choisies sont variées : explicitation de l'élimination des paramètres sans la mettre en

œuvre, élimination des paramètres sur un exemple, utilisation des déterminants. Ces méthodes sont similaires à celles trouvées dans les manuels. L'explicitation de ces méthodes s'effectue dans le registre de la langue naturelle avec ou sans expressions algébriques. Un autre point commun entre les quatre enseignants concerne la présence très faible d'explications dans les documents des élèves. Ces explications peuvent être données par l'enseignant en classe lorsqu'il aborde ce point amenant alors des occasions de proximités horizontales. Ces occasions de proximités sont d'autant plus nombreuses pour les enseignants ayant choisi la méthode avec les déterminants. Des occasions de proximités ascendantes et descendantes sont relevées pour les enseignants ayant choisi la méthode de l'élimination des paramètres sur un exemple. L'analyse des interventions des enseignants permettra de déterminer si elles sont tentées ou non en classe.

Après avoir analysé deux moments précis dans les scénarios des enseignants, nous présentons les résultats de l'analyse globale des cours pour les cinq enseignants.

▶▶ Résultats généraux

Tous les enseignants proposent des jeux de cadres entre les géométries synthétique, vectorielle et analytique. La démarche pour amener les équations de droites et de plans est identique chez quatre enseignants. Pour eux, il s'agit de partir de la caractérisation des objets en géométrie synthétique, de traduire celle-ci dans le cadre de la géométrie vectorielle (équation vectorielle), puis dans le cadre de la géométrie analytique (équation paramétrique). Ainsi, tout comme pour les manuels, la géométrie vectorielle permet de relier la géométrie synthétique à la géométrie analytique. Ces changements de cadres restent ponctuels et à sens unique. En effet, un recours aux connaissances de géométrie synthétique n'apparait que pour introduire les équations des objets et les positions relatives dans le cadre de la géométrie vectorielle. De plus, à aucun moment il n'est nécessaire de passer du cadre de la géométrie analytique au cadre de la géométrie synthétique. Ainsi, bien que des jeux de cadres interviennent dans les scénarios de la plupart des enseignants, ceux-ci restent peu exploités. Nous notons que l'enseignant P_2 propose un scénario légèrement différent des autres enseignants. Sa démarche est présentée à la figure VIII.12.

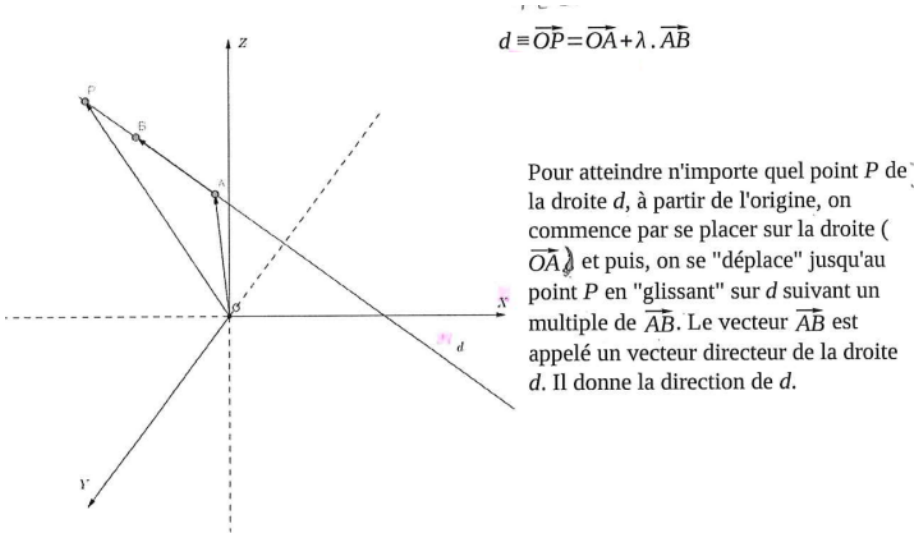


FIGURE VIII.12 – Extrait issu des documents fournis aux élèves par l'enseignant P_2.

Cet enseignant donne directement une équation paramétrique de la droite dans le cadre de la géométrie vectorielle. Il met ensuite en parallèle une représentation de la droite dans un repère orthonormé de l'espace et un texte. Il y explique comment décrire chaque point P de la droite en partant de l'origine du repère. Il s'agit donc de partir de l'origine du repère, de nous positionner sur un point connu de la droite et de parcourir cette droite par des multiples du vecteur directeur jusqu'à atteindre ce point P quelconque. Il est évident que des connaissances de géométrie synthétique et de géométrie vectorielle sont en jeu mais elles ne sont pas explicitées dans les documents, contrairement aux quatre autres enseignants. Ces connaissances antérieures des élèves peuvent cependant survenir dans le discours de l'enseignant offrant des occasions de proximités horizontales et/ou descendantes. Il est donc possible que la géométrie synthétique n'intervienne, dans le scénario de cet enseignant, que pour les positions relatives, ce qui limite encore un peu plus les jeux de cadres entre la géométrie synthétique et la géométrie analytique. Pourtant, selon nous, cette démarche a l'avantage de considérer directement tous les points P de la droite. Les quatre autres enseignants regardent d'abord un point P et une fois les équations établies pour ce point P fixé, ils doivent seulement considérer l'ensemble de tous les points P. Cela peut être une source de difficultés pour les élèves concernant la logique et la manipulation des quantificateurs universel et existentiel, difficultés que nous avons en partie relevées dans notre étude de relief (cf. chapitre II).

Dans les cinq scénarios, les registres de la langue naturelle, algébrique et du dessin interviennent le plus souvent. Nous l'avons déjà souligné dans l'analyse des deux moments précis du scénario. Les notions sont généralement introduites dans le registre de la langue naturelle (avec ou sans expressions algébriques). Le registre du dessin est surtout présent pour introduire les équations des droites et des plans et pour les positions relatives. Plusieurs des extraits que nous avons donnés vont dans ce sens. Le registre algébrique est très présent dans les démonstrations et les exemples. Comme nous l'avons souligné pour les deux moments précis analysés, les conversions de registres à effec-

tuer dans les scénarios sont rarement explicitées. Ce qui est laissé à la charge du lecteur peut être initié par l'enseignant en classe et ainsi amener des occasions de proximités horizontales.

Notre analyse a aussi mis en évidence que les points de vue paramétrique et cartésien sont abordés dans les cinq scénarios. Cependant, leur articulation n'est pas beaucoup travaillée par les enseignants. En effet, trois des cinq enseignants articulent les points de vue mais uniquement dans le sens paramétrique/cartésien et seulement pour les équations de droites. Donc deux enseignants n'articulent pas du tout les points de vue pour les équations de droites dans les documents « élèves ». Cette différence n'est pas très significative. Toutefois, nous avons noté que tous les manuels analysés les articulent de façon générale. La comparaison entre les scénarios potentiels et les scénarios effectifs amène des différences plus importantes. En ce qui concerne, les changements de points de vue pour les équations de plans, nous avons déjà montré que les méthodes sont très variées mais que la plupart des enseignants prennent en compte l'articulation dans le sens paramétrique/cartésien. Nous avons aussi relevé que les choix des enseignants pour cette articulation occasionnent des proximités horizontales, descendantes et ascendantes. Il sera important d'analyser les interventions des enseignants lors des déroulements correspondants. Notre analyse a donc mis en évidence que les articulations effectuées ne sont pas nombreuses, souvent non explicitées, et à sens unique puisque le sens cartésien/paramétrique n'est jamais abordé contrairement aux manuels.

Nous avons également relevé qu'une interprétation géométrique des droites est possible à partir des équations et uniquement pour les droites particulières. Encore une fois, celle-ci n'est jamais expliquée et des commentaires méta peuvent être ajoutés par l'enseignant pour associer les équations cartésiennes aux objets qu'elles décrivent. Le discours de l'enseignant est donc très important pour le développement de l'interprétation géométrique des élèves. Nous avons noté qu'à aucun moment dans le cours une interprétation géométrique des plans n'est travaillée. Il s'agit principalement dans les cinq scénarios de décrire les plans par des équations. La reconnaissance des objets n'est jamais abordée pour les équations de plans, les équations paramétriques (plans et droites) et les ensembles. Il se peut qu'elle ne le soit pas non plus dans les exercices traités. Les analyses *a priori* et *a posteriori* des tâches nous aideront à le confirmer.

Ainsi, l'analyse des cours dans les cinq scénarios amène des résultats assez similaires entre les enseignants et font aussi écho à ceux des manuels scolaires analysés au chapitre VII. Les traitements internes et le premier aspect de l'interprétation géométrique ne sont pas plus travaillés que dans les manuels analysés. Nous avons même montré que l'articulation des points de vue dans le sens cartésien/paramétrique est présente dans les manuels et totalement absente des cours. Nous analysons maintenant les tâches proposées dans les scénarios afin de préciser les activités attendues de la part des élèves pour les notions de droites et de plans dans l'espace.

2.4 L'analyse *a priori* des tâches

Les exercices proposés dans les cinq scénarios sont nombreux. Le tableau VIII.2 indique le nombre de tâches proposées par les cinq enseignants. Rappelons que les tâches sont données dans l'annexe C.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
Nombres de tâches	59	37	47	79	57

TABLE VIII.2 – Nombre de tâches proposées dans les scénarios.

Nous avons réalisé une analyse *a priori* de chacune de ces tâches en suivant la méthodologie présentée au chapitre VI. Nous présentons, comme pour les manuels, les résultats généraux. Nous les exemplifions en proposant à la fois les énoncés de certaines tâches et leur analyse *a priori*.

L'analyse des tâches proposées dans les cinq scénarios met en évidence que la majorité des tâches proposées est de niveau de mise en fonctionnement des connaissances mobilisable. À titre indicatif, le tableau VIII.3 fournit la répartition des tâches selon le niveau de mise en fonctionnement pour les cinq enseignants.

Niveaux de mise en fonctionnement	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
Technique	10	8	17	19	9
Mobilisable	46	21	28	51	47
Disponible	3	8	2	9	1

TABLE VIII.3 – Niveaux de mise en fonctionnement des tâches proposées dans les cinq scénarios.

Toutes les tâches mettent en jeu le cadre de la géométrie analytique. Certaines tâches ne proposent pas de jeu de cadres. C'est par exemple le cas de l'exercice suivant.

Exercice 11 de P_1 et exercice 20 de P_4

Sachant que le repère est orthonormé, écrire la coordonnée d'un vecteur normal au plan α donné :

① $\alpha \equiv x+3y-5z=3$.

② $\beta \equiv 5x+2z-8=0$.

③ $\gamma \equiv 2x=-3$.

Analyse *a priori*

La question est fermée.

Domaine de travail

Cadre de la géométrie analytique.

Registres d'écriture

Registre de la langue naturelle, registre algébrique.

Point de vue

Point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

□ Connaissances nouvelles : équations cartésiennes de plans, vecteurs normaux.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Une équation d'un plan dans le point de vue cartésien est donnée (*reconnaissance des modalités d'application*). Un vecteur normal est déterminé en prenant les coefficients devant les variables x, y et z dans les équations données (*mise en jeu de connaissances nouvelles*).

Ces tâches relèvent du niveau de mise en fonctionnement technique. En effet, il s'agit d'appliquer immédiatement un résultat vu dans les cours des enseignants P_1 et P_4.

Certaines tâches demandent d'effectuer des changements de cadres entre la géométrie vectorielle et la géométrie analytique. Tous les enseignants proposent des jeux entre ces deux cadres et dans les deux sens.

Exercice 3 de P_3

Écrire une équation vectorielle et des équations paramétriques de la droite AB.

① $A(-1,2,3)$ et $B(0,4,-1)$

② $A(2,-1,5)$ et $B(2,-1,-1)$

Analyse *a priori*

La question est fermée.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie vectorielle, cadre de la géométrie analytique.

Registres d'écriture

Registre de la langue naturelle, registre algébrique.

Point de vue

Point de vue paramétrique.

Connaissances mises en jeu

- □ Connaissances anciennes : équations vectorielles d'une droite de l'espace, composantes d'un vecteur, vecteurs directeurs, colinéarité des vecteurs.
- □ Connaissances nouvelles : équations paramétriques d'une droite de l'espace.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Une équation paramétrique dans le cadre de la géométrie vectorielle doit être fournie (*reconnaissance des modalités d'application*). Pour cela, un vecteur directeur de la droite et un point doivent être déterminés. Deux points sont donnés dans l'énoncé (*existence de choix*). Un vecteur directeur de la droite doit être choisi (*existence de choix*). Un vecteur directeur peut être le vecteur $\overrightarrow{AB}$ ou tout vecteur qui lui est colinéaire (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Une équation paramétrique dans le cadre de la géométrie vectorielle peut être écrite dans le registre algébrique (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *conversion de registres*). Pour donner une équation paramétrique dans le cadre de la géométrie analytique, un *changement de cadres* doit avoir lieu. Les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont calculées (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Une équation paramétrique dans le cadre de la géométrie analytique peut être donnée (*mise en jeu de connaissances nouvelles*).

Ces changements de cadres sont très proches de ce qui a été fait en classe par la plupart des enseignants de notre étude de terrain. Il s'agit d'appliquer la même démarche que celle utilisée dans les cours. Les tâches de ce type sont donc considérées comme relevant du niveau technique de mise en fonctionnement des connaissances.

Exercice 10 de P_5

Vrai ou faux ? Entoure la bonne réponse et justifie.

① Les droites $d \equiv x-1 = \frac{y+1}{3} = \frac{3-z}{2}$ et $d' \equiv \frac{1-x}{2} = \frac{1-y}{6} = \frac{z+3}{4}$ sont parallèles.

② Les plans $\pi \equiv z-3 = y-2x$ et $\omega \equiv 5+2z = 4x-2y$ sont parallèles.

③ La droite $d \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{3-y}{2} = z-5$ est perpendiculaire au plan $\pi \equiv 6x+2z = 4y-5$.

④ La droite $d \equiv x-2 = \frac{y-1}{2} = \frac{-1-z}{3}$ est parallèle au plan $\pi \equiv x-3z = 2y-5$.

⑤ Les plans $\pi \equiv z+2 = y+2x$ et $\omega \equiv 11-7z = x+3y$ sont perpendiculaires.

⑥ Les droites $d \equiv \frac{3-x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{-z-2}{3}$ et $d' \equiv 1-x = \frac{y+3}{2} = \frac{z-5}{2}$ sont orthogonales.

Analyse *a priori*

La question est ouverte. Il s'agit d'un vrai ou faux.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie vectorielle, cadre de la géométrie analytique.

Registres d'écriture

Registre de la langue naturelle, registre algébrique.

Point de vue

Point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : vecteurs directeurs, colinéarité des vecteurs, produit scalaire.
- Connaissances en cours d'acquisition : équations cartésiennes d'une droite de l'espace, équations cartésiennes de plans, vecteurs normaux.
- Connaissances nouvelles : positions relatives de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Il faut déterminer la position relative des deux objets entre eux (*reconnaissance des modalités d'application*). Il s'agit de les traduire en termes de vecteurs (*mise en jeu de connaissances nouvelles*, *conversion de registres*). Un vecteur directeur d'une droite et un vecteur normal d'un plan doivent être déterminés à partir du point de vue cartésien (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Il est parfois nécessaire de réaliser quelques opérations algébriques pour écrire les équations sous forme canonique (*reconnaissance des modalités d'application*). Il reste à tester la colinéarité entre les deux vecteurs ou le produit scalaire entre les deux vecteurs (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *changement de cadres*). Selon le résultat algébrique, il faut conclure et dire si l'affirmation est vraie ou fausse (*conversion de registres*).

Ces tâches permettent un jeu de cadres entre la géométrie analytique et la géométrie vectorielle qui n'a pas été travaillé dans les cours. De plus, la question est ouverte et met en jeu beaucoup de connaissances. Les tâches de ce type sont considérées comme relevant du niveau de mise en fonctionnement mobilisable.

Seul l'enseignant P_2 propose des tâches permettant de comparer les outils et les démarches des géométries synthétique et analytique. Nous rappelons que ce point est souligné par les programmes actuels. De plus, ces tâches ont été reprises de la section « Problèmes » du manuel *CQFD* (2014) dont nous avons déjà montré qu'elles pouvaient développer les activités de traitements internes.

Les principaux registres en jeu dans les tâches proposées par les cinq enseignants

sont le registre de la langue naturelle et le registre algébrique. Ce constat est donc similaire à l'analyse des cours et des manuels. La plupart des tâches demandent de traduire l'énoncé donné en langue naturelle dans le registre algébrique. Certaines tâches amènent à effectuer une conversion du registre algébrique au registre de la langue naturelle. C'est le cas, par exemple, des vrais ou faux de l'enseignant P_5 dont nous avons déjà parlé précédemment. Seuls les enseignants P_1 et P_4 proposent une même tâche dans laquelle un graphique doit être réalisé.

Exercice 10 de P_1 et exercice 17 de P_4

Représente, par leur trace dans les plans de coordonnées *Oxy*, *Oxz* et *Oyz*, les plans :

① $\alpha \equiv x - y = 1$.

② $\beta \equiv 3x + 2z - 6 = 0$.

③ $\gamma \equiv x + y - z = 1$.

Analyse *a priori*

La question est fermée.

Domaine de travail

Cadre de la géométrie analytique.

Registres d'écriture

Registre de la langue naturelle, registre algébrique, registre graphique, registre ensembliste.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- □ Connaissances anciennes : repérage dans l'espace, systèmes d'équations.
- □ Connaissances nouvelles : équations paramétriques et cartésiennes de plans, équations paramétriques de droites de l'espace.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Toutes les équations sont données dans le point de vue cartésien. Il faut représenter ces plans dans un repère orthonormé (*reconnaissance des modalités d'application*). Pour cela, l'intersection de chaque plan avec les plans du repère doit être déterminée algébriquement (*conversion de registres*). Le *raisonnement est organisé* en plusieurs étapes : trouver une équation des plans *Oxy*, *Oxz* et *Oyz*, résoudre un système afin de déterminer les droites d'intersection entre les plans, représenter cette droite dans un repère. Une équation des plans du repère peut être donnée dans le point de vue paramétrique ou cartésien (*existence de choix*, *mise en jeu de connaissances nouvelles*). Dans tous les cas, un système composé de cette équation et de celle du plan donné par l'énoncé est à résoudre (*mise en jeu de connaissances anciennes*). L'ensemble des solutions des

systèmes est écrit (*conversion de registres*). Il s'agit de reconnaître dans le point de vue paramétrique les droites d'intersection entre les plans (*mise en jeu de connaissances nouvelles*). Pour représenter chaque droite dans un repère, plusieurs méthodes sont possibles (*existence de choix*). Deux points ou un point et un vecteur directeur de chaque droite peuvent être déterminés (*mise en jeu de connaissances nouvelles*). La droite est finalement dessinée (*conversion de registres*).

Cette tâche amène à effectuer plusieurs conversions de registres. C'est la seule tâche présente dans les scénarios pour laquelle un graphique doit être réalisé. Nous notons que seul l'enseignant P_4 propose également une tâche où il s'agit de déterminer une équation cartésienne d'un plan à partir d'un graphique.

L'analyse met également en évidence que les points de vue paramétrique et cartésien sont abordés dans les tâches prescrites. Cependant, très peu de tâches demandent une réelle articulation entre les points de vue. En effet, moins de dix tâches pour quatre des cinq enseignants amènent à passer du point de vue paramétrique au point de vue cartésien. De plus, le passage réciproque n'est travaillé que sur quelques tâches et uniquement pour les enseignants P_2 et P_5. Nous présentons un exemple d'une telle tâche.

Exercice 4 de P_2

Déterminer un vecteur normal au plan

① $\alpha \equiv \begin{cases} x = 4\lambda + 2\mu - 2 \\ y = 3\lambda - \mu + 4 \\ z = -\lambda + \mu - 5 \end{cases}$.

② $\alpha \equiv \begin{cases} x = 2\lambda + 4\mu \\ y = 5\lambda + \mu - 1 \\ z = -\lambda + 2\mu + 4 \end{cases}$.

Analyse *a priori*

La question est fermée.

Domaine de travail

Cadre de la géométrie analytique.

Registres d'écriture

Registre de la langue naturelle, registre algébrique.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- □ Connaissances anciennes : systèmes d'équations, déterminants, vecteurs directeurs.
- □ Connaissances nouvelles : équations paramétriques et cartésiennes de plans, équations cartésiennes de plans sous la forme d'un déterminant, vecteurs normaux.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Pour chaque tâche, une équation paramétrique du plan α est donnée (*reconnaissance des modalités d'application*). Afin de déterminer un vecteur normal du plan, une équation cartésienne doit être écrite (*organisation du raisonnement*). Plusieurs méthodes algébriques sont vues par P_2 : éliminer les deux paramètres, calculer un déterminant (*existence de choix*, *conversion de registres*). L'élimination des deux paramètres amène des manipulations algébriques (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Pour écrire le déterminant, deux vecteurs directeurs et un point du plan doivent être déterminés dans le point de vue paramétrique (*mise en jeu de connaissances nouvelles*, *reconnaissance des modalités d'application*). Le déterminant est calculé par la méthode de Sarrus ou des cofacteurs (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *existence de choix*). Une équation cartésienne est donnée par les deux méthodes (*changement de points de vue*). Un vecteur normal est identifié à partir du point de vue cartésien (*mise en jeu de connaissances nouvelles*).

Ainsi, les articulations de points de vue sont très peu exploitées, et ce, dans les deux sens pour la plupart des enseignants étudiés. Seul l'enseignant P_2 propose de travailler les changements de points de vue, dans les deux sens, et dans la moitié des tâches du scénario. Toutefois, l'articulation dans le sens paramétrique vers cartésien est plus présente que celle réciproque. Cela peut être expliqué par le fait que le point de vue cartésien est le plus étudié, notamment pour les positions relatives des objets entre eux.

Tout comme dans les cours, le premier aspect de l'interprétation géométrique est minoré par rapport au deuxième aspect. Les tâches demandent principalement de décrire les objets par des équations (paramétriques et cartésiennes). À aucun moment une description des objets en termes d'ensembles n'est proposée. Certaines tâches amènent à reconnaître les objets mais uniquement à partir d'ensembles de solutions de systèmes d'équations linéaires, comme l'illustre la tâche suivante.

Exercice 16 de P_5

Étudie la position relative des plans α et β :

① $\alpha \equiv 3y+2x=1+5z$ et $\beta \equiv x=2+2y+z$.

② $\alpha \equiv x+3=z+5y$ et $\beta \equiv 2x-2z=1y-7z$.

Analyse *a priori*

La question est fermée.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie synthétique.

Registres d'écriture

Registre de la langue naturelle, registre algébrique, registre ensembliste.

Points de vue

Point de vue cartésien, point de vue paramétrique.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : systèmes d'équations.
- Connaissances en cours d'acquisition : équations cartésiennes de plans, équations paramétriques de droites de l'espace.
- Connaissances nouvelles : positions relatives de deux plans.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Pour chaque tâche, il s'agit de déterminer la position relative de deux plans donnés dans le point de vue cartésien (*reconnaissance des modalités d'application*). Pour cela, un système de deux équations à trois inconnues doit être résolu algébriquement (*conversion de registres*, *mise en jeu de connaissances anciennes*). L'ensemble des solutions doit être écrit (*conversion de registres*). L'objet décrit par cet ensemble doit être déterminé à partir du point de vue paramétrique (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Il reste à déterminer la position de deux plans en fonction de cette intersection (*changement de cadres*).

Ce type de tâches permet de travailler la reconnaissance des droites à partir d'un ensemble. Il ne s'agit pas ici de reconnaître les objets à partir des équations car ils sont déjà décrits dans l'énoncé. De plus, la démarche donnée dans les cours consiste à résoudre un système. Si cette méthode n'avait pas été donnée, un raisonnement autour des équations peut être envisagé pour déterminer que dans les deux cas, les plans sont sécants suivant une droite. Le premier aspect de l'interprétation géométrique pour les équations peut dans ce cas être travaillée.

Notre analyse *a priori* des tâches proposées dans les cinq scénarios révèle que les traitements internes et l'interprétation géométrique ne sont que très peu développés. En particulier, bien que des jeux entre les cadres géométriques soient présents, seul un enseignant sur cinq propose des tâches dans lesquelles les outils et les démarches de la géométrie synthétique et de la géométrie analytique sont comparables. La dimension outil des notions de droites et de plans dans l'espace n'est donc pas présente chez quatre des cinq enseignants. De plus, les conversions de registres s'effectuent principalement entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique. Le registre ensembliste intervient surtout pour l'étude des positions relatives des objets entre eux. Nous n'avons pas repéré de tâches sur les ensembles comme nous en avons trouvé dans le nouveau manuel *CQFD*. Le manque le plus important que nous avons relevé concerne l'articulation des points de vue. En effet, peu de tâches amènent à passer d'un point de vue à l'autre et quand c'est le cas, cela se fait dans le sens paramétrique/cartésien. Le sens réciproque n'est abordé que sur un petit nombre de tâches (moins de 5) et uniquement par les deux enseignants experts. Il se peut alors que la flexibilité nécessaire entre les cadres, les registres et les points de vue ne soit pas suffisamment développée. Notre analyse a également mis en évidence que la reconnaissance des objets à partir des équations n'est presque pas travaillée dans les tâches proposées. Toutefois, celle pour les ensembles de

solutions d'un système est bien présente chez tous les enseignants lors de l'étude des positions relatives.

L'analyse des scénarios va maintenant nous permettre de déterminer quelles sont les activités attendues des élèves pour les notions de droites et de plans dans l'espace.

2.5 Bilan sur les activités attendues des élèves

L'analyse *a priori* des scénarios des cinq enseignants a montré qu'ils sont assez similaires autant dans la progression des contenus du cours que dans les tâches proposées. Nous avons ainsi pu déterminer les activités attendues des élèves pour les notions visées en décrivant les adaptations qui sont à réaliser au sein des scénarios.

Nous avons constaté à la fois dans les cours et les tâches prescrites qu'une grande disponibilité des connaissances antérieures des élèves est nécessaire. Les connaissances de géométries synthétique et vectorielle dans l'espace sont mobilisées par tous les enseignants pour introduire les nouvelles notions. Certains enseignants s'appuient également sur les activités réalisées par les élèves pour les notions de géométrie analytique plane. Un accent fort est donc porté sur l'intégration des nouvelles connaissances dans le bagage mathématique que les élèves possèdent. Toutefois, nous avons constaté que ces connaissances sont rarement explicitées dans les documents fournis aux élèves. Il est possible que l'enseignant en classe aide les élèves à mettre en relation les connaissances anciennes et nouvelles, offrant notamment de nombreuses occasions de proximités horizontales. L'analyse *a priori* des tâches a mis en évidence que ce sont surtout les connaissances anciennes de géométrie vectorielle dans l'espace qui doivent être mobilisées en même temps que les connaissances nouvelles (ou en cours d'acquisition) comme cela a été illustré pour les exercices 3 et 10. Seules quelques tâches permettent à la fois de mettre en œuvre les connaissances anciennes de géométrie synthétique et les connaissances nouvelles. De ce fait, le parallèle préconisé par les programmes entre les connaissances et les démarches de géométrie synthétique et de géométrie analytique est peu travaillé dans les scénarios.

En dehors des applications simples et immédiates des résultats, l'organisation du raisonnement est souvent découpée en plusieurs étapes à la fois dans les exemples abordés dans le cours et dans les tâches prescrites. Une reconnaissance des modalités d'application des différentes équations est généralement nécessaire. Par exemple, un point et un vecteur normal d'un plan sont nécessaires pour déterminer une équation cartésienne de ce plan. Des traitements internes sont en jeu pour réaliser la majorité des tâches prescrites (cours et exercices). Il s'agit principalement de jeux de cadres entre les géométries vectorielle et analytique, de conversions entre les registres de la langue naturelle, algébrique et ensembliste et d'un changement de points de vue dans le sens paramétrique/cartésien. Des choix de méthodes sont parfois à effectuer pour ce changement de points de vue selon que les équations aient été introduites ou non avec les déterminants. Lors de la réalisation de ces tâches, les enseignants peuvent faire des rapprochements entre ce que les élèves ont déjà fait ou ce qu'ils ont déjà vu en toute généralité et le cas particulier à traiter. Il y a donc des occasions de proximités descendantes.

La description des objets par des équations est un enjeu majeur des cinq scénarios. Celle-ci demande en règle générale de mobiliser les connaissances nouvelles et entraîne souvent à changer de points de vue. L'articulation des points de vue se fait presque toujours dans le sens paramétrique/cartésien. Le passage du point de vue cartésien vers le point de vue paramétrique est très peu exploité. Ici encore, des choix de méthodes peuvent apparaître si les enseignants ont vu les équations cartésiennes de plans sous la forme de déterminants. Nous avons montré que la description des objets par des ensembles est *a priori* absente des cinq scénarios. La reconnaissance des objets n'est presque pas exploitée dans ceux-ci. Elle est uniquement abordée dans les cours pour les équations cartésiennes de droites particulières. Il s'agit alors d'associer les équations écrites dans le registre algébrique à la position de la droite dans l'espace donnée dans le registre de la langue naturelle ou du dessin. Les conversions entre ces registres ne sont pas explicitées dans les documents, mais peuvent l'être dans le discours de l'enseignant. Des commentaires méta peuvent donc être ajoutés en classe pour aider les élèves à associer les équations et les objets géométriques. Nous avons également relevé dans l'analyse des cours que cet aspect de l'interprétation géométrique n'est pas en jeu pour le point de vue paramétrique, pour l'objet plan et pour les ensembles. Cependant, l'analyse *a priori* des tâches a mis en évidence que cet aspect n'est jamais travaillé à partir des équations dans les exercices, mais l'est uniquement sur quelques tâches pour les ensembles de solutions de systèmes d'équations linéaires. Pour celles-ci, il s'agit principalement de déterminer la position relative entre plusieurs plans dont une équation cartésienne est donnée. Une résolution algébrique du système et l'écriture de l'ensemble des solutions sont attendues. Il reste alors à déterminer l'objet géométrique associé à cet ensemble pour en déduire la position relative des plans. Ces tâches amènent à effectuer des conversions entre les registres de la langue naturelle, algébrique et ensembliste. Nous déduisons de ces analyses que l'interprétation géométrique des objets n'est pas un enjeu majeur dans les scénarios étudiés.

En conclusion, nos analyses ont révélé que diverses activités sont attendues des élèves par les enseignants pour ces notions telles que l'organisation des raisonnements, la reconnaissance des modalités d'application et certains traitements internes. Cependant, les tâches prescrites mettent généralement en jeu les mêmes adaptations des connaissances et relèvent surtout du niveau de mise en fonctionnement mobilisable. Bien que certaines activités de traitements internes peuvent être attendues des élèves, la flexibilité ne semble pas suffisamment développée dans les cinq scénarios. En effet, nous avons notamment montré que les jeux de cadres entre la géométrie synthétique et analytique sont quasiment absents des scénarios et que l'articulation des points de vue dans le sens cartésien/paramétrique est très peu mise en jeu. De plus, l'interprétation géométrique des objets attendue des élèves n'est que peu développée car celle-ci se restreint bien souvent à décrire les objets par des équations. Le premier aspect de l'interprétation géométrique est très largement minoré par rapport au deuxième. Nous avons aussi pointé que les ensembles sont peu présents dans le cours et dans les tâches proposées. De ce fait, pour que les élèves conceptualisent les notions de géométrie analytique dans l'espace, de nombreux implicites sont à lever par les enseignants en classe. Nous allons étudier s'ils sont pris en compte lors de l'analyse des déroulements effectifs.

3 Analyse des déroulements

Comme nous l'avons expliqué dans notre méthodologie, nous présentons tout d'abord la chronologie globale suivie en classe par les cinq enseignants. Puis, nous analysons les déroulements des deux moments précis analysés *a priori* afin d'étudier les interventions des enseignants en classe. Nous proposons, par après, les résultats issus de notre analyse des déroulements pour l'ensemble des moments d'exposition des connaissances. Nous réalisons enfin une analyse *a posteriori* des tâches travaillées en classe.

3.1 Chronologie globale *a posteriori*

L'analyse *a priori* du scénario est réalisée dans le tableau VIII.1. Nous présentons le déroulement effectif de chaque scénario dans le tableau VIII.4. Nous avons ainsi une idée de l'ordre dans lequel les notions sont effectivement introduites, mais aussi des tâches qui ont été travaillées. Nous ajoutons le découpage du scénario en séances et la durée approximative de chaque étape. Les abréviations « AI », « C » et « E » correspondent aux étapes respectives « Activité(s) d'introduction », « Cours » et « Exercices ».

Globalement, la chronologie prévue *a priori* a été respectée par les cinq enseignants. Toutefois, nous notons quelques différences. Nous les avons écrites en rouge dans le tableau VIII.4. Tous les enseignants proposent des activités d'introduction. Les enseignants P_2 et P_5 en réalisent plus en classe que ce qui est prévu dans les feuilles. L'enseignant P_2 propose des activités d'introduction du manuel *CQFD* (2014). Nous les avons déjà analysées dans le chapitre VII. Nous rappelons qu'elles travaillent les jeux de cadres, les changements de points de vue dans le sens paramétrique/cartésien et les conversions entre les registres de la langue naturelle, du dessin et algébrique. L'enseignant P_5 ajoute une activité d'introduction pour les positions relatives de deux droites, de deux plans et d'une droite avec un plan. Il s'agit en réalité de l'exercice 10 (voir annexe C) qui est résolu par groupe de deux ou trois élèves.

Séances	$\mathbf{P}_1$	$\mathbf{P}_2$	$\mathbf{P}_3$	$\mathbf{P}_4$	$\mathbf{P}_5$
S1	**AI**(20') : éq. de droites dans le plan **C**(20') : éq. vect. et para. de droites	**AI**(40') : *CQFD* 2a, b, c	**AI**(27') : éq. de droites dans le plan **C**(16') : éq. vect. de droites	**AI**(42') : éq. incomplètes de plans, éq. de droites	**AI**(43') : éq. de plans et de droites particulières
S2	**C**(12') : éq. cart. de droites et de droites particulières **E**(29') : 1, 2, 3	**AI**(26') : *CQFD* 2d	**C**(18') : éq. cart. de droites particulières **E**(23') : 2	**C**(44') : éq. para. et cart. de droites, éq. cart. de droites particulières	**C**(44') : éq. vect. et para. de droites
S3	**E**(42') : 3, 4	**AI**(47') : *CQFD* 2e, 3a, b	**E**(47') : 2b, 3, 4, 5a	**E**(41') : 1, 2, 3a, b	**C**(43') : éq. cart. de droites et de droites particulières
S4	**E**(42') : 5b, 6	**C**(40') : éq. vect. de droites et de plans, éq. para. et cart. de droites et de plans	**E**(46') : 5, 7, 8a, b, c	**E**(42') : 3b, c, d, 4, 6a	**C**(16') : éq. cart. de droites particulières **E**(26') : 1
S5	**AI**(16') : éq. cart. de plans Contrôle (30')	**E**(42') : 1, 2, 3	**E**(17') : 8b **C**(27') : éq. vect. de plans	**E**(41') : 6a, c, 7, 8a, b, c	**E**(46') : 2, 3
S6	**AI**(40') : éq. cart. de plans	**C**(33') : vecteur normal, parallélisme et orthogonalité	contrôle (45')	**E**(7') : 8c **AI** (21') : éq. de plans **C**(18') : éq. vect. de plans	**E**(19') : 4, 5 **C**(27') : éq. vect., para. et cart. de plans

Séances	$\mathbf{P}_1$	$\mathbf{P}_2$	$\mathbf{P}_3$	$\mathbf{P}_4$	$\mathbf{P}_5$
S7	**C**(40') : éq. cart. de plans, vecteurs directeurs et normaux, éq. vect. et para. de plans, dist. point/plan	**C**(28') : intersections de 3 plans, dist. entre 2 points **E**(19') : 5a, b	**C**(14') : éq. para. de plans **E**(29') : 9, 8d	**C**(42') : éq. vect., para. et cart. de plans	**C**(44') : éq. cart. de plans
S8	**E**(45') : 7, 8a, 8b, 8c	**E**(29') : 5c, d, e	**C**(26') : éq. cart. de plans **E**(14') : 13, 14	**C**(2') : éq. cart. de plans **E**(39') : 9d, 11	**C**(42') : éq. cart. de plans, vecteurs normaux
S9	**E**(43') : 8d, 9, 11, 12, 13	**E**(41') : 11, 12, 13, 14, 15	**E**(43') : 10a, 11, 12, 13, 14	**E**(28') : 11, 12, 13, 15 contrôle (20')	**E**(45') : 7, 8a, b, c
S10	**E**(46') : 13, 10	**E**(35') : 15, 17a	**E**(45') : 14, 15, 16	**E**(43') : 15, 16a, 17, 18	**E**(11') : 8d, e, 9 **AI**(38') : parallélisme et orthogonalité
S11	**C**(27') : parallélisme et orthogonalité **E**(13') : 14, 15, 16	QCM formatif (45')	**E**(32') : 16, 17, 18 **C**(8') : éq. cart. de plans	**AI**(32') : éq. cart. de plans particuliers **C**(11') : éq. cart. de plans particuliers, vecteurs normaux	**C**(20') : parallélisme et orthogonalité **E**(31') : 10
S12	**E**(40') : 17, 18, 19, 20, 21, 22	**E**(15') : 17a, b **C**(21') : dist. point/plan	**C**(39') : éq. cart. de plans particuliers, produit scalaire, vecteurs normaux	**E**(31') : 19, 20, 21, 22a, 23 contrôle (15')	**C**(10') : positions relatives **E**(33') : 11, 12a

Séances	$\mathbf{P}_1$	$\mathbf{P}_2$	$\mathbf{P}_3$	$\mathbf{P}_4$	$\mathbf{P}_5$
S13	**E**(41') : 22, 23, 24, 26, 27	**E**(47') : 17c, 16a, b	contrôle (45')	**C**(10') : parallélisme et orthogonalité **E**(30') : 24, 30, 31	**E**(29') : 12b, c, d, 13 **C**(15') : positions relatives
S14	**E**(20') : 25a, 25b **C**(4') : dist. entre 2 points, point/droite **E**(16') : dist.	**E**(40') : 16c, d	**C**(30') : parallélisme et orthogonalité **E**(15') : 19, 20	**E**(40') : 31, 32, 33, 35a	**C**(41') : positions relatives
S15	contrôle (45')	**E**(35') : 16d, 22	**E**(43') : 19, 20	**E**(43') : 35a, b, 36, 40, 41a, b	**C**(43') : positions relatives
S16		contrôle (45')	**E**(42') : 20, 21, 22, 26b	**E**(41') : 41c, 42	**C**(13') : positions relatives **E**(29') : 17a, interprétation géométrique
S17			**E**(43') : 27, 28	**C**(8') : dist. entre 2 points, point/plan, point/droite **E**(37') : 44a, c, d, e	
S18			**E**(16') : point de percée **C**(8') : point de percée **E**(19') : point de percée		

TABLE VIII.4 – Déroulements effectifs pour chaque scénario.

Le tableau VIII.4 met en évidence que les enseignants ne résolvent pas en classe toutes les tâches prévues *a priori* dans les scénarios. Ils sélectionnent tous quelques tâches. Nous les analyserons de façon plus approfondie ultérieurement. Les enseignants P_1, P_3 et P_5 ajoutent des tâches qu'ils n'avaient pas indiquées dans le document. P_1 ajoute une tâche de calcul de distance entre un point et une droite. P_3 ajoute des calculs de points de percée. P_5 revient sur les résolutions des systèmes déjà corrigées dans un chapitre précédent et demande de reconnaître les objets décrits à la fois par des équations et des ensembles. Ainsi, le premier aspect de l'interprétation géométrique est travaillé par l'enseignant P_5.

Des contrôles formatifs sont également ajoutés par quatre des cinq enseignants. Les enseignants P_1 et P_4 ont étudié le chapitre des droites et des plans dans l'espace, un peu avant les examens de décembre. Ils ont donc choisi de proposer un ou deux contrôles pendant l'étude de ces notions, plutôt que de faire un bilan à la fin du chapitre. L'enseignant P_2 a décidé de proposer aux élèves un QCM avec boîtiers de votes. Il a ainsi eu des tendances pour chaque question et a fourni des explications supplémentaires dans le cas où des erreurs survenaient.

Nous avons désormais une idée de l'ordre dans lequel les notions sont abordées, ainsi que des dynamiques cours/exercices. De nombreuses phases de cours et d'exercices sont proposées par les cinq enseignants et les tâches à résoudre sont toujours en lien direct avec les notions qui viennent d'être introduites. Nous allons maintenant analyser les déroulements correspondants.

3.2 Les moments d'exposition des connaissances

Nous avons choisi d'étudier dans notre analyse *a priori* deux moments précis pour les moments de cours des cinq scénarios. Il s'agit des équations cartésiennes de droites dans l'espace et du passage d'une équation paramétrique à une équation cartésienne pour les plans. Nous étudions désormais le déroulement précis de ces deux moments de cours, ainsi que les interventions des enseignants. Nous présentons ensuite les résultats généraux de notre analyse de l'ensemble des moments d'exposition des connaissances pour les cinq enseignants.

►► Les équations cartésiennes de droites dans l'espace

Nous avons montré dans l'analyse *a priori* de ce moment précis qu'une interprétation géométrique des droites particulières est possible à la condition que les conversions de registres et le changement de points de vue dans le sens paramétrique/cartésien soient expliqués par les enseignants en classe. Nous avons donc étudié les interventions de chaque enseignant pour ce moment précis. En particulier, nous analysons si des commentaires méta sont effectués afin de développer les deux aspects de l'interprétation géométrique des droites chez les élèves. Nous regardons également si les occasions de proximités que nous avons relevées sont tentées par les enseignants en classe. Nous présentons les résultats pour chaque enseignant.

L'enseignant P_1

La chronologie globale de ce moment précis est la suivante :

Rappel des équations paramétriques d'une droite	25"
Changement de points de vue	2'
Cas particuliers	3'40"
Exercices sur les équations de droites	113'

Nous avons relevé dans notre analyse *a priori* du scénario de cet enseignant que le changement de points de vue n'est pas effectué dans les documents « élèves ». L'analyse des déroulements en classe révèle qu'il est proposé par P_1 en toute généralité. Le déroulement pour les équations cartésiennes de droites particulières est donné dans le tableau VIII.5.

Durée	Nature du travail	Interventions de P_1	Activités des E
25”	Cours : lecture collective des feuilles	P lit le cas particulier où l’abscisse du vecteur directeur est nulle.	Les E écoutent.
35”	Cours : changement de points de vue	P demande si le cas général peut être appliqué.	Un E répond correctement.
		P explique et écrit au tableau comment obtenir le système d’équations cartésiennes à partir du point de vue paramétrique.	Les E écoutent et recopient.
1’20”	Cours : interprétation géométrique	P explique le dessin.	Les E écoutent et regardent l’enseignant et/ou le dessin dans le document.
		P réexplique où est l’axe des abscisses.	Un E ne visualise pas la situation et demande de réexpliquer le dessin. Les autres complètent le dessin.
15”	Cours : lecture collective des feuilles	P dit que les autres cas sont similaires.	Les E écoutent.
5”	Cours : interprétation géométrique	P dit en quoi le deuxième cas est différent du premier.	Les E tournent la feuille et suivent dans le document.
20”	Cours : lecture collective des feuilles	P lit le cas particulier où l’abscisse et l’ordonnée sont nulles.	Les E écoutent.
25”	Cours : changement de points de vue	P explique et écrit au tableau comment obtenir le système d’équations cartésiennes à partir du point de vue paramétrique.	Les E écoutent et recopient.
15”	Cours : interprétation géométrique	P explique le dessin.	Les E écoutent et regardent l’enseignant.

TABLE VIII.5 – Déroulements pour l’enseignant P_1 sur les équations cartésiennes de droites.

Voici les transcriptions des interventions de l'enseignant et des élèves pour ce moment précis du scénario.

P_1 : Alors, il y a des cas particuliers. Le premier cas particulier, que je regarde avec vous, c'est si vous avez x_v qui vaut 0. Donc si vous avez votre vecteur directeur qui a sa première composante nulle. Alors, est-ce que vous pouvez vous rabattre sur cette équation-ci ?

E_1 : Non.

P_1 : Non. Pourquoi ?

E_2 : Pas diviser par 0.

P_1 : On peut pas diviser par 0. Donc, si vous pouvez pas regarder cette étape-ci, vous devez regarder l'étape précédente. L'étape précédente c'est celle-ci. Si x_v vaut 0, vous obtenez quel système ? $x = x_A$ et puis vous avez les autres qui ne changent pas. Donc $x = x_A$ ... donc **la coordonnée en x est fixée**. Vous êtes d'accord ? Donc **votre droite varie mais tout en étant fixée** $x = x_A$. Donc je vous ai représenté le dessin juste à côté. Donc l'axe x, quel est l'axe x parce que vous ne savez pas bien lire et quelle est la coordonnée, comme ça vous allez me dire quelle est la coordonnée. Donc c'est lequel, est-ce que c'est un dans le plan qui a l'air horizontal ?

E_1 : Oui.

P_1 : Oui. Quelle direction ? Est-ce que c'est celle-ci ou celle-là ? Vers la droite parce que vous voyez bien que votre x est fixé. Est-ce que tout le monde le voit ou pas ? Oui. Sûr ?

E_2 : Non.

P_1 : Qui a dit non ? Alors, ton x est ici, parce qu'elle ne bouge pas. D'accord ? Alors ! Est-ce que vous êtes d'accord qu'on a un système similaire si y_v a une composante nulle et si z_v a une composante nulle ? Oui ? **Sauf que vous fixez soit le y, soit vous fixez le z.** Ça va ? Deuxième cas particulier, qui est au verso. Cette fois-ci, deuxième cas particulier, c'est pas quand une seule des composantes est nulle mais quand deux composantes sont nulles. On fait le même. Donc, ici, en plus vous avez la coordonnée en y de votre vecteur qui est nulle. Donc, qu'est-ce que ça va changer ici ?

E_1 : Bah le y qui est nulle.

P_1 : Ok. Donc quelle est **la seule composante qui varie** ? z. Donc, vous avez un repère comme ceci, **vous vous fixez le x et le y. Donc vous allez juste faire varier le z et donc juste aller selon la direction en hauteur**. Ça va ? Alors, exercice.

Nous n'avons pas relevé de changements de points de vue dans l'analyse *a priori* de l'enseignant P_1. Pourtant, il les effectue dans sa classe à la fois en toute généralité et pour les cas où l'abscisse est nulle et où l'abscisse et l'ordonnée sont nulles. Ainsi, il prend en charge les traitements algébriques liés au passage entre les deux points de vue. De plus, pour aborder les droites particulières, il s'appuie sur le travail déjà réalisé par les élèves dans le cas général. L'enseignant P_1 tente donc des proximités horizontales que nous

n'avons pas repérées *a priori*. Il s'agit donc de proximités imprévues. Nous avons mis en gras les interventions de l'enseignant qui, selon nous, ont pour objectif de développer le premier aspect de l'interprétation géométrique. L'enseignant ajoute donc dans son discours des commentaires méta pour amener les élèves à relier les systèmes d'équations à la position de la droite dans l'espace. Cependant, les élèves ne prennent aucune note de ce que l'enseignant dit. Ils ne semblent pas considérer comme important tout ce que l'enseignant dit à partir du moment où il ne l'écrit pas au tableau. Ils n'ont donc pris note que des traitements algébriques. Une explication peut être apportée suite à une discussion avec l'enseignant ; la prise de notes ne fait pas partie du contrat didactique entre l'enseignant P_1 et ses élèves.

L'enseignant P_2

La chronologie globale de ce moment précis est la suivante :

Système d'équations cartésiennes	15"
Changement de points de vue	1'15"
Exemple	1'
Cas particuliers	2'10"
Équation paramétrique des plans	3'

L'enseignant P_2 complète les documents en écrivant au tableau le changement de points de vue pour les droites. Les traitements algébriques sont donc explicités dans le cas général. Il enchaîne par un exemple. Les élèves doivent écrire un système d'équations cartésiennes d'une droite passant par les points A et B. Un élève signale directement qu'il faut absolument que tous les dénominateurs soient non nuls. L'enseignant profite alors de cette intervention pour introduire les équations particulières, comme dans le tableau VIII.6.

Durée	Nature du travail	Interventions de P_2	Activités des E
10”	Cours : lecture collective des feuilles	P lit le cas particulier où l’abscisse du vecteur directeur est nulle.	Les E écoutent et suivent dans le document.
40”	Cours : changement de points de vue	P s’appuie sur ce qu’il a déjà écrit au tableau lors du passage du point de vue paramétrique au point de vue cartésien dans le cas général pour expliquer comment obtenir le système d’équations cartésiennes donné.	Les E écoutent et regardent le tableau.
		P encadre dans le système d’équations cartésiennes sous forme canonique l’égalité $\frac{y-y_A}{y_v} = \frac{z-z_A}{z_v}$.	Un E s’étonne qu’il n’y a plus de x dans cette expression.
15”	Cours : interprétation géométrique	P répond à cette question en indiquant que l’objet décrit est une droite particulière par rapport à un axe.	Les E écoutent.
30”	Cours : changement de points de vue	P s’appuie à nouveau sur ce qu’il a déjà écrit au tableau dans le cas général pour expliquer comment obtenir le système d’équations cartésiennes lorsque l’abscisse et l’ordonnée du vecteur directeur sont nulles.	Les E écoutent et regardent le tableau.
35”	Cours : interprétation géométrique	P explique que la valeur de z varie et donne la position relative de la droite.	Le même E s’étonne qu’il n’y a plus de z dans le système.

TABLE VIII.6 – Déroulements pour l’enseignant P_2 sur les équations cartésiennes de droites.

Voici les transcriptions des interventions de l'enseignant et des élèves pour ce moment précis du scénario.

P_2 : Si une seule des composantes du vecteur directeur est nulle, on aura, par exemple, $x = x_A$, $\frac{y-y_A}{y_u} = \frac{z-z_A}{z_u}$. Donc, en fait, quand une des composantes est nulle, forcément, il y a une des choses ici que je peux pas écrire. Donc, imaginons que ce soit le x_u qui soit nulle, ici, donc imaginons que ce soit x_u qui vaut 0. Ça veut dire que ce morceau là n'existe pas.

Il reprend ce qu'il a écrit au tableau pour le changement de points de vue en toute généralité et supprime le terme λx_u. La figure VIII.13 propose un extrait du tableau de l'enseignant P_2.

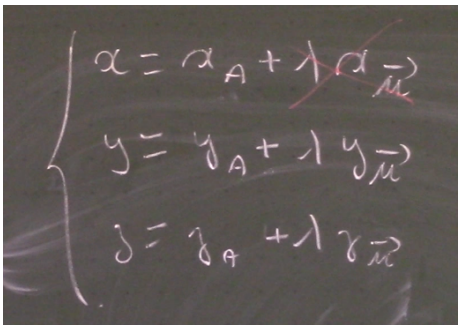


FIGURE VIII.13 – Extrait du tableau de P_2 pour les équations cartésiennes de droites particulières.

P_2 : Donc, j'aurai $x = x_A$ et avec les deux autres, je fais pareil que ce que j'ai fait jusqu'à présent. Et, donc, je vais avoir que ceci.

L'enseignant encadre le terme $\frac{y-y_A}{y_u} = \frac{z-z_A}{z_u}$.

E_1 : Sans x ?

P_2 : Si ! Je suis toujours dans l'espace ! Mais je vais avoir $x = x_A$. **Donc, on va avoir une droite particulière.** Si $x_u = 0$, on aura en fait … Si une des composantes des vecteurs vaut 0, on aura un **parallélisme par rapport à un axe**. Si, maintenant, deux composantes, ici, comment je peux dire, vallent 0 … Si, par exemple, x_u et y_u vallent 0, on aura ceci.

L'enseignant supprime les termes λx_u et λy_u du changement de points de vue en toute généralité.

P_2 : On aura $x = x_A$, $y = y_A$, et puis, ben là, je ne sais plus écrire d'égalité puisqu'on n'a plus ceci. On ne sait plus éliminer le paramètre. Donc, on aura juste $x = x_A$ et $y = y_A$. Donc, la droite est …

E_1 : On aura plus de z.

P_2 : On aura pas plus de z. On aura un point bien défini en x et y. Donc, imagine la table c'est x, y et ça c'est z.

L'enseignant prend des bics et fait des gestes pour donner l'intuition de la position de la droite à l'élève.

P_2 : Tu as $x = x_A$, $y = y_A$. Donc, tu as ... Je vais dessiner un point comme ceci. **Il n'y a pas de condition sur z, donc ça veut dire que la droite elle est perpendiculaire ici. Si maintenant tu as $y = y_A$ et $z = z_A$, tu auras une perpendiculaire à un autre plan.**

Nous n'avons pas relevé de changement de points de vue dans l'analyse *a priori* du scénario de l'enseignant P_2 pour ce moment précis. Il effectue en classe un changement de points de vue dans le sens paramétrique/cartésien en toute généralité et puis pour chacun des cas particuliers. Il ajoute donc dans son discours les explications liées au passage du point de vue paramétrique au point de vue cartésien. Il s'appuie sur le travail réalisé auparavant par les élèves pour donner la forme des systèmes pour ces droites particulières. Encore une fois, l'enseignant tente des proximités horizontales que nous n'avons pas repérées dans notre analyse *a priori*. Nous avons mis en gras les interventions de l'enseignant liées à l'interprétation géométrique. Cet enseignant ajoute des commentaires méta pour amener les élèves à relier les systèmes d'équations et la position de la droite. En effet, pour le premier cas traité, il dit que la droite est parallèle à un axe. Cette affirmation n'est pas développée ou justifiée. Cela aurait sans doute amené l'enseignant à se rendre compte que cette affirmation est fausse. Les élèves n'ont eu aucune réaction. Pour le deuxième cas traité, c'est suite à une question d'un élève que l'enseignant ajoute une explication accompagnée de gestes pour indiquer la position de la droite à l'élève. Cet élève acquiesce. Les autres écoutent. Il est possible que les activités *a minima* des élèves soient l'écoute et les activités *a maxima* soient la visualisation de la position de la droite dans l'espace. Dans tous les cas, les élèves ne prennent aucune note des commentaires de l'enseignant.

L'enseignant P_3

La chronologie globale de ce moment précis est la suivante :

Changement de points de vue	1'45"
Exemple	3'20"
Cas particuliers	11'50"
Exercices sur les équations cartésiennes de droites	133'

Le déroulement pour les équations cartésiennes de droites particulières est donné dans le tableau VIII.7.

Durée	Nature du travail	Interventions de P_3	Activités des E
1'15"	Rappels : droite dans $\mathbb{R}^2$	P dessine au tableau un repère orthonormé, trace plusieurs droites non particulières et, en bleu, une droite horizontale et une droite verticale. Il insiste sur la forme des équations cartésiennes de ces droites.	Les E écoutent.
1'30"	Cours : extension à l'espace des droites particulières	P fixe un repère dans la classe et montre des droites parallèles aux axes et parallèles à un plan.	Les E écoutent.
30"	Cours : lecture collective des feuilles	P écoute.	Un E lit. Les autres écoutent et suivent sur la feuille.
1'30"	Cours : interprétation géométrique	P explique les liens entre la position relative des droites et les composantes d'un vecteur directeur.	Les E écoutent.
25"	Cours : lecture collective des feuilles	P lit les feuilles.	Les E écoutent et suivent sur la feuille.
1'20"	Cours : interprétation géométrique	P explique la forme des systèmes d'équations en fonction de la position relative des droites.	Les E écoutent.
20"	Cours : lecture collective des feuilles	P écoute.	Un E lit. Les autres écoutent et suivent sur la feuille.
1'	Cours : interprétation géométrique	P explique la position par rapport aux plans du repère.	Les E écoutent.
15"	Cours : lecture collective des feuilles	P écoute.	Un E lit. Les autres écoutent et suivent sur la feuille.
50"	Cours : interprétation géométrique	P explique la position par rapport aux plans du repère.	Les E écoutent.
30"	Cours : lecture collective des feuilles	P écoute.	Un E lit. Les autres écoutent et suivent sur la feuille.
2'20"	Cours : interprétation géométrique	P explique la position par rapport aux axes du repère.	Les E écoutent.
5"	Cours : généralisation aux autres cas	P dit que c'est la même chose pour les autres cas.	Les E écoutent.

TABLE VIII.7 – Déroulements pour l'enseignant P_3 sur les équations cartésiennes de droites.

Cet enseignant n'effectue aucun changement de points de vue pour ces cas particuliers. Pourtant, à la séance précédente, le passage du point de vue paramétrique au point de vue cartésien a été fait en toute généralité. Cet enseignant ne tente donc pas de rapprocher ces nouvelles connaissances du travail que les élèves ont déjà effectué. Des occasions de proximités horizontales sont ici manquées. La transcription complète des déroulements pour les équations cartésiennes de droites particulières est très longue et répétitive. En effet, l'enseignant donne des commentaires similaires pour interpréter les équations de droites parallèles à un des plans du repère. Nous fournissons donc au lecteur les extraits des interventions de l'enseignant P_3 pour le cas où l'abscisse du vecteur directeur est nulle et le cas où l'abscisse et l'ordonnée du vecteur directeur sont nulles.

P_3 : Dans l'espace, qu'est-ce qui peut se passer ? On va faire un peu travailler l'imagination. Ceci c'est vos axes, d'accord ? Vous avez l'axe x, vous avez l'axe y et vous avez l'axe z.

P_3 montre un coin de la classe et montre chaque arête issue de ce sommet en disant que ce sont les axes du repère.

P_3 : Il peut y avoir plein de droites. D'accord ? Il y a des droites qui vont être particulières, c'est-à-dire, par exemple, prenez la ficelle ici.

Il montre un des axes qui représente la largeur de la classe.

P_3 : Qu'est-ce qu'on peut dire de ces ficelles-là ? Elles sont parallèles à quel axe ? L'axe x. Vous regardez la rainure qui est derrière, parallèle à quel axe ? y. Ok ?

Il a montré l'axe dans la longueur de la classe. Cet axe est derrière lui.

P_3 : Vous allez avoir des droites qui vont être parallèles à des axes ou parallèles à des plans. Ça va ? Si on prend, par exemple, la droite qui relie le point qui est là au point là-bas, elle n'est pas parallèle aux axes mais elle est parallèle au sol.

Il montre une des diagonales du plafond.

L'enseignant P_3 essaie de représenter les objets dans l'espace. Pour cela, il décide de fixer un même repère de l'espace pour tout le monde. Son objectif est d'étendre la notion de droites particulières du plan à l'espace. Il ne veut pas encore établir de lien entre les équations de telles droites et celles-ci. Pour décrire une droite incluse dans le plan Oyz, les équations sont données directement. L'enseignant explique ensuite pourquoi ces équations décrivent bien une droite ayant cette position.

P_3 : Alors, je vais revenir sur la phrase « une droite est incluse à un plan parallèle, il faut qu'il y ait une des composantes qui soit nulle ». Pourquoi ? Comment ? Ben réfléchissons. Prenons la droite ici.

L'enseignant reprend la diagonale du plafond dont il a déjà parlé dans l'extrait précédent.

P_3 : On est d'accord là-dessus, c'est une droite qui est parallèle au plan du sol. Quelle est sa caractéristique ? On parle qu'une de ses composantes est nulle, quelle est sa caractéristique ? Si vous regardez bien l'expression, la droite est dans le plafond. Le plafond, ben, il est parallèle au sol d'accord ? Ça c'est un. Deuxièmement, ce qu'il faut bien comprendre c'est que ça évolue par rapport à quel axe ? Cette droite-ci va évoluer par rapport à l'axe x. D'accord ? Et ça va évoluer par rapport à l'axe y. Est-ce que la droite va monter ou la droite va descendre ? Non. [...] Donc qu'est-ce qu'il se passe ? La composante au niveau de la hauteur, de la troisième composante, bah, y a rien. Je me déplace pas ni en haut, ni en bas. Ça ça veut dire que la troisième composante, une des composantes doit être nulle.

L'enseignant part d'une droite dont la position dans l'espace est fixée pour tout le monde. Il explique pourquoi cette droite a un vecteur directeur dont une des composantes, la troisième, est nulle. Il réitère l'explication pour une droite parallèle aux plans Oyz et Oxz. Ces commentaires permettent, selon nous, que les élèves visualisent la situation et relient les connaissances de géométrie synthétique aux connaissances de géométrie vectorielle. Puis, il explique la forme que le système d'équations doit avoir pour décrire une telle droite. Il repart du fait qu'une des composantes du vecteur directeur est nulle. Il choisit l'abscisse.

P_3 : Donc, si ceci c'est x. Une fois que je me place, je peux plus me déplacer comme ça, car mon vecteur directeur c'est zéro par rapport à la composante en x.

Il montre l'avant et l'arrière, c'est-à-dire un déplacement suivant l'axe des abscisses.

P_3 : Je ne peux plus faire un pas en avant. Je ne peux plus faire un pas en arrière. Tout ce que je peux faire c'est des pas sur le côté, monter et descendre. Donc, ma droite, qu'est-ce qu'elle a comme équation ? Quelque chose qui sera lié par rapport à y et z. Ok ? Mais il faut aussi dire que par rapport à x, je suis quelque part. C'est pour ça qu'il y a le $x = x_A$. Je suis peut-être en 6, je suis peut-être en 7, je suis peut-être en 3. D'accord ? Mais la seule chose qui va évoluer après c'est le y et les z.

L'enseignant P_3 s'appuie sur ce qu'il vient de dire pour relier la position de la droite et les équations. Ainsi, ces commentaires permettent de relier les cadres des géométries vectorielle, synthétique et analytique. Les jeux de cadres sont aussi très différents de ce que nous avons déjà repéré dans les analyses *a priori*. En effet, il s'appuie sur la géométrie vectorielle pour amener la position de la droite dans l'espace. Puis, il la décrit par des équations. Il agit de la même façon pour les droites parallèles à un axe.

P_3 : Tantôt, j'avais pris l'exemple où je me place en x et je m'arrête. Je ne peux pas me déplacer devant moi ou derrière moi. Je peux me déplacer vers la gauche ou vers la droite, en haut ou en bas. Dans ce cas-ci, il y en a deux qui vont être fixées, c'est-à-dire, je me déplace, BOUM. Je peux ni me déplacer vers l'avant, ni vers l'arrière, ni vers la gauche, ni vers la droite. Donc, je ne peux faire que quoi ? Que monter ou que descendre. Donc, qu'est-ce qui se passe en fait ? Ben, si je dis que je suis ici, par

exemple en 1, 2, ma position z, qu'est-ce qu'elle va faire ? Elle peut être n'importe où. Ok ? Et dans ce cas-là, on est très restrictif. Quand il y a deux composantes qui sont nulles et qu'il y a plus qu'une dimension qui travaille. Regardez bien dans les équations qui sont ici, on a $y = 0$, point ! Que vaut x ? On s'en fout. Ils sont partout.

L'enseignant revient dans le plan sur une droite particulière.

P_3 : Quand vous regardez ici, $x = 3$, que vaut y ? On s'en fout. Il est partout. Il est là, il est là, il est là. Il y a une infinité de valeurs qu'il peut valoir. Donc, quand, ici, on a deux composantes qui sont fixées, ça sert à rien d'évoquer la troisième. Il suffit de dire qu'on a deux composantes qui sont là. C'est x égal machin, y égal machin. Ça va ? Donc, ici, j'ai fixé x, j'ai fixé y. Je suis parallèle à quel axe ?

L'enseignant s'appuie à la fois sur les connaissances des élèves en géométrie analytique plane et sur le travail qu'il vient de réaliser juste avant pour les droites parallèles aux plans du repère. Il tente donc des proximités horizontales que nous n'avions pas prévues *a priori*. Ainsi, bien que les traitements internes ne soient pas pris en compte par cet enseignant en classe, il ajoute énormément de commentaires méta dans son discours pour amener les élèves à développer le deuxième aspect de l'interprétation géométrique, c'est-à-dire décrire une droite précise par des équations. Toutefois, les activités des élèves se limitent à écouter. Encore une fois, ils ne prennent aucune note.

L'enseignant P_4

La chronologie globale de ce moment précis est la suivante :

Changement de points de vue	6'
Exemples	17'
Cas particuliers	1'
Exercices sur les équations de droites	131'

L'enseignant P_4 passe du point de vue paramétrique au point de vue cartésien pour les droites en toute généralité. Il propose ensuite deux exemples pour lesquels il s'agit d'écrire une équation paramétrique de la droite et d'effectuer pour chacun le changement de points de vue. Le déroulement correspond à ce que nous avons prévu dans notre analyse *a priori*. Il est possible que l'activité de changement de points de vue dans le sens paramétrique/cartésien soit développée par les élèves. Il utilise un outil numérique pour déterminer la position de ces deux droites dans l'espace. Il introduit finalement les différentes formes pour les systèmes d'équations cartésiennes des droites particulières. Le déroulement est donné dans le tableau VIII.8.

Durée	Nature du travail	Interventions de P_4	Activités des E
45”	Exemple : lecture des feuilles	P lit l'énoncé de l'exemple 1. P attire l'attention sur le fait qu'on ne peut pas appliquer directement le résultat. Il donne la méthode.	Les E écoutent.
3'20”	Exemple : correction collective	P demande quelles sont les informations importantes pour écrire une équation paramétrique d'une droite.	Un E répond.
		P écrit une équation paramétrique de la droite sous la dictée.	Un E répond correctement. Les E recopient.
		P explique qu'il faut éliminer le paramètre pour obtenir une équation cartésienne.	Les E écoutent.
		P demande une démarche pour éliminer le paramètre.	Un E répond correctement.
		P demande ce qu'il faut faire avec les deux équations dans lesquelles le paramètre est isolé.	Un E répond correctement. Les E recopient.
		P écrit au tableau un système d'équations cartésiennes.	Les E recopient.
7'25”	Exemple : interprétation géométrique	P utilise le logiciel *GeoGebra*. P entre les équations cartésiennes de la droite et demande la particularité de la droite.	Les E observent. Un E répond de façon incorrecte.
		P demande à quoi la droite est parallèle.	Un E répond en partie correctement.
		P demande une précision.	Un autre E répond correctement.
		P revient sur l'activité d'introduction et amène l'idée que $x = 2$ est un plan. P explique que la droite est incluse à ce plan et donne la position de ce plan par rapport aux axes du repère.	Les E écoutent.
		P écrit au tableau la position relative de la droite. Il généralise pour les deux autres cas.	Les E recopient.

Durée	Nature du travail	Interventions de P_4	Activités des E
20”	Exemple : lecture des feuilles	P lit l'énoncé de l'exemple 2. P attire l'attention sur le fait que deux composantes sont nulles.	Les E écoutent.
3’	Exemple : correction collective	P écoute et valide.	Un E propose d'écrire une équation paramétrique pour trouver des équations cartésiennes.
		P demande une équation paramétrique.	Des E répondent. Les E recopient.
		P dit que l'E a raison et complète $x = 2 + 2k$.	Un E demande pourquoi $x = 2$.
		P demande comment éliminer le paramètre k.	Les E ne répondent pas.
		P attire l'attention des E sur le fait que l'ordonnée et la cote des points de la droite sont fixées alors que l'abscisse peut valoir n'importe quelle valeur.	Les E écoutent.
		P écrit un système d'équations cartésiennes.	Les E recopient.
		P réexpique pourquoi il n'y a plus de x dans l'équation.	Un E demande pourquoi il n'y a plus de x.
2’10”	Exemple : interprétation géométrique	P utilise le logiciel *GeoGebra* et trace la droite. P demande dans quels plans la droite va être incluse.	Un E répond de façon incorrecte.
		P demande quels plans tracer.	Des E répondent correctement.
		P dit que la droite est à l'intersection des deux plans et demande la position de la droite.	Un E répond correctement.
		P écrit au tableau la position relative de la droite. Il généralise pour les deux autres cas.	Les E recopient.
1’	Cours : lecture collective des feuilles	P lit les feuilles.	Les E écoutent et suivent sur la feuille.

TABLE VIII.8 – Déroulements pour l'enseignant P_4 sur les équations cartésiennes de droites.

Nous fournissons les transcriptions des interventions de cet enseignant et des élèves uniquement pour le premier exemple et pour le point théorique correspondant. Les résultats étant similaires pour le deuxième exemple.

P_4 : Pour le premier exemple, on vous demande de déterminer une équation cartésienne de la droite d_1 passant par le point $(2,-1,3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ qui a pour composantes $(0,-1,2)$. Je ne peux pas directement appliquer ça.

L'enseignant montre la forme canonique des équations cartésiennes.

P_4 : Pourquoi ? Parce que j'ai une première composante qui est nulle. Donc, l'idée ça va être quoi ? L'idée ça va être de repartir de mon système d'équations paramétriques et d'essayer à isoler k dans ce système-là. Alors, je vous écoute. Est-ce que vous pouvez directement me donner un système d'équations paramétriques de la droite d_1 ? J'ai besoin de quelles informations pour écrire un système d'équations paramétriques ? J'ai besoin d'un ...

E_1 : point

P_4 : point et d'un ...

E_1 : vecteur directeur

P_4 : et d'un vecteur directeur. Est-ce que l'énoncé me donne un point et un vecteur directeur ? Oui. Donc, on peut y aller directement. d_1 a pour équation quoi ? x égal à 2 plus k fois 0, donc je ne vais pas l'écrire. y est égal à -1 moins k et z est égal à 3 plus $2k$ où k c'est quoi ? Un paramètre. Donc, je le redis. La démarche, ici, va être la même. Je vais chercher à éliminer le paramètre k. C'est ça avoir une équation cartésienne, c'est ne plus avoir ce paramètre k. Alors, ben dans ce cas-ci, comment je vais faire pour éliminer mon paramètre k ?

E_2 : Ben, on peut le mettre en évidence, non ?

P_4 : On peut l'isoler mais où ça ? Dans les deux dernières égalités. Alors, on y va. Alors, la première ben je vais la laisser hein. J'impose quand même ici quelque chose de très fort sur x. J'impose qu'il soit toujours égal à 2. Donc, ça veut dire que tous les points de ma droite auront une abscisse égale à 2. Alors, ensuite, si j'isole k dans la deuxième équation, que vaut k ? $-y-1$. Et que vaut k dans la dernière ? $z-3$ sur 2, où toujours k est un réel. Alors, l'étape suivante ? d_1 a pour équation quoi ? $x=2$ je dois à nouveau le réécrire. Et je vais faire quoi ici avec mes deux égalités ?

E_3 : $-y-1$ est égal à $\frac{z-3}{2}$.

P_4 : Est-ce que là j'ai bien réussi à éliminer le paramètre k ? Oui. Donc, ça c'est quoi ? C'est une équation cartésienne de ma droite d_1. Ça va ? C'est clair ?

Dans cet extrait, l'enseignant applique la même démarche pour le changement de points de vue que celle que les élèves viennent d'effectuer. Cependant, il ne tente aucune des proximités descendantes que nous avons repérées *a priori*. En effet, il n'explicite pas le passage du général au particulier ni pour la démarche utilisée, ni pour l'écriture du système d'équations paramétriques. Les occasions de proximités sont donc manquées.

Les activités des élèves se limitent à écouter, copier et éventuellement répondre aux questions de l'enseignant. L'enseignant ajoute finalement une étape dans la résolution de la tâche qui consiste à interpréter géométriquement le système d'équations.

P_4 : Je voudrais bien qu'on regarde maintenant, à l'aide de *GeoGebra*, comment se situe cette droite dans l'espace. J'affiche donc la droite d_1 qui est ici. Ça va ? Vous la voyez ? Alors, je vais un petit peu bouger le repère. Le but c'est que vous essayiez de me dire quelle est la position de cette droite dans l'espace. Quelle est la particularité de la droite ? Alors, on a dit quoi ? La première ligne elle me donne quoi comme information ? Elle me dit que toutes les abscisses des points seront toujours égales à 2. Donc, je vais essayer de vous faire apparaitre ça peut-être de façon plus visuelle. Est-ce que vous voyez bien que toutes les abscisses sont bien égales à 2 ? Vous visualisez ça ? Mon axe x ici ? Eh bien, alors, qu'est-ce que vous pouvez me dire sur cette droite-là ? Elle est quand même particulière.

E_2 : Pour un x, il y a une infinité de valeurs de y ?

P_4 : Ici, c'est plutôt que je sais que ma valeur de x est fixée. Je sais que ma valeur de x vaudra toujours 2 et donc tu vas effectivement trouver une infinité de valeurs de y. Attention que tu vas pouvoir déterminer grâce à la deuxième égalité. C'est pas n'importe quoi non plus. y et z sont liés, si on veut. D'accord ? Une valeur de y va pouvoir déterminer la valeur de z, ok ? Mais donc vous voyez rien du tout ? Elle est parallèle à quoi ?

E_3 : à z ?

P_4 : à z et à ?

E_2 : et à y ?

P_4 : et à y. Tiens ! On va peut-être revenir sur notre activité d'introduction. Souvenez-vous, je vous avais fait tracer le plan d'équation $x = 3$. Vous vous souvenez de ça ? Ici, je pourrais tracer $x = 2$. Alors, qu'est-ce que vous pouvez me dire sur la droite ? Elle est incluse dans le plan d'équation $x = 2$. Et qu'est-ce que vous pouvez me dire sur ce plan-là ? Il est parallèle au plan formé par les axes z et y. Donc, on va pouvoir écrire que ma droite d_1 est incluse au plan d'équation $x = 2$ et ce plan, que peut-on dire ? Qu'il est parallèle au plan formé de ces deux axes et donc parallèle au plan Oyz.

L'enseignant veut amener les élèves à décrire la position de la droite dans l'espace. Il ne s'agit pas réellement de faire comprendre aux élèves pourquoi un tel système représente une droite particulière. D'ailleurs, l'enseignant se focalise sur l'équation $x = 2$ et ne parle jamais de la deuxième équation du système. Il se peut que cela accentue la difficulté des élèves avec les équations incomplètes dans l'espace. Une fois ce travail réalisé, l'enseignant passe au point théorique correspondant.

P_4 : Alors, ici, je vous ai donné tous les cas. Les trois premiers cas, c'est si une de mes composantes est nulle. Alors, j'aurai un système de cette forme-ci. Je dis système mais ça reste quand même une équation cartésienne. Pourquoi ? Parce que j'ai plus de paramètre k. D'accord ? Donc on s'adapte et ça revient vraiment à ce qu'on a

dit. Et donc, ces droites, elles ont la particularité d'être incluse à un plan parallèle, évidemment vous adaptez en fonction de la composante qui est nulle.

Les liens entre l'exemple et le point théorique sont assez limités. Il y a une occasion de proximité ascendante manquée entre ce que les élèves ont fait dans l'exemple et le cas général. De la sorte, cet enseignant n'ajoute pas beaucoup de commentaires dans son discours pour mettre en évidence les liens décontextualisé/contextualisé. De plus, le travail qu'il propose pour les équations de droites particulières n'amène pas, selon nous, à développer des activités liées à l'interprétation géométrique des objets chez les élèves. Cependant, cet enseignant propose d'effectuer plusieurs changements de points de vue dans le sens paramétrique/cartésien. Ces changements sont explicités par P_4 car celui-ci tente des proximités horizontales avec ce que les élèves ont déjà fait. Il se peut donc que seul le changement de points de vue dans le sens paramétrique/cartésien soit développé par les élèves.

L'enseignant P_5

La chronologie globale de ce moment précis est la suivante :

Changement de points de vue	2'15"
Interprétation géométrique	4'40"
Exemple	5'30"
Cas particuliers (une composante nulle)	6'
Exemple	4'10"
Cas particuliers (deux composantes nulles)	3'40"
Exemples	27'

L'enseignant P_5 effectue, comme prévu *a priori*, le changement de points de vue pour les équations de droites. Après avoir introduit le système sous forme canonique, il explique qu'une double égalité revient à écrire un système de deux équations. Il ajoute ensuite des commentaires liés à l'interprétation géométrique de ce système. Ceux-ci n'ont pas été prévus par le chercheur. Nous revenons directement sur cet extrait.

P_5 : Alors, qu'est-ce que ça peut bien vouloir dire ça ? Ces équations-ci, ce sont les équations d'une droite. Ça veut dire que, pour décrire une droite dans l'espace, de manière cartésienne, j'ai besoin de deux équations. Alors vous savez que quand on résout un système de deux équations ça donne quoi au niveau des solutions ? Ici, en fait, l'ensemble des solutions de ce système-là, ça me donne les coordonnées des points qui sont sur ma droite. Donc, j'ai l'ensemble des solutions puisque ma droite est décrite. Mais ça correspond à quoi au niveau … quand on résout un système ? C'est l'intersection de deux autres objets. D'accord ? Rappel, dans le plan, quand on travaille dans le plan, si on a deux droites, quand il y a une intersection, ben, la coordonnée du point d'intersection c'est la solution du système. Donc, ici, ce qu'on a c'est un système de deux équations qui décrivent deux objets dont l'intersection est une droite. Alors, ça peut être quoi à votre avis ces deux objets ?

E_1 : Deux plans.

P_5 : Oui, tout le monde le voit ? L'intersection de deux plans. D'accord ? Et donc, on verra plus tard, mais c'est peut-être l'occasion d'en parler maintenant, en fait une droite va pouvoir être décrite comme l'intersection de deux plans. Ça va ? Bon, il faut évidemment que les plans soient sécants. Quand vous avez deux plans dans l'espace, comment peuvent-ils être ? Soit sécants, soit parallèles disjoints, soit parallèles confondus. D'accord ? Dans ce cas-là, forcément s'ils sont parallèles, il n'y a pas d'intersection, s'ils sont confondus, tous les points, fin, toutes les coordonnées des points sont solutions.

Ainsi, bien que les équations cartésiennes de plans ne soient pas encore formellement définies, cet enseignant décrit la droite comme étant l'intersection de deux plans. Il s'appuie alors sur les connaissances des élèves en géométrie synthétique et en algèbre pour la résolution des systèmes. Il essaye également de rapprocher cette description au travail que les élèves ont effectué dans l'activité d'introduction sur les équations incomplètes de plans. Plusieurs proximités horizontales sont tentées spontanément par cet enseignant et n'avaient pas été prévues *a priori* par le chercheur.

Nous présentons désormais le déroulement effectif pour les deux cas particuliers dans le tableau VIII.9.

Durée	Nature du travail	Interventions de P_5	Activités des E
3’	Cours : recherche collective	P demande aux E ce qu’il se passe lorsque certaines composantes du vecteur directeur sont nulles.	Un E répond. Les autres écoutent.
		P reprend l’E pour que la réponse soit correcte.	L’E se corrige. Les autres écoutent.
		P fixe une composante à zéro et demande aux E ce que cela signifie.	Un E exprime directement l’inclusion de la droite dans un plan.
		P revient sur le fait que si une composante du vecteur est nul alors il n’y a pas de déplacement dans cette direction. Il rebondit ensuite sur la réponse donnée par l’E et demande une précision.	L’E répond. Les autres écoutent.
		P réexplique tout le raisonnement.	Les E écoutent.
		P donne les positions de la droite dans le cas où une autre composante est nulle.	Les E écoutent.
2’	Cours : lecture des feuilles	P lit la feuille. Il revient sur la démarche pour changer de points de vue.	Les E écoutent et suivent sur la feuille.
1’	Cours : recherche collective	P demande aux E ce qu’il se passe lorsque deux composantes du vecteur directeur sont nulles.	Un E répond.
		P valide et demande la position de la droite.	Plusieurs E répondent correctement.
		P demande ce qu’il se passe dans les deux autres cas.	Les E répondent correctement.
3’40”	Cours : lecture des feuilles	P lit la feuille. Il revient sur la démarche pour changer de points de vue. P demande quoi faire du paramètre.	Deux E répondent de façon incorrecte.
		P explique que cette équation sera toujours vérifiée et qu’il est inutile de l’écrire.	Les E écoutent et suivent sur la feuille.

TABLE VIII.9 – Déroulements pour l’enseignant P_5 sur les équations cartésiennes de droites.

Nous ne présentons que les transcriptions des interventions de l'enseignant et des élèves dans le cas où une seule composante du vecteur directeur est nulle. Le déroulement et les interventions de l'enseignant sont similaires dans le deuxième cas.

P_5 : Que se passe-t-il maintenant s'il y a des zéros dans les composantes ?

E_2 : Ça veut dire que le point, il sera égal au … le vecteur directeur, il y a un des trucs qui est négatif.

P_5 : Un des trucs … s'il-te-plait !

E_2 : Les coordonnées …

P_5 : Non. Vecteur c'est composantes.

E_2 : Il y a une des composantes qui est négative.

P_5 : Non, pas négative.

E_2 : qui sera égale à zéro. Ça veut dire elle sera la même que le point initial.

P_5 : Bon, voilà mon vecteur directeur. Ok ?

L'enseignant utilise une paille pour représenter à la fois la droite et un vecteur directeur.

P_5 : Quand les trois composantes sont non nulles, ça veut dire que j'ai une composante selon x, une composante selon y et une composante selon z.

L'enseignant montre un exemple de déplacement dans les trois directions.

P_5 : Si une des composantes vaut 0, par exemple, laquelle ?

E_2 : x

P_5 : x. La composante selon x est nulle, ça veut dire quoi ?

E_1 : Ça veut dire que la droite elle se trouve sur le plan …

P_5 : Alors, ça veut dire que je ne me déplace pas dans la direction de x. Donc, elle est dans ?

E_1 : Dans le plan yz.

P_5 : Est-ce qu'elle est nécessairement dans le plan Oyz ?

E_1 : Elle peut être parallèle au plan.

P_5 : Vu que la première composante est nulle, ça veut dire que l'abscisse sera égale à l'abscisse du point de base, c'est-à-dire du point qui est donné. Donc, elle est bien parallèle au plan yz. D'accord ? Ça c'est si la première composante est nulle. D'office, si c'est la deuxième, qu'est-ce qu'il va se passer ? Ça veut dire qu'on se déplace pas selon y et donc le vecteur directeur va être comme ceci.

L'enseignant place la paille dans la bonne direction.

P_5 : Et donc ma droite va être parallèle au plan xz. Pour z, ça veut dire qu'on se déplace pas dans la direction de z. Donc, j'ai une droite parallèle au plan xy. Ok ? Bon c'est indiqué ici.

C'est donc à partir d'une réflexion sur les composantes d'un vecteur directeur que l'enseignant détermine la position de la droite dans l'espace. Ainsi, l'enseignant guide les élèves dans leur réflexion pour qu'ils puissent relier les cadres de la géométrie synthétique et de la géométrie vectorielle. L'enseignant donne ensuite les équations paramétriques de telles droites. Il explique le changement de points de vue à effectuer et donne les équations cartésiennes des différentes droites particulières. Il est possible que certaines activités liées aux traitements internes soient développées par les élèves. Toutefois, l'enseignant n'associe pas en classe les équations aux objets décrits. L'interprétation géométrique des droites particulières n'est pas abordée. De plus, il ne relie pas le travail qui vient d'être effectué avec les élèves aux équations données. Des occasions de proximités horizontales sont manquées. Les élèves n'ont encore une fois pris aucune note.

►► Changement de points de vue pour les plans

Nous étudions désormais le déroulement effectif pour le passage d'une équation paramétrique d'un plan à une équation cartésienne. Nous avons relevé dans l'analyse *a priori* que ce changement de points de vue semble pris en compte par quatre enseignants. Plusieurs méthodes sont possibles mais pour chacune les traitements algébriques sont laissés à la charge du lecteur. Nous analysons donc le déroulement effectif et les interventions des enseignants pour ce point précis. Nous notons que l'enseignant P_1 n'effectue pas ce passage en classe comme notre analyse *a priori* le suggérait.

L'enseignant P_2

La chronologie globale de ce moment précis est la suivante :

Équation paramétrique	3'
Équation cartésienne	6'
Exercices sur les équations des droites et des plans	42'

Le déroulement pour le changement de points de vue pour les plans est donné dans le tableau VIII.10.

Durée	Nature du travail	Interventions de P_2	Activités des E
10”	Cours : lecture des feuilles	P lit la forme canonique des équations cartésiennes de plans.	Les E écoutent.
2’50”	Cours : rappels	P demande pourquoi deux équations sont nécessaires pour décrire une droite alors qu’une seule suffit pour décrire un plan.	Les E ne répondent pas.
		P demande aux E le nombre d’équations et de paramètres dans les équations paramétriques de droites et de plans.	Un E répond.
		P parle (sans le citer) du rang d’un système pour expliquer le nombre d’équations cartésiennes nécessaires pour décrire un plan. Il explique également comment éliminer le paramètre pour obtenir une équation cartésienne d’un plan.	Les E écoutent.
3’	Cours : changement de points de vue	P suit la feuille et demande pourquoi un déterminant apparait.	Les E ne répondent pas.
		P demande pourquoi le déterminant est nul.	Un E répond correctement.
		P rappelle certaines propriétés des déterminants.	Les E écoutent.

TABLE VIII.10 – Déroulements pour l’enseignant P_2 pour le changement de points de vue pour les plans.

L'enseignant P_2 parle de la notion de rang d'un système pour justifier qu'il est nécessaire d'avoir deux équations cartésiennes pour décrire une droite dans l'espace et qu'il en suffit d'une pour un plan. Cette notion n'est pas explicite dans le discours de l'enseignant et semble avoir déjà été vue par les élèves lors de la résolution des systèmes par les échelonnements de matrices. Nous présentons les transcriptions des interventions de l'enseignant pour ce moment du scénario.

P_2 : Et comme équation cartésienne, ici, on va avoir alpha a pour équation $ax + by + c = 0$. Donc, on a plus le même style d'équation comme ici. Ici, on a deux signes d'égalité.

L'enseignant montre un système d'équations cartésiennes d'une droite.

P_2 : Pourquoi, ici, on n'en a plus qu'une d'égalité et non deux ? Ah ! Il faut essayer de se souvenir de vos cours de l'an dernier avec les matrices et les systèmes d'équations. Ici, je rajoute quelque chose à mon équation.

L'enseignant montre la partie avec le deuxième paramètre dans l'équation paramétrique générale.

P_2 : Mais je n'ai plus une équation comme la droite. Ici, j'ai trois termes qui sont égaux les uns aux autres, mais, ici, j'ai une équation je dirais plus « classique ».

L'enseignant montre les termes dans un système d'équations cartésiennes et puis une équation cartésienne d'un plan.

P_2 : Pourquoi, ici, j'ai une équation plus classique ? Ici, vous n'aurez jamais quelque chose comme $ax+by+cz+d=0$. [...] Ici, j'avais trois équations paramétriques et combien de paramètres ? Pour les droites, combien de paramètres j'avais ? Ici, c'est encore noté. Ça c'est l'équation d'une droite. J'ai combien d'équations ?

E_1 : Trois.

P_2 : Combien de paramètres ?

E_1 : Un seul.

P_2 : Un seul. Ici, j'ai combien d'équations ?

E_1 : Trois.

P_2 : Combien de paramètres ?

E_1 : Deux.

P_2 : Deux. Donc, du coup, ben, j'ai trois équations, un paramètre. Quand j'élimine le paramètre, il me restera deux équations. Là, j'ai trois équations, deux paramètres. Quand j'élimine les deux paramètres, bah, il me restera une seule équation. De la première, je tirerais lambda, de la deuxième, je tirerais mu et je vais tout remplacer dans la troisième. Ici, comme j'ai qu'un paramètre, je sais pas remplacer ... Il m'en restera deux d'équations.

Cette façon d'expliquer le nombre nécessaire d'équations cartésiennes pour décrire les droites et les plans dans l'espace met en jeu la notion de rang et de dimension des objets. En effet, cet enseignant propose un travail similaire à celui d'Euler. Autrement dit, il veut associer le rang du système à la dimension de l'ensemble des solutions du système. Cependant, Euler partait de l'étude des systèmes pour décrire leurs solutions. Ici, P_2 part de l'ensemble des solutions, et donc des objets géométriques, pour expliquer pourquoi le système doit être de ce rang-là. L'articulation se fait donc bien dans le sens paramétrique/cartésien. Se cachent alors les aspects dual et générateur de la notion de rang dont nous avons parlé au chapitre III. Nous pouvons donc déduire que cet enseignant aborde la notion de rang, ou du moins certains aspects de la notion, lors de l'étude des systèmes d'équations linéaires. Ce déroulement est proche de celui pointé par notre étude historique. L'enseignant P_2 est le seul à suivre ce cheminement. Pour les trois autres enseignants, l'aspect générateur est le seul qui apparait dans le scénario et dans le déroulement en classe.

P_2 : Puis, là, il y a un déterminant qui apparait. Il vient d'où ce déterminant ? Donc, j'ai l'équation d'une droite qui est donnée par un déterminant. D'où ça vient ? Pourquoi il y a un déterminant qui arrive et pourquoi je peux dire que ce déterminant c'est l'équation d'une droite ? [silence] Bonne question ! Donc ce déterminant, il est construit à partir du système d'équations qui est là au-dessus. Alors, vous voyez l'équation, c'est le déterminant égal zéro. Donc ça c'est l'équation et pas juste le déterminant. C'est le déterminant égal zéro. Qui dit équation dit égalité. Pourquoi je peux dire que ce déterminant vaut zéro ? Alors il faut aller chercher dans le répertoire 5e année, déterminants, propriétés sur les déterminants.

E_1 : On doit tous faire des combinaisons linéaires déjà.

P_2 : Oui.

E_1 : C'est dans ce cas-ci ?

P_2 : Regardez la première colonne, la première colonne en fait ...

E_1 : Ah ! Mais il y a moins x_A, y_A, z_A en fait ?

P_2 : Attention là au début j'ai que des x, y, z. Donc en fait ma première colonne, c'est une combinaison linéaire des deux autres colonnes. Il suffit de regarder ici au-dessus. On vous donne la combinaire linéaire. $x - x_A$ c'est lambda fois $x_B - x_A$ plus mu fois $x_C - x_A$. Donc la première colonne, c'est lambda fois la deuxième plus mu fois la troisième. Qu'est-ce qu'il se passe dans un déterminant quand une colonne, quand une rangée est combinaison linéaire des autres rangées parallèles ? Alors, le déterminant vaut zéro. Donc écrire ce déterminant-là ou écrire ceci, ben, ça nous donne deux égalités qui sont équivalentes.

Cet enseignant passe donc du point de vue paramétrique au point de vue cartésien, tout d'abord en parlant de l'élimination des paramètres sans pour autant le faire et puis avec les déterminants. Il tente des proximités horizontales avec les connaissances des élèves sur les déterminants. Cependant, il ne développe pas le déterminant pour arriver à la forme canonique. Il y a aussi des occasions de proximités horizontales manquées.

Notons également qu'il ne corrige pas son erreur et parle de droite pendant tout le déroulement pour ce point précis. Ainsi, comme nous l'avons prévu, cet enseignant fournit quelques explications de nature algébrique mais en laisse encore à la charge des élèves. De plus, il est possible que l'erreur commise par cet enseignant ait des répercussions sur la confusion entre les équations cartésiennes de droites et de plans que les élèves peuvent rencontrer.

L'enseignant P_3

La chronologie globale de ce moment précis est la suivante :

Exercices sur les équations paramétriques	29'
Équation cartésienne	18'
Exercices sur les équations cartésiennes	134'

L'analyse *a priori* des documents fournis par l'enseignant P_3 met en évidence qu'il n'effectue pas le changement de points de vue mais il propose la méthode à suivre. Le déroulement effectif est donné dans le tableau VIII.11.

Durée	Nature du travail	Interventions de P_3	Activités des E
1'30"	Cours : lecture des feuilles	P écoute.	Un E lit. Les autres écoutent et suivent sur la feuille.
16'30"	Cours : exemple	P écrit au tableau les coordonnées de trois points.	Les E recopient.
		P dit qu'il veut écrire une équation vectorielle du plan. Il rappelle qu'un point et deux vecteurs directeurs sont nécessaires. P demande quels vecteurs choisir.	Un E propose deux vecteurs non colinéaires.
		P construit les deux vecteurs donnés en explicitant son calcul.	Les E recopient.
		P écrit au tableau une équation vectorielle du plan.	Les E recopient.
		P explicite le calcul des composantes de chaque vecteur dans l'équation vectorielle.	Les E recopient.
		P écrit au tableau une équation paramétrique du plan.	Les E recopient.
		P revient sur la démarche exposée dans les feuilles pour passer d'une équation paramétrique à une équation cartésienne.	Les E écoutent.
		P écrit au tableau un système dans lequel il a isolé les deux paramètres.	Les E recopient.
		P explique qu'il n'y a plus de paramètre dans l'équation trouvée. Il dit qu'il veut que la forme soit $ax+by+cz=d$.	Les E écoutent.
		P simplifie l'équation trouvée pour obtenir une équation cartésienne de la forme $ax+by+cz=d$.	Les E recopient.
		P revient sur la démarche suivie pour le changement de points de vue. Il explique la méthode dans le cas où les deux paramètres ne sont pas déjà isolés comme dans l'exemple traité.	Les E écoutent.

TABLE VIII.11 – Déroulements pour l'enseignant P_3 pour le changement de points de vue pour les plans.

Ainsi, l'enseignant P_3 applique la méthode donnée sur un exemple. Il donne les points $A(1,1,2)$, $B(1,-2,0)$ et $C(4,2,0)$ et demande de déterminer une équation cartésienne du plan ABC. Il refait entièrement la démarche vue en théorie, c'est-à-dire écrire une équation vectorielle, puis changer de cadre et, enfin, passer au point de vue cartésien. L'enseignant fait tout le travail lui-même au tableau. Les élèves n'entrent que peu en activité. Ils copient et écoutent. Pourtant, de nombreux exercices ont déjà été résolus auparavant. Les élèves auraient pu donner seuls une équation paramétrique du plan et appliquer la méthode donnée par l'enseignant. Toutes les justifications sont prises en charge dans le discours de l'enseignant mais il ne note que les calculs au tableau. Il se peut donc que les élèves ne gardent la trace que des calculs. De plus, les coordonnées de points amènent à un système d'équations dans lequel les deux paramètres sont déjà isolés. C'est pourquoi l'enseignant généralise la méthode appliquée dans l'exemple à un cas plus général où les deux paramètres apparaissent dans les trois équations. Cet enseignant tente une proximité descendante imprévue *a priori* lorsqu'il applique la méthode à cet exemple et plusieurs proximités horizontales lorsqu'il donne une équation vectorielle, une équation paramétrique et rappelle comment calculer les composantes des vecteurs.

L'enseignant P_4

La chronologie globale de ce moment précis est la suivante :

Équation paramétrique	6'
Exemple	6'
Changement de points de vue	8'
Équation cartésienne	1'
Exercices sur les équations de plans	67'

L'enseignant P_4 donne une équation paramétrique et applique ce résultat à un cas particulier. Il tente une proximité descendante comme nous l'avions prévue *a priori*. Il utilise ensuite cet exemple pour éliminer les paramètres. Le déroulement est donné dans le tableau VIII.12.

Durée	Nature du travail	Interventions de P_4	Activités des E
8'10"	Cours : recherche collective	P explique qu'ils vont chercher la forme d'une équation cartésienne pour un plan.	Les E écoutent.
		P demande aux E de rappeler la démarche pour changer de points de vue.	Un E répond correctement.
		P explique qu'ils vont éliminer les deux paramètres.	Les E écoutent.
		P demande ce qu'il doit écrire.	Un E suggère de remplacer les inconnues par les coordonnées du point.
		P invalide la réponse de l'E et revient ce qu'il faut faire.	L'E acquiesce. Un autre E propose d'isoler un des deux paramètres dans une équation. Les autres E écoutent.
		P écrit au tableau un système dans lequel un des deux paramètres est isolé sous la dictée.	Un E dit au P ce qu'il doit écrire. Les E recopient.
		P explique comment isoler le deuxième paramètre.	Les E écoutent.
		P réexplique la démarche.	Un E pose une question.
		P demande ce qu'il reste à faire lorsque les deux paramètres sont isolés.	Un E répond.
		P valide et écrit l'équation cartésienne recherchée.	Les E recopient.
		P demande la caractéristique de cette équation.	Un E suggère qu'il y a plusieurs fois l'inconnue y.
		P valide. Il dit qu'il n'y a plus de paramètre et donc qu'il s'agit bien d'une équation cartésienne.	Les E écoutent.
		P écrit l'équation sous la forme $ax+by+cz=d$.	Les E recopient.
1'	Cours : lecture des feuilles	P lit les feuilles.	Les E écoutent et suivent sur la feuille.

TABLE VIII.12 – Déroulements pour l'enseignant P_4 pour le changement de points de vue pour les plans.

L'enseignant s'appuie sur le travail qui a été réalisé sur les droites pour le changement de points de vue. Il demande aux élèves de rappeler comment passer d'une équation paramétrique à une équation cartésienne pour les droites et étend cette méthode pour les plans. Il tente alors une proximité horizontale avec les activités que les élèves ont déjà rencontrées. Il élimine ensuite les deux paramètres. Un extrait du tableau est proposé à la figure VIII.14.

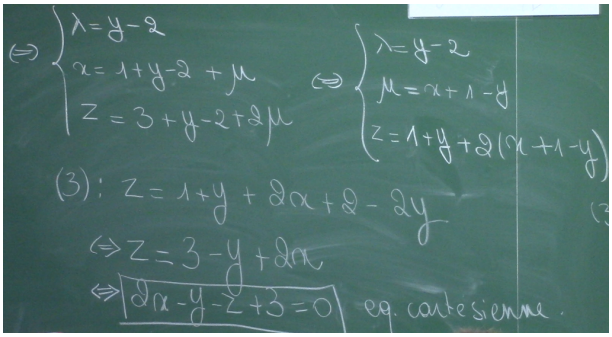


FIGURE VIII.14 – Extrait du tableau de P_4 pour le changement de points de vue pour les plans.

Seuls les traitements algébriques sont écrits au tableau. Ainsi, la méthode et les différentes étapes de calculs sont données par l'enseignant oralement. Il est possible que les élèves n'aient pas pris note de ces commentaires. L'enseignant lit finalement l'encadré théorique explicitant la forme canonique d'une équation cartésienne de plans. Ni la méthode appliquée dans l'exemple, ni l'équation obtenue ne sont généralisées. Des occasions de proximités ascendantes sont manquées par cet enseignant. Cela ne permet pas de travailler les liens décontextualisé/contextualisé.

L'enseignant P_5

La chronologie globale de ce moment précis est la suivante :

Équation paramétrique	3'
Exemples	10'
Changement de points de vue	17'15"
Équation cartésienne sous forme canonique	3'30"
Équation cartésienne sous forme de déterminant	4'
Exemples	19'45"

Comme prévu dans l'analyse *a priori*, deux méthodes sont proposées pour articuler les points de vue. Les déroulements sont donnés dans les tableaux VIII.13 et VIII.14.

Durée	Nature du travail	Interventions de P_5	Activités des E
17'15"	Cours : recherche collective	P rappelle la démarche pour passer d'une équation paramétrique à une équation cartésienne pour les droites. P dit qu'elle reste identique dans l'espace.	Les E écoutent.
		P reprend le système des équations paramétriques trouvé dans l'exemple précédent. P explique ce qu'il faut chercher.	Les E écoutent.
		P rappelle les méthodes pour résoudre un système de trois équations à deux inconnues. P demande ce que les E choisissent.	Les E écoutent. Un E propose la substitution.
		P explique la méthode de substitution à utiliser dans le cas de l'exercice.	Les E écoutent.
		P dit qu'ils vont isoler dans la troisième équation le premier paramètre. P demande ce que vaut le paramètre.	Un E donne la valeur du paramètre.
		P écrit la valeur donnée et demande quoi en faire.	Un E répond correctement. Les E recopient.
		P remplace cette valeur dans la première équation.	Les E recopient.
		P réexplique le calcul effectué.	Un E pose une question.
		P remplace cette valeur dans la deuxième équation.	Les E recopient.
		P isole le deuxième paramètre.	Les E recopient.
		P revient sur la méthode.	Un E pose une question.
		P explique qu'il ne faut pas chercher les valeurs de x, y et z.	Un E pose une question.
		P écrit la troisième équation du système dans laquelle il n'y a plus de paramètres. Il explique que c'est une équation cartésienne.	Les E écoutent et recopient.
		P réduit l'équation.	Les E recopient.
3'30"	Cours : lecture des feuilles	P lit les feuilles et explique pourquoi les composantes du vecteur normal ne sont pas toutes nulles.	Les E écoutent et suivent sur la feuille.

TABLE VIII.13 – Déroulements pour l'enseignant P_5 pour le changement de points de vue pour les plans par la méthode de la substitution.

Durée	Nature du travail	Interventions de P_5	Activités des E
4’	Cours : lecture des feuilles	P lit les feuilles et explique comment obtenir une équation cartésienne à l’aide des déterminants	Les E écoutent et suivent sur la feuille.
10’30”	Cours : exemple	P demande ce qu’il faut vérifier avant de se lancer dans la résolution de la tâche.	Les E ne répondent pas.
		P précise que les vecteurs donnés ne doivent pas être colinéaires.	Les E écoutent.
		P demande comment vérifier qu’ils ne le sont pas.	Les E ne répondent pas.
		P rappelle la colinéarité.	Les E écoutent.
		P s’appuie sur la formule donnée pour écrire au tableau le déterminant recherché. Il explicite le calcul des composantes des vecteurs.	Les E recopient.
		P explique la démarche.	Un E pose une question.
		P rappelle la méthode de Sarrus.	Les E écoutent.
		P écrit sous la dictée le calcul du déterminant.	Un E répond. Les E recopient.
		P réduit l’équation cartésienne trouvée.	Les E recopient.
15”	Cours : exemple	P lit l’énoncé de la tâche.	Les E écoutent.
3’	Cours : recherche individuelle	P passe dans les bancs.	Les E travaillent.
6’	Cours : correction collective	P écrit au tableau l’équation sous la forme de déterminant dictée par un E.	Un E dicte.
		P réexplique qu’il ne faut pas chercher les valeurs des inconnues.	Un E pose une question.
		P écrit le calcul du déterminant sous la dictée.	Un E dicte.
		P réduit l’équation cartésienne trouvée.	Les E vérifient leur réponse.

TABLE VIII.14 – Déroulements pour l’enseignant P_5 pour le changement de points de vue pour les plans par la méthode des déterminants.

Le déroulement pour le changement de points de vue à partir d'un exemple est similaire à celui de l'enseignant P_4. En effet, une équation paramétrique est donnée en toute généralité. L'enseignant demande aux élèves de déterminer une équation paramétrique d'un plan passant par trois points donnés. Avec la collaboration des élèves, l'enseignant écrit au tableau les composantes de deux vecteurs directeurs du plan et fait un parallèle entre la forme générale d'une équation paramétrique et le cas particulier. Il tente donc des proximités descendantes qui avaient été prévues *a priori*. Une fois cette équation écrite, il explique que les paramètres doivent être éliminés pour obtenir une équation cartésienne. Tout comme l'enseignant P_4, cet enseignant ne généralise ni la démarche suivie dans l'exemple, ni le résultat obtenu. Des occasions de proximités ascendantes sont manquées. Toutefois, cet enseignant est le seul à expliquer pourquoi les composantes d'un vecteur normal au plan ne peuvent pas être toutes nulles. Il ajoute alors des commentaires méta dans son discours. Ces commentaires portent sur les différents types d'équations qui ont déjà été rencontrés par les élèves. Il s'agit alors de proximités horizontales. Voici une transcription de ce passage.

P_5 : avec évidemment les coefficients a, b et c qui ne sont pas tous nuls. Parce que s'ils sont tous nuls, qu'est-ce qu'il nous reste ? C'est l'objet de la deuxième remarque. Si j'ai a, b, c qui vaut zéro, il ne me reste que $d = 0$.

L'enseignant cache la partie $ax + by + cz$ avec son bras dans une équation cartésienne d'un plan.

P_5 : Alors, soit effectivement $d = 0$ et alors x, y, z peut valoir n'importe quoi et tout point du plan vérifie l'égalité, ou alors d n'est pas égal à zéro et on a ce qu'on appelle une équation impossible. Et là aucun point de l'espace, j'ai dit espace tout à l'heure ? Je ne sais plus. Aucun point de l'espace ne vérifie l'équation. Donc le a, b et c ne sont pas nuls tous les trois en même temps. On peut, bien entendu, en avoir un nul ou pas. On a déjà rencontré dans les exemples d'introduction qu'il y avait des équations de plans qui n'avaient pas de terme en z.

Ces explications permettent également d'attirer l'attention des élèves sur les équations incomplètes de plans. Il rappelle d'ailleurs le travail que les élèves ont fait dans l'activité d'introduction sur ces équations. Nous proposons maintenant la transcription du changement de points de vue à l'aide des déterminants.

P_5 : On a déjà travaillé les systèmes. On a vu en projet math les systèmes de trois équations à trois inconnues, deux équations et deux inconnues vous en avez déjà faits en troisième année. On faisait l'étude complète de tous les systèmes et dont deux, trois équations à deux inconnues. Comme je vous l'ai dit trois équations, deux inconnues, ça veut dire que la méthode de résolution ça peut être de trouver éventuellement une solution sur les deux premières. Soit, il n'y a en pas et s'il n'y a pas de solution sur les deux premières alors il n'y en a pas sur la troisième. Soit, il y en a une sur les deux premières et on vérifie dans la troisième si l'égalité est bien vérifiée. Et donc, on a aussi, avec l'étude de tous les systèmes, une condition de compatibilité, d'unicité de solutions. Et cette unité de solution, elle est donnée par

le fait que le déterminant du système augmenté est égal à zéro. D'accord ? Et, en fait, cette condition de compatibilité que l'on voyait avant, on la retrouve sous une autre forme ici, parce que dire qu'un point appartient à un plan, qui est déterminé par un point donné et un couple de vecteurs directeurs, c'est, comme on l'a dit pour l'équation vectorielle, dire que $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont coplanaires. Alors, dire qu'ils sont coplanaires, c'est dire qu'on peut écrire une combinaison linéaire : $\overrightarrow{AP}$ c'est m fois $\overrightarrow{u}$ plus n fois $\overrightarrow{v}$. Ce qui nous avait donné les équations vectorielles. Et donc, on définit aussi que trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si le déterminant formé par les composantes de ces trois vecteurs est égal à 0. Ce qui rejoint la condition de compatibilité que l'on voyait avant pour les systèmes. Alors, ce déterminant, comment l'écrit-on ? Ben, le vecteur $\overrightarrow{AP}$, il est de composantes $x-x_A$, $y-y_A$, $z-z_A$. Les composantes de $\overrightarrow{u}$, u_1, u_2, u_3. Les composantes de $\overrightarrow{v}$, v_1, v_2, v_3.

L'enseignant montre dans le déterminant l'endroit où se placent ces composantes au fur et à mesure.

P_5 : Et donc, en écrivant ce déterminant-là égal à zéro, on obtient directement une équation du plan comme on l'a définie tout à l'heure. Ça va ? Alors, on a vu justement les calculs des déterminants en projet math et donc on va pouvoir appliquer ça directement. Quand on développe le déterminant, qui correspond à la condition de compatibilité de la réduction du système paramétrique, on obtient une équation du plan de la forme $ax+by+cz+d=0$.

L'enseignant P_5 rappelle aux élèves qu'ils ont déjà étudié plusieurs types de systèmes d'équations linéaires et revient sur la condition de compatibilité des systèmes. Celle-ci fait appel à la notion de rang d'un système d'équations. Puisque cette condition n'est pas rappelée par l'enseignant et que la notion de rang n'est pas au programme de l'enseignement secondaire, nous nous demandons si les élèves ont vraiment vu cette condition. Ainsi, au vu de notre étude des programmes scolaires et des activités des élèves pendant et après ce moment d'exposition des connaissances, nous pensons qu'il s'agit pour l'enseignant d'expliquer comment obtenir une formule et que la seule activité attendue des élèves est le calcul des déterminants. Les commentaires ajoutés par l'enseignant ne sont pas, selon nous, dans la ZPD des élèves. Il s'agit d'une proximité ratée. L'enseignant essaie ensuite de relier ce que les élèves ont déjà vu pour les équations vectorielles à ce qu'il est en train d'expliquer. Toutefois, il n'explique pas pourquoi le déterminant doit être nul et n'effectue aucun calcul. Ainsi, bien que des commentaires soient ajoutés par cet enseignant, il reste beaucoup d'implicite dans son discours. Cela peut s'expliquer par le fait que cette forme d'équations cartésiennes amène à utiliser beaucoup de connaissances que les élèves n'ont pas encore étudiées. Il se peut alors que les élèves ne retiennent que la « recette à suivre » pour changer de points de vue.

►► Résultats généraux

Nous venons de présenter nos analyses des déroulements et des interventions des enseignants pour les équations cartésiennes de droites particulières dans l'espace et pour le passage du point de vue paramétrique au point de vue cartésien pour les plans. Nous

allons ici donner les résultats de notre analyse des déroulements pour l'ensemble des moments d'exposition des connaissances. Les résultats sont assez similaires entre les enseignants. Nous les présentons donc de manière globale et précisons quand des différences importantes se marquent.

Notre analyse *a priori* des cinq scénarios a mis en évidence que les jeux de cadres proposés sont ponctuels, à sens unique et principalement de la géométrie vectorielle vers la géométrie analytique. La géométrie synthétique n'apparait qu'à certains points charnières comme l'introduction des équations et des positions relatives des objets entre eux. Nous avons également pointé que les conversions entre les registres sont souvent peu explicitées et laissées à la charge des élèves. De plus, les traitements algébriques ne sont quasiment jamais justifiés. Dans ce contexte, nous avons repéré de nombreuses occasions de proximités horizontales. En ce qui concerne les points de vue, nous avons montré que leur articulation est peu travaillée dans les scénarios. En effet, peu de changements de points de vue sont à effectuer et quand c'est le cas, il s'agit essentiellement de passer du point paramétrique au point de vue cartésien. Cette articulation amène à exploiter de nombreuses connaissances antérieures des élèves en géométrie vectorielle et/ou sur les déterminants. Or, celles-ci ne sont jamais explicitées, ce qui offrirait des occasions de proximités horizontales. Nous avons aussi repéré dans certains scénarios que ce changement de points de vue n'est effectué pour les plans que sur un exemple. Selon que le cas général soit abordé avant ou après cet exemple, des occasions de proximités descendantes ou ascendantes sont possibles. Finalement, nous avons relevé que l'interprétation géométrique n'est travaillée que pour les équations cartésiennes de droites particulières. En effet, c'est le seul moment dans le cours pour lequel la reconnaissance et la description des objets peuvent être développées. Or, les liens entre les équations cartésiennes et les objets qu'elles décrivent ne sont jamais explicités offrant ainsi la possibilité aux enseignants d'ajouter des commentaires méta, voire des proximités horizontales, dans leur discours. Dans la majorité des scénarios, la description des objets par des équations (de tous points de vue) est l'objectif principal. Il s'agit rarement de reconnaître les objets que ce soit à partir d'équations ou d'ensembles. Nous avons donc déduit de nos analyses *a priori* des moments de cours que les traitements internes et l'interprétation géométrique ne sont que peu développées par les enseignants. Nous comparons maintenant les résultats de cette analyse avec ceux de notre étude des déroulements effectifs en classe.

L'analyse des déroulements pour les moments d'exposition des connaissances a apporté quelques résultats différents. Nous avons montré, notamment pour les équations de droites particulières, que les jeux de cadres sont plus nombreux et variés en classe. En effet, le cadre de la géométrie synthétique intervient à plusieurs endroits et des changements de cadres avec la géométrie vectorielle et la géométrie analytique apparaissent. Des explications quant aux traitements algébriques et aux conversions entre les registres sont majoritairement données par les enseignants en classe sans que les élèves ne le demandent. La majorité des proximités horizontales que nous avons repérées a été tentée par les enseignants. Nous avons aussi relevé que certains occasions de proximités horizontales ont été manquées par les enseignants comme, par exemple, l'enseignant P_2 qui ne rappelle pas comment calculer un déterminant. Les enseignants tentent aussi des

proximités horizontales que nous n'avions pas repérées dans notre analyse *a priori*. C'est par exemple le cas de l'enseignant P_3 lorsqu'il s'appuie sur l'équation cartésienne $x = 2$, représentant une droite dans le plan, pour expliquer que l'ordonnée peut valoir n'importe quelle valeur. L'analyse des déroulements permet également de dire que les changements de points de vue ont été effectués par la majorité des enseignants à la fois pour les droites et pour les plans, mais toujours dans le sens paramétrique vers cartésien. Les méthodes pour ce changement de points de vue pour les plans se limitent à éliminer les paramètres sur un exemple ou calculer un déterminant. La méthode choisie par trois enseignants consiste à demander aux élèves de déterminer sur un exemple une équation paramétrique d'un plan et d'éliminer les deux paramètres. Une fois qu'une équation cartésienne de ce plan a été trouvée, la forme générale est introduite. Cette méthode amène une occasion de proximité descendante lors de la particularisation de l'équation paramétrique à l'exemple. Il y a aussi une occasion de proximité ascendante lors de la généralisation de l'équation cartésienne déterminée dans l'exemple. Cependant, ces occasions sont manquées par la plupart des enseignants. En effet, ils n'expliquent pas comment passer du général au particulier ou du particulier au général comme si cela allait de soi pour tous les élèves. La deuxième méthode est uniquement proposée par les enseignants experts. Pour ces deux enseignants, la théorie des déterminants a été introduite au sein du cours ou au sein d'un cours de mathématiques supplémentaire lors de l'étude des systèmes d'équations linéaires. De ce fait, ils ajoutent beaucoup de commentaires méta dans leur discours pour ce point précis. Certains de ces commentaires concernent par exemple la notion de rang. Ainsi, bien que cette notion ne soit pas encore formalisable à cette étape de l'enseignement, il semble que certains de ses aspects (générateur, dual) soient présents dans le discours des enseignants. Pour l'enseignant P_2, ils ont apparemment été abordés pour l'étude des systèmes d'équations linéaires. Les commentaires qu'il fournit nous semblent être dans la ZPD des élèves. Cet enseignant tente donc des proximités horizontales que nous n'avions pas prévues *a priori*. Par contre, les commentaires méta de l'enseignant P_5 sur ces aspects ne semblent pas être dans la ZPD des élèves. Ainsi, le travail effectué dans le chapitre des systèmes linéaires influence la qualité des rapprochements proposés par les enseignants en classe.

Bien que les équations de droites soient étudiées avant les équations de plans, la majorité des enseignants donne une interprétation géométrique des équations cartésiennes de droites particulières. L'objectif principal des cours est de décrire les droites par des équations cartésiennes. Les enseignants travaillent cet aspect en proposant de passer du point de vue paramétrique au point de vue cartésien. Les calculs sont généralement écrits au tableau par les enseignants mais les explications correspondantes sont uniquement données oralement. L'enseignant P_3 n'effectue pas ce changement de points de vue mais donne oralement de nombreux commentaires méta pour expliciter les jeux de cadres entre les géométries synthétique, vectorielle et analytique. La reconnaissance de l'objet droite à partir des équations est travaillée par trois enseignants. Ils ajoutent dans leur discours des commentaires méta, parfois accompagnés de gestes, pour amener les élèves à associer les équations données à la position de la droite. Ainsi, un travail sur les deux aspects de l'interprétation géométrique est proposé par trois enseignants sur les cinq. Toutefois, celui-ci se limite aux équations cartésiennes de droites particulières.

Seul l'enseignant P_5 relie la forme canonique des équations cartésiennes de droites à la forme générale afin de décrire une droite comme l'intersection de deux plans. De ce fait, cet enseignant travaille le premier aspect de l'interprétation géométrique pour les équations cartésiennes de droites (non particulières). L'analyse générale des déroulements des moments de cours - en dehors des équations particulières de droites - a montré que seul le deuxième aspect de l'interprétation géométrique est en jeu pour les équations. À aucun moment une interprétation géométrique des objets à partir d'ensemble n'est proposée. Nous avons également pointé le fait que les enseignants les plus expérimentés (les non débutants) apportent plus de commentaires dans leur discours que les autres. De ce fait, l'expérience de l'enseignant semble avoir un impact sur son discours et, en particulier, sur la prise en compte de l'interprétation géométrique des équations. Nous avons aussi mis en évidence que les explications données sur les traitements algébriques, sur les conversions entre les registres et sur la reconnaissance des objets ne sont jamais écrites. Or, les élèves ne prennent note que de ce qui est écrit, jamais de ce qui est oral. De ce fait, il reste peu de traces dans le cours des élèves des changements de cadres effectués, des explications données et de l'interprétation géométrique réalisée. Ainsi, bien que certains implicites relevés dans notre analyse *a priori* soient levés par les enseignants en classe, nous nous demandons si cela a un impact sur les apprentissages des élèves. Nous analysons donc les tâches qui ont été effectivement résolues en classe pour répondre à cette question.

3.3 L'analyse *a posteriori* des tâches

L'analyse *a priori* des tâches nous a amené à déterminer les activités attendues des élèves pour chacun des scénarios. Nous étudions ici le déroulement des tâches qui ont été réalisées en classe. Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre VI, nous cherchons à déterminer toutes les variables dans les pratiques enseignantes qui peuvent influencer les activités des élèves. Nous précisons alors pour chaque tâche prescrite les conditions de travail organisées par l'enseignant en classe ainsi que la nature des échanges entre l'enseignant et les élèves. Nous pouvons ensuite comparer les activités attendues des élèves aux activités potentiellement développées.

Dans l'analyse *a priori* des tâches, nous avons montré que la plupart des tâches relèvent du niveau de mise en fonctionnement mobilisable. Dans ces tâches, l'organisation des raisonnements doit souvent être découpée et une reconnaissance des modalités d'application des différentes équations est nécessaire. Certains traitements internes sont également attendus. En particulier, nous avons repéré des jeux de cadres entre la géométrie vectorielle et la géométrie analytique et des conversions entre les registres de la langue naturelle, algébrique et éventuellement ensembliste. Quelques tâches demandent de changer de points de vue mais uniquement dans le sens paramétrique/cartésien. Nous avons observé que seul l'enseignant P_2 propose des tâches dans lesquelles les outils et les démarches des géométries synthétique et analytique peuvent être comparés. Nous avons aussi constaté que les enseignants experts proposent quelques tâches travaillant l'articulation des points de vue dans le sens cartésien/paramétrique. Ainsi, bien que des traitements internes soient attendus des élèves, il se peut que la flexibilité entre les cadres

géométriques (synthétique, vectoriel, analytique) et les points de vue (cartésien, paramétrique) ne soit pas suffisamment développée par les élèves. Nous avons également repéré que l'interprétation géométrique des objets n'est presque jamais demandée dans ces tâches. Il s'agit principalement de décrire les objets par des équations. La réalisation de quelques tâches amène parfois à reconnaître les objets décrits par des ensembles. De ce fait, ni la description des objets par des ensembles, ni la reconnaissance des objets à partir d'équations ne sont développées dans les tâches prescrites.

Un premier résultat de l'analyse des déroulements effectifs concerne les jeux de cadres. Aucun des cinq enseignants ne propose en classe de tâches permettant de comparer les outils et les démarches des géométries synthétique et analytique. En effet, comme nous pouvons le voir dans le tableau VIII.4, l'enseignant P_2 ne travaille pas les tâches du manuel *CQFD* le permettant. Ainsi, les tâches résolues en classe demandent, au mieux, de passer du cadre de la géométrie analytique au cadre de la géométrie vectorielle, ou réciproquement. Les connaissances de géométrie synthétique n'interviennent alors que dans les moments de cours et seulement à des instants particuliers.

Un second résultat concerne les points de vue. Peu des tâches choisies par les enseignants demandent un changement de points de vue, et ce, dans n'importe quel sens. Le tableau VIII.15 indique le nombre de tâches réalisées en classe par chaque enseignant. Parmi celles-ci, nous précisons combien d'entre elles demandent un changement de points de vue dans le sens paramétrique/cartésien ou dans le sens cartésien/paramétrique.

	$\mathbf{P}_1$	$\mathbf{P}_2$	$\mathbf{P}_3$	$\mathbf{P}_4$	$\mathbf{P}_5$
Nombre de tâches proposées en classe	50	20	35	53	41
paramétrique/cartésien	1	7	7	5	4
cartésien/paramétrique	0	0	0	0	3

TABLE VIII.15 – Nombre de tâches demandant une articulation des points de vue.

La proportion des tâches demandant un changement de points de vue est plus importante pour l'enseignant P_2 que pour les autres. Seul l'enseignant P_5 propose des tâches articulant les points de vue dans les deux sens. Nous présentons, ici, l'analyse *a posteriori* d'une tâche pour les enseignants P_2 et P_5 articulant les points de vue.

Exercice 3 de P_2

Déterminer les équations paramétriques et cartésiennes du plan passant par $A(1,3,7)$, $B(5,2,1)$, $C(7,8,9)$.

Pour cette tâche, il s'agit de choisir deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan et d'écrire une équation paramétrique de celui-ci. Au vu du travail qui a été réalisé en classe, une équation cartésienne sous la forme d'un déterminant peut être écrite. Il reste à calculer un déterminant avec la méthode de Sarrus ou la méthode des cofacteurs. Ainsi, des connaissances anciennes (déterminant, composantes d'un vecteur) et nouvelles (équations paramétriques et cartésiennes de plans) sont en jeu. Un changement

de points de vue dans le sens paramétrique/cartésien et un changement de cadres entre la géométrie vectorielle et la géométrie analytique sont à effectuer. L'analyse *a posteriori* de cette tâche est donnée dans le tableau VIII.16.

Durée	Nature du travail	Interventions de P_2	Activités des E
25”	Lecture de l’énoncé	P lit l’énoncé. P écrit les trois points au tableau.	Les E écoutent et recopient.
11’15”	Correction collective	P écrit sous la dictée un système d’équations paramétriques.	Un E dicte la réponse. Les autres recopient.
		P demande quels sont les vecteurs directeurs choisis.	L’E répond correctement.
		P explique qu’on peut prendre n’importe quels vecteurs formés par les points donnés.	Les E écoutent.
		P dit qu’il y a deux méthodes pour changer de points de vue.	Un E propose l’élimination des paramètres.
		P demande quelle est la deuxième méthode.	Un E propose les déterminants.
		P impose la deuxième méthode et écrit sous la dictée le déterminant.	Plusieurs E donnent le déterminant. Les E recopient.
		P demande comment calculer le déterminant.	Un E propose Sarrus. Un autre E propose les cofacteurs.
		P impose Sarrus et rappelle la méthode.	Les E écoutent.
		P écrit le calcul au tableau et le développe jusqu’à obtenir une équation cartésienne.	Les E recopient.

TABLE VIII.16 – Déroulement pour une tâche de l’enseignant P_2.

Nous présentons les transcriptions des interventions de l'enseignant concernant le changement de points de vue.

P_2 : On a le système d'équations paramétriques. Et, maintenant, si on veut une équation cartésienne, si on veut la connaitre tout de suite, il y a deux façons de faire. La première, si vous avez uniquement ceci, qu'est-ce que vous auriez envie de faire ?

E_1 : Si on avait uniquement quoi ?

P_2 : Donc on a ceci et on veut une équation cartésienne. Une équation cartésienne est de la forme $ax+by+cz+d=0$. Qu'est-ce qu'on aurait envie de faire ?

E_1 : Ben, on va isoler λ.

P_2 : Isoler λ et puis ?

E_1 : Isoler μ

P_2 : On va essayer d'isoler μ, remplacer ici et on va avoir ... Donc, ça, c'est une première manière. Seconde manière, qu'on a vue la fois dernière ?

E_2 : Les matrices.

P_2 : Pas les matrices, mais ?

E_3 : Déterminants

P_2 : Les déterminants. Donc, voilà, les deux méthodes, ici, vont bien fonctionner. Quand on est à l'aise avec les déterminants, moi je pense, mais c'est ce que moi je préfère, vous vous le faites comme vous le sentez. Je pense qu'on fait moins de faute avec le déterminant parce qu'il y a moins de substitution. C'est un calcul et puis c'est tout. Ici, il faut substituer, ne pas se tromper dans une série de choses. Notez que le déterminant, faut pas se tromper non plus quand on calcule avec les moins. Voilà. Donc, euh, je suggère, un peu parce que j'aime bien, mais je suggère qu'on utilise les déterminants parce que vous l'avez jamais fait. Tandis que, substituer donc, essayer d'isoler λ, d'isoler μ et de le remplacer, ça c'est le genre de choses que vous avez déjà faites l'an passé, je pense. Donc le déterminant. Si on prend le déterminant. C'est d a pour équation. Qu'est-ce qu'on peut mettre en première colonne ?

E_2 : $x-1$

P_2 : $x-1$

E_2 : $y-3$

P_2 : $y-3$

E_2 : $z-7$

P_2 : $z-7$. Deuxième colonne ?

E_3 : 4, -1, -6

P_2 : Troisième colonne ?

E_2 : 6, 5, 2

E_4 : C'est pas α ?

P_2 : C'est le déterminant. Ah, attendez c'est pas une droite, c'est un plan. On va mettre *ABC*. Voilà. Donc le plan *ABC* a pour équation le déterminant égal zéro. Maintenant, il n'y a plus qu'à calculer le déterminant.

L'enseignant ne laisse pas de temps de recherche pour cette tâche. Son discours consiste à interroger les élèves sur les méthodes qui peuvent être utilisées et à ajouter des précisions qui n'avaient pas été données auparavant. Le changement de points de vue est bien effectué. L'enseignant revient sur les différentes méthodes pour changer de points de vue et pour calculer un déterminant, mais il ne laisse pas le choix de la méthode aux élèves. Une fois le raisonnement établi oralement, l'enseignant se charge d'écrire les calculs au tableau. *A minima*, un élève qui ne s'implique pas dans la correction collective recopie la solution algébrique écrite au tableau. *A maxima*, les élèves ayant répondu aux questions de l'enseignant ont pu mettre en jeu des connaissances nouvelles (équations paramétriques de plan), des connaissances anciennes (méthode de calcul des déterminants) et ont pu passer du cadre de la géométrie vectorielle au cadre de la géométrie analytique. L'enseignant organise lui-même le raisonnement à suivre et impose la méthode pour calculer le déterminant. Il prend également totalement à sa charge le calcul du déterminant par la méthode de Sarrus. L'articulation des points de vue dans le sens paramétrique/cartésien est effectuée par l'enseignant et n'est donc pas à la charge des élèves. Les activités des élèves sont donc minorées par rapport à celles qui ont été prévues *a priori*.

Exercice 4 de P_5

Écris des équations paramétriques des droites suivantes :

$d_1 \equiv \frac{2-x}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{3z-1}{2}$ $\quad d_2 \equiv \begin{cases} \frac{x-8}{2} = z-2 \\ y = 3 \end{cases}$.

Deux méthodes sont possibles pour résoudre cette tâche. La première consiste à déterminer un vecteur directeur et un point de chaque droite à partir du point de vue cartésien et d'écrire directement une équation paramétrique. La deuxième méthode est d'introduire un paramètre et d'exprimer les inconnues en fonction de ce paramètre. Un changement de points de vue dans le sens cartésien/paramétrique a bien lieu. Le travail s'effectue dans le registre algébrique et met en jeu des connaissances nouvelles. L'analyse *a posteriori* de cette tâche est donnée dans le tableau VIII.17.

Durée	Nature du travail	Interventions de P_5	Activités des E
12”	Lecture de l’énoncé	P lit l’énoncé et écrit le système d’équations cartésiennes au tableau.	Les E recopient.
5’	Correction collective pour d_1	P demande la démarche à suivre.	Un E propose d’isoler les inconnues. Un autre E propose de séparer les membres et puis d’isoler les inconnues. Un E propose d’insérer un paramètre k.
		P écoute les propositions et n’en valide qu’une. Il demande la démarche pour introduire le paramètre.	Un E répond correctement.
		P valide et revient sur la méthode utilisée pour passer du point de vue paramétrique au point de vue cartésien. Il explique la méthode pour le passage réciproque.	Les E écoutent.
		P écrit au tableau le système d’équations paramétriques en collaboration avec les élèves.	Quelques E dictent les équations. Les E recopient.
		P demande un vecteur directeur et un point de la droite d_1.	Un E donne correctement un vecteur directeur. Un autre E donne correctement un point.
		P écrit au tableau le vecteur directeur et le point donnés.	Les E recopient.
3’	Correction collective pour d_2	P écrit le système au tableau.	Les E recopient.
		P demande la démarche.	Un E dit qu’il y a une équation où le paramètre $k = 0$.
		P précise que c’est le coefficient devant le paramètre qui est nul et non le paramètre. P explique que la coordonnée en y est fixée et donc que la deuxième composante du vecteur directeur de la droite est nulle.	Les E écoutent.
		P écrit au tableau les deux équations où il insère le paramètre.	Les E recopient.
		P sollicite des E pour donner les équations paramétriques.	Les E sollicités répondent correctement. Les E recopient.

TABLE VIII.17 – Déroulement pour une tâche de l’enseignant P_5.

Nous présentons les transcriptions des interventions de l'enseignant pour le changement de points de vue de la droite d_1.

P_5 : Alors, ici, c'est le contraire. On a des équations cartésiennes et on veut des équations paramétriques. Qui peut me dire ce qu'il faut faire ?

E_3 : Ben, on isole x, y et z.

P_5 : On isole ? De quoi dont ?

E_1 : On prend chaque membre séparément et à chaque fois on isole x, y et z.

P_5 : Attendez ! On prend chaque membre ?

E_1 : On veut pas isoler x dans tout mais dans $2-x$ sur 3.

P_5 : Isoler x dans $2-x$ sur 3 ?

E_1 : Faire réapparaitre k.

P_5 : Ah ! Faire réapparaitre k. Ça c'est une bonne idée. Effectivement dans les équations paramétriques, on a besoin de faire réapparaitre le paramètre k. Et comment va-t-on faire pour faire réapparaitre k ?

E_1 : On met $k=$ devant.

P_5 : On met $k=$ devant. Si je peux le mettre devant, je peux le mettre derrière. Alors, le k où est-ce qu'il a disparu justement puisque vous voulez le faire réapparaitre ? Comment a-t-il disparu le k ?

E_1 : Ben, dans le $=$.

E_3 : Ils sont tous égal à k.

P_5 : Voilà. Donc quand dans les équations paramétriques pour passer aux équations cartésiennes, on isole k dans chacune des équations et puis on fait disparaitre le k en égalant les trois quantités. Ici, on a l'égalité entre les trois quantités qui est aussi égale à k. Et donc, ici, c'est le contraire. On a $x-2$ sur 3 égal à k, où k est notre paramètre réel, et pour chacune maintenant, on fait réapparaitre $x=$.

L'enseignant ne laisse pas de temps de recherche pour cette tâche. Une méthode a été proposée par les élèves et met bien en jeu un changement de points de vue dans le sens cartésien/paramétrique comme le suggérait notre analyse *a priori*. Le discours de l'enseignant consiste surtout à interroger les élèves sur la méthode pour passer du point de vue paramétrique au point de vue cartésien afin de les amener à déduire la méthode pour le passage réciproque. Ces commentaires sont des aides constructives. L'enseignant ne dit pas aux élèves ce qu'ils doivent faire. *A minima*, un élève qui ne participe pas à cette correction collective recopie la solution algébrique écrite au tableau. *A maxima*, un élève ayant proposé cette méthode a pu reconnaître les modalités d'application des équations cartésiennes de droites et organiser son raisonnement pour fournir une méthode correcte. Celle-ci se base essentiellement sur les connaissances nouvelles quant au changement de points de vue dans le sens paramétrique/cartésien. Les activités possibles des élèves correspondent bien à ce qui a été prévu *a priori*.

Un troisième résultat concerne l'interprétation géométrique. La reconnaissance des objets à partir des équations n'est effectivement que peu travaillée en classe alors que celle à partir des ensembles des solutions d'un système d'équations linéaires apparaît bien. Le tableau VIII.18 indique le nombre de tâches demandant de reconnaître les objets que ce soit à partir d'équations ou d'ensembles.

	$\mathbf{P}_1$	$\mathbf{P}_2$	$\mathbf{P}_3$	$\mathbf{P}_4$	$\mathbf{P}_5$
Nombre de tâches proposées en classe	50	20	35	53	41
Reconnaissance des objets	3	3	2	4	8

TABLE VIII.18 – Nombre de tâches demandant une interprétation géométrique.

Peu des tâches prescrites amènent à reconnaître les objets géométriques. Il s'agit principalement dans celles-ci de déterminer la position relative occupée par deux objets en les reconnaissant soit à partir de leurs équations, soit à partir de l'ensemble des solutions du système constitué de leurs équations. Nous analysons le déroulement effectif d'une tâche pour les enseignants P_4 et P_5.

Exercice 41 de P_4

Trouve la coordonnée du point de percée de la droite d dans le plan α :

① $\alpha \equiv 3x+2y-z+1=0$ et $d \equiv x+1=y+3=4-z$.

② $\alpha \equiv -3x+2y-z+1=0$ et $d \equiv x+1=y+3=4-z$.

③ $\alpha \equiv 3x+2y-z+7=0$ et $d \equiv x+1=y+3=4-z$.

Au vu du travail réalisé en classe par ces deux enseignants, un système de trois équations à trois inconnues doit être résolu pour déterminer le point de percée de la droite dans le plan. Des connaissances anciennes (résolution des systèmes) et en cours d'acquisition (équations cartésiennes) sont en jeu. Des conversions de registres sont nécessaires entre la langue naturelle et l'algébrique et entre l'algébrique et l'ensembliste. À aucun moment il n'est demandé de reconnaître les objets décrits par les équations données ou par l'ensemble des solutions du système. L'analyse *a posteriori* de ces tâches est donnée dans les tableaux VIII.19 et VIII.20.

Durée	Nature du travail	Interventions de P_4	Activités des E
1'30"	Rappel : point de percée	P demande la définition d'un point de percée.	Un E répond correctement.
		P demande si le point de percée existe toujours.	Un E répond correctement.
		P rappelle les positions relatives d'une droite et d'un plan. Pour chaque cas, il demande s'il y a un point de percée.	Les E répondent correctement.
9'40"	Correction collective 1	P demande à quels objets appartient le point de percée.	Un E répond correctement.
		P demande une démarche pour déterminer un point de percée.	Un E propose de trouver un point de la droite et de vérifier s'il appartient au plan. Un autre E propose de chercher la position relative des deux objets.
		P invalide et amène l'idée qu'il faut résoudre un système.	Les E écoutent.
		P explique la démarche qu'ils vont suivre : trouver une éq. param. de la droite et remplacer les inconnues par les valeurs trouvées dans l'équation cartésienne du plan.	Les E écoutent.
		P demande un point et un vecteur directeur de la droite.	Un E confond un point et un vecteur directeur de la droite. Deux E répondent correctement.
		P écrit au tableau une éq. param. de la droite sous la dictée.	Un E dicte. Les E recopient.
		P revient sur la forme d'une équation paramétrique.	Un E pose une question.
		P explique comment éliminer le paramètre.	Les E écoutent.
		P écrit sous la dictée l'équation du premier degré obtenue.	Un E dicte. Les E recopient.
		P réexplique la démarche.	Un E pose une question.
		P écrit au tableau sous la dictée la résolution de l'équation.	Des E dictent. Les E recopient.
		P demande ce qu'il faut faire une fois la valeur du paramètre trouvée.	Un E répond correctement.
		P valide et écrit les coordonnées du point de percée au tableau.	Les E recopient.

TABLE VIII.19 – Déroulement pour une tâche de l'enseignant P_4.

Durée	Nature du travail	Interventions de P_4	Activités des E
3'40"	Correction collective 2	P fait remarquer aux E qu'il s'agit de la même droite. P recopie l'éq. param. de la droite donnée au 1.	Les E écoutent et recopient.
		P demande la démarche.	Un E répond correctement.
		P écrit sous la dictée l'équation du premier degré obtenue.	Un E dicte. Les E recopient.
		P écrit sous la dictée la résolution de l'équation.	Un E dicte. Les E recopient.
		P demande ce qu'il faut déduire de l'équation impossible trouvée.	Un E répond correctement.
		P écrit au tableau la position relative de la droite et du plan.	Les E recopient.
6'	Correction collective 3	P demande la démarche.	Un E répond correctement.
		P valide et écrit l'éq. param. de la droite donnée au 1.	Les E recopient.
		P demande la démarche à suivre.	Un E répond correctement.
		P écrit sous la dictée l'équation du premier degré obtenue.	Un E dicte. Les E recopient.
		P écrit la résolution de cette équation. P demande le type de cette équation. P reformule et demande si l'équation est parfois vraie, toujours vraie, jamais vraie.	Un E répond correctement.
		P demande ce qu'il faut déduire de l'équation toujours vraie trouvée.	Les E ne répondent pas.
		P donne la position relative de la droite et du plan.	Les E écoutent.
		P écrit au tableau la position relative.	Les E recopient.

TABLE VIII.20 – Déroulement (suite) pour une tâche de l'enseignant P_4.

Nous présentons la transcription des interventions de l'enseignant pour le début de la résolution de l'exercice et lors de la conclusion des trois tâches.

P_4 : Alors, c'est quoi un point de percée ?

E_1 : C'est un point qui traverse tous les plans ...

E_3 : C'est quand une droite traverse un plan, c'est le point où la droite traverse le plan.

P_4 : Oui, c'est ça. C'est le point d'intersection entre ma droite et mon plan. Donc, là, ça c'est mon point de percée.

L'enseignant prend une feuille pour le plan, un bic pour la droite et montre le point d'intersection de la droite dans le plan.

P_4 : Alors, on a vu l'année dernière comment construire le point de percée, mais c'était visuel. Ici, on passe à l'analytique. Donc à partir des équations des droites et des plans comment je fais pour déterminer facilement les coordonnées de mon point de percée. Alors, déjà, si j'ai une droite et un plan, est-ce que j'aurais forcément un point de percée ?

E_2 : Non.

P_4 : Ben, non. Il faut que quoi ?

E_2 : Qu'ils soient sécants.

P_4 : Il faut qu'ils soient sécants. D'accord ? Ça veut dire quoi ? Ça veut dire que si ils sont ...

E_3 : parallèles distincts, il n'y a pas de point.

P_4 : Est-ce vraiment c'est le seul cas être sécant ? Si c'est parallèles confondus, ça serait quoi mes points de percée ?

E_3 : Toute la droite.

E_1 : Une infinité.

P_4 : Tous les points de ma droite. D'accord ? Donc, en fait, ici, il faut quand même être un tout petit peu vigilant avec ce que l'on a. Alors, on va faire le premier ensemble. Alors, on reprend ce qu'on a dit. On va vraiment se placer dans le cas, pour illustrer, où la droite est sécante à mon plan. Alors, le point qui est à l'intersection de ma droite et de mon plan, il appartient à qui ce point-là ?

E_1 : Au plan et à la droite.

P_4 : Au plan et à la droite. D'accord ? Donc, ça, c'est le point de percée. Il appartient à la fois à la droite et au plan. Donc, comment je peux faire pour déterminer le point de percée si j'ai l'équation de mon plan et de ma droite. Qu'est-ce qu'on va faire à votre avis ?

E_1 : On vérifie qu'un point de la droite appartient au plan.

P_4 : Alors, là, ça peut durer vraiment longtemps !

E_3 : On va regarder s'ils sont orthogonaux ou pas.

P_4 : J'ai pas envie de d'abord étudier la position relative parce qu'en fait en recherchant le point de percée, on va pouvoir répondre à cette question-là directement.

E_3 : Il n'y a pas d'autres moyens de prouver ...

P_4 : Alors, je reprends ce que je vous dis. Ce point, qui est le point de percée de ma droite dans mon plan, je sais qu'il appartient à la fois à mon plan et à ma droite. Cela signifie que c'est un point qui vérifie l'équation de mon plan et qui vérifie l'équation de ma droite.

E_3 : l'équation du plan égale à l'équation de ma droite.

P_4 : Pas égal. Il faut que ces équations soient vérifiées en même temps. Donc je devrais écrire un système. Ça va ? Vous suivez ou pas ce que je viens de dire là ? Alors, je vais me retrouver avec un système où j'ai l'équation de mon plan, cette première égalité, cette deuxième égalité.

L'enseignant montre les deux équations cartésiennes de la droite lorsqu'elle est donnée sous forme canonique.

P_4 : Moi, je vais pas le résoudre de cette façon-là. Je vais essayer d'avoir une méthode qui est plus rapide. Sachez qu'on peut le faire comme ça, mais le but ici c'est que je vous montre une méthode qui soit un tout petit peu plus rapide. Et pour ça, je vais essayer d'écrire la droite d sous sa forme paramétrique. Pourquoi ? Sous forme paramétrique, vous avez x, y, z qui va dépendre d'un paramètre. Comme les deux équations doivent être vérifiées en même temps, vous allez pouvoir remplacer x ici, y de la paramètrique là et z de la paramétrique là.

L'enseignant montre l'équation cartésienne du plan qui est notée au tableau.

P_4 : Vous allez donc avoir une équation où la seule inconnue sera mon paramètre.

Dans cet extrait, l'enseignant ajoute beaucoup de commentaires dans son discours. Certains d'entre eux sont des aides constructives. C'est le cas lorsqu'il rappelle ce qu'est un point de percée et qu'il dit que les élèves en ont déjà construit synthétiquement. D'autres commentaires méta servent à dire aux élèves ce qu'il faut faire. En effet, l'enseignant aide les élèves en explicitant complètement la démarche qu'ils vont devoir suivre dans l'exercice. Ces commentaires minorent le travail à effectuer par les élèves. Ce sont donc des aides procédurales directes puisque la méthode est donnée directement par l'enseignant.

Pour la première tâche, la valeur de k est donnée et il vaut 2. La conclusion proposée est donnée dans l'extrait suivant :

P_4 : En quoi trouver, ici, la valeur de k peut m'aider à trouver les coordonnées du point de percée ?

E_2 : On va remplacer.

P_4 : On va remplacer k ici et donc je vais trouver une valeur pour x, une valeur pour y, une valeur pour z. Ça va me donner quoi les valeurs de x, y, z ?

E_2 : Les coordonnées du point.

P_4 : Oui.

L'enseignant explicite la démarche pour trouver les coordonnées du point de percée. Ces commentaites sont des aides procédurales indirectes. En effet, il guide énormément les élèves en leur posant des questions très dirigées et contenant parfois la réponse. Puisqu'il ne revient à aucun moment sur les objets de départ et sur leur position relative, nous déduisons que la reconnaissance des objets n'est pas du tout travaillée. Notons également qu'il rejette même dans l'extrait précédent la méthode qui consiste à étudier les équations pour déterminer la position relative des objets.

Pour la deuxième tâche, l'équation obtenue est $0k - 6 = 0$. La conclusion de cette tâche est donnée dans l'extrait suivant :

P_4 : Alors, vous pouvez dire quoi quand vous voyez ça ?

E_3 : Il n'y a pas de valeur de k.

P_4 : C'est une équation qui est donc ?

E_3 : Impossible

P_4 : Donc, si je ne trouve aucune valeur de k, ça veut dire quoi ?

E_3 : Y a pas de point de percée.

P_4 : Il n'y a pas de point de percée. Et donc quoi ?

E_2 : Parallèle

P_4 : Elles sont strictement parallèles. Donc, ça, ça veut dire quoi ? Ça veut dire que d est strictement parallèle à mon α et donc je ne peux pas trouver de point de percée.

Le discours de l'enseignant consiste à amener les élèves à décrire la position relative du plan et de la droite. Il guide ainsi les élèves à pouvoir reconnaître les objets manipulés et leur position relative en fonction de l'ensemble des solutions du système étudié. Ces commentaires sont des aides procédurales indirectes, voire directes. En effet, il aide les élèves à déterminer à la fois le type de l'équation obtenue et ce qui peut en être déduit. Il donne aussi directement la position relative de la droite et du plan. Au contraire de ce que l'analyse *a priori* a prévu, le registre ensembliste n'intervient pas dans la résolution de cette tâche. Bien que l'ensemble des solutions du système soit caché dans le type de l'équation obtenue, aucun ensemble n'est écrit en classe. De plus, nous avons observé que l'enseignant travaille le premier aspect de l'interprétation géométrique alors que cela n'était pas demandé par l'énoncé. L'enseignant ne revient pas non plus sur les objets donnés initialement pour vérifier que la position relative déterminée par les calculs est correcte d'un point de vue géométrique.

La résolution de la troisième tâche amène à une équation de la forme $0k = 0$. La conclusion pour cette tâche est donnée dans l'extrait suivant :

P_4 : C'est quel type d'équations ça ? Est-ce que c'est parfois vrai, jamais vrai ?

E_2 : Toujours vrai.

P_4 : Toujours vrai peu importe la valeur qu'on va donner à k. Alors, ça veut dire quoi ça ? Ça veut dire que la droite est incluse au plan.

L'enseignant fournit de lui même la position relative de la droite et du plan. Certains commentaires ajoutés sont des aides procédurales indirectes comme lorsqu'il demande le type de l'équation. D'autres commentaires sont des aides procédurales directes comme lorsqu'il précise la position relative des objets. Encore une fois, l'enseignant ne revient pas sur les équations des objets de départ pour vérifier que la conclusion obtenue est correcte. Des écarts apparaissent entre les activités prévues *a priori* et les activités possibles des élèves. En effet, un travail de reconnaissance des objets géométriques à partir des ensembles de solutions est demandé de la part de l'enseignant, bien que ces ensembles ne soient jamais écrits. De plus, un changement de points de vue dans le sens cartésien/paramétrique est ajouté pour les droites. L'enseignant ne laisse pas de temps de recherche aux élèves. Ainsi, *a minima*, les élèves qui ne participent pas à cette correction collective recopient la solution algébrique écrite au tableau. *A maxima*, les élèves ayant participé à cette correction ont dû déterminer un point et un vecteur directeur de la droite (*reconnaissance des modalités d'application*), écrire une équation paramétrique de celle-ci (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*) et résoudre une équation du premier degré à une inconnue (*mise en jeu de connaissances anciennes*). L'enseignant prend à sa charge la conversion entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique puisqu'il dit aux élèves ce qu'ils doivent faire. Il organise lui-même le raisonnement à suivre et impose la démarche de résolution du système. Au vu du travail réalisé dans les moments de cours, nous n'avions pas prévu cette démarche *a priori*. L'enseignant prend à sa charge la reconnaissance des objets décrits par les ensembles de solutions des systèmes (*changement de cadres*) et l'articulation des points de vue dans le sens cartésien/paramétrique pour les droites. Ainsi, bien que les déroulements puissent amener des activités chez les élèves qui n'étaient pas attendues *a priori*, la répétition du travail à effectuer et les aides procédurales apportées par l'enseignant peuvent minorer les activités possibles des élèves. Nous notons que cet enseignant est le seul à déterminer un point de percée pour des objets qui ne sont pas sécants. Ce choix l'amène donc à travailler le premier aspect de l'interprétation géométrique sans que cela ne soit demandé.

Exercice 17a de P_5
Étudie la position relative des plans α, β et γ : $\alpha \equiv x+4z = 3-3y$; $\beta \equiv z+2y = 4-x$; $\gamma \equiv y = 5-x+2z$.

Au vu du travail proposé en classe, il s'agit de résoudre un système de trois équations à trois inconnues. Plusieurs méthodes peuvent être envisagées : substitution, combinaison, échelonnement de matrices. L'objet géométrique décrit par l'ensemble des solutions du système doit être reconnu pour en déduire la position relative des trois plans. Des connaissances anciennes (résolution des systèmes), en cours d'acquisition (équations cartésiennes) et nouvelles (position relative des objets) sont en jeu. Des conversions de registres doivent être effectuées entre les registres de la langue naturelle, algébrique et ensembliste. L'analyse *a posteriori* de cette tâche est donnée dans le tableau VIII.21.

Durée	Nature du travail	Interventions de P_5	Activités des E
30”	Lecture de l'énoncé	P lit l'énoncé. P dit qu'il faut résoudre un système de 3 équations à 3 inconnues.	Les E écoutent.
21’	Correction collective	P écrit le système au tableau.	Les E recopient.
		P explique pourquoi les trois plans ne sont pas parallèles.	Un E dit que les plans ne sont pas confondus. Les E écoutent.
		P demande comment déterminer si la solution du système est unique.	Les E ne répondent pas.
		P écrit au tableau le déterminant associé au système.	Les E recopient.
		P écrit sous la dictée le calcul du déterminant.	Un E dicte. Les E recopient.
		P dit que la solution n'est pas unique, impose et rappelle la méthode de l'échelonnement.	Les E écoutent.
		P guide les E et écrit les étapes de l'échelonnement de la matrice au tableau.	Les E calculent et recopient.
		P dit que le système est simplement indéterminé.	Les E écoutent.
		P rappelle ce qu'est un système simplement indéterminé et dit qu'il faut choisir une valeur quelconque pour z.	Un E pose une question.
		P pose $z = r$ et écrit le système équivalent au premier.	Les E recopient.
		P réexplique la démarche pour trouver x et y en fonction de z ainsi que l'objectif de la question.	Un E pose une question. Les E écoutent.
		P demande de reconnaître l'objet décrit par l'équation paramétrique trouvée.	Un E répond correctement. Les E écoutent.
		P valide et précise que c'est la droite d'intersection des trois plans donnés.	Les E écoutent.
		P écrit l'ensemble des solutions du système.	Les E recopient.
		P explique que cet ensemble décrit bien une droite et revient sur la position relative des trois plans avec des gestes.	Les E écoutent.

TABLE VIII.21 – Déroulement pour une tâche de l'enseignant P_5.

Nous présentons les transcriptions des interventions de l'enseignant pour la lecture de l'énoncé, l'explication du fait que les trois plans ne sont pas parallèles et la reconnaissance des objets à partir des équations et de l'ensemble des solutions du système.

P_5 : Ici, je voudrais regarder ce qu'on peut voir avec les positions de trois plans. Alors, à chaque fois, il faut former, bien entendu, le système. Donc, positions de trois plans ce qui équivaut à résoudre un système de trois équations à trois inconnues.

Cet enseignant a déjà travaillé les positions relatives de deux droites, de deux plans et d'une droite avec un plan. Il s'appuie donc sur le travail déjà réalisé pour amener le fait que la position relative de trois plans s'étudie en résolvant un système d'équations. Cet enseignant dit ce que les élèves doivent faire pour résoudre la tâche. Ce n'est pas à l'élève d'organiser son raisonnement. Ce commentaire constitue alors une aide de type procédurale car la tâche est minorée. L'enseignant veut donc résoudre un système et puis déterminer la position relative des trois plans à partir de l'ensemble des solutions. Pourtant, un élève commence à décrire la position relative des trois plans grâce à l'étude des équations données dès le début de la résolution collective.

E_1 : Déjà ils sont pas confondus.

P_5 : Alors, on peut déjà voir, effectivement, que les coefficients ne sont pas proportionnels. Donc, on aura pas de plans parallèles.

Le discours de l'enseignant consiste à rappeler pourquoi les plans ne sont pas parallèles. Il s'agit donc d'une aide constructive. Cependant, il n'explique pas aux autres élèves l'intérêt de cette réflexion. Il continue ensuite de résoudre le système. Tout comme pour P_4, l'étude des équations des objets avant de se lancer dans des calculs, peut-être inutiles, ne semble pas une méthode acceptée par P_5. L'enseignant ne laisse pas les élèves travailler individuellement. Il résout collectivement le système en imposant la méthode de l'échelonnement de la matrice augmentée associée au système sans justifier ce choix. Voici les transcriptions pour la conclusion de la résolution.

P_5 : Autrement dit, qu'est-ce que je trouve ? Alors, le fait d'avoir ici $0 = 0$ est une indétermination simple. D'accord ? Donc, la troisième ligne donne une indétermination simple.

E_1 : Et, là quand on a ça on doit aussi faire avec r et s ?

P_5 : Ah, alors, ici, comme c'est une indétermination simple, ça veut dire quoi ? Ça veut dire que cette équation-là est vraie quelle que soit la valeur de x, y, z et donc on a le droit de choisir la valeur d'une des inconnues. Ça veut dire que les deux autres vont dépendre de la troisième. Et je vous ai expliqué c'est plus facile, puisque en échelonnant le système on arrive à une indétermination, de choisir la troisième inconnue pour pouvoir remonter dans les équations au fur et à mesure. Celle-ci va nous donner la valeur de z, celle-là va nous donner la valeur de y et celle-là la valeur de x. On choisit arbitrairement la valeur de z en posant $z = r$ et r est un réel. À partir du moment où j'ai z qui vaut r, je remonte dans les équations. La deuxième ligne va me donner $y = -1 - 3r$, d'accord ? J'ai $-y - 3z = 1$ donc j'ai $y = -1 - 3r$. Et

pour la dernière, j'ai x qui vaut le terme indépendant, donc 3, $-3y-4z$. Et comme j'ai y en fonction de z je réinjecte les valeurs ce qui me donne $-13r$. Du coup, ce que je voulais vous montrer c'est que, si je réécris ça, les équations dans l'ordre, qu'est-ce que vous trouvez comme équation ? Ce sont des équations paramétriques d'une droite qui est la droite commune aux trois plans. D'accord ? Alors, on avait pas écrit les solutions comme ça quand on avait vu les systèmes matriciels. Je vous avais dit que l'ensemble des solutions c'est l'ensemble des coordonnées des points qui s'écrivent sous cette forme-là. Donc les triplets qui correspondent aux solutions du système s'écrivent ainsi. Mais, vous voyez, maintenant qu'on a vu les équations de droites et les équations de plans, que ça correspond aux équations paramétriques d'une droite. Donc, ici, on est bien dans le cas où les trois plans se coupent en une droite et on peut en trouver des équations cartésiennes ou paramétriques.

L'enseignant revient sur les connaissances anciennes des élèves sur l'échelonnement des matrices et sur ce que signifie une indétermination simple. Ces commentaires sont des aides constructives car il s'agit de rappels. La reconnaissance d'une droite est travaillée par cet enseignant à partir d'une équation paramétrique et de l'ensemble des solutions du système. Il s'agit ici d'une aide procédurale directe puisque l'enseignant donne directement la solution de la tâche. *A minima*, un élève qui ne participe pas à cette correction collective recopie la solution algébrique écrite au tableau. *A maxima*, un élève ayant participé à la correction a mis en jeu des connaissances anciennes (calcul déterminant, échelonnement matrice) et a reconnu la droite décrite par une équation paramétrique (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). L'enseignant organise le raisonnement à suivre pour la réalisation de cette tâche. Il choisit de lui-même la démarche à mettre en œuvre et prend à sa charge les conversions entre les registres (langue naturelle, algébrique, ensembliste). Il décrit également la position relative des trois plans. Les activités possibles des élèves sont minorées par rapport à ce qui a été prévu *a priori*.

L'analyse *a posteriori* des tâches a mis en évidence plusieurs résultats. Tous les enseignants choisissent de ne pas laisser de temps de recherche pour la majorité des tâches réalisées en classe. Ce choix pour les conditions de travail influence fortement, comme nous l'avons montré ici, les activités possibles des élèves. En effet, lors de la recherche collective les enseignants ont tendance à prendre à leur charge énormément d'adaptation des connaissances. Ils disent d'emblée aux élèves ce qui est à faire, organisent les raisonnements et imposent les méthodes de résolution. Ils réalisent en règle général eux-mêmes les conversions de registres, les changements de cadres et les changements de points de vue à effectuer. Les élèves sont principalement sollicités lors de la mobilisation des connaissances (anciennes, en cours d'acquisition, nouvelles) et lors de la reconnaissance des modalités d'applications des différentes équations. Ainsi, les conditions de travail et les aides procédurales apportées par les enseignants minorent les activités qui ont été prévues *a priori*. Nous en avons donc déduit que les élèves ne réalisent presque jamais seuls des changements entre les cadres géométriques (synthétique, vectoriel, analytique), des conversions entre les registres (langue naturelle, algébrique, ensembliste) et des changements de points de vue (paramétrique, cartésien). Il se peut

donc que la flexibilité pour ces traitements internes ne soit pas suffisamment développée par les élèves afin de favoriser leur conceptualisation des droites et des plans dans l'espace. De plus, la description des objets par des équations est un enjeu majeur dans les tâches réalisées en classe tout comme nous l'avons montré pour les moments de cours. Celle-ci est le plus souvent laissée à la charge des élèves. À l'inverse, la reconnaissance des objets n'est que peu travaillée en classe comme nous l'avons prévue *a priori*. Les enseignants prennent bien souvent à leur charge la reconnaissance des objets à partir d'ensembles de solutions de systèmes d'équations linéaires. Nous avons aussi mis en évidence que les enseignants rejettent les méthodes proposées par les élèves dans lesquelles ils tentent de décrire les objets et leurs positions dans l'espace à partir des équations données dans les énoncés. La reconnaissance des objets à partir des équations est donc totalement absente des exercices. Les élèves ne travaillent donc jamais en toute autonomie les deux aspects de l'interprétation géométrique des objets.

3.4 Bilan sur l'analyse des déroulements

Nous avons analysé les déroulements effectifs en classe pour l'ensemble du scénario proposé par les cinq enseignants. Nous avons présenté les déroulements effectifs de deux points précis pour les moments d'exposition des connaissances et de plusieurs tâches proposées par les enseignants. Nous pouvons désormais comparer les activités attendues des élèves pour l'ensemble du scénario à leurs activités possibles en classe. Cette comparaison nous aide à formuler des hypothèses quant aux apprentissages des élèves pour les notions de droites et de plans dans l'espace.

L'analyse *a priori* des scénarios (cf. point 2.5) a mis en évidence que les connaissances antérieures des élèves sont souvent mobilisées, notamment celles des cadres de géométrie synthétique et de géométrie vectorielle. L'analyse des déroulements a montré que les connaissances du cadre de la géométrie vectorielle sont souvent mises en œuvre à la fois lors des moments de cours et lors des exercices. Or, les connaissances de géométrie synthétique interviennent uniquement à des endroits clés dans les cinq cours tels que l'introduction des équations vectorielles et des différentes positions relatives des objets. Lors de l'interprétation géométrique des équations cartésiennes de droites particulières, les enseignants les utilisent comme un levier pour aider les élèves à associer les équations aux objets qu'elles décrivent. Le cadre de la géométrie synthétique n'est pas en jeu dans les tâches réalisées en classe. Aucune tâche effective ne permet donc de comparer les outils et les démarches de géométrie synthétique et de géométrie analytique. Nous avons constaté dans notre analyse *a priori* que ces connaissances ne sont que peu explicitées dans les scénarios. L'analyse des déroulements a montré que les enseignants rappellent le plus souvent les connaissances antérieures des élèves spontanément. La plupart des occasions de proximités horizontales répérées *a priori* ont été tentées par les enseignants en classe permettant ainsi d'intégrer les connaissances nouvelles dans le bagage mathématique que les élèves possèdent.

L'étude des tâches prescrites dans les scénarios (cours et exercices) a permis de déterminer les adaptations des connaissances que les élèves doivent réaliser. La réalisation de la plupart des tâches amènent à découper en plusieurs étapes les raisonnements, à

reconnaître les modalités d'applications pour les différentes équations, à effectuer des traitements internes et à éventuellement choisir une méthode de résolution. En ce qui concerne les traitements internes, nous avons principalement relevé des jeux entre les cadres des géométries vectorielle et analytique, des conversions entre les registres de la langue naturelle, algébrique et ensembliste et des changements de points de vue dans le sens paramétrique/cartésien. Ces adaptations sont toujours laissées à la charge des élèves dans les documents fournis pas les enseignants car elles ne sont jamais explicitées et/ou expliquées. L'analyse des déroulements des moments de cours a montré qu'elles sont généralement prises en compte spontanément par les enseignants dans leurs discours. Ils ajoutent beaucoup de commentaires méta (par exemple : des reformulations) dont certains permettent de rapprocher le travail à réaliser à ce que les élèves ont déjà fait (par exemple : rappels, exemples). Il semble donc bien que les enseignants cherchent lors de l'exposition des connaissances à être dans la ZPD des élèves pour faire progresser leurs apprentissages. Toutefois, les conditions de travail choisies par les enseignants peuvent minorer ces apprentissages. En effet, les élèves travaillent peu en autonomie. Le travail de recherche est principalement de nature collective. Nous avons déduit de l'analyse des interventions des enseignants lors des phases d'exercices qu'ils prennent en charge de nombreuses adaptations des connaissances. Les élèves sont principalement sollicités pour les traitements algébriques, la mise en jeu des connaissances (anciennes, en cours d'acquisition, nouvelles) et la reconnaissance des modalités d'application des différentes équations. Les changements de cadres, les conversions entre les registres et les changements de points de vue sont effectués par les enseignants notamment quand ils proposent des aides procédurales. Les activités potentiellement développées par les élèves en classe sont donc très éloignées des activités attendues repérées *a priori*.

Nous avons constaté que la description des objets par des équations est un enjeu majeur des cinq scénarios. En effet, l'objectif des moments de cours et de la majorité des tâches est de déterminer des équations décrivant un plan ou une droite dans un point de vue précis. La description des objets par des ensembles est *a priori* absente des scénarios. La reconnaissance des objets ne semble abordée que pour les ensembles de solutions des systèmes d'équations linéaires au sein des exercices et pour les équations de droites particulières dans les moments de cours. Ainsi, notre analyse des scénarios a montré que le deuxième aspect de l'interprétation géométrique semble le plus développé et qu'une inteprétation géométrique n'est possible que pour les équations cartésiennes de droites particulières. Cela a été confirmé par notre analyse *a posteriori*. Nous avons aussi relevé que la reconnaissance des objets à partir des ensembles est totalement prise en charge par l'enseignant lors des phases d'exercices. De plus, certains enseignants invalident les méthodes proposées par les élèves amenant à décrire les objets associés aux équations et à préciser leurs positions dans l'espace. De ce fait, les élèves ne travaillent en autonomie que le deuxième aspect de l'interprétation géométrique (la description).

L'analyse des déroulements pointe que les activités attendues des élèves sont bien souvent différentes des activités possibles des élèves. Lors des moments de cours, les explications données par les enseignants peuvent augmenter la quantité et la variété des activités attendues des élèves. C'est, par exemple, le cas pour l'articulation des points de vue. Cela appuie la théorie de Vygotski sur le rôle joué par les médiations dans les

apprentissages des élèves. Toutefois, ces interventions ont un rôle limité puisqu'elles ne sont jamais écrites et peuvent être considérées comme non importantes par les élèves. Ce constat est d'autant plus justifié par le fait que le travail effectué oralement n'est, à aucun moment, demandé dans les tâches prescrites. De ce fait, même si les enseignants lèvent, lors des moments de cours, les implicites que nous avons relevés *a priori*, cela n'a aucun impact sur les activités que les élèves peuvent développer sur les tâches résolues en classe. Lors des phases d'exercices, les activités attendues des élèves sont gérénalement minorées par les aides fournies par les enseignants ou par la nature et le mode de travail proposés. En effet, les tâches sont bien souvent résolues collectivement et les enseignants ajoutent beaucoup de commentaires dans leur discours qui guident énormément le raisonnement des élèves, voire donnent directement la démarche et l'interprétation. Ainsi, les élèves sont peu sollicités et jouent un rôle assez passif dans leurs apprentissages. De ce fait, la flexibilité entre les cadres, les registres et les points de vue n'est certainement pas suffisamment développée par les élèves pour qu'ils conceptualisent les notions de droites et de plans dans l'espace. De plus, l'interprétation géométrique ne semble pas être un objectif de l'enseignement de ces notions alors que nous avons montré qu'elle peut favoriser cette conceptualisation.

4 Limites méthodologiques

Nous sommes bien consciente que cette étude de terrain présente des limites méthodologiques. D'une part, cette étude est succincte. En effet, nous n'avons analysé que cinq scénarios et les déroulements associés. Une étude des pratiques d'un plus grand nombre d'enseignants peut confirmer ou infirmer certains résultats exposés ici. Un frein relativement important à une telle étude est qu'il n'est pas forcément évident de trouver des enseignants qui acceptent d'être filmés dans leur classe. De plus, ces cinq enseignants possèdent tous le même diplôme. Il peut être intéressant de filmer des enseignants agrégés [5]. Cette variété des profils enseignants peut avoir un impact sur les analyses des scénarios et des déroulements. Ensuite, il peut aussi être intéressant de sélectionner des sujets enseignant dans des milieux différents. Le public ciblé ici est relativement similaire d'une école à l'autre. Il est possible, par exemple, que les activités des élèves d'une école privée ou d'une école catholique ne soient pas les mêmes que celles des élèves dans une école publique. Finalement, nous avons formulé des hypothèses sur les apprentissages des élèves à la suite des scénarios proposés par les enseignants. Toutefois, il nous est difficile d'accéder aux copies des contrôles des élèves. Elles ne peuvent être photocopiées, photographiées et sorties de l'établissement. Nous ne sommes donc pas en mesure de confirmer ou d'infirmer nos hypothèses. Cela aurait pu constituer une plus-value à notre travail.

5. Ces enseignants peuvent enseigner les mathématiques mais ne possèdent pas un diplôme en mathématiques. Ils sont bien souvent ingénieurs.

5 Éléments de réponse à notre problématique

Dans la partie 1, nous avons mis en évidence qu'il est souvent difficile pour les étudiants de mathématiques au sein de notre université d'interpréter géométriquement les objets de l'espace et, en particulier, les notions de droites et de plans dans l'espace. Afin de pouvoir agir sur un enseignement de géométrie analytique et d'aider les apprenants à surmonter cette difficulté, nous avons réalisé une étude du relief sur ces notions. Plusieurs résultats ont été déduits du croisement des analyses historico-épistémologique, curriculaire et cognitive. En particulier, nous avons montré qu'il est important :

- de considérer le cadre de la géométrie vectorielle comme point charnière entre les cadres de la géométrie synthétique et de la géométrie analytique ;
- de comparer les outils et les démarches propres aux géométries synthétique et analytique ;
- de proposer des conversions entre les registres du dessin, de la langue naturelle, algébrique, ensembliste et de la logique ;
- d'articuler les points de vue paramétrique et cartésien dans les deux sens ;
- de développer l'interprétation géométrique des objets à partir des équations (aspect sémantique des équations) et des ensembles de points ;
- de prendre en compte l'aspect généralisateur des notions.

La prise en compte de ce travail spécifique par les enseignants peut amener les élèves à développer une certaine flexibilité entre les cadres géométriques (synthétique, vectorielle, analytique), les registres et les points de vue ainsi qu'une interprétation géométrique des objets. Ces aspects participent à la conceptualisation des notions de droites et de plans dans l'espace par les apprenants et constituent pourtant des sources de difficultés pour eux.

Dans cette partie, nous nous sommes intéressée au travail que les enseignants de l'enseignement secondaire belge francophone proposaient à leurs élèves afin d'étudier le processus et le produit de la conceptualisation pour ces notions. Nous avons donc cherché à reconstruire l'itinéraire cognitif prévu par chaque enseignant et les apprentissages correspondants des élèves. Pour ce faire, nous avons comparé les activités attendues des élèves par les enseignants aux activités que les élèves ont potentiellement développées en classe. En particulier, nous avons déterminé si les activités de traitements internes (jeux de cadres, conversions de registres, articulation des points de vue) et d'interprétation géométrique sont des activités attendues et possibles des élèves. La question de recherche qui a émergé dans cette partie du travail est la suivante :

Est-il possible, dans l'enseignement secondaire belge francophone, de proposer un ensemble de tâches consistantes aux élèves, sur les notions de droites et de plans dans l'espace, permettant de développer potentiellement les activités de traitements internes et d'interprétation géométrique de ces objets ?

Pour apporter des éléments de réponse à cette question, nous avons mené plusieurs analyses didactiques en suivant la méthodologie du cadre de la Théorie de l'Activité.

Nous avons, dans un premier temps, réalisé une analyse des manuels scolaires belges. Ils nous ont donné une idée plus précise des scénarios qu'il est possible de trouver dans les classes de l'enseignement secondaire. Ils nous ont également permis de pointer certains manques par rapport au savoir de référence, constitué dans la partie 1, et de formuler quelques hypothèses quant aux activités qui peuvent être attendues des élèves. Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressée aux scénarios et aux déroulements effectifs proposés par cinq enseignants. Nous avons mis en regard les analyses des scénarios potentiels avec celles des scénarios effectifs afin de savoir si les manques repérés dans les manuels sont pris en compte par les enseignants. Finalement, l'analyse des déroulements nous a aidée à déterminer les activités possibles des élèves.

Nos différentes analyses ont révélé que les traitements internes et l'interprétation géométrique ne sont pas suffisamment développés par les élèves. Plusieurs raisons ont été avancées. D'une part, les scénarios potentiels et les scénarios construits par les enseignants développent peu ces activités. Par exemple, les changements de points de vue ne sont pas beaucoup travaillés et se limitent au sens paramétrique/cartésien dans les documents fournis aux élèves par les enseignants. D'autre part, les conditions de travail choisies par les enseignants minorent les activités possibles des élèves. En effet, les élèves ne travaillent jamais en autonomie et sont toujours guidés par les enseignants. Ceux-ci proposent essentiellement des aides procédurales (directes et indirectes) et prennent en charge de nombreuses adaptations des connaissances telles que l'organisation du raisonnement et les traitements internes. Ainsi, les tâches effectivement réalisées par les élèves n'amènent pas des adaptations de connaissances suffisamment nombreuses et variées pour qu'ils puissent développer la flexibilité nécessaire entre les cadres, les registres et les points de vue. De plus, nous avons montré que seule la description des objets par des équations est à la charge des élèves. La description des objets par des ensembles et la reconnaissances des objets à partir des équations sont absentes des scénarios. La reconnaissance des objets à partir d'ensembles n'est travaillée que pour les ensembles de solutions et est prise en compte par l'enseignant en classe. Ainsi, les tâches effectivement réalisées par les élèves ne travaillent pas suffisamment la reconnaissance des objets pour qu'ils puissent développer leur interprétation géométrique.

Nous faisons toutefois le pari qu'il est possible de proposer une séquence d'enseignement permettant de travailler ces traitements internes et l'interprétation géométrique des objets pour les notions de droites et de plans dans l'espace. Nous présentons le scénario envisagé pour cette séquence, son déroulement effectif en classe et les impacts possibles sur les apprentissages des élèves dans la partie 3.

Troisième partie

Scénario d’enseignement sur les droites et les plans dans l’espace : de sa conception aux activités possibles des élèves

Partie 3 — Introduction

Dans la partie 2, nous avons analysé les scénarios proposés par cinq enseignants de l'enseignement secondaire belge francophone, ainsi que les déroulements correspondants. Nous avons montré que les tâches réalisées en classe mettent peu en œuvre les traitements internes. En particulier, les changements de points de vue sont peu exploités et se restreignent au sens paramétrique/cartésien. Or, nous avons relevé dans la partie 1 qu'il est important d'articuler les points de vue entre eux, et ce, dans les deux sens. Nous avons donc déduit de notre étude de terrain que la flexibilité entre les cadres géométriques, les registres et les points de vue n'est pas suffisamment développée chez les élèves pour favoriser leur conceptualisation des notions de géométrie analytique dans l'espace. De plus, nous avons également mis en évidence que l'objectif principal de ces scénarios est la description des objets par des équations. Ainsi, le deuxième aspect de l'interprétation géométrique des objets est travaillé par les élèves. Or, la reconnaissance des objets n'est que peu présente dans les tâches prescrites. De plus, lorsque cet aspect de l'interprétation géométrique est en jeu, l'enseignant le prend à sa charge. Notre étude de terrain nous a donc amené à penser que l'interprétation géométrique n'est pas suffisamment développée par les élèves pour favoriser la conceptualisation des notions.

Nous faisons le pari qu'il est pourtant possible de proposer aux élèves un scénario sur les notions visées dans lequel les activités de traitements internes et d'interprétation géométrique sont attendues des élèves. Notre objectif n'est pas de métamorphoser l'enseignement de la géométrie analytique, mais plutôt de proposer une séquence d'enseignement conforme aux nouveaux programmes belges et susceptible d'enclencher des activités chez les élèves permettant de favoriser leur conceptualisation. Nous cherchons donc à organiser, de façon cohérente, les contenus prescrits par les programmes tout en prenant en compte les différents leviers relevés dans la partie 1. Nous présentons les principes et les choix effectués dans l'élaboration de notre séquence au chapitre IX. Le scénario est exposé au chapitre X en précisant quelques éléments liés à sa gestion en classe *a priori*. Nous l'analysons ensuite dans le chapitre XI afin de mettre en évidence que les activités attendues des élèves sont bien celles que nous cherchons à développer.

Nous avons expérimenté notre scénario dans une classe de l'enseignement secondaire. Le déroulement effectif est présenté dans le chapitre XII. Nous y précisons la chronologie globale du scénario et mettons en évidence les éventuelles différences entre la gestion prévue *a priori* et notre expérimentation. Quelques phases précises de l'enseignement sont analysées en tenant compte des interventions de l'enseignant. Nous pouvons alors délimiter les activités possibles des élèves sur les notions de droites et de plans dans l'espace à la suite de notre séquence. Nous terminons cette partie en ca-

ractérisant les apprentissages des élèves sur ces notions dans le chapitre XIII. Pour ce faire, nous présentons les résultats d'un pré-test, adressé à des étudiants de BAB1 ayant suivi un cours classique, et les résultats du post-test adressé aux élèves ayant suivi notre scénario. Le croisement des résultats des deux évaluations permet de préciser les apprentissages des élèves. Ceux-ci sont également comparés à la conceptualisation visée, décrite au chapitre IX, par notre séquence.

Chapitre IX

Principes d'élaboration de la séquence

Dans ce chapitre, nous abordons tout d'abord la notion d'ingénierie didactique. Nous expliquons en quoi notre scénario s'en distingue. Nous définissons ensuite, au vu des analyses menées dans les parties 1 et 2, la conceptualisation que nous visons avec ce scénario. Nous précisons finalement les choix effectués en termes de contenus et de gestion en classe pour que notre scénario tienne compte des contraintes institutionnelles de l'enseignement secondaire belge francophone.

1 Une séquence « de type ingénierie »

Nous cherchons à élaborer une séquence d'enseignement en nous appuyant sur le travail théorique réalisé dans les deux premières parties. Cette séquence peut être apparentée à la notion d'« ingénierie didactique ». Nous précisons tout d'abord cette notion et puis nous expliquons en quoi nous nous en détachons.

Jusqu'au début des années 80 en France, la didactique des mathématiques est à la recherche d'une légitimité scientifique (Artigue, 2002). Se fait alors sentir un besoin de confronter les constructions théoriques à la réalité des classes. C'est dans ce contexte que la notion d'« ingénierie didactique » a émergé. Elle permet, selon Artigue (1988), de désigner les productions réalisées par le chercheur en didactique des mathématiques et destinées à l'enseignement, mais elle offre aussi une méthodologie de recherche spécifique en relation avec la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998). Nous décrivons brièvement cette méthodologie de recherche.

Artigue (ibid.) distingue quatre phases au sein de ce processus méthodologique. La première phase contient toutes les analyses didactiques à effectuer avant même de concevoir une séquence. Il s'agit, par exemple, de mener une analyse historique et épistémologique, une analyse cognitive et une analyse curriculaire. Bien que cette notion ne soit pas issue du cadre théorique de la Théorie de l'Activité, nous retrouvons ici une étude qui s'apparente à notre étude du relief sur les notions à enseigner, réalisée dans la partie 1.

La deuxième phase consiste alors à concevoir et à analyser *a priori* une séquence d'enseignement. Lors de cette phase, les principes de la Théorie des Situations Didactiques interviennent fortement. Dans cette théorie, « l'apprentissage résulte de processus d'adaptations [...] développés face à des situations problématiques » (Artigue, 2002, p. 61). De ce fait, étudier les apprentissages des élèves revient à étudier les processus d'adaptations qu'ils peuvent développer dans une situation d'enseignement. Or, ces derniers sont influencés par les interactions qui peuvent survenir entre l'enseignant, les élèves et le savoir. Si les interactions avec l'enseignant sont prises en compte, alors les processus sont qualifiés de didactiques. Si ce n'est pas le cas, les processus sont qualifiés d'a-didactiques. Ainsi, c'est de l'ensemble des interactions que ce cadre théorique souhaite rendre compte. Pour ce faire, l'objet d'étude est alors la situation didactique. Lors de la deuxième phase d'une ingénierie didactique, le chercheur doit donc essayer de construire des situations qui optimisent les interactions entre les trois pôles du triangle didactique (Artigue, ibid.). Afin d'y parvenir, le chercheur doit trouver un équilibre entre les processus d'adaptations didactiques et a-didactiques. Autrement dit, il est important que la séquence d'enseignement comporte à la fois des moments où l'élève, considéré comme un sujet épistémique, travaille en toute autonomie et des moments où l'enseignant est pris en compte, comme dans les processus de dévolution et d'institutionnalisation. Le chercheur, guidé par les analyses préalables, doit effectuer un certain nombre de choix, par exemple, en termes d'organisation générale de l'ingénierie et en termes d'organisation, plus locale, de chacune des phases de celles-ci. L'objectif de l'analyse *a priori* est alors d'expliciter ces choix en mettant en évidence les variables didactiques sur lesquelles le chercheur a joué et en montrant en quoi ils amènent bien la séquence conçue à produire les connaissances visées chez les élèves.

La troisième phase de la méthodologie de recherche consiste à expérimenter en classe la séquence conçue. La quatrième phase est l'analyse *a posteriori* de l'ensemble des données recueillies (observations, productions élèves, questionnaires, entretiens, ...) lors de l'expérimentation de la séquence. Cette analyse a pour objectif de valider les hypothèses émises lors de l'analyse *a priori*. Pour cela, une confrontation entre les deux analyses est nécessaire.

Ce découpage de la méthodologie de recherche permet de bien mettre en évidence deux caractéristiques générales de l'ingénierie didactique. Puisque cette méthodologie prend en compte la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse de séquences d'enseignement, il s'agit d'une méthodologie expérimentale. Elle permet donc d'étudier l'élaboration de genèses artificielles pour un concept donné, par exemple, et de prendre en compte toute la complexité de la classe lors de l'expérimentation. Ensuite, la validation est fondée sur une comparaison entre une analyse *a priori* de la séquence et une analyse *a posteriori* de sa réalisation effective. Cette méthodologie est donc caractérisée par son mode de validation interne qui est très différent des études de cas en éducation, où il s'agit plus d'une comparaison entre groupes témoins et groupes expérimentaux.

Durant les années 80, l'ingénierie didactique est devenue petit à petit la méthode privilégiée par les chercheurs en didactique des mathématiques pour la conception d'une séquence d'enseignement (Artigue, ibid.). Cependant, dès la fin des années 80, la notion

d'ingénierie didactique est questionnée. En effet, des recherches concernant l'enseignement secondaire et supérieur se développent et ces niveaux d'enseignement amènent des contraintes didactiques, liées aux savoirs et à leur gestion dans le système éducatif, qui rendent cette méthodologie difficile à appliquer. Par exemple, la méthodologie à suivre amène le chercheur à trouver une situation fondamentale, c'est-à-dire une situation faisant « apparaître les connaissances visées comme des solutions optimales au problème mathématique posé » (Artigue, 2011, p. 20). Or, plusieurs chercheurs, dont Robert (2011), questionnent le fait qu'il existe une telle situation pour toutes les notions et, en particulier, pour les notions FUG. De plus, même si une situation fondamentale existe, il est possible que les processus d'adaptations a-didactiques soient trop complexes pour être laissés à la seule charge des étudiants. Des médiations, organisées par l'enseignant, sont alors nécessaires pour que les responsabilités entre enseignant et étudiants soient réparties de façon optimale lors de la résolution du problème (Artigue, ibid.). Les analyses *a priori* sont dès lors beaucoup plus complexes et questionnent la prise en compte du rôle de l'enseignant dans ces analyses. D'autres questionnements sur l'ingénierie didactique émergent dont, notamment, le fait que l'attention soit fortement portée sur l'organisation des premiers moments de rencontre et d'exploration des techniques et le fait qu'il soit difficile de les diffuser dans les classes. Pourtant, à l'heure actuelle, les ingénieries didactiques restent performantes en mathématiques, grâce aux évolutions du cadre théorique, mais aussi dans d'autres disciplines.

Nous cherchons à créer une ingénierie didactique, au sens premier du terme. Cependant, nous n'appliquons pas la méthodologie de recherche propre aux ingénieries didactiques que nous avons présentée précédemment. En effet, notre cadre théorique nous amène à nous intéresser aux activités des élèves. Les traces de ces activités sont plus facilement observables lors des phases d'exercices. Il ne s'agit donc pas de se concentrer uniquement sur l'introduction des notions, comme dans une ingénierie classique, mais d'étudier aussi les tâches qui sont proposées aux élèves. Le temps long doit être pris en compte dans notre séquence. De plus, nous avons déjà montré, dans la partie 2, l'importance du rôle de l'enseignant (discours, choix des tâches, gestion des déroulements) dans les apprentissages des élèves. C'est pourquoi il est pris en compte au sein de nos analyses et non *a posteriori* comme dans une ingénierie classique. Enfin, nous avons montré, dans la partie 1, que les notions de droites et de plans dans l'espace sont, compte tenu des programmes scolaires, des extensions avec accidents des notions de droites dans le plan. De ce fait, il peut être difficile pour les élèves de s'approprier en toute autonomie les connaissances visées. Nous ne nous attachons donc pas à rechercher une situation fondamentale permettant d'introduire les notions de droites et de plans dans l'espace. Ainsi, nous ne cherchons pas à élaborer une ingénierie didactique classique. Nous voulons proposer un itinéraire cognitif cohérent sur ces notions amenant les élèves à potentiellement développer certaines activités favorisant leurs apprentissages. C'est ce que Robert (ibid.) appelle des séquences « de type ingénierie » dont elle précise la méthodologie.

> « Il s'agit d'abord de travailler à l'élaboration de tâches à proposer aux élèves (aux formés), incluses dans un scénario issu d'une réflexion épistémologique, curriculaire et cognitive (incluant les difficultés des élèves par exemple). Puis vient la mise au point d'un déroulement exigeant, en partie prévu, assorti de prévisions d'activités et/ou d'acquisition pour tous les acteurs. Le travail de recherche consiste ensuite à analyser le déroulement réel, toujours en partie improvisé, en essayant d'analyser (puis de discuter) dans quelle mesure les activités prévues ont été possibles – et pour les élèves (ou les formés) et pour les enseignants (ou les formateurs). Cette confrontation *a priori/a posteriori*, pilotée par la recherche de la proximité plus ou moins grande entre le projet et sa réalisation met en jeu des outils différents mais spécifiques et reste au coeur de la démarche » (Robert, ibid., p. 221).

Nous nous appuyons donc sur notre étude du relief sur les notions de droites et de plans dans l'espace pour créer un scénario contenant à la fois des activités d'introduction, des moments d'exposition des connaissances, des tâches variées et permettant à l'enseignant de tenter de nombreuses proximités avec les connaissances que les élèves ont déjà. La validation de notre séquence de type ingénierie est interne car il s'agit d'une confrontation entre nos analyses *a priori* du scénario (en termes d'activités attendues) et nos analyses *a posteriori* des déroulements effectifs (en termes d'activités possibles). Nous appliquons ainsi la méthodologie de notre cadre théorique présentée au chapitre VI.

2 Choix du chercheur dans l'élaboration du scénario

Dans le chapitre II, nous avons défini ce que nous entendons par la conceptualisation d'une notion. Elle est associée à la disponibilité des statuts outil et objet de la notion, à l'organisation entre les connaissances antérieures et nouvelles, à une flexibilité importante entre les cadres, les registres et les points de vue et à une diversité des niveaux de mises en fonctionnement des connaissances dans les tâches proposées aux élèves. Au regard des résultats de notre étude de relief et de notre étude de terrain, nous précisons la conceptualisation qui est visée par notre séquence d'enseignement. Nous mettons également en évidence les choix que nous sommes amenée à effectuer à la fois en termes de contenus et de gestion en classe, dont nous supposons qu'ils peuvent favoriser la conceptualisation des notions de droites et de plans dans l'espace chez les élèves.

Nous cherchons dans un premier temps à amener les élèves à insérer les nouvelles connaissances dans leur bagage mathématique. Pour ce faire, nous avons choisi de concevoir une activité d'introduction permettant aux élèves de mobiliser leurs connaissances antérieures. Au vu de notre étude de relief sur les notions visées (cf. chapitre V), nous cherchons à y mettre en jeu les connaissances des élèves dans les cadres de géo-

métrie synthétique, de géométrie vectorielle et de géométrie analytique plane. Nous pouvons ainsi prendre en compte les éventuelles extensions des notions lors du passage du plan à l'espace. Nous précisons les connaissances supposées être dans la ZPD des élèves au vu des programmes d'enseignement.

Connaissances antérieures

- Géométrie synthétique dans l'espace : perspective cavalière, caractérisation des droites et des plans dans l'espace, point de percée, section de plan, positions relatives de deux droites, positions relatives de deux plans, positions relatives d'une droite et d'un plan.
- Géométrie vectorielle dans l'espace : repères dans l'espace, vecteurs, composantes d'un vecteur, addition de deux vecteurs, multiplication d'un vecteur par un scalaire, produit scalaire, norme, vecteurs coplanaires, vecteurs colinéaires, distance entre deux points dans l'espace.
- Géométrie analytique du plan : vecteurs directeurs d'une droite, équations vectorielles d'une droite, équations paramétriques d'une droite, équations cartésiennes d'une droite sous forme générale, équations cartésiennes d'une droite avec coefficient angulaire, positions relatives de deux droites, distance d'un point à une droite.
- Outils algébriques : équations, résolution de systèmes de deux équations à deux inconnues, résolution de systèmes de trois équations à trois inconnues.
- Outils logiques et ensemblistes : quantificateurs, implication, appartenance, inclusion, intersection.

Nous avons souligné dans le chapitre VI que l'efficacité d'un cours serait liée à la qualité et à la quantité des connexions entre les activités que les élèves ont déjà réalisées et celles attendues. C'est pourquoi notre objectif est de faire émerger les nouvelles notions en s'appuyant sur le travail que les élèves ont déjà réalisé pour la géométrie analytique plane. Les notions vues dans le plan (équations, positions relatives) sont alors étendues à l'espace. Ce choix est donc susceptible d'engendrer de nombreuses occasions de proximités (de tous types) dans le discours de l'enseignant ; ce dernier étant considéré comme un levier favorisant la conceptualisation des notions par les élèves. Nous listons les notions qui doivent être étudiées selon les programmes scolaires.

Notions à enseigner

- Vecteurs directeurs d'une droite et d'un plan,
- Équations vectorielles, paramétriques et cartésiennes d'une droite et d'un plan dans l'espace,
- Équations cartésiennes d'un plan sous forme de déterminant,
- Propriétés sur les déterminants,
- Vecteurs normaux d'un plan,
- Conditions de parallélisme et d'orthogonalité de deux droites, de deux plans et d'une droite avec un plan,

- Distance entre deux points dans l'espace, entre un point et une droite dans l'espace, entre un point et un plan, entre deux droites parallèles, entre deux plans parallèles, entre deux droites gauches.

Nous avons noté que les extensions de notions peuvent engendrer des difficultés chez les élèves (cf. partie 1). Or, celles-ci peuvent être minimisées si les élèves possèdent un moyen de contrôle interne (Vandebrouck, 2008). Nous proposons alors de développer l'interprétation géométrique des objets chez les élèves. En effet, nous pensons qu'un travail suffisant sur la reconnaissance des objets à partir d'équations et d'ensembles de points peut aider les élèves à ne plus avoir de conceptions erronées lors de l'extension des notions du plan à l'espace. De ce fait, nous choisissons de travailler l'interprétation géométrique à partir d'objets que les élèves ont déjà rencontrés en géométrie analytique plane. Ce travail peut constituer un levier pour aborder les notions de l'espace.

Nous avons également choisi une progression des contenus à enseigner car nous voulons construire un itinéraire cognitif cohérent pour les notions de géométrie analytique dans l'espace. Au vu des notions à enseigner dans les programmes scolaires, trois grands sujets sont à étudier : les équations des objets, les positions relatives entre les objets et les distances. Nous avons choisi de les aborder dans cet ordre. En effet, il est nécessaire d'avoir vu les équations des objets pour étudier leurs positions relatives. Il est également nécessaire de pouvoir déterminer la position relative des objets entre eux pour calculer des distances. Notre étude historico-épistémologique réalisée au chapitre III a mis en évidence que le point de vue cartésien a émergé avant le point de vue paramétrique. Elle suggère également que le cadre de la géométrie vectorielle permet de mettre en relation les cadres des géométries synthétique et analytique afin de ne pas perdre le côté visuel du problème géométrique sous une montagne d'équations. Ainsi, la progression des contenus retenue est la suivante : équations cartésiennes des droites et des plans dans l'espace, équations vectorielles des droites et des plans dans l'espace, équations paramétriques des droites et des plans dans l'espace, positions relatives d'une droite et d'un plan, positions relatives de deux plans, distance entre deux points dans l'espace, distance entre un point et une droite, distance entre un point et un plan [1]. Notons que cette progression n'a jamais été proposée dans les manuels analysés et dans les scénarios des cinq enseignants étudiés.

Nous avons retenu de notre étude cognitive réalisée au chapitre II que la notion d'équation est une notion paramathématique. Autrement dit, cette notion n'est jamais définie dans l'enseignement secondaire. Nous choisissons d'apporter une première définition de cette notion au sein de notre séquence. En effet, il nous semble important que les élèves disposent du fait qu'une équation est une relation d'égalité vérifiée par certaines valeurs des inconnues. Selon nous, cela peut donner du sens au fait que nous considérons l'ensemble des couples ou des triplets qui vérifient l'égalité. De plus, notre étude curriculaire effectuée au chapitre IV met en évidence que le travail sur les équations n'est qu'algébrique. Cela peut d'ailleurs amener les élèves à ne pas pouvoir distinguer la résolution d'une équation de la description d'un objet géométrique par une

1. Les autres distances ne demandent pas de formules à justifier. Elles ne sont pas étudiées dans la partie théorique. Elles apparaissent dans les exercices.

équation (cf. chapitre II). C'est pourquoi nous voulons aborder cette distinction dans notre séquence. Nous choisissons, pour ce faire, de nous appuyer sur les connaissances des élèves sur les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, comme le suggère Rogalski (1991). L'arsenal qui définit alors la conceptualisation que nous visons pour ces notions et qui découle des choix précédemment évoqués est le suivant.

Arsenal

- □ Caractériser les droites et les plans par des équations ou des ensembles de points.
- □ Décrire les objets représentés par des équations ou des ensembles de points.
- □ Différencier « décrire par une équation » et « résoudre une équation ».
- □ Étudier la position relative des objets entre eux.
- □ Déterminer les distances entre deux points, entre un point et un plan.
- □ Démontrer certains résultats comme la formule pour la distance d'un point à un plan et la forme générale des équations cartésiennes des plans.

Dans un deuxième temps, nous voulons développer chez les élèves une certaine flexibilité entre les cadres, les registres et les points de vue. Nous avons déjà expliqué qu'elle peut favoriser la conceptualisation des notions de droites et de plans dans l'espace et qu'elle ne se développe pas automatiquement chez les élèves. De ce fait, il est important que ce travail soit amorcé avec l'enseignant dès l'activité d'introduction. Nous choisissons alors de proposer des jeux entre les cadres des géométries synthétique, vectorielle et analytique. Nous voulons également travailler les conversions entre les registres du dessin, algébrique, de la langue naturelle, ensembliste et de la logique. Les trois premiers registres sont les plus exploités dans les manuels et dans les scénarios des enseignants étudiés. Les deux derniers registres sont préconisés par les programmes actuels et un travail dans ceux-ci peut être difficile pour les élèves (cf. chapitre II). Bien que le programme scolaire ne le demande pas, nous pensons qu'il est important d'articuler les points de vue cartésien et paramétrique. Nous choisissons donc de proposer à la fois des changements de points de vue dans le sens cartésien/paramétrique et dans le sens paramétrique/cartésien au sein de notre scénario. Notre étude de terrain a montré que peu de ces traitements internes sont à mettre en œuvre dans la réalisation des tâches prescrites par les enseignants. Nous cherchons alors un ensemble de tâches susceptibles de déclencher ces activités chez les élèves, ce qui nous amène à pouvons préciser le type d'exercices que nous voulons proposer pour ces notions.

Types de tâches

- □ Déterminer des équations (quel que soit le point de vue) ou des ensembles de points décrivant une droite ou un plan.
- □ Décrire l'objet représenté par des équations (quel que soit le point de vue) ou des ensembles de points.
- □ Comparer les démarches et les outils des cadres de la géométrie synthétique et de la géométrie analytique dans un exercice.

- Résoudre des exercices dans lesquels des jeux de cadres, des conversions de registres et des changements de points de vue sont nécessaires.
- Déterminer la position relative des objets à partir d'une description de ceux-ci.
- Décrire un objet connaissant sa position relative avec d'autres objets.
- Calculer des distances.
- Résoudre des systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$.
- Résoudre des problèmes dans lesquels les notions interviennent dans leur dimension outil.

La conceptualisation des notions de géométrie analytique dans l'espace que nous visons dans notre séquence vient donc d'être définie. Elle est associée à la disponibilité des statuts outil et objet des notions, à l'organisation des connaissances antérieures et nouvelles en prenant en compte le type des notions, à une flexibilité entre les cadres des géométries synthétique, vectorielle et analytique, à la manipulation et aux conversions de différents registres d'écriture (langue naturelle, algébrique, dessin, logique, ensembliste), à l'articulation entre les points de vue paramétrique et cartésien et à une diversité des niveaux de mises en fonctionnement des connaissances dans les tâches proposées aux élèves. Afin de favoriser cette conceptualisation, nous avons choisi deux leviers principaux qui sont l'interprétation géométrique des objets et le discours de l'enseignant en classe. Au vu de ces deux leviers, il nous semble plus pertinent d'expérimenter nous même la séquence d'enseignement car nous pensons qu'il est possible qu'un enseignant ordinaire passe à côté des objectifs de la séquence, modifie certains choix basés sur les résultats de la recherche, modifie les tâches prescrites et ne s'appuie pas suffisamment sur les leviers sélectionnés. En effet, les résultats présentés au chapitre VIII ont montré que les enseignants ne proposent pas d'interprétation géométrique des équations, ne travaillent pas les ensembles de points et ne tentent que peu de proximités entre ce qui est visé et la ZPD des élèves. De plus, les pratiques d'un enseignant étant stables, il semble donc difficile de les modifier.

3 Bilan

Nous faisons le pari que les choix qui guident l'élaboration de notre séquence d'enseignement permettent de favoriser la conceptualisation des notions de droites et de plans dans l'espace. Nos choix en termes de contenus et de gestion en classe concernent les points suivants :

- la cohérence d'un itinéraire cognitif,
- l'élaboration d'une activité d'introduction prenant en compte le type des notions,
- le recours à l'interprétation géométrique comme moyen de contrôle interne,
- le développement de la flexibilité entre les cadres géométriques, les registres et les points de vue cartésien et paramétrique,
- un certain nombre de tâches permettant de développer les activités d'interprétation géométrique et de traitements internes,

- le recours à des proximités-en-acte par l'enseignant lors des moments d'exposition des connaissances.

Il est clair que d'autres choix peuvent être effectués à la fois en termes de contenus, de gestion en classe et de leviers didactiques. Nous présentons, au chapitre X, le scénario élaboré à partir des choix que nous venons d'exposer.

Chapitre X

Présentation de la séquence

Dans ce chapitre, nous présentons tout d'abord les contraintes auxquelles notre scénario est soumis. Nous pouvons ensuite fournir le scénario construit en le découpant en séances et en ajoutant quelques éléments sur sa gestion *a priori* en classe. L'analyse plus détaillée du scénario est réalisée dans le chapitre XI. Puisque nous n'avons jamais enseigné à des élèves de l'enseignement secondaire, nous ne connaissons pas bien le public ciblé par notre expérimentation. C'est pourquoi nous avons voulu présenter notre scénario aux enseignants de notre étude de terrain afin qu'ils le valident. Nous fournissons ici le guide d'entretien utilisé et illustrons les réponses données par ces enseignants.

1 Méthodologie générale

Notre étude de terrain semble donner plusieurs tendances quant à la période choisie par les enseignants pour le chapitre de géométrie analytique dans l'espace. Les notions sont principalement vues soit durant le mois de novembre, soit après les congés de printemps. Nous avons la possibilité d'expérimenter notre scénario dans la classe de mathématiques pour scientifiques d'un des enseignants que nous avons filmé. Celle-ci a été programmée en novembre 2019. Le programme de l'enseignement secondaire fournit une estimation pour chaque UAA, et ce, pour chaque année. Ainsi, celle prévue pour le troisième degré en géométrie est présentée à la figure X.1.

5SUAA6	Géométrie vectorielle du plan et de l'espace	14 – 16
5SUAA7	Géométrique analytique et synthétique de l'espace	28 – 32

FIGURE X.1 – Extrait du corpus sur les compétences terminales (Administration générale de l'Enseignement, 2015, p. 6).

Une durée de 28 à 32 périodes est prévue pour le chapitre de géométrie synthétique dans l'espace et pour le chapitre de géométrie analytique dans l'espace. Rappelons qu'une période dure environ 50 minutes. Un peu plus loin dans ce référentiel, une durée est estimée pour chaque chapitre (figure X.2).

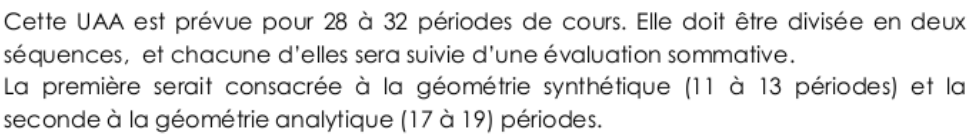

Cette UAA est prévue pour 28 à 32 périodes de cours. Elle doit être divisée en deux séquences, et chacune d'elles sera suivie d'une évaluation sommative.
La première serait consacrée à la géométrie synthétique (11 à 13 périodes) et la seconde à la géométrie analytique (17 à 19) périodes.

FIGURE X.2 – Extrait du corpus sur les compétences terminales (Administration générale de l'Enseignement, ibid., p. 46).

Notre scénario est donc découpé *a priori* en 17 séances de 50 minutes afin de respecter les contraintes institutionnelles. Nous expérimentons durant tout le mois de novembre [1] à raison de 6 séances par semaine. Cette estimation concerne l'ensemble du scénario c'est-à-dire l'activité d'introduction, la théorie, les exercices et l'évaluation. Nous ne présentons pas l'évaluation prévue ici mais dans le chapitre XIII. Nous détaillons le scénario au point 2 sous la forme d'un tableau à deux colonnes. La colonne de gauche contient des informations sur le découpage et la gestion prévus *a priori*. La colonne de droite décrit la progression des contenus choisie, les notions théoriques abordées, les éventuelles démonstrations réalisées et les exercices que nous avons envisagés de proposer aux élèves. Nous analysons *a priori* ces tâches dans le chapitre XI. Nous fournissons aux élèves une liste d'exercices plus longue que celle que nous prévoyons. En effet, il nous semble important de proposer des exercices supplémentaires aux élèves pouvant servir également lors des révisions sur ces notions. La liste complète est proposée dans l'annexe D.

Nous présentons ensuite le guide d'entretiens que nous avons construit dans l'objectif de recueillir l'avis des enseignants sélectionnés pour notre étude de terrain sur la séquence élaborée et sur la gestion globale prévue *a priori*. Nous donnons finalement les tendances générales dans les réponses des enseignants. Les entretiens ont été transcrits et se situent dans l'annexe E.

2 Présentation du scénario

1. Quelques jours sont perdus à cause des congés de Toussaint et des révisions pour les examens qui se déroulent en décembre.

Séance 1

Durée : 50 minutes

Contenus : définition d'une équation, résoudre une équation, décrire un ensemble de points par une équation.

Lecture de la tâche d'introduction 1.

Discussion collective.

Les équations de droites et de plans dans l'espace

Démarche d'interprétation géométrique dans le plan

Tâche d'introduction 1. Recherchez graphiquement l'ensemble des solutions des systèmes suivants dans $\mathbb{R}^2$.

$$(S_1)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4y+4=0 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} 2x+3y=2 \\ 4y+4=0 \end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases} 2y+5x=1 \\ 3x=1-3y \end{cases} \qquad (S_4)\begin{cases} 2x+3y=6 \\ 4x+6y=8 \end{cases}$$

Nous profitons de cette discussion pour revenir sur :

- la définition d'une équation.

  Définition 1. *Une équation est une relation d'égalité qui peut être vérifiée par certaine(s) valeur(s) de la ou des inconnues(s).*

- la résolution algébrique et graphique d'une équation ou d'un système d'équations.

  Définition 2. *Résoudre une équation consiste à déterminer toutes les valeurs des inconnues qui vont vérifier l'égalité.*

- la différence entre résoudre une équation et décrire un objet géométrique par une équation. Nous nous appuyons sur les connaissances des élèves dans le cadre des fonctions du premier et du deuxième degrés.

Bilan collectif pour établir la démarche d'interprétation géométrique dans le plan.

Nous amenons la démarche à suivre pour résoudre la tâche d'introduction 1. Il s'agit de :

- considérer l'ensemble des couples (x,y) qui vérifient chaque relation du système,
- tracer sur un graphique ces ensembles de points,
- identifier les objets décrits par ces ensembles de points,
- déterminer graphiquement les intersections éventuelles entre les différents objets représentés,
- écrire l'ensemble des solutions du système étudié.

Recherche individuelle ou entre pairs, environ 10 minutes.

Résolution du système S_1 de la tâche d'introduction 1.

Les équations cartésiennes de droites dans le plan

Séance 2

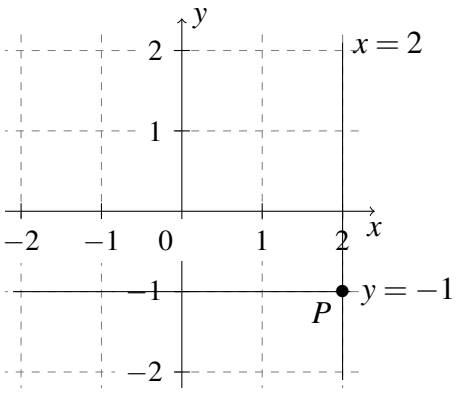
Durée : 50 minutes

Contenus : équations cartésiennes de droites dans le plan, vecteur directeur, vecteur normal, description de la droite comme un ensemble de vecteurs.

Correction collective.

Les équations sont étudiées séparément. L'équation $x+5=2x+3$ devient $x=2$. Cette équation doit être considérée comme l'ensemble des couples (x,y) tels que $x=2$. Plusieurs points vérifiant cette condition peuvent être donnés par les élèves. Ces points sont placés sur un graphique. L'enseignant tente une proximité horizontale avec les équations des droites verticales.

L'équation $4y+4=0$ devient $y=-1$. Cette équation représente l'ensemble des couples (x,y) tels que $y=-1$. Quelques points sont donnés et placés sur le graphique. L'enseignant tente une proximité horizontale avec les équations des droites horizontales.



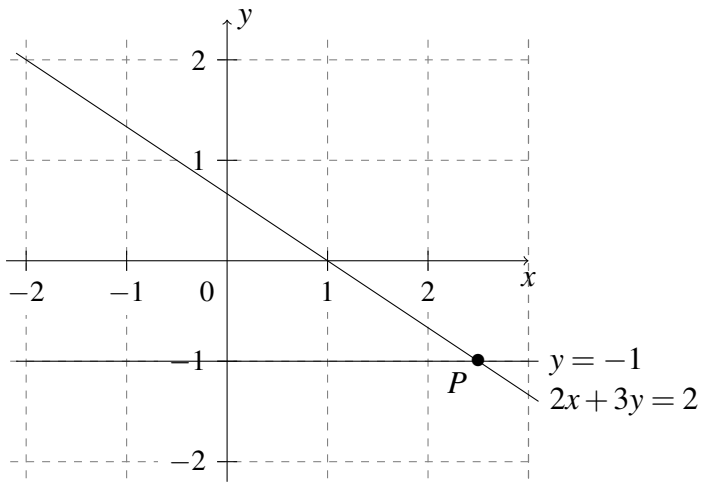
Nous déduisons du graphique qu'il existe une solution au système composé des deux équations car les deux droites s'intersectent au point $(2,-1)$. L'ensemble des solutions du système est $S = \{(2,-1)\}$.

Recherche individuelle ou entre pairs, environ 10 minutes.

Résolution du système S_2 de la tâche d'introduction 1.

Correction collective.

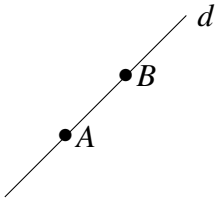
L'équation $y = -1$ a déjà été étudiée dans le système S_1. L'équation $2x + 3y = 2$ devient $y = \frac{2-2x}{3}$.



Les deux droites se coupent au point P de coordonnées $(\frac{5}{2}, -1)$. Donc l'ensemble des solutions est $S = \{(\frac{5}{2}, -1)\}$.

Cours magistral.

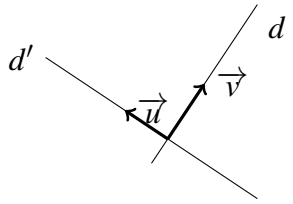
RAPPEL : Une droite est déterminée par deux points.



Un vecteur directeur de la droite d est $\overrightarrow{AB}$. Il donne la direction de la droite. Une droite peut alors être déterminée par un point et un vecteur directeur.

Cours magistral.

Définition 3. *Soient d et d' deux droites perpendiculaires. Un vecteur normal de d est un vecteur directeur de d'.*

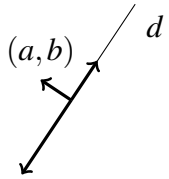


Un vecteur directeur de la droite d est $\overrightarrow{v}$. Un vecteur directeur de la droite d' est $\overrightarrow{u}$. Puisque d et d' sont perpendiculaires, un vecteur normal de d est $\overrightarrow{u}$ et un vecteur normal de d' est $\overrightarrow{v}$.

Cours magistral.

Définition 4. *Soit (a,b) les composantes d'un vecteur normal de la droite d. La droite d est l'ensemble des vecteurs orthogonaux au vecteur (a,b).*

Cet ensemble peut s'écrire comme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \cdot (a,b) = 0\}$.



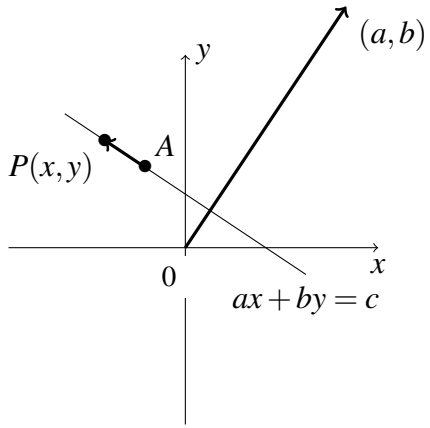
Nous établissons qu'une droite peut être déterminée par deux points, par un point et un vecteur directeur mais aussi par un point et un vecteur normal.

Cours magistral.

Propriété 5. *Toutes les droites dans le plan ont pour équation cartésienne $ax+by=c$, où $a,b,c \in \mathbb{R}$ et (a,b) est un vecteur normal (non nul) de la droite.*

Démonstration

Nous savons qu'une droite d est déterminée par deux de ses points. Soit $A(x_A, y_A)$ un point connu et fixe de la droite d. Soit $P(x,y)$ un point quelconque de la droite d.



Comme les points A et P appartiennent à la droite d, le vecteur $\overrightarrow{AP}$ est un vecteur directeur de cette droite. Puisqu'une droite est l'ensemble des vecteurs orthogonaux au

vecteur normal de la droite, nous déduisons :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AP}\cdot(a,b)=0\\
\Leftrightarrow\ &(x-x_A,y-y_A)\cdot(a,b)=0\\
\Leftrightarrow\ &(x-x_A).a+(y-y_A).b=0\\
\Leftrightarrow\ &ax-ax_A+by-by_A=0\\
\Leftrightarrow\ &ax+by=ax_A+by_A.
\end{aligned}$$

Il suffit de poser $c=ax_A+by_A$ pour obtenir $ax+by=c$.

Résolution des systèmes S_3 et S_4 de la tâche d'introduction 1.

Recherche individuelle ou entre pairs, environ 10 minutes.

Séance 3

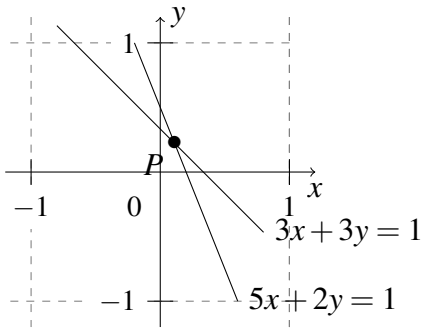
Durée : 50 minutes

Contenus : positions relatives des droites dans le plan, équations cartésiennes de plans particuliers, équations vectorielles et paramétriques des droites dans l'espace.

Correction collective.

Démarche d'interprétation géométrique dans l'espace

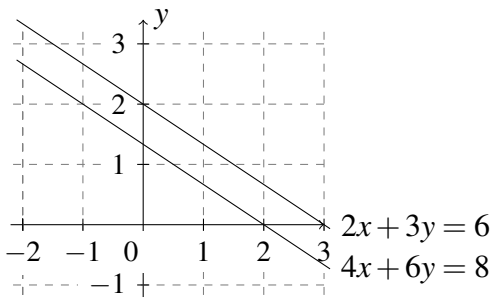
Un point et un vecteur normal des droites d'équations $5x+2y=1$ et $3x+3y=1$ sont déterminés.



L'ensemble des solutions est $S=\{(\frac{1}{9},\frac{2}{9})\}$.

Correction collective.

Un point et un vecteur normal des droites d'équations $2x+3y=6$ et $4x+6y=8$ sont déterminés.



Les deux droites sont parallèles. L'ensemble des solutions est $S=\emptyset$.

Cours magistral.

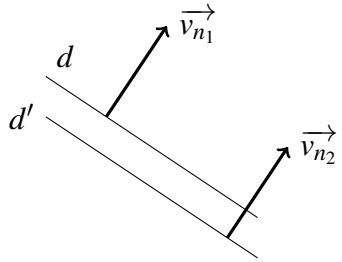
Propriété 6. *Les droites d et d' sont parallèles si et seulement si*

un vecteur normal $\overrightarrow{v_{n_1}}$ de d est colinéaire à un vecteur normal $\overrightarrow{v_{n_2}}$ de d'.

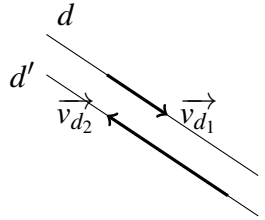
OU

un vecteur directeur $\overrightarrow{v_{d_1}}$ de d est colinéaire à un vecteur directeur $\overrightarrow{v_{d_2}}$ de d'.

Deux droites sont parallèles si et seulement si toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.



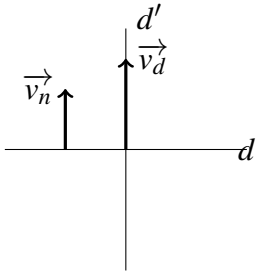
Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont la même direction.



Cours magistral.

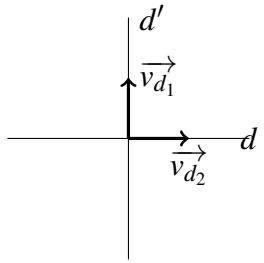
Propriété 7. *Les droites d et d′ sont perpendiculaires si et seulement si*

un vecteur normal $\overrightarrow{v_n}$ de d est colinéaire à un vecteur directeur $\overrightarrow{v_d}$ de d′.



OU

le produit scalaire entre un vecteur directeur $\overrightarrow{v_{d_1}}$ de d et un vecteur directeur $\overrightarrow{v_{d_2}}$ de d′ est nul.



Lecture de la tâche d'introduction 2.

Tâche d'introduction 2. En vous inspirant de ce qui a été fait au point 1, trouvez l'ensemble des solutions des systèmes suivants dans $\mathbb{R}^3$

$$(S_1)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4z-3=2z+1 \\ y=0 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4y+4=0 \end{cases}$$

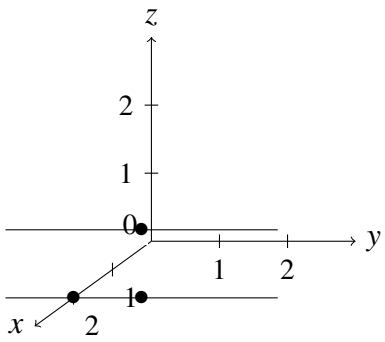
$$(S_3)\begin{cases} x=y \\ y=z \end{cases} \qquad (S_4)\begin{cases} x=\dfrac{y}{2}=z-2 \\ z=2 \end{cases}$$

$$(S_5)\begin{cases} \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z+2}{4} \\ 2x+3y+4z=5 \end{cases} \qquad (S_6)\begin{cases} 2x+3y+4z=5 \\ 6x+9y+12z=8 \end{cases}$$

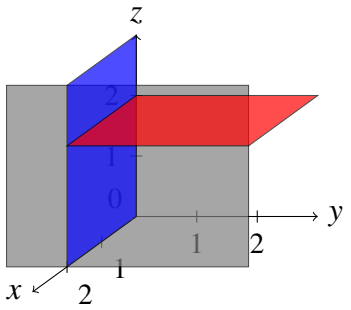
La démarche d'interprétation géométrique est étendue à l'espace.

Discussion collective pour la résolution du système S_1.

L'équation $x=2$ décrit l'ensemble des triplets (x,y,z) tels que $x=2$. La valeur de la variable x est fixée. Les variables y et z varient. Plusieurs points sont donnés et placés sur un graphique.



Puisque trois points non alignés déterminent un plan, l'équation $x = 2$ décrit un plan. De plus, ce plan est parallèle au plan Oyz. De la même façon, $z = 2$ est un plan parallèle à Oxy et $y = 0$ est un plan parallèle à Oxz (c'est même le plan Oxz).



L'intersection des trois plans donne un point. Ce point est un triplet (x,y,z) qui vérifie à la fois $x = 2$, $y = 0$ et $z = 2$. Ainsi, l'ensemble des solutions est $S = \{(2,0,2)\}$.

Cours magistral.

Définition 8. *Un plan passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ est parallèle au plan Oxy si et seulement s'il est de la forme $z = z_A$.*

Un plan passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ est parallèle au plan Oyz si et seulement s'il est de la forme $x = x_A$.

Un plan passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ est parallèle au plan Oxz si et seulement s'il est de la forme $y = y_A$.

Discussion collective pour la résolution du système S_2.

Les équations $x = 2$ et $y = -1$ décrivent deux plans. Ces deux plans sont sécants suivant une droite. Ainsi, le système formé des équations $x = 2$ et $y = -1$ décrit la droite d'intersection des deux plans.

L'ensemble des solutions du système est donc $S = \{(2, -1, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Plusieurs points appartenant à cet ensemble sont donnés et placés sur un graphique.

Un point et un vecteur directeur de la droite peuvent être déterminés.

Considérons $P(x, y, z)$ un point quelconque de cette droite. Pour l'atteindre, on part toujours de l'origine du repère, on va vers un point connu de la droite et puis on se déplace sur cette droite en considérant des multiples du vecteur directeur de cette droite. Ainsi, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{v}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

En remplaçant par les coordonnées : $(x, y, z) = (2, -1, 0) + \lambda(0, 0, 1)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Cours magistral.

Définition 9. *Une droite de l'espace passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v, z_v)$ a pour équation paramétrique :*

$$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + \lambda(x_v, y_v, z_v) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Nous insistons sur le fait qu'une droite est décrite par une seule direction. Nous n'avons donc besoin que d'un vecteur directeur pour écrire une équation la décrivant. Il y a alors un paramètre dans l'équation paramétrique. L'objet est de dimension 1.

Nous expliquons que pour chaque valeur du paramètre un unique point de la droite est associé. Les exemples suivants sont abordés :

Prenons l'équation $(x,y,z) = (2,-1,0) + \lambda(0,0,1)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si $\lambda = 0$, alors nous obtenons le point $(2,-1,0)$.
- Si $\lambda = -\frac{1}{2}$, alors nous obtenons le point $(2,-1,-\frac{1}{2})$.
- Le point $(2,-1,1)$ appartient à cette droite car il existe une valeur de λ telle que l'égalité $(2,-1,1) = (2,-1,0) + \lambda(0,0,1)$ est vraie. En effet, prenons $\lambda = 1$. On a bien $(2,-1,1) = (2,-1,0) + 1.(0,0,1)$.
- Le point $(2,-3,3)$ n'appartient pas à cette droite car on ne peut pas trouver une valeur de λ pour laquelle l'égalité $(2,-3,3) = (2,-1,0) + \lambda(0,0,1)$ est vraie. En effet, quelle que soit la valeur de λ, l'égalité $(2,-3,3) = (2,-1,0) + \lambda(0,0,1)$ n'est vraie que si $(2,-3,3) = (2,-1,\lambda)$, ce qui est impossible car $-3 \neq -1$.

Séance 4

Durée : 50 minutes

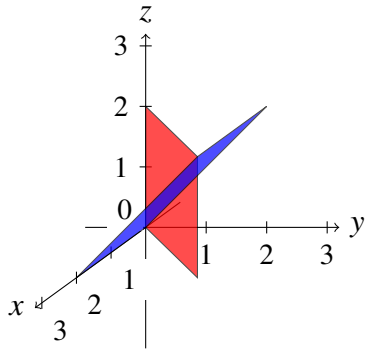
Contenus : équations cartésiennes de droites dans l'espace, point de percée d'une droite dans un plan, articulation des points de vue cartésien et paramétrique.

Discussion collective pour la résolution du système S_3.

Les systèmes d'équations cartésiennes de droites dans l'espace

L'équation $x = y$ décrit l'ensemble de tous les triplets (x,y,z) pour lesquels l'abscisse et l'ordonnée sont égales. Il n'y a aucune contrainte sur la cote. Plusieurs points sont donnés et placés sur un graphique.

Puisque nous avons au moins trois points non alignés, ils déterminent un plan. Ainsi, l'équation $x = y$ décrit un plan. De la même façon, on peut déterminer que $y = z$ est aussi un plan.



Les deux plans sont sécants suivant une droite. Ainsi, le système formé des équations $x = y$ et $y = z$ décrit la droite d'intersection des deux plans.

L'ensemble des solutions du système est donc $S = \{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Cette droite passe par le point (0,0,0) et dont un vecteur directeur est (1,1,1).

$$d \equiv (x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(1,1,1) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Discussion collective pour la résolution du système S_4.

L'équation $z = 2$ décrit un plan parallèle au plan Oxy. Nous cherchons des triplets vérifiant le système d'équations $x = \frac{y}{2} = z - 2$ et nous les plaçons sur un graphique. A cause des problèmes liés à la visualisation dans l'espace, une preuve que les points sont bien alignés doit être réalisée.

Considérons un point $P(x,y,z)$ quelconque vérifiant le système d'équations étudié. Montrons que l'ensemble des points P décrit bien une droite.

Le système d'équations $x = \frac{y}{2} = z - 2$ peut s'écrire comme $\begin{cases} 2x = y \\ x + 2 = z \end{cases}$.

Ainsi, tous les points P vérifiant ce système d'équations sont de la forme $(x, 2x, x+2)$. Nous faisons un parallèle avec les ensembles obtenus avec les systèmes étudiés précédemment. Nous pouvons dire que $\{(x, 2x, x+2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ décrit bien une droite dont un point est $A(0,0,2)$ et dont un vecteur directeur est $(1,2,1)$.

Pour résoudre le système S_4, il faut déterminer les intersections éventuelles entre une droite et un plan. La visualisation étant un aspect souvent source de difficultés, nous nous appuyons sur les positions relatives des objets entre eux en géométrie synthétique. Par élimination des cas, nous déterminons que la droite et le plan sont sécants. L'ensemble des solutions est $S = \{(0,0,2)\}$.

Cours magistral.

Définition 10. *Une droite de l'espace passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur (x_v, y_v, z_v) a pour système d'équations cartésiennes :*

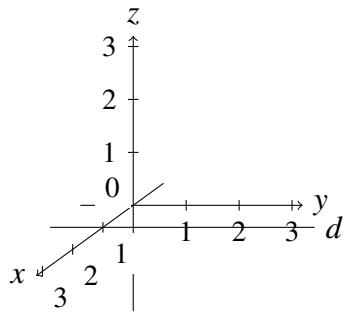
$$\frac{x - x_A}{x_v} = \frac{y - y_A}{y_v} = \frac{z - z_A}{z_v}$$

avec $x_v \neq 0$ et $y_v \neq 0$ et $z_v \neq 0$.

Nous expliquons que ce système décrit une droite quelconque et nous étudions les cas où une ou deux composantes du vecteur directeur sont nulles.

1. Si $x_v = 0$ et $y_v \neq 0$ et $z_v \neq 0$, alors :

$$\begin{cases} x = x_A \\ \frac{y - y_A}{y_v} = \frac{z - z_A}{z_v} \end{cases}$$



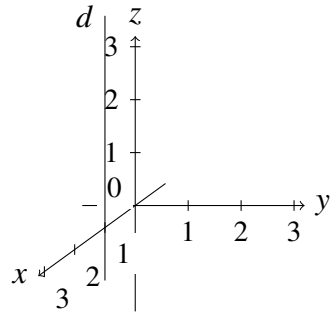
Tous les points de la droite ont une abscisse fixe, une ordonnée et une cote qui varient. La droite est parallèle au plan Oyz.

Si on a uniquement $y_v = 0$ alors on obtient un système semblable. L'ordonnée est fixe, l'abscisse et la cote varient. La droite est parallèle au plan Oxz.

Si on a uniquement $z_v = 0$ alors on obtient un système semblable. La cote est fixe, l'abscisse et l'ordonnée varient. La droite est parallèle au plan Oxy.

2. Si $x_v = 0$ et $y_v = 0$ et $z_v \neq 0$, alors :

$$\begin{cases} x = x_A \\ y = y_A \end{cases}$$



Tous les points de la droite ont une abscisse et une ordonnée fixes, seule la cote varie. La droite est parallèle à l'axe Oz.

Si on a uniquement $x_v \neq 0$ alors on obtient un système semblable. L'abscisse varie. La droite est parallèle à l'axe Ox.

Si on a uniquement $y_v \neq 0$ alors on obtient un système semblable. L'ordonnée varie. La droite est parallèle à l'axe Oy.

Discussion collective.

Les points de vue cartésien et paramétrique pour les droites ont été introduits. Nous nous intéressons à leur articulation. Pour ce faire, nous travaillons avec le système d'équations cartésiennes du système S_4.

Séance 5

Durée : 50 minutes

Contenus : équations vectorielles, paramétriques et cartésiennes de plans, déterminants, vecteur normal, description du plan comme un ensemble de vecteurs.

Discussion collective pour la résolution du système S_5.

Cours magistral.

Le passage du point de vue cartésien au point de vue paramétrique est abordé de deux façons : lire les informations et écrire directement une équation paramétrique ; poser une variable comme étant un paramètre. Le passage du point de vue paramétrique au point de vue cartésien se fait aussi de deux façons : lire les informations et écrire directement un système d'équations cartésiennes ; éliminer le paramètre.

Les équations de plans

La première équation décrit une droite passant par le point $(1,5,-2)$ et dont un vecteur directeur est $(3,2,4)$. L'équation $2x+3y+4z=5$ décrit l'ensemble des triplets (x,y,z) tels que $2x+3y+4z=5$. Plusieurs points sont donnés et placés sur un graphique. Les points n'étant pas alignés, ils déterminent un plan. Nous nous appuyons sur le fait qu'un plan est déterminé par deux droites sécantes pour expliquer que nous avons besoin de deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et d'un point A.

Définition 11. *Un plan passant par le point $A(x_A,y_A,z_A)$ et dont deux vecteurs directeurs sont (x_v,y_v,z_v) et (x_u,y_u,z_u) a pour équation paramétrique*

$$(x,y,z)=(x_A,y_A,z_A)+\lambda(x_v,y_v,z_v)+\mu(x_u,y_u,z_u),\ \textit{où}\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Nous attirons l'attention des élèves sur le fait qu'il y a deux directions. Nous avons donc besoin de deux vecteurs directeurs pour écrire une équation paramétrique et donc deux paramètres. Un plan est un objet de dimension 2.

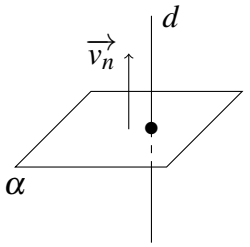
Nous prenons les points proposés par les élèves pour déterminer une équation paramétrique du plan. Puisque nous avons deux descriptions différentes d'un même objet, nous nous intéressons à l'articulation des points de vue cartésien et paramétrique, et ce dans les deux sens, à partir de l'exemple.

Discussion collective.

Le passage du point de vue cartésien au point de vue paramétrique se fait en posant deux variables comme étant deux paramètres. Nous étendons la méthode proposée pour les droites. Le passage du point de vue paramétrique au point de vue cartésien est réalisé en éliminant les deux paramètres.

Cours magistral.

Définition 12. *Soit une droite d perpendiculaire au plan α. Un vecteur normal du plan α est un vecteur directeur de la droite d.*

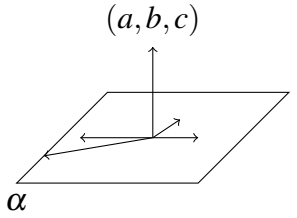


Puisque la droite d et le plan α sont perpendiculaires, d est perpendiculaire à toutes les droites incluses au plan α. Un vecteur directeur de la droite d est orthogonal aux vecteurs directeurs du plan α.

Cours magistral.

Définition 13. *Soit (a,b,c) les composantes d'un vecteur normal du plan α. Le plan α est l'ensemble des vecteurs orthogonaux au vecteur (a,b,c).*

Cet ensemble peut s'écrire comme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) \cdot (a,b,c) = 0\}$.



Nous amenons une équation cartésienne générale pour les plans dans l'espace en partant de cette définition.

Soit $P(x,y,z)$ un point quelconque du plan α. Soit $A(x_A,y_A,z_A)$ un point donné du plan α.

Le vecteur $\overrightarrow{AP}$ est un vecteur directeur du plan et a pour composantes $(x-x_A, y-y-A, z-z_A)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}(a,b,c)\cdot(x-x_A,y-y-A,z-z_A)&=0\\ a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)&=0\\ ax-ax_A+by-by_A+cz-cz_A&=0\\ ax+by+cz&=ax_A+by_A+cz_A\end{aligned}$$

En posant $d=ax_A+by_A+cz_A$, nous obtenons alors l'équation $ax+by+cz=d$.

Propriété 14. *Un plan a pour équation cartésienne $ax+by+cz=d$ où $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ et (a,b,c) est un vecteur normal (non nul) au plan.*

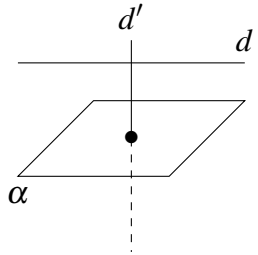
Nous faisons remarquer qu'un plan peut alors être déterminé par trois points non alignés, par un point et deux vecteurs directeurs non colinéaires ou par un point et un vecteur normal.

Le plan d'équation $2x+3y+4z=5$ est un plan dont un vecteur normal est $(2,3,4)$ et passant par le point $(0,0,\frac{5}{4})$.

Discussion collective pour la résolution du système S_5.

Pour résoudre le système S_5, nous devons chercher l'intersection entre une droite et un plan. Les différentes positions relatives entre les deux objets sont données par la géométrie synthétique. Nous pouvons trouver un point de la droite n'appartenant pas au plan. La droite n'est donc pas incluse au plan. Nous regardons si la droite est parallèle distincte au plan.

Nous nous appuyons sur le résultat suivant : une droite est parallèle à un plan si une droite perpendiculaire au plan est perpendiculaire à la droite.



Nous utilisons le fait qu'un vecteur normal au plan est un vecteur directeur d'une droite qui lui est perpendiculaire. Nous établissons alors que deux droites sont orthogonales si et seulement si un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre. Nous calculons donc un produit scalaire entre les vecteurs $(2,3,4)$ et $(3,2,4)$. Ce produit scalaire n'étant pas nul, la droite n'est pas parallèle au plan. Ils ne peuvent donc être que sécants.

Séance 6

Durée : 50 minutes

Contenus : parallélisme d'une droite et d'un plan, perpendicularité d'une droite et d'un plan, parallélisme de deux plans, perpendicularité de deux plans, résolutions d'exercices.

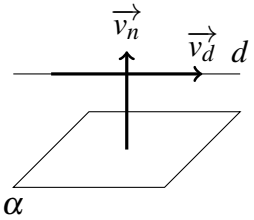
Cours magistral.

Les positions relatives des droites et des plans

Propriété 15. *Soient la droite d et le plan α. Le plan α est parallèle à la droite d si et seulement si le produit scalaire entre un vecteur normal $\overrightarrow{v_n}$ du plan et un vecteur directeur $\overrightarrow{v_d}$ de la droite est nul.*

Autrement dit,

$$\alpha \parallel d \Leftrightarrow \overrightarrow{v_n} \cdot \overrightarrow{v_d} = 0.$$



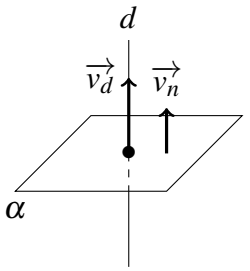
Un vecteur normal du plan est un vecteur directeur d'une droite perpendiculaire au plan. Deux droites sont orthogonales si et seulement si le produit scalaire entre leurs vecteurs directeurs est nul.

Cours magistral.

Propriété 16. *Soient la droite d et le plan α. Le plan α est perpendiculaire à la droite d si et seulement si un vecteur normal $\overrightarrow{v_n}$ du plan est colinéaire à un vecteur directeur $\overrightarrow{v_d}$ de la droite.*

Autrement dit,

$$\alpha \perp d \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}_0, \overrightarrow{v_n} = k\,\overrightarrow{v_d}.$$



Un vecteur normal du plan est un vecteur directeur d'une droite perpendiculaire au plan. Deux droites perpendiculaires au même plan sont parallèles entre elles.

Discussion collective pour la résolution du système S_5.

Pour éviter les problèmes liés à la visualisation dans l'espace, nous déterminons algébriquement le point de percée de la droite dans le plan.

Par facilité, nous résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} (x,y,z) = (1,5,-2) + \lambda(3,2,4) \\ 2x+3y+4z = 5. \end{cases}$$

Le point de percée de la droite dans le plan a pour coordonnées : $(\frac{4}{7}, \frac{33}{7}, \frac{-18}{7})$. L'ensemble des solutions est $S = \{(\frac{4}{7}, \frac{33}{7}, \frac{-18}{7})\}$.

Discussion collective pour la résolution du système S_6.

Les deux équations représentent des plans dont l'un a un vecteur normal qui est $(2,3,4)$ et l'autre a un vecteur normal qui est $(6,9,12)$. Ces deux plans sont parallèles

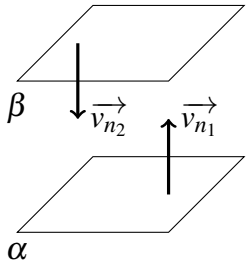
distincts. L'ensemble des solutions de ce système est $S = \emptyset$. Nous lions la position relative de ces deux plans à la colinéarité de leurs vecteurs normaux.

Cours magistral.

Propriété 17. *Soient α et β deux plans. Le plan α est parallèle au plan β si et seulement si un vecteur normal $\overrightarrow{v_{n_1}}$ de α est colinéaire à un vecteur normal $\overrightarrow{v_{n_2}}$ de β.*

Autrement dit,

$$\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}_0, \overrightarrow{v_{n_1}} = k\,\overrightarrow{v_{n_2}}.$$



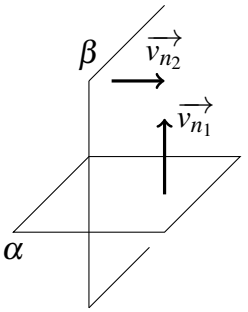
Un vecteur normal du plan est un vecteur directeur d'une droite perpendiculaire au plan. Une droite perpendiculaire à un plan coupe perpendiculairement tout plan qui lui est parallèle.

Cours magistral.

Propriété 18. *Soient α et β deux plans. Le plan α est perpendiculaire au plan β si et seulement si le produit scalaire entre un vecteur normal $\overrightarrow{v_{n_1}}$ de α et un vecteur normal $\overrightarrow{v_{n_2}}$ de β est nul.*

Autrement dit,

$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \overrightarrow{v_{n_1}} \cdot \overrightarrow{v_{n_2}} = 0.$$



Un vecteur normal du plan α est un vecteur directeur d'une droite d perpendiculaire au plan. Un vecteur normal du plan β est un vecteur directeur d'une droite d' perpendiculaire au plan. Deux droites sont orthogonales si et seulement si le produit scalaire entre leurs vecteurs directeurs est nul.

Recherche individuelle ou entre pairs, environ 10 minutes.

Correction collective.

Exercice 1.
1. *Donnez une équation paramétrique de la droite d passant par les points $A(-2,0,-3)$ et $B(-1,4,-3)$.*
2. *Si le point C appartient à la droite d, est-il possible que son abscisse soit égale à 1 ? Si oui, donnez ses coordonnées. Si non, justifiez votre réponse.*
3. *Le point $D(4,1,-3)$ appartient-il à la droite d ?*

Recherche individuelle ou entre pairs, environ 5 minutes.

Correction collective.

Exercice 2. *Déterminez un système d'équations cartésiennes de la droite d passant par le point $A(2,-1,3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}(0,-1,2)$.*

Séance 7

Durée : 50 minutes

Contenus : résolution d'exercices.

Recherche individuelle ou entre pairs, environ 15 minutes.

Correction collective.

Exercice 3. *Donnez un point et un vecteur directeur de chacune des droites suivantes :*

1. $1-x=\dfrac{3y-3}{2}=\dfrac{7+z}{5}$.
2. $\dfrac{2x-3}{2}=\dfrac{y-4}{5}=3z+2$.
3. $\begin{cases} x=1 \\ y=3k \\ z=1-2k \end{cases}$ *où* $k\in\mathbb{R}$.
4. $\begin{cases} x=1 \\ y-3=0 \end{cases}$.

Recherche individuelle ou entre pairs, environ 5 minutes.

Correction collective.

Exercice 4. *Donnez une équation paramétrique du plan* α *défini par les vecteurs directeurs* $\overrightarrow{u}(1,1,1)$ *et* $\overrightarrow{v}(1,0,2)$ *et passant par le point* $A(1,2,3)$. *Le point* $B(1,3,2)$ *appartient-il au plan* α *?*

Recherche individuelle ou entre pairs, environ 5 minutes.

Correction collective.

Exercice 5. *Est-il vrai de dire que le vecteur* $(-2,4,-\frac{2}{\pi})$ *est un vecteur normal du plan* $\beta\equiv-\pi x+2\pi y-z=\pi$ *?*

Séance 8

Durée : 50 minutes

Contenus : résolution d'exercices.

Recherche individuelle ou entre pairs, environ 10 minutes. Correction collective.

Exercice 6. *Quelle est une équation cartésienne du plan α comprenant le point $P(1,2,-3)$ et dont deux vecteurs directeurs sont $\overrightarrow{u}(3,0,2)$ et $\overrightarrow{v}(2,-1,3)$?*

Recherche individuelle ou entre pairs, environ 5 minutes.

Correction collective.

Exercice 7. *Donnez une équation vectorielle, paramétrique et cartésienne du plan α comprenant les droites $d_1 \equiv (x,y,z) = (1,2,3) + \lambda(2,-1,3)$ et $d_2 \equiv (x,y,z) = (0,-2,1) + \mu(-4,2,-6)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

Recherche individuelle ou entre pairs, environ 5 minutes.

Correction collective.

Exercice 8. *Donnez une équation paramétrique du plan α sachant qu'il passe par le point $P(3,4,5)$ et dont un vecteur normal est $(2,6,4)$.*

Séance 9

Durée : 50 minutes

Contenus : résolution d'exercices.

Recherche individuelle ou entre pairs, environ 5 minutes.

Correction collective.

Exercice 9. *Les plans $\alpha \equiv x - 2y + 3z = 4$ et $\beta \equiv -2x + 5y + 4z = 1$ sont-ils perpendiculaires ? Expliquez votre démarche.*

Recherche individuelle ou entre pairs, environ 5 minutes.

Correction collective.

Exercice 10. *Déterminez une équation cartésienne du plan* α *comprenant le point* $(42, -3, 1)$ *et parallèle au plan* $\delta \equiv -2x + z + 1 = 0$.

Recherche individuelle ou entre pairs, environ 5 minutes.

Correction collective.

Exercice 11. *Déterminez une équation cartésienne du plan* β *comprenant le point* $A(1, 3, -2)$ *parallèle à* $d \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y}{3} + 1 = \frac{1-z}{-3}$ *et perpendiculaire au plan* $\alpha \equiv 2x - 3y + 2z = 1$.

Recherche individuelle ou entre pairs, environ 5 minutes.

Correction collective.

Exercice 12. *Quel objet géométrique est réprésenté par l'ensemble* $\{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2, x_3)$ *est un vecteur orthogonal à* $(-1, 3, 0)\}$ *?*

Séance 10

Durée : 50 minutes

Contenus : résolution d'exercices.

Recherche individuelle ou entre pairs, environ 10 minutes.

Correction collective.

Exercice 13. *Soit le système*

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 5x - 3y = 1. \end{cases}$$

Quelles sont les solutions de ce système dans le plan $\mathbb{R}^2$ *? Interprétez géométriquement les résultats obtenus. Quelles sont les solutions de ce système dans l'espace* $\mathbb{R}^3$ *? Interprétez géométriquement les résultats obtenus.*

Recherche individuelle ou entre pairs, environ 10 minutes.

Correction collective.

Exercice 14. *Donnez une équation cartésienne du plan* α *passant par le point* $(-1, 0, 2)$ *et perpendiculaire à la droite d'intersection des plans d'équations* $4x + 2y + 2z = -1$ *et* $3x - 2y + 3z = 7$.

Recherche individuelle ou entre pairs, environ 5 minutes.

Correction collective.

Séance 11

Durée : 50 minutes

Contenus : résolution d'exercices.

Recherche individuelle ou entre pairs, environ 5 minutes. Correction collective.

Recherche individuelle ou entre pairs, environ 15 minutes.

Correction collective.

Recherche individuelle ou entre pairs, environ 10 minutes.

Correction collective.

Exercice 15. *Soient les plans* $\alpha \equiv 2x+y+z=1$, $\beta \equiv x+y+z=2$ *et* $\gamma \equiv x+y+z=0$. *Recherchez l'ensemble des points d'intersection de ces trois plans. Expliquez votre démarche.*

Exercice 16. *Quel est l'objet géométrique décrit par l'ensemble* $\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ *? Expliquez votre démarche.*

Exercice 17. *Soient le plan* $\alpha \equiv 4x-z=1-2y$ *et le point P de coordonnées* $(0,-2,3)$. *Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite d passant par le point P et perpendiculaire au plan* α. *Déterminez ensuite le point d'intersection entre la droite d et le plan* α.

Exercice 18. *Soit le système*

$$\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ 3x+2y-5z=2. \end{cases}$$

Décrivez géométriquement l'ensemble des solutions de ce système. Expliquez votre démarche. Déterminez ensuite algébriquement quel est cet ensemble de solutions.

Séance 12

Durée : 50 minutes

Contenus : résolution d'exercices.

Recherche individuelle ou entre pairs, environ 10 minutes.

Correction collective.

Exercice 19. *Quel est l'ensemble des vecteurs (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux aux droites d_1 et d_2 définies par*

$$d_1 \equiv 1-x = \frac{y+2}{-3} = \frac{-z+2}{-1}$$

$$d_2 \equiv (x,y,z) = (3\lambda+1, -\lambda-2, 5+\lambda), \lambda \in \mathbb{R}?$$

Décrivez géométriquement l'ensemble obtenu.

Recherche individuelle ou entre pairs, environ 10 minutes.

Correction collective.

Exercice 20. *Soit le système*

$$\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ 4x+2y+2z=6. \end{cases}$$

Décrivez géométriquement l'ensemble des solutions de ce système. Expliquez votre démarche. Déterminez ensuite algébriquement quel est cet ensemble de solutions.

Recherche individuelle ou entre pairs, environ 10 minutes.

Correction collective.

Exercice 21. *Soit le système*

$$\begin{cases} \frac{x-1}{3} = 1 + \frac{1}{2}y = \frac{2z+3}{-10} \\ 3x+2y-5z=2. \end{cases}$$

Décrivez géométriquement l'ensemble des solutions de ce système. Expliquez votre démarche. Déterminez ensuite algébriquement quel est cet ensemble de solutions.

Séance 13

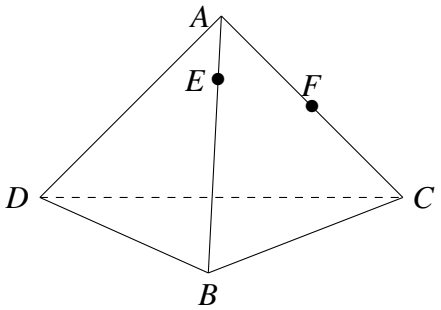
Durée : 50 minutes

Contenus : résolution d'exercices.

Recherche individuelle ou entre pairs, environ 20 minutes.

Correction collective.

Exercice 22. *Soit le tétraèdre ABCD suivant.*



1. *Déterminez synthétiquement le point de percée de la droite passant par les points E et F dans le plan BCD.*
2. *Considérons un repère orthonormé* $(D, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. *Les coordonnées des points A, B et C sont respectivement* $(0,2,2)$, $(2,3,0)$ *et* $(0,4,0)$. *Les points E et F sont définis comme étant* $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. *Déterminez analytiquement le point de percée de la droite passant par les points E et F dans le plan BCD.*

Séance 14

Durée : 50 minutes

Contenus : résolution d'exercices.

Discussion collective.

Exercice 23. *Une épreuve de sélection est organisée dans le cadre d'un jeu télévisé. Les candidats doivent répondre à trois questionnaires, côtés sur 20, mais avec des pondérations différentes. Le premier questionnaire porte sur l'histoire des sciences et des techniques (pondération 2), le deuxième sur la géographie de l'Europe (pondération 1) et le dernier comprend des questions de culture générale (pondération 2). Un candidat est sélectionné s'il a obtenu au moins 50 points sur 100. Les notes possibles des candidats dans chacune des matières sont représentées par les variables x (histoire des sciences et techniques), y (géographie) et z (culture générale). Un point $P(x,y,z)$ est associé à chaque candidat.*

1. *Dans quelle partie de l'espace sont situés les points P ? Représentez-la.*
2. *Dans quelle partie de l'espace sont situés les points associés aux candidats ayant obtenu 50 points ? Représentez-la.*
3. *Est-il possible de trouver un candidat qui a eu 50 points à l'examen en ayant eu une note de 0 en histoire des sciences et des techniques ? Même question s'il a eu 0 en géographie, puis 0 en culture générale.*
4. *Est-il possible de trouver un candidat qui a réussi l'examen avec une note strictement supérieure à 50 mais qui a eu une note de 0 en histoire des sciences et techniques ?*
5. *On veut qu'un candidat ayant eu 8 en histoire des sciences et des techniques, 12 en géographie de l'Europe et 9 en culture générale soit sélectionné. Quelles sont les valeurs des pondérations a, b et c que l'on doit choisir pour qu'il soit sélectionné ? Donnez, si possible, un exemple de pondération acceptée.*

Séance 15

Durée : 50 minutes

Contenus : distance entre deux points, distance entre un point et un plan, résolution d'exercices.

Cours magistral.

Discussion collective.

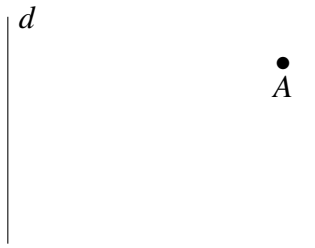
Distance

Nous étendons la formule pour calculer la distance entre deux points du plan à l'espace.

Définition 19. *La distance entre deux points de l'espace $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ est donnée par :*

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Nous établissons une démarche pour calculer la distance entre un point et une droite et la distance entre un point et un plan.

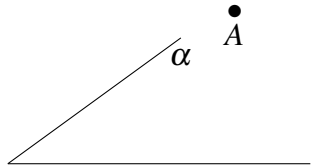


MÉTHODE :

① Chercher un plan α perpendiculaire à la droite d et comprenant le point A.

② Déterminer l'intersection de la droite et du plan. Nommons le point B.

③ Calculer la distance entre les points A et B.



MÉTHODE :

① Chercher une droite d perpendiculaire au plan α et comprenant le point A.

② Déterminer l'intersection de la droite et du plan. Nommons le point B.

③ Calculer la distance entre les points A et B.

Cours magistral.

Définition 20. *La distance d'un point $A(x_A, y_A)$ à un plan α dont une équation cartésienne est $ax + by + cz = d$ est donnée par :*

$$dist(A, \alpha) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Démonstration

La première étape de notre démarche est de déterminer une droite d perpendiculaire au plan α passant par le point A. Posons que le plan $\alpha \equiv ax + by + cz = d$.

Puisque la droite d est perpendiculaire au plan α, un vecteur directeur de la droite d est un vecteur normal au plan α. Nous savons alors :

$$d \equiv (x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + \lambda(a, b, c), \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

La deuxième étape de notre démarche est de chercher les coordonnées du point de percée B de la droite d dans le plan α. Ce point $B(x, y, z)$ doit donc vérifier à la fois les équations de d et de α. Ainsi, il doit vérifier l'égalité suivante :

$$a(x_A + \lambda a) + b(y_A + \lambda b) + c(z_A + \lambda c) = d.$$

Nous isolons λ et nous obtenons : $\lambda = \dfrac{d - ax_A - by_A - cz_A}{a^2 + b^2 + c^2}$. Avec cette valeur de λ, nous avons les coordonnées du point B : $(x_A + \lambda, y_A + \lambda, z_A + \lambda)$.

La dernière étape de notre démarche consiste à calculer la distance entre les points

A et B. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{AB}\| &= \sqrt{(x_A - x_A - \lambda a)^2 + (y_A - y_A - \lambda b)^2 + (z_A - z_A - \lambda c)^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2(a^2+b^2+c^2)} \\ &= \sqrt{\frac{d - ax_A - by_A - cz_A}{a^2+b^2+c^2}} \\ &= \frac{|ax_A + by_A + cz_A - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.\end{aligned}$$

Recherche individuelle ou entre pairs, environ 5 minutes.

Correction collective.

Séance 16

Durée : 50 minutes

Contenus : résolution d'exercices.

Recherche individuelle ou entre pairs, environ 5 minutes.

Correction collective.

Exercice 24. *Calculez la distance du point* $B(-2,-4,3)$ *au plan* $\beta \equiv 2x - y + 2z + 3 = 0$.

Exercice 25. *Calculez la distance entre les plans* $\alpha \equiv 2x + 3y - z + 1 = 0$ *et* $\delta \equiv 2x + 3y - z - 5 = 0$.

Recherche individuelle ou entre pairs, environ 5 minutes.

Correction collective.

Exercice 26. *Calculez la distance entre le point* $E(5,-3,1)$ *et la droite*

$$d \equiv \begin{cases} x = 4+3k \\ y = 5-7k \\ z = 6+k \end{cases}$$

où $k \in \mathbb{R}$.

Recherche individuelle ou entre pairs, environ 15 minutes.

Correction collective.

Exercice 27. *On considère trois points A, B et C de coordonnées respectives* $(3,0,3)$, $(3,3,0)$ *et* $(0,3,3)$. *Ces trois points forment un tétraèdre avec l'origine du repère.*

1. *Représentez ce tétraèdre.*
2. *Ce tétraèdre est-il régulier ? Justifiez votre réponse.*
3. *Calculez la distance entre le sommet O et la face ABC du tétraèdre.*

3 Élaboration d'un guide d'entretien

Comme nous l'avons déjà précisé, il nous a semblé important de présenter notre séquence d'enseignement aux enseignants que nous avons sélectionnés dans notre étude de terrain. En effet, selon Robert (2003b), la distance entre l'accès qu'un enseignant peut avoir aux séquences de type ingénierie, résultat de la recherche, et à leur utilisation en classe peut être importante voire infranchissable. De ce fait, nous avons voulu savoir si notre « idéal didactique » est en réalité « didactiquement possible ». Cela permet aussi de présenter aux enseignants un produit issu de la recherche en didactique des mathématiques pour l'enseignement secondaire. Cela nous parait d'autant plus important au vu de la place réduite occupée par la recherche en didactique des mathématiques en Belgique. Nous exposons ici notre guide d'entretien et ajoutons les objectifs que nous nous sommes fixée. Les réponses des enseignants sont données au point suivant.

Nous avons voulu savoir, dans un premier temps, si les enseignants suivis dans notre étude de terrain sont conscients des difficultés rencontrées par leurs élèves pour les notions de géométrie analytique dans l'espace. Nous avons donc posé dans un premier volet les questions suivantes :

Les difficultés des élèves

① Avez-vous déjà repéré des difficultés chez vos élèves lorsque vous abordez le chapitre des équations de droites et de plans dans l'espace ?

② En particulier, avez-vous déjà constaté une difficulté des élèves à interpréter géométriquement les équations ?

③ Est-ce que vous essayez de tenir compte de ces difficultés ? Est-ce que vous mettez en place quelque chose pour les surmonter ?

Nous pensons qu'il est possible d'attraper via ces questions des éléments permettant de mettre des mots sur leurs pratiques en expliquant certains choix qu'ils ont pu faire dans leur scénario. Nous nous sommes concentrée, dans un deuxième temps, sur les difficultés que les élèves peuvent rencontrer à propos des équations. Il nous semble important de savoir si les enseignants sont conscients du travail réalisé sur les équations avant la quatrième année et du changement de regard à adopter sur celles-ci lorsque les chapitres de géométrie analytique sont étudiés. Le deuxième volet contient donc les questions suivantes :

Les équations

① La notion d'« équation » est abordée depuis la première secondaire par vos élèves. Le travail effectué concerne essentiellement les différentes méthodes de résolution d'équations ou de systèmes d'équations. Dans les chapitres de géométrie analytique, ce n'est plus la résolution des équations qui est importante mais la description des objets géométriques par des équations. Etes-vous conscients de ce changement de regard sur les équations à adopter ?

② Pensez-vous qu'il est important que les élèves soient conscients de ce changement de regard sur les équations ? Est-ce que vous insistez sur ce changement de regard ?

③ Pensez-vous qu'il est difficile pour les élèves d'effectuer ce changement de regard ?

④ Que faites-vous pour que vos élèves comprennent qu'un objet géométrique décrit par une équation est un ensemble de triplets ayant certaines caractéristiques ?

Enfin, nous présentons notre séquence aux enseignants en expliquant nos objectifs et en mettant en évidence le levier de l'interprétation géométrique. Nous voulons connaître l'avis des enseignants sur sa faisabilité en classe, notamment parce que nous ne connaissons pas bien le public auquel elle s'adresse. Nous souhaitons donc savoir si notre séquence est didactiquement possible et si les enseignants souhaitent la tester en classe. Ainsi, le troisième volet de notre guide d'entretien est le suivant :

La séquence

① Que pensez-vous de l'activité d'introduction ?

② Pensez-vous que la séquence soit réalisable (timing, difficulté, public) ?

③ Que pensez-vous des exercices proposés ?

④ Pensez-vous que la séquence permette aux élèves de développer leur interprétation géométrique et de comprendre le changement de regard à adopter sur les équations ?

⑤ Seriez-vous prêt à utiliser cette séquence dans vos classes ?

Nous avons passé 5 entretiens. La durée de ceux-ci est d'environ 45-50 minutes (1 heure pour P_3). Nous abordons maintenant les réponses fournies par les cinq enseignants.

4 Entretiens avec les enseignants

Nous présentons, ici, quelques éléments de réponse fournis par les cinq enseignants interrogés lors de nos entretiens. Certaines réponses sont similaires d'un enseignant à l'autre. C'est pourquoi nous les présentons globalement et non enseignant par enseignant. De plus, certaines réponses sortent du cadre du chapitre de géométrie analytique dans l'espace et abordent l'enseignement en général ou la surcharge du programme scolaire. De ce fait, nous ne présentons pas l'entièreté des réponses fournies. Les transcriptions complètes des cinq entretiens sont proposées en annexe E.

Plusieurs difficultés sont repérées par les enseignants interrogés. Ils citent entre autres des erreurs liées à la visualisation des problèmes géométriques, à certaines ruptures causées par l'extension des notions de géométrie analytique plane à l'espace, à une mobilisation trop importante de prérequis et à un manque de sens accordé à la notion d'équation. Nous avons sélectionné plusieurs extraits qui illustrent ces réponses dont l'un représente un échange avec nous (lettre **C**).

P_1 : Dans mon souvenir, je pense que ça s'était relativement bien passé, mais il y avait beaucoup de propriétés liées à la visualisation directement avec des plans parallèles… quels critères avec plans, droites parallèles.

C: Ok. Donc plutôt visualiser les positions relatives…

P_1 : Voilà.

C: … des objets entre eux.

P_1 : C'est ça.

C: Et ça serait plutôt partir d'une position relative précise et arriver à déduire la position… fin… des conditions sur les vecteurs ou plutôt à partir de conditions particulières de déduire la position relative des objets ?

P_1 : À partir des conditions voir la position que ça a.

C: Ok. Donc…

P_1 : Parce que dès que je faisais les petits dessins au tableau et qu'on mettait un vecteur normal ou un vecteur directeur, y avait pas de souci, ils savaient me dire que les vecteurs devaient être parallèles, colinéaires ou perpendiculaires.

C: Ok. Donc c'était dessiner.

P_1 : Oui.

P_3 : Et je pense aussi la difficulté […] qu'ils ont eux, je parle pas en général car il y a des élèves où ça va nickel, mais je pense que c'est tellement plein de petits prérequis : travail de systèmes, les fractions, les additions, la mise en évidence, la simplification, la visualisation, composante qui est nulle qu'est-ce qu'on doit faire, etc. et des petits chemins à prendre, que forcément tout ça mis en bloc si y en a un qui déraille alors forcément pour aller à l'accomplissement de la tâche, qui est de trouver l'équation, ben ils ont du mal et surtout ils ne se remettent pas en question.

P_4 : Oui. Je dirais pour moi, la plus grosse difficulté c'est peut-être le côté abstrait des équations vectorielles et paramétriques avec justement le paramètre k, à quoi il sert, c'est quoi vraiment son rôle. k c'est pas la même chose que x et y pourtant c'est une lettre aussi pour eux. Ils ont vraiment du mal à distinguer […] le x, y, z du k. Pour moi ça c'est la plus grosse difficulté.

P_5 : Au niveau des équations de droites, oui, parce que eux ils s'attendent toujours à avoir une équation et alors quand on parle d'une double égalité, de deux équations, ben voilà, ils ont du mal d'appréhender le fait qu'un objet soit défini par deux équations et pas par une équation comme ils ont l'habitude d'avoir.

Les enseignants débutants (P_1 et P_4) citent également une difficulté des élèves à interpréter géométriquement les équations, difficulté à laquelle ils ne s'attendaient pas comme en témoigne l'extrait suivant.

P_1 : Je l'ai remarquée sans prévoir ce problème. Du coup, je ferais peut-être plus de rappels au début de chaque cours, vraiment rappeler les différentes équations, les types d'équations pour un plan ou pour une droite, remontrer en 5 minutes peut-être à chaque fois quelles sont les différences mais après comment passer au-dessus de cette difficulté là autrement je n'ai pas encore d'idée.

Les enseignants experts considèrent que cela peut être problématique au début du chapitre car la démarche n'est pas naturelle pour les élèves mais qu'en insistant de nombreuses fois sur ce que décrit une équation, cela semble moins problématique. Notons que l'enseignant P_5 insiste effectivement à de nombreuses reprises sur ce que signifie la notion d'équation. Les extraits suivants illustrent cela lors d'un échange avec nous (lettre **C**).

C: Est-ce que vous, vous avez constaté des difficultés chez vos élèves à interpréter géométriquement justement les équations ?

P_2: Chez certains oui. Parce que chez certains, je dirais ils étudient plus des techniques de calculs sans savoir vraiment ce qu'ils font. Ils savent que dans telle situation ben on va prendre ça, on va calculer un vecteur directeur, on va s'arranger pour qu'il soit perpendiculaire à deux autres pour avoir des plans ou ce genre de choses.

C: C'est plus une recette.

P_2: Voilà et donc là si en cours de route il y a quelque chose qui ne tombe pas bien pour eux ou s'ils font une erreur, ils ne s'en rendent pas compte, même à la fin au niveau de l'interprétation, ils ne vont pas s'en rendre compte. Et puis, il y a forcément la tranche où là ils [...] comprennent bien, vraiment bien, ce qu'ils font et là [...] ça va assez bien si on leur demande d'interpréter parce que c'est pas naturel chez les élèves de le faire. Ils font un calcul, ils ont un résultat [...] et c'est tout. [...] Et si on demande de vérifier la plausibilité du résultat ou ce genre de choses, [...] certains vont le faire correctement, d'autres... plausibilité du résultat, déjà c'est quoi ça [...]. En règle générale ils ne cherchent pas à voir si ce qu'ils ont calculé peut fonctionner par rapport à l'énoncé géométrique qu'ils ont. Le calcul est nettement plus confortable à manipuler donc euh voilà on a calculé, on a un résultat, c'est bon.

C: Ok. Justement, est-ce que dans le cours que vous avez fait vous tenez compte des difficultés que vous venez de me dire ? Et si oui, comment vous faites ?

P_2: [...] je demandais, plus avant, de me décrire ce qu'on allait faire avant de le faire. Et puis après ben de temps à autre [...] je pose la question. C'est la façon la plus je dirais économe en temps, c'est de poser la question en espérant que si on la pose régulièrement eux vont penser à le faire.

P_5: En insistant. Oui, vraiment, en insistant sur l'interprétation géométrique je pense que finalement ils font le lien entre les deux. Si on se borne juste à des équations, ils font du calcul, point. J'insiste toujours, déjà en quatrième d'ailleurs pour une équation de droites dans le plan [...]. Pour moi, c'est important de pas juste faire des calculs, des résolutions d'équations, des résolutions de systèmes parce que... c'est rassurant les calculs mais je trouve qu'il est plus utile de savoir ce qu'on fait que de le faire, point.

L'enseignant expérimenté P_3 considère que l'interprétation géométrique n'est pas utile dans le chapitre de géométrie analytique dans l'espace. Il ne la travaille donc pas au sein de ce chapitre mais plutôt pour le chapitre sur les coniques. Il est intéressant de noter

que c'est justement l'enseignant qui ajoute le plus de commentaires dans son discours quant à l'interprétation géométrique des équations cartésiennes de droites particulières.

P_3 : Ouais. Je sais pas. Pour moi, au niveau objet, je trouvais ça plus [...] pour les coniques, tout ce qui est hyperbole etc., je trouve qu'au niveau de la représentation [...] c'était moins intuitif. Il faut plus travailler là-dessus. Mais là je sais pas, c'est une droite, c'est une équation comme ça, un plan c'est une équation ainsi. Tu vois ? Tu as un objet qui est quand même [...] classique.

Quatre des cinq enseignants (tous sauf P_3) disent qu'ils sont conscients qu'un changement de regard sur les équations doit être effectué au sein de ce chapitre. Ils s'en rendent bien souvent compte parce que les élèves ont le réflexe de résoudre les équations qu'ils doivent manipuler. Ainsi, bien que ce changement soit difficile pour les élèves, ces enseignants estiment qu'il est important que les élèves puissent distinguer « résoudre une équation » et « décrire un objet géométrique par une équation ». Seuls les enseignants experts disent mettre des choses en place en classe pour que les élèves y parviennent. L'enseignant P_2 demande avant chaque exercice qu'elle est la démarche à suivre pour résoudre la tâche afin de s'assurer qu'ils ne résolvent pas les équations. Ceci explique certainement les nombreuses aides procédurales repérées chez cet enseignant lors de notre étude de terrain. Les extraits suivants illustrent ce fait.

P_2 : Oui, y a ce que moi j'appelle la représentation mentale de l'objet [...]. On a une équation et donc il faut s'imaginer ce que ça peut être, droite, plan, plan particulier, droite particulière. En tout cas au début et puis forcément la résolution ça va être pour chercher des choses particulières de ces objets là. [...] Je ne sais pas si j'insiste vraiment là-dessus mais je pense que j'en parle parce que ceux qui ne savent pas vraiment quoi faire, ils ont une équation ben qu'est-ce qu'ils font, ils essayent de résoudre. Et quand on a une équation de droite ou de plan, on a beau essayer de résoudre une équation si on sait pas ce qu'on cherche ben voila [...]. Les x les embêtent, ils vont le remplacer par 0 ou par 1. Je ne sais pas pourquoi. Si c'est des nombres qui ont des statuts particuliers mais voilà. Je dirais que ça vient même avant, quand on est avec des bêtes, des simples équations de droites. Il y en a qui savent pas quoi faire et ils cherchent. On sait résoudre des équations et ils le font à fond. C'est pour ça que je demande avant un canevas de ce que l'on va faire et les outils avant de le faire quoi, avoir une stratégie avant de se lancer.

P_1 : Moi j'étais consciente mais le fait que cela pose problème j'en étais pas consciente. Là je l'ai vu parce qu'à chaque fois [...] ils me cherchaient, par exemple pour l'équation d'un plan, équation cartésienne d'un plan, ils me cherchaient x, y et z mais ils ne savaient pas me les trouver [...]. Je ne comprenais pas pourquoi ils faisaient ça. Cette année avec les quatrièmes que j'ai [...] ils cherchent juste x, y. Mais y a pas de valeurs. Et donc dès que tu n'as pas d'équations tu dois pas résoudre, ben ils cherchent quand même. Parce que c'est ce qu'ils ont eu l'habitude de faire et c'est la même chose quatrième, cinquième jusque la rhéto.

P_5 : De la manière dont on donnait cours avant [...] les élèves savaient ce qu'était une équation, ce qu'était résoudre une équation, etc. maintenant tout ça pour eux c'est

pareil. Une égalité pour eux c'est aussi bien une équation qu'une simple égalité et donc c'est pour ça que j'insiste de plus en plus sur ce qu'ils sont en train de manipuler. Donc, au niveau des équations, effectivement, ils ne font plus la différence entre le résultat d'un calcul égal et une équation qui est vérifiée pour certaines valeurs [...] et pas pour tout, et donc c'est pour ça que j'insiste beaucoup maintenant, oui. C'est venu au fil du temps parce que ben parce que de la même façon qu'un nombre c'est un nombre naturel, réel, entier, fractionnaire, tout ça c'est un nombre. Ils ne font plus vraiment la différence. On était plus rôdé avant sur ce qu'on manipulait que maintant, ils exécutent et ils réfléchissent pas.

Certains enseignants disent qu'ils décrivent les objets comme des ensembles de triplets vérifiant certaines caractéristiques mais que le travail d'interprétation géométrique des ensembles reste peu développé.

P_2 : Pas tellement, je pense. Je crois qu'on le mentionne, surtout quand on va résoudre des systèmes pour chercher une intersection. On va peut-être dire une phrase du style parmi tous les points il y en a peut-être un qui... mais je pense pas que ça aille plus loin. En tout cas dans mon discours je pense pas que ça aille plus loin que ça.

P_4 : C'est ma deuxième activité d'introduction. C'est vraiment ce passage à l'écriture ensembliste que j'avais écrite sur le tableau. Ça oui, c'est pour ça que j'ai quand même tenu à le faire. Mais je me rends compte au regard de tout mon cours, c'est très mince. Et finalement, les activités d'introduction, je ne suis pas persuadée que quand ils étudient ils y reviennent forcément et du coup oui ils en ont une trace écrite c'est sûr, mais je ne suis pas sûr qu'ils y reviennent quand ils doivent vraiment travailler, quand ils doivent faire les exercices. Donc c'est vrai que là il faudrait peut-être le faire apparaitre ailleurs et peut-être un peu plus formel.

L'activité d'introduction et la distinction entre « résoudre une équation » et « décrire par une équation » sont appréciées par tous les enseignants. Ils estiment que ça aide à donner du sens aux notions et à faire réfléchir les élèves. Cependant, certaines remarques sont formulées. Les enseignants P_4 et P_5 pensent que cette distinction doit survenir beaucoup plus tôt dans l'enseignement secondaire, notamment lorsque le chapitre des fonctions est abordé. Bien que nous soyons d'accord avec eux, il nous est impossible d'agir à la fois en troisième année et en cinquième année avec les mêmes élèves. C'est pourquoi nous avons souhaité revenir sur celle-ci au sein de ce chapitre. L'enseignant P_1 est sceptique sur le fait que les élèves doivent prendre des notes lors des moments d'exposition des connaissances. En effet, cet enseignant choisit systématiquement de donner un polycopié aux élèves pour chaque chapitre. Ils n'ont donc pas l'habitude de copier. Ainsi, le contrat didactique entre l'enseignant et les élèves peut avoir une grande influence sur le déroulement de notre séquence. Au niveau des exercices, tous les enseignants semblent apprécier ce que nous proposons. En particulier, l'enseignant P_5 apprécie le fait de pouvoir mobiliser des connaissances des géométries vectorielle, synthétique et analytique en même temps. L'enseignant P_4 émet un doute quant aux problèmes géométriques proposés. Il dit que cela prend beaucoup de temps de classe et qu'il n'est pas toujours possible d'en résoudre.

Tous les enseignants pensent que notre séquence est réalisable dans le temps imparti avec le public actuel. Toutefois, plusieurs d'entre eux disent que cela dépend aussi fortement du niveau des élèves concernés dans notre expérimentation. Rappelons que notre séquence est conforme aux programmes actuels pour des élèves suivant un cours de mathématiques pour scientifiques. Les cinq enseignants seraient prêts à utiliser notre séquence dans leurs classes. Cependant, plusieurs estiment qu'il est difficile, sans guide d'accompagnement ou discussion approfondie préalable, de s'emparer de la séquence sans fournir une quantité de travail trop importante. En effet, ils expliquent qu'il est difficile d'entrevoir de prime abord quelles notions théoriques émergent de l'activité d'introduction et à quel(s) moment(s). Pour y arriver, il faudrait résoudre tous les systèmes de l'activité d'introduction. Certains enseignants expliquent également qu'ils sont prêts à utiliser la séquence à la condition de faire quelques modifications/ajouts. Parmi les extraits suivants se trouve un échange entre nous (lettre **C**) et l'enseignant P_3 et entre nous et l'enseignant P_4.

P_1 : Bien sûr. Après je devrais bien résoudre et le faire moi-même pour être sûre d'où je veux les emmener. Puisque là du coup comme il n'y a aucune résolution, je ne sais pas à quel moment tu veux parler de quoi. Donc moi je pense que ça serait plus pour les exercices et l'activité d'introduction pour bien être sûre de là où je veux les emmener.

P_2 : Pourquoi pas. Il faudrait forcément que je m'y prépare mais *a priori* pourquoi pas. [...] Il faudrait forcément que je prépare le tout et il faudrait alors, puisqu'ici il y a un but là derrière, il faudrait que je puisse aussi, pas répéter, mais il faudrait que je puisse décrire ce que je vais faire avec l'auteur parce que si je passe à côté d'un objectif à ce moment-là ça veut dire [...] que soit j'ai pas saisi ce qui était là donc qu'une petite note ou quelque chose doit être ajoutée ou bien alors ça veut dire que... ou alors je ne sais pas.

C: Dernière question. Tu dis justement que l'enseignant s'il n'a pas cette philosophie que moi j'ai lorsque j'ai créé la séquence, ça peut être compliqué de le faire lui-même ?

P_3 : Ouais, je pense.

C: Et s'il est guidé, tu penses que ça pourrait être intéressant ?

P_3 : S'il est guidé en mettant bien ce que je veux c'est ça [...], je pense que ça peut aller. C'est vrai, quand tu regardes la première page d'activité, personnellement si tu me dis pas on veut comparer les objets etc., je lis c'est la résolution graphique, on voit plus ou moins mais on aurait quand même tendance à résoudre en regardant un peu, tu vois, ils seraient un peu perdus.

C: Puisque toi je t'ai expliqué la philosophie, est-ce que tu serais prêt à faire la séquence ?

P_3 : Ouais, je peux essayer. Faudrait que je le lise attentivement pour voir si je pourrais m'imprégner du truc. Il faudrait des heures et des heures pour essayer de décons-

truire ce que j'ai mais y a moyen. Faut voir si j'ai plus de facilité avec ça qu'avec ma méthode.

P_4 : Oui, fin pas telle quelle évidemment mais oui je pense qu'il y a des choses dont je m'inspirerais c'est sûr. Je pense que clairement c'est intéressant qu'ils visualisent. Je t'en parlais dès le départ mais ça pourrait être une bonne piste pour qu'ils visualisent. Ça je le ferais plus tôt comme je t'ai déjà dit...

C: Oui mais c'est parce que tu as la possibilité de le faire.

P_4 : Oui, clairement. C'est dans ce chapitre-ci mais ça pourrait être dans un autre mais en tout cas c'est intéressant. Je le fais pas et je vais me dire en sortant d'ici que c'est un tort de l'avoir jamais fait [rires].

C: Et quand tu dis que tu l'adapterais à ta sauce, tu changerais quoi en fait ?

P_4 : Je suis pas sûre que j'abandonnerais mes activités d'introduction. Je pense que la première était pas mal aussi pour faire ce passage entre le plan et l'espace, même si ça apparait là aussi je suis d'accord. Je pense que ça se destine bien à un public du secondaire.

C: Ici, je t'ai donné la philosophie du document avant de te laisser en prendre connaissance, si je te l'avais donné tel quel sans aucune explication, est-ce que tu penses que tu aurais compris ce qu'il fallait faire ?

P_4 : J'aurais sans doute bien compris que tu cherchais l'interprétation géométrique après je pense que c'est pas forcément évident de penser à tout ce que tu veux amener et à quels moments. Je pense qu'il y a vraiment des informations qu'on pourrait rater dans ce type de choses parce qu'en fait tu vas dire plein plein de choses là-dedans, [...] et si tu le vois comme ça tu te dis pas que tu vas dire plein plein plein de choses. Déjà en les faisant soi-même on va bien se rendre compte qu'il y a plein de choses qui apparaissent mais juste à le voir comme ça, oui tu te rends peut-être pas compte de tout ce qui peut vraiment se cacher là-dedans. C'est vrai que ça parait tout simple quand on le voit comme ça alors qu'en réalité tu peux faire plein de choses avec ça et c'est ça aussi que c'est super intéressant. Et puis je suis sûre qu'il y a d'autres choses dont tu vas parler et auxquelles on va pas penser forcément comme ça.

P_5 : Ah ! J'essaierai oui. Ça donne envie d'essayer [rires]. Oui, ça donne envie d'essayer parce que euh... ben parce que je n'aurais jamais pensé introduire comme ça et qu'effectivement la démarche que j'ai est classique donc que... Oui, pourquoi pas essayer. Ça vaut la peine.

5 Bilan

Dans ce chapitre, nous avons présenté notre scénario d'enseignement et interrogé cinq enseignants sur sa faisabilité en classe. Les réponses des cinq enseignants nous poussent à penser que notre idéal didactique pour le chapitre des droites et des plans dans l'espace est didactiquement possible avec le public visé.

Nous retenons deux critiques formulées par certains enseignants. Tout d'abord, bien qu'ils apprécient la distinction entre « résoudre une équation » et « décrire par une équation », ils estiment que cela doit être travaillé beaucoup plus tôt dans l'enseignement. Puisque nous ne pouvons agir sur plusieurs années de l'enseignement secondaire avec le même groupe d'élèves, nous avons estimé important de garder cette distinction au sein de notre scénario. Certains enseignants pensent que les apprentissages possibles des élèves à la suite de notre séquence d'enseignement vont énormément dépendre de leur niveau mathématique. Cette remarque ne semble pas s'adapter particulièrement à notre scénario et nous sommes d'avis qu'il est justement intéressant d'expérimenter notre scénario avec un groupe d'élèves ayant plus de difficultés en mathématiques.

Nous relevons aussi que la transmission d'une séquence de type ingénierie dans les classes est difficile, notamment parce que les enseignants veulent y apporter des modifications bien que cela puisse dénaturer les objectifs ciblés dans celle-ci. Nous retrouvons donc le problème de la reproductibilité des ingénieries didactiques cité par Artigue (2011) dans les entretiens menés.

Dans le chapitre suivant, nous nous intéressons aux diverses tâches proposées dans notre séquence et aux activités qu'elles peuvent déclencher..

Chapitre XI

L'analyse *a priori* du scénario

Dans ce chapitre, nous expliquons plus en détails l'ordre dans lequel les contenus mathématiques émergent dans la séquence ainsi que la gestion prévue en classe. Nous précisons également quelles sont les activités attendues des élèves pour les différentes tâches proposées dans notre séquence. Nous ajoutons au fur et à mesure de notre description du scénario les aspects qui différencient notre séquence à la fois des scénarios potentiels étudiés dans les manuels scolaires (chapitre VII) et des scénarios étudiés dans notre étude de terrain (chapitre VIII).

1 Méthodologie

Notre scénario se découpe en deux phases : l'activité d'introduction dans laquelle toutes les notions théoriques sur les équations des droites et des plans dans l'espace émergent et les exercices. Pour chacune de ces phases d'enseignement, nous proposons une description plus détaillée de notre scénario. Celle-ci suivra la chronologie indiquée dans le chapitre X. Il s'agit de préciser comment nous avons intégré les choix effectués au sein du scénario et pourquoi celui-ci développe la conceptualisation visée (cf. chapitre IX).

Étant donné que notre questionnement s'insère dans le cadre de la Théorie de l'Activité, dont nous avons présenté les fondements au chapitre VI, nous analysons chaque tâche proposée en termes d'activités attendues des élèves afin de caractériser les apprentissages visés pour le chapitre de géométrie analytique dans l'espace.

Nous nous limitons dans ce chapitre aux tâches sélectionnées dans notre scénario. Nous ne présentons donc pas l'analyse *a priori* de toutes les tâches se trouvant dans notre séquence d'enseignement. De plus, nous pouvons regrouper certaines tâches envisagées en fonction des activités qu'elles peuvent potentiellement engendrer chez les élèves. De ce fait, nous choisissons de ne pas présenter toutes les analyses au sein de ce chapitre. Le lecteur désireux d'en voir davantage peut se rendre à l'annexe F. Les solutions possibles pour les tâches de l'activité d'introduction et des exercices sélectionnés sont données dans l'annexe G.

2 L'activité d'introduction

La première partie de notre séquence consiste à faire émerger presque toutes les notions théoriques préconisées par le programme scolaire à partir de l'activité d'introduction. Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre IX, notre objectif est de favoriser chez les élèves l'intégration des nouvelles connaissances à celles qu'ils ont déjà. C'est pourquoi cette activité d'introduction met en jeu des connaissances de géométries synthétique, vectorielle et analytique plane. De ce fait, certaines extensions des notions du plan à l'espace peuvent apparaître. Nous voulons fournir aux élèves un moyen de contrôle pour éviter que ces extensions n'amènent des conceptions erronées. Le levier choisi est l'interprétation géométrique des objets. Or, celle-ci ne semble pas actuellement développée dans l'enseignement secondaire. C'est pourquoi nous proposons de l'introduire à partir d'objets déjà étudiés par les élèves. L'objectif de la première tâche introductive est donc d'amener un travail sur les deux aspects (la reconnaissance et la description) de l'interprétation géométrique des droites dans le plan. Nous pouvons ensuite nous appuyer sur ce travail pour faire émerger les notions de droites et de plans dans l'espace.

Nous rappelons les énoncés de chacune des tâches introductives et nous présentons ensuite leur analyse *a priori*.

Tâche d'introduction 1

Recherchez graphiquement l'ensemble des solutions des systèmes suivants dans $\mathbb{R}^2$.

$$(S_1)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4y+4=0 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} 2x+3y=2 \\ 4y+4=0 \end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases} 2y+5x=1 \\ 3x=1-3y \end{cases} \qquad (S_4)\begin{cases} 2x+3y=6 \\ 4x+6y=8 \end{cases}$$

Analyse a priori

La question est fermée. La méthode est imposée puisqu'il est demandé de résoudre graphiquement les systèmes donnés. Il s'agit d'associer à chaque équation la droite du plan décrite, de représenter ces droites dans un repère orthonormé et de chercher l'intersection des deux droites, si elle existe. L'objectif de cet exercice est de travailler les deux aspects de l'interprétation géométrique des objets à partir des connaissances anciennes des élèves sur les droites dans le plan.

Domaine de travail

Cadre de la géométrie analytique.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre graphique, registre ensembliste, registre de la langue naturelle.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : droites dans le plan, repère orthonormé du plan.
- Connaissances nouvelles : ensembles.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné dans la langue naturelle. Les équations sont toutes données dans le point de vue cartésien. Pour chaque système, l'*organisation du raisonnement* se découpe en plusieurs étapes. Il s'agit, tout d'abord, de reconnaître l'objet géométrique associé à chaque équation du système. Pour ce faire, l'objet géométrique est décrit comme un ensemble de points satisfaisant tous cette équation (*conversion de registres*). Quelques points de l'ensemble sont donnés (*mise en jeu de connaissances nouvelles*). Les points sont ensuite placés dans un repère orthonormé et les deux droites sont tracées (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *conversion de registres*). Finalement, il reste à déterminer sur le dessin, s'il existe, le point d'intersection des deux droites (*mise en jeu de connaissances anciennes*). L'ensemble des solutions du système est ainsi déterminé (*conversion de registres*). Les deux aspects de l'interprétation géométrique sont alors exploités afin d'associer les droites aux équations et aux ensembles les décrivant (*mise en jeu de connaissances nouvelles*).

Il est prévu que les élèves prennent connaissance de cette première tâche introductive en toute autonomie. Puisque notre étude des programmes (cf. chapitre IV) a mis en évidence que la résolution graphique n'est que peu exploitée dans l'enseignement secondaire, une discussion collective s'engage avec l'enseignant sur ce qu'est ou non une équation, ce que signifie résoudre algébriquement et graphiquement un système d'équations et ce que signifie décrire un objet géométrique par une équation. Nous faisons le pari que cette étape est cruciale pour amener les élèves à bien distinguer « résoudre une équation » et « décrire par une équation ». Ces étapes sont généralement absentes des manuels scolaires et des cours étudiés. L'interprétation géométrique des objets dans le plan est alors introduite pour résoudre ces tâches.

Pour chaque système, il est prévu que les élèves travaillent individuellement ou entre pairs. L'enseignant intervient le moins possible lors de ces phases de recherche. Une correction collective suit chacune de ces phases. Lors de cette correction, l'enseignant en profite pour rappeler des notions importantes de géométrie analytique telles que les vecteurs directeurs et normaux et les positions relatives de deux droites. Nous avons montré dans la partie 1 que la distinction entre les vecteurs directeurs et normaux n'est pas facile pour les étudiants. Il nous semble donc important de nous assurer que les élèves distinguent ces deux notions puisqu'elles sont exploitées dans toute notre séquence. Il est également prévu que l'enseignant généralise le travail effectué sur les

ensembles de points pour aborder la définition ensembliste d'une droite dans le plan. Nous faisons le pari que cela permet de donner du sens à la forme générale des équations cartésiennes de droites dans le plan.

Les activités attendues de la part des élèves sur cette première tâche introductive consistent à effectuer plusieurs conversions entre les registres algébrique, ensembliste et graphique afin de développer les deux aspects de l'interprétation géométrique dans le plan. Il est important de se rendre compte que les élèves ne sont pas habitués à devoir reconnaître les objets à partir des équations et à décrire les objets par des ensembles de points. Il ne s'agit donc plus pour les élèves de résoudre algébriquement des systèmes mais bien de mettre en place un questionnement sur les objets décrits ou à décrire. La nature du travail attendu des élèves est très différente de ce qu'ils ont déjà dû effectuer en géométrie analytique. Nous faisons l'hypothèse que ce questionnement peut être plus facilement mis en place chez les élèves grâce au discours de l'enseignant lors des corrections collectives. En particulier, de nombreuses occasions de proximités principalement horizontales avec les connaissances que les élèves ont déjà peuvent être tentées par l'enseignant en classe. En effet, des rapprochements entre ce que les élèves connaissent des droites dans le plan et le travail proposé ici peuvent, selon nous, favoriser l'intégration de l'interprétation géométrique des objets dans l'arsenal dont ils disposent.

La deuxième tâche introductive est ensuite proposée aux élèves.

Tâche d'introduction 2

En vous inspirant de ce qui a été fait au point 1, trouvez l'ensemble des solutions des systèmes suivants dans $\mathbb{R}^3$.

$$(S_1)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4z-3=2z+1 \\ y=0 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4y+4=0 \end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases} x=y \\ y=z \end{cases} \qquad (S_4)\begin{cases} x=\dfrac{y}{2}=z-2 \\ z=2 \end{cases}$$

$$(S_5)\begin{cases} \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z+2}{4} \\ 2x+3y+4z=5 \end{cases} \qquad (S_6)\begin{cases} 2x+3y+4z=5 \\ 6x+9y+12z=8 \end{cases}$$

Analyse a priori

La question est fermée. Un travail similaire à celui effectué dans la première tâche introductive est à réaliser. La méthode est donc imposée. Les deux aspects de l'interprétation géométrique sont ici aussi abordés. Il s'agit de reconnaître l'objet géométrique associé à ces équations. Pour ce faire, un travail sur les ensembles de points vérifiant ces équations est amené. L'objectif de cette tâche est d'introduire les équations de droites et de plans dans l'espace ainsi que leurs positions relatives à partir d'un questionnement sur les objets géométriques décrits.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie synthétique, cadre de la géométrie vectorielle.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre graphique, registre ensembliste, registre de la langue naturelle.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : caractérisation d'une droite, caractérisation d'un plan, repère orthonormé de l'espace, vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires, opérations sur les vecteurs, résolution de systèmes, calcul de déterminants.
- Connaissances nouvelles : équations vectorielles, paramétriques et cartésiennes de droites dans l'espace, équations vectorielles, paramétriques et cartésiennes de plans, positions relatives des objets entre eux.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Toutes les équations sont données dans le point de vue cartésien. L'*organisation du raisonnement* se découpe en plusieurs étapes. Pour chaque système, il s'agit de reconnaître l'objet géométrique associé à chaque équation du système. Pour ce faire, l'objet géométrique est décrit comme un ensemble de points satisfaisant tous cette équation (*conversion de registres*). Quelques points de l'ensemble sont donnés (*mise en jeu de connaissances nouvelles*). Les points sont ensuite placés dans un repère orthonormé (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *conversion de registres*). Les objets sont déterminés à partir des connaissances anciennes de géométrie synthétique (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *changement de cadres*). Les équations paramétriques des objets dans le cadre de la géométrie vectorielle émergent lors de cette étape (*mise en jeu de connaissances nouvelles*). Il faut donc décrire les objets dessinés (*conversion de registres*). Puis, les équations sont traduites en termes de composantes afin d'obtenir les équations paramétriques des objets dans le cadre de la géométrie analytique (*changement de cadres*). Les paramètres sont éliminés pour obtenir les équations cartésiennes des objets (*mise en jeu de connaissances nouvelles*). Des *changements de points de vue* sont alors effectués. Finalement, les éventuels points d'intersection sont déterminés et justifiés par des

propriétés de géométrie synthétique (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *changement de cadres*). L'ensemble des solutions du système est écrit (*conversion de registres*). L'interprétation géométrique est ainsi exploitée afin de faire émerger les différentes descriptions des objets dans l'espace (*mise en jeu de connaissances nouvelles*).

Les nouvelles notions de géométrie analytique dans l'espace sont introduites au fur et à mesure de la correction collective. De plus, l'ordre dans lequel les systèmes sont résolus est important notamment car ce qui a été établi pour un système est exploité dans les suivants. Les connaissances anciennes et nouvelles sont mobilisées tout au long de la correction. La réalisation de cette tâche requiert aussi des adaptations variées des connaissances comme le montre notre analyse *a priori*. Nous voulons développer une certaine flexibilité chez les élèves entre les cadres géométriques, les registres et les points de vue paramétrique et cartésien. Or, nous avons déjà dit qu'elle ne se développe pas automatiquement chez les élèves (cf. chapitre II). C'est pourquoi les traitements internes à réaliser ne sont pas laissés à la charge des élèves à ce moment de l'enseignement. La résolution de la deuxième tâche introductive se déroule sous la forme de discussions collectives. L'enseignant y joue un rôle important. Il guide la réflexion des élèves et insiste sur les différentes adaptations des connaissances à réaliser. Il raccroche également les connaissances nouvelles et le travail qui vient d'être réalisé aux connaissances anciennes et au travail déjà réalisé dans le plan. Il met ainsi en évidence les différentes ruptures et continuités lors de l'extension des notions du plan à l'espace. Les leviers choisis (interprétation géométrique, interventions) sont donc bien en jeu dans la gestion prévue de notre scénario.

Lorsqu'une nouvelle notion émerge, l'enseignant réalise un bilan du travail effectué et du résultat obtenu dans le cas particulier de l'exercice. Il les généralise ensuite sous la forme d'un cours magistral. Des feuilles sont distribuées aux élèves pour cette généralisation. De la sorte, la résolution des différents systèmes est entrecoupée de moments d'exposition des connaissances. Cela participe, selon nous, à la dynamique cours/exercices. Ce mode de travail est très différent de ce que nous avons pu observer dans les scénarios étudiés.

En ce qui concerne la progression des contenus, les équations des droites et des plans sont bien étudiées avant les positions relatives des objets entre eux. En effet, les systèmes S_1, S_2, S_3 et S_4 introduisent les différentes équations, le système S_5 aborde les positions relatives d'une droite et d'un plan et le système S_6 amène les positions relatives de deux plans. Les positions de deux droites ont été rappelées dans le plan lors de la première tâche d'introduction. Les conditions de parallélisme et d'orthogonalité sont étendues à l'espace dans les exercices. En ce qui concerne les équations, le questionnement initial part des équations cartésiennes des droites et des plans. La description de ces objets amène à écrire une équation vectorielle et puis une équation paramétrique des droites et des plans. La progression est donc bien celle choisie. Afin de montrer que l'objet décrit par les équations cartésiennes dans l'énoncé et les équations paramétriques obtenues est le même, l'articulation des points de vue dans les deux sens est effectuée. Cette progression est très différente de celle proposée dans les manuels scolaires et les cours étudiés. De plus, nous articulons les points de vue dans les deux sens ce qui n'est

généralement pas proposé dans ces scénarios.

Lors des phases de discussions collectives, les activités attendues des élèves sont l'organisation du raisonnement au vu du travail réalisé dans la première tâche introductive, mobiliser leurs connaissances anciennes pour justifier quels sont les objets manipulés et quelles sont leurs positions relatives et effectuer des conversions entre les registres algébrique et graphique. Les conversions avec le registre ensembliste ne sont pas des adaptations que les élèves ont à faire seuls puisqu'ils ne manipulent pas souvent les notions et notations ensemblistes. Il est évident que l'adaptation « A7 - manque de connaissances nouvelles » est présente dans cette tâche puisque notre objectif est d'introduire les nouvelles notions au fur et à mesure de sa réalisation. Lors des moments de cours, les activités attendues des élèves sont une mise en relation entre ce qu'ils ont effectué dans l'activité d'introduction (contextualisé) et les résultats du cours (décontextualisé).

Pour être conforme aux programmes de l'enseignement secondaire pour le chapitre de géométrie analytique dans l'espace, les équations cartésiennes de plans sous forme de déterminants et le calcul de différentes distances entre des objets de l'espace sont ajoutés à notre scénario. Toutefois, nous avons montré dans notre étude de terrain que les enseignants n'abordent pas forcément au sein de ce chapitre les matrices et les déterminants. Ceux qui introduisent ce point de matière ont vu ces notions dans un cours annexe ou dans un chapitre précédent. Nous avons donc discuté avec l'enseignant qui s'occupe de la classe dans laquelle nous expérimentons notre séquence. Ces prérequis n'auront pas été vus par les élèves au moment de notre expérimentation mais seront abordés plus tard dans l'année. C'est pourquoi les équations cartésiennes de plans sous forme de déterminants, initialement prévues dans notre scénario, ont été retirées. À l'annexe H se trouve le scénario envisagé pour cette notion. En ce qui concerne les distances, celles-ci n'émergent pas de notre activité d'introduction mais nous prévoyons de les aborder à la fin de notre séquence. En effet, nous estimons que les équations de droites et de plans dans l'espace doivent être disponibles chez les élèves pour résoudre les tâches liées au calcul de la distance entre un point et un plan et entre un point et une droite. Pour cette étape du scénario, les élèves ont à mobiliser des connaissances anciennes telles que la distance entre deux points du plan et les projections orthogonales, mais aussi des connaissances en cours d'acquisition telles que les équations de droites et de plans dans l'espace. Les élèves doivent également organiser leur raisonnement afin de trouver une stratégie permettant de déterminer la distance entre un point et un plan ou entre un point et une droite dans l'espace. Cela amène à réaliser des conversions entre les registres de la langue naturelle, du dessin et algébrique. Le travail attendu des élèves pour la notion de distance dans notre scénario n'est jamais proposé dans les scénarios étudiés.

Avant de commencer la résolution des exercices, un bilan est proposé par l'enseignant (cf. annexe I, page 661). Nous avons choisi de présenter ce bilan sous la forme d'un tableau comme illustré dans le tableau XI.1. Celui-ci peut aider les élèves à décrire les objets géométriques par des équations selon le point de vue considéré et à reconnaître les objets géométriques décrits par ces équations. Le fait de mettre en avant les informations nécessaires à la description des objets peut être utile pour les élèves notam-

ment par exemple pour les changements de points de vue. Lors de ce bilan, l'enseignant revient sur ce qui a été fait dans l'activité d'introduction pour passer d'un point de vue à un autre et insiste aussi sur l'intérêt d'interpréter géométriquement les équations ou les ensembles manipulés.

	Droite dans $\mathbb{R}^3$	Plan dans $\mathbb{R}^3$
Équations paramétriques	Pour la décrire, on a besoin : Une EP est de la forme :	Pour le décrire, on a besoin : Une EP est de la forme :
Équations cartésiennes	Pour la décrire, on a besoin : Un SEC est de la forme :	Pour le décrire, on a besoin : Une EC est de la forme :

TABLE XI.1 – Bilan de l'activité d'introduction.

Les séances suivantes sont des séances d'exercices dont nous présentons certaines analyses *a priori* au point suivant.

3 Les exercices proposés

Lorsque les exercices commencent, toutes les notions théoriques ont été vues sauf le calcul de distances. Suite à l'activité d'introduction, les élèves ont déjà manipulé des équations de droites et de plans, étudié les positions relatives des objets et interprété géométriquement les objets. Des jeux entre les cadres géométriques, des conversions entre les registres et des changements de points de vue ont déjà été réalisés par les élèves à ce stade de l'enseignement. Les exercices ont pour objectif de mettre en œuvre les nouvelles connaissances et de développer une certaine flexibilité pour les traitements internes ainsi que l'interprétation géométrique chez les élèves pour ces notions.

Notre séquence contient 27 exercices. Plusieurs d'entre eux mettent en jeu les mêmes adaptations des connaissances. C'est pourquoi nous ne présentons pas l'ensemble des analyses *a priori* dans cette partie. Elles sont données dans l'annexe F. Nous en avons sélectionnés quelques uns afin de donner une idée claire au lecteur des activités attendues des élèves. Cette sélection a été faite en fonction des variables didactiques en jeu. Nous fournissons l'énoncé, l'analyse *a priori* et des éléments sur la gestion prévue en classe pour chacune des tâches sélectionnées.

Exercice 2

Déterminez un système d'équations cartésiennes de la droite d passant par le point $A(2,-1,3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}(0,-1,2)$.

Analyse *a priori* de l'exercice 2

La question est fermée. La méthode n'est pas imposée.

Domaine de travail

Cadre de la géométrie analytique.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle.

Point de vue

Point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances nouvelles : équations cartésiennes de droites particulières dans l'espace.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. La forme générale d'un système d'équations cartésiennes de droites dans le cas où certaines composantes du vecteur directeur sont nulles a été étudiée en classe (*mise en jeu de connaissances nouvelles*). Le système est donné dans le registre algébrique (*conversion de registres*) en appliquant le résultat général dans ce cas particulier.

L'exercice met en jeu la description d'une droite particulière de l'espace par une équation dans le point de vue cartésien. Il s'agit d'appliquer directement un résultat vu au cours. Cette tâche relève du niveau technique de mise en fonctionnement des connaissances. C'est pourquoi nous estimons que les élèves sont capables de résoudre cette tâche en autonomie. Un temps de recherche individuelle est donc prévu. Il est suivi d'une correction collective. Les activités attendues des élèves sont l'identification des informations données et la particularisation du résultat donné de façon adéquate. C'est l'occasion pour l'enseignant d'insister sur une erreur relativement fréquente consistant à reprendre la forme canonique des équations cartésiennes de droites et de diviser par zéro. Cet exercice est « classique » et peut se retrouver dans les manuels ou les scénarios des enseignants.

Exercice 3

Donnez un point et un vecteur directeur de chacune des droites suivantes :

① $1-x=\dfrac{3y-3}{2}=\dfrac{7+z}{5}$.

② $\dfrac{2x-3}{2}=\dfrac{y-4}{5}=3z+2$.

③ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3k \\ z = 1 - 2k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$.

④ $\begin{cases} x = 1 \\ y - 3 = 0 \end{cases}$.

Analyse *a priori* de l'exercice 3

La question est fermée. La tâche se répète quatre fois. La méthode n'est pas imposée.

Domaine de travail

Cadre de la géométrie analytique.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle.

Points de vue

Point de vue cartésien, point de vue paramétrique.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : mises en évidence, fractions, équations du premier degré à une inconnue, composantes d'un vecteur.
- Connaissances nouvelles : équations cartésiennes de droites dans l'espace, équations cartésiennes de droites particulières dans l'espace, équations paramétriques de droites dans l'espace.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Pour les points ① et ②, il s'agit d'un système d'équations cartésiennes sous une forme non canonique (*reconnaissance des modalités d'application*). L'*organisation du raisonnement* est découpé en deux étapes. Dans un premier temps, la forme canonique d'un système d'équations cartésiennes doit être écrite (*mise en jeu de connaissances nouvelles*). Cela amène à effectuer des opérations algébriques telles que des mises en évidence et des manipulations de fractions (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *conversion de registres*). Une fois la forme canonique écrite, un point et un vecteur directeur peuvent être facilement déterminés (*reconnaissance des modalités d'application*).

Au point ③, il s'agit de reconnaître un système d'équations paramétriques d'une droite (*reconnaissance des modalités d'application*). Un vecteur directeur et un point peuvent être déterminés (*mise en jeu de connaissances nouvelles*).

Un système d'équations cartésiennes d'une droite particulière est donnée au point ④ (*reconnaissance des modalités d'application*). La théorie vue permet de déterminer un point et un vecteur directeur immédiatement (*mise en jeu de connaissances nouvelles*).

L'exercice met en jeu les points de vue paramétrique et cartésien pour les droites dans l'espace. Aucun changement de points de vue n'est nécessaire. Il s'agit principalement de mobiliser des connaissances anciennes pour écrire les systèmes donnés sous la forme canonique et d'identifier les informations demandées à partir de n'importe quel point de vue. Ces tâches relèvent du niveau mobilisable de mise en fonctionnement des connaissances. Les élèves sont capables de les réaliser en autonomie. Un temps de recherche est prévu, lui-même suivi par une correction collective. Les activités attendues des élèves consistent en l'écriture d'une forme canonique des équations et l'identification adéquate des informations demandées dans les deux points de vue. C'est l'occasion pour l'enseignant d'insister sur la forme canonique des équations. En effet, une erreur qui peut être repérée chez les élèves consiste à déduire un vecteur directeur et un point d'une droite à partir d'un système d'équations sans l'avoir préalablement écrit sous forme canonique. Cet exercice est aussi « classique » et se retrouve dans les scénarios des enseignants P_1, P_3 et P_4.

Exercice 8

Donnez une équation paramétrique du plan α sachant qu'il passe par le point $P(3,4,5)$ et dont un vecteur normal est $(2,6,4)$.

Analyse *a priori* de l'exercice 8

La question est fermée. La méthode n'est pas imposée.

Domaine de travail

Cadre de la géométrie analytique.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances nouvelles : équations paramétriques et cartésiennes de plans.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Pour écrire une équation paramétrique d'un plan, un point et deux vecteurs directeurs du plan sont nécessaires (*reconnaissance des modalités d'application*). L'*organisation du raisonnement* se découpe en deux étapes. La première étape consiste à écrire une équation cartésienne du plan (*mise en jeu de connaissances nouvelles*) puisqu'un point et un vecteur normal de ce plan sont donnés dans l'énoncé.

Puis, un *changement de points de vue* est effectué pour écrire une équation paramétrique du plan (*mise en jeu de connaissances nouvelles*).

L'exercice met en jeu beaucoup de connaissances nouvelles sur les plans. Les deux points de vue sont mobilisés et une articulation dans le sens cartésien/paramétrique est nécessaire. Cette tâche relève du niveau mobilisable de mise en fonctionnement des connaissances. L'articulation des points de vue ayant été travaillée dans l'activité d'introduction, les élèves travaillent en autonomie. Nous prévoyons donc un temps de recherche individuelle, suivi d'une correction collective. L'enseignant peut insister sur le travail réalisé dans l'activité d'introduction pour articuler les points de vue entre eux. Les activités attendues des élèves sont l'organisation du raisonnement en vue d'articuler les points de vue dans le sens cartésien/paramétrique. Cette articulation est peu abordée dans les scénarios étudiés.

Exercice 11

Déterminez une équation cartésienne du plan β comprenant le point $A(1,3,-2)$ parallèle à $d \equiv \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y}{3}+1 = \dfrac{1-z}{-3}$ et perpendiculaire au plan $\alpha \equiv 2x-3y+2z=1$.

Analyse *a priori* de l'exercice 11

La question est fermée. La méthode n'est pas imposée.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie vectorielle.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- □ Connaissances anciennes : parallélisme, orthogonalité, résolution de systèmes, produit scalaire.
- □ Connaissances en cours d'acquisition : équations cartésiennes de plans, équations cartésiennes de droites dans l'espace, vecteur normal.
- □ Connaissances nouvelles : positions relatives de deux plans, positions relatives d'une droite et d'un plan.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Il s'agit de trouver une équation cartésienne d'un plan connaissant sa position relative par rapport à deux objets décrits dans le point de vue

cartésien. Un point et un vecteur normal du plan β doivent être déterminés (*reconnaissance des modalités d'application*). L'*organisation du raisonnement* se fait en plusieurs étapes. Il faut traduire le parallélisme de la droite et du plan β en termes de vecteurs (*mise en jeu de connaissances nouvelles*, *conversion de registres*). Cela amène à identifier un vecteur directeur de la droite à partir du point de vue cartésien (*reconnaissance des modalités d'application*). Un vecteur directeur du plan β est colinéaire à ce vecteur directeur de la droite (*existence de choix*, *changement de cadres*). Il faut traduire la perpendicularité des deux plans en termes de vecteurs (*mise en jeu de connaissances nouvelles*, *conversion de registres*). Cela amène à identifier un vecteur normal du plan α (*reconnaissance des modalités d'application*). Un vecteur directeur du plan β est colinéaire à ce vecteur normal du plan (*existence de choix*, *changement de cadres*). Un point et deux vecteurs directeurs du plan β sont alors déterminés. Pour avoir une équation cartésienne du plan β, plusieurs méthodes sont possibles (*existence de choix*). Il est possible d'écrire une équation paramétrique du plan β (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*) et d'effectuer un *changement de points de vue* en éliminant les deux paramètres (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Il est possible aussi de déterminer un vecteur normal du plan β en traduisant l'orthogonalité entre un vecteur normal (a,b,c) et les deux vecteurs directeurs trouvés (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Un système de deux équations à trois inconnues peut alors être résolu (*mise en jeu de connaissances anciennes*). La résolution du système amène à effectuer un *choix* pour une valeur des inconnues et ainsi déterminer un vecteur normal au plan. Une équation cartésienne avec un terme indépendant générique peut être donnée (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Le point permet de trouver la valeur du terme indépendant (*changement de points de vue au sens de Robert*).

De nombreuses connaissances anciennes, en cours d'acquisition et nouvelles sont mobilisées dans cet exercice. De plus, plusieurs adaptations de ces connaissances sont nécessaires. Comme celles-ci et ne sont pas indiquées dans l'énoncé, cette tâche relève donc du niveau disponible de mise en fonctionnement des connaissances. Une conversion entre le registre de la langue naturelle, dans lequel l'énoncé est donné, et entre le registre algébrique, dans lequel la résolution s'effectue, apparait. Une articulation des points de vue dans le sens paramétrique/cartésien est réalisée quelle que soit la méthode choisie. Une recherche individuelle est aussi prévue ici pour que les élèves travaillent en toute autonomie ces traitements internes. Au terme de celle-ci, les activités attendues des élèves sont l'organisation du raisonnement, la conversion entre les registres cités et l'articulation des points de vue dans le sens paramétrique/cartésien. Lors de la correction collective, l'enseignant peut revenir sur le travail réalisé dans l'activité d'introduction en ce qui concerne l'articulation des points de vue. Il peut aussi faire des dessins pour aider les élèves qui n'ont pas pu effectuer la conversion entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique. Ce type de tâches est peu présent dans les scénarios étudiés (sauf P_4 qui propose cette tâche).

Exercice 12

Quel objet géométrique est représenté par l'ensemble $\{(x_1,x_2,x_3) \mid (x_1,x_2,x_3)$ est un vecteur orthogonal à $(-1,3,0)\}$?

Analyse *a priori* de l'exercice 12

La question est ouverte. La méthode n'est pas imposée.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie vectorielle.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle, registre ensembliste.

Point de vue

Point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- □ Connaissances anciennes : orthogonalité, produit scalaire.
- □ Connaissances en cours d'acquisition : les notions ensemblistes.
- □ Connaissances nouvelles : équations cartésiennes de plans.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Il s'agit de reconnaître un objet décrit par un ensemble. L'*organisation du raisonnement* est découpée en deux étapes. La première étape consiste à traduire l'orthogonalité de deux vecteurs en un produit scalaire nul (*mise en jeu de connaissances anciennes de géométrie vectorielle*, *conversion de registres*). Les notations ensemblistes sont utilisées tout au long de la résolution de la tâche (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Puis, il reste à identifier une équation cartésienne d'un plan (*mise en jeu de connaissances nouvelles*, *changement de cadres*). La description du plan se fait dans le registre de la langue naturelle (*conversion de registres*).

Des conversions entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique, mais aussi entre le registre ensembliste et le registre de la langue naturelle sont à réaliser au sein de cet exercice. Le premier aspect de l'interprétation géométrique des ensembles de points et des équations y est en jeu. Au vu du travail réalisé dans l'activité d'introduction, cette tâche relève du niveau mobilisable de mise en fonctionnement des connaissances. Les élèves ont la possibilité de la résoudre en toute autonomie. Une correction collective s'ensuit pendant laquelle l'enseignant peut insister sur la caractérisation d'un plan comme un ensemble de vecteurs vue en toute généralité en classe. La particularisation de ce résultat peut donc être mise en avant. De plus, l'enseignant peut appuyer que les triplets représentent des vecteurs et non des points. Cette confusion étant une erreur fréquente repérée chez les élèves. Les activités attendues des élèves sont la mobilisation des connaissances nouvelles, les conversions entre les registres algébrique, de la langue naturelle et ensembliste. La reconnaissance des objets est aussi attendue des élèves. Ce type de tâche n'est présent dans aucun des scénarios analysés.

Exercice 18

Soit le système

$$\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ 3x+2y-5z=2. \end{cases}$$

Décrivez géométriquement l'ensemble des solutions de ce système. Expliquez votre démarche. Déterminez ensuite algébriquement quel est cet ensemble de solutions.

Analyse *a priori* de l'exercice 18

La question est découpée en deux parties. Pour la première partie, il s'agit de résoudre le système en cherchant les objets décrits par les deux équations du système et de déterminer leur position relative. Le premier aspect de l'interprétation géométrique est en jeu pour les équations. Pour la deuxième partie, le système doit être résolu algébriquement. Le premier aspect de l'inteprétation géométrique est ici aussi en jeu mais cette fois pour les ensembles. La méthode est donc imposée dans ces deux parties.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie synthétique, cadre de la géométrie vectorielle.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle, registre ensembliste.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : résolution de systèmes, vecteurs colinéaires, parallélisme, orthogonalité.
- Connaissances en cours d'acquisition : équations cartésiennes de plans, équations paramétriques de droites dans l'espace, notions ensemblistes.
- Connaissances nouvelles : positions relatives de deux plans.

Adaptations à réaliser

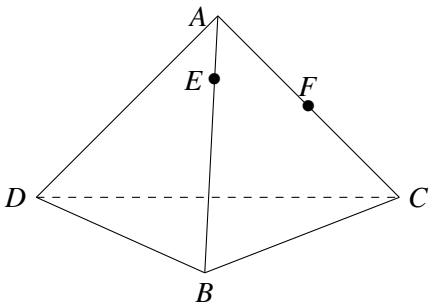
L'énoncé est donné en langue naturelle. Pour décrire géométriquement les solutions du système, le même questionnement que dans l'activité d'introduction sur les équations est posé. Chaque équation du système décrit un plan dans le point de vue cartésien (*reconnaissance des modalités d'application*). Les vecteurs normaux sont identifiés (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Une étude de la colinéarité des vecteurs amène un *changement de cadres*. Ils sont non colinéaires (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Les deux plans sont sécants (*mise en jeu de connaissances nouvelles*, *changement de cadres*). L'intersection est alors une droite (*mise en jeu de connaissances anciennes*).

La résolution algébrique du système *met en jeu des connaissances anciennes*. L'ensemble des solutions doit être écrit (*conversion de registres*). Il s'agit de reconnaître la droite à partir du point de vue paramétrique (*conversion de registres*, *mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*).

Dans cet exercice, l'interprétation géométrique est travaillée. En effet, la reconnaissance des objets doit se faire à partir des équations pour les plans et d'un ensemble pour la droite. Le fait d'imposer cet ordre entre les deux parties de l'exercice peut amener à travailler également le deuxième aspect de l'interprétation géométrique. La première partie de l'exercice nous amène à dire qu'il s'agit d'une droite et la deuxième partie nous amène à la décrire par un ensemble de points et éventuellement par une équation. Il est donc possible de développer les deux aspects de l'interprétation géométrique des objets sur ce type de tâche. De plus, l'ordre choisi permet aussi de vérifier et valider les résultats des calculs algébriques si ceux-ci sont nécessaires. Dans le cas contraire, ce questionnement sur les objets décrits par des équations permet d'éviter de se lancer dans des calculs inutiles. Des connaissances anciennes, en cours d'acquisition et nouvelles de différents cadres géométriques sont mobilisées. Plusieurs adaptations des connaissances sont à réaliser : des conversions entre les registres algébrique et de la langue naturelle, entre les registres algébrique et ensembliste et entre les registres ensembliste et de la langue naturelle ; des jeux de cadres entre la géométrie analytique, la géométrie vectorielle et la géométrie synthétique. L'organisation du raisonnement est en partie indiquée et relativement proche de celle mise en œuvre lors de l'activité d'introduction. La tâche relève donc du niveau mobilisable de mise en fonctionnement des connaissances. Les élèves peuvent être capables de la résoudre en toute autonomie lors d'une recherche individuelle ou entre pairs. Une correction collective suit cette phase. L'enseignant peut insister sur les avantages de la démarche imposée par l'énoncé, notamment pour la validation des calculs algébriques. Bien que la résolution algébrique des systèmes soit une tâche qui est proposée dans les scénarios étudiés, aucun d'entre eux ne demande explicitement d'étudier le système avant de se lancer dans les calculs.

Exercice 22

Soit le tétraèdre *ABCD* suivant.



① Déterminez synthétiquement le point de percée de la droite passant par les points E et F dans le plan BCD.

② Considérons un repère orthonormé $(D, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les coordonnées des points A, B et C sont respectivement $(0,2,2)$, $(2,3,0)$ et $(0,4,0)$. Les points E et F sont définis comme étant $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Déterminez analytiquement le point de percée de la droite passant par les points E et F dans le plan BCD.

Analyse *a priori* de l'exercice 22

La question se découpe en deux sous-questions. Elles sont toutes les deux fermées. La méthode est imposée dans les deux cas : synthétiquement pour le premier et analytiquement pour le deuxième. Les objectifs de cette question sont de rappeler la démarche dans le cadre de la géométrie synthétique et de rendre possible une comparaison entre les démarches de la géométrie synthétique et celles de la géométrie analytique.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie synthétique, cadre de la géométrie vectorielle.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre du dessin, registre ensembliste, registre de la langue naturelle.

Point de vue

Point de vue paramétrique.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : points de percée, résolution de systèmes, tétraèdre, caractérisation d'une droite, caractérisation d'un plan, composantes d'un vecteur.
- Connaissances en cours d'acquisition : équations paramétriques de droites dans l'espace, équations cartésiennes de plans.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Un dessin du tétraèdre est fourni. La question ① demande d'appliquer la méthode pour trouver le point de percée d'une droite dans une face d'un solide vue dans le cadre de la géométrie synthétique (*reconnaissance des modalités d'application*, *mise en jeu de connaissances anciennes*). Pour cela, l'*organisation du raisonnement* se fait en plusieurs étapes. Il s'agit de déterminer un plan auxiliaire contenant la droite EF et sécant avec le plan BCD (*existence d'un choix forcé*). L'étape suivante consiste à déterminer la droite d'intersection de ces deux plans et enfin le point d'intersection entre cette droite et la droite EF. Une construction sur le dessin est réalisée.

La question ② nécessite une *organisation du raisonnement* en plusieurs étapes. Il s'agit de résoudre algébriquement un système composé d'une équation de la droite EF et d'une équation du plan BCD (*reconnaissance des modalités d'application*, *conversion de registres*). Puisque les coordonnées des points B, C et D sont données, il est possible d'écrire une équation paramétrique du plan BCD (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Cela entraîne de choisir un point et deux vecteurs directeurs du plan (*existence de*

choix). On est dans le cadre de la géométrie vectorielle. Il reste à calculer les composantes des vecteurs pour avoir une équation paramétrique dans le cadre de la géométrie analytique (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *changement de cadres*). Les deux égalités vectorielles fournies dans l'énoncé doivent être développées (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *changement de cadres*) pour déterminer les coordonnées des points E et F. Une équation paramétrique de la droite EF peut dès lors être trouvée (*mise en jeu de connaissances anciennes et en cours d'acquisition*). Il reste à résoudre le système contenant ces deux équations (*mise en jeu de connaissances anciennes*). L'ensemble des solutions du système décrit le point de percée recherché (*conversion de registres*).

Cet exercice a pour objectif de mettre en parallèle les démarches et les outils propres à la géométrie synthétique et à la géométrie analytique. Ce point est souligné par les programmes actuels. Bien que ce type de tâches soit présent dans le manuel *CQFD*, aucun des enseignants ne le propose en classe. La première partie de la question ne met en jeu que des connaissances anciennes. Toutefois, il se peut que ces connaissances ne soient pas disponibles chez les élèves. Cela peut s'expliquer par le fait qu'au moins un an sépare l'enseignement des points de percée et notre expérimentation. L'enseignant peut donc guider les élèves à reconstruire la démarche à suivre dans le cadre de la géométrie synthétique. Une fois celle-ci rappelée, les élèves peuvent construire en toute autonomie le point de percée demandé. Une correction collective suit cette phase de travail. L'enseignant peut insister sur la démarche employée et les connaissances de géométrie synthétique mises en jeu pour cette partie de la question. Les activités attendues des élèves sont alors la mobilisation de leurs connaissances en géométrie synthétique, la particularisation de la démarche générale à l'exercice et la construction dans le registre du dessin du point de percée.

La deuxième partie de la question met en jeu des connaissances anciennes et en cours d'acquisition sur les droites et les plans dans l'espace. Plusieurs adaptations sont nécessaires tels que des changements de cadres géométriques et des introductions d'étapes intermédiaires (recherche des coordonnées des points E et F). La démarche à appliquer dans le plan n'est pas donnée dans l'énoncé. Cependant, il est possible de s'appuyer sur le travail réalisé lors de la première sous-question pour en établir une. Les élèves peuvent donc résoudre cette tâche en autonomie même si elle relève d'un niveau disponible de mise en fonctionnement des connaissances. Lors de la correction collective de cette sous-question, l'enseignant peut insister sur la démarche suivie et les connaissances du cadre de la géométrie analytique utilisées. Il peut aussi faire un bilan de l'exercice en mettant en évidence les avantages et les inconvénients des démarches propres aux cadres de la géométrie synthétique et de la géométrie analytique. Les activités attendues des élèves sont l'organisation du raisonnement dans le cadre de la géométrie analytique et les jeux entre les cadres géométriques. Nous pensons qu'il est difficile pour les élèves de comparer d'eux-mêmes les deux cadres géométriques vu qu'ils n'ont jamais été mis en parallèle dans l'enseignement.

Exercice 23

Une épreuve de sélection est organisée dans le cadre d'un jeu télévisé. Les candidats doivent répondre à trois questionnaires, côtés sur 20, mais avec des pondérations différentes. Le premier questionnaire porte sur l'histoire des sciences et des techniques (pondération 2), le deuxième sur la géographie de l'Europe (pondération 1) et le dernier comprend des questions de culture générale (pondération 2). Un candidat est sélectionné s'il a obtenu au moins 50 points sur 100. Les notes possibles des candidats dans chacune des matières sont représentées par les variables x (histoire des sciences et techniques), y (géographie) et z (culture générale). Un point $P(x,y,z)$ est associé à chaque candidat.

① Dans quelle partie de l'espace sont situés les points P ? Représentez-la.

② Dans quelle partie de l'espace sont situés les points associés aux candidats ayant obtenu 50 points ? Représentez-la.

③ Est-il possible de trouver un candidat qui a eu 50 points à l'examen en ayant eu une note de 0 en histoire des sciences et des techniques ? Même question s'il a eu 0 en géographie, puis 0 en culture générale.

④ Est-il possible de trouver un candidat qui a réussi l'examen avec une note strictement supérieure à 50 mais qui a eu une note de 0 en histoire des sciences et techniques ?

⑤ On veut qu'un candidat ayant eu 8 en histoire des sciences et des techniques, 12 en géographie de l'Europe et 9 en culture générale soit sélectionné. Quelles sont les valeurs des pondérations a, b et c que l'on doit choisir pour qu'il soit sélectionné ? Donnez, si possible, un exemple de pondération acceptée.

Cet exercice est fortement inspiré du manuel *CQFD* (2014 et 2019). Le problème est le même mais toutes les questions ont été modifiées afin que le travail à réaliser ne soit pas indiqué explicitement. Dans la version originale, le travail est très découpé et se limite le plus souvent à des applications immédiates des connaissances. Nous avons donc modifié les tâches pour qu'elles deviennent plus complexes et mettent en jeu des adaptations variées.

Analyse *a priori* de l'exercice 23

La question est découpée en cinq sous-questions. Elles sont toutes ouvertes. Aucune méthode n'est imposée.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie synthétique.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle, registre ensembliste, registre graphique.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- □ Connaissances anciennes : repère orthonormé dans l'espace, propriétés géométriques du cube, section de plan, inéquations, résolution de systèmes.
- □ Connaissances en cours d'acquisition : équations cartésiennes de plans, équations paramétriques de droites dans l'espace.

Adaptations à réaliser

Pour la question ①, il s'agit de caractériser l'ensemble des notes que peut avoir chaque candidat. L'énoncé est donné en langue naturelle. Une *conversion de registres* a lieu afin de décrire chaque candidat par un triplet de notes allant toutes de 0 à 20. Il faut déterminer quel est l'objet décrit par cet ensemble de triplets. L'objet décrit est un cube de côté 20. Sa représentation se fait en utilisant des *connaissances anciennes* sur les repères de l'espace et la perspective cavalière (*conversion de registres*).

Le point ② amène une *organisation du raisonnement* en deux étapes. Dans un premier temps, il s'agit de comprendre que les pondérations données dans l'énoncé sont les coefficients devant les variables x, y et z (*conversion de registres*). Une équation cartésienne représentant l'ensemble des candidats ayant eu 50 points peut être écrite. Celle-ci décrit un plan (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Dans un deuxième temps, la représentation de ce plan amène à réaliser la section du cube par ce plan (*utilisation de questions précédentes*). Plusieurs méthodes peuvent être utilisées (*existence de choix*). Trois points vérifiant cette équation peuvent être déterminés et placés dans un repère orthonormé (*conversion de registres*). S'ils sont non alignés, la section du cube par le plan défini par ces trois points peut se faire en *mettant en jeu des connaissances anciennes* vues dans le cadre de la géométrie synthétique (*changement de cadres*). La deuxième méthode utilise les *connaissances en cours d'acquisition*. Il s'agit de déterminer l'intersection du plan avec chaque face du cube. Une *étape intermédiaire* est alors introduite. Une équation cartésienne de chaque face du cube peut être donnée (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Des systèmes de deux équations à trois inconnues doivent être résolus (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Les ensembles des solutions de ces systèmes sont écrits (*conversion de registres*). Ces ensembles représentent les différentes droites délimitant la section du cube par le plan (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Ces droites peuvent être représentées sur le graphique (*conversion de registres*).

Le point ③ revient à prendre l'équation cartésienne donnée au point ② et à remplacer la variable x par zéro (*utilisation de questions précédentes*, *conversion de registres*). Il s'agit d'utiliser la section du cube représentée au point ② et de déterminer quel segment de droite remplit ces conditions (*conversion de registres*, *utilisation de questions précédentes*). Un point de cette droite peut être déterminé à partir de l'équation étudiée ou de l'ensemble de points donné à la question ② (*conversion de registres*, *existence de choix*). L'*organisation du raisonnement* est similaire pour $y = 0$ et $z = 0$.

Le point ④ revient à déterminer une solution d'une inéquation (*conversion de registres*). Pour ce faire, deux méthodes peuvent être utilisées. Il est possible, au vu des conditions données, de trouver par essai-erreur une telle solution. La deuxième méthode consiste à déterminer s'il existe une région du cube qui vérifie les conditions données (*changement de points de vue au sens de Robert*). Pour cela, il faut se référer au graphique réalisé précédemment et aux différentes équations déjà écrites (*utilisation de questions précédentes*, *conversion de registres*). Un triplet vérifiant les deux conditions données peut alors être

déterminé et il s'agit de montrer qu'il vérifie bien l'inéquation (*conversion de registres*, *existence de choix*).

La question ⑤ revient à étudier une inéquation où les inconnues sont a, b et c (*conversion de registres*). L'*organisation du raisonnement* se découpe en plusieurs étapes. Tout d'abord, une équation cartésienne de plan peut être écrite. Une représentation de ce plan est nécessaire et amène à déterminer la section du cube par ce plan (*utilisation de questions précédentes*, *conversion de registres*). Les deux mêmes méthodes que pour le point ② peuvent être utilisées. Une fois le plan tracé, il reste à déterminer l'ensemble des triplets vérifiant l'inéquation considérée. La même démarche que pour le point ④ peut être mise en œuvre. Enfin, un triplet de cet ensemble est choisi (*existence de choix*) en vérifiant bien qu'il satisfait l'inéquation étudiée (*conversion de registres*).

Cet exercice permet de travailler la dimension outil des notions en cours d'acquisition. Ainsi, il s'agit de résoudre un problème dans lequel ces notions n'apparaissent pas explicitement mais peuvent être utilisées lors de la résolution. De nombreuses adaptations sont nécessaires dont notamment des conversions entre les registres de la langue naturelle, algébrique, graphique et ensembliste. Des changements de cadres peuvent apparaitre entre la géométrie synthétique et la géométrie analytique. Ceux-ci peuvent permettre également de comparer les démarches et les outils utilisés dans les deux cadres. Cette tâche relève du niveau disponible de mise en fonctionnement des connaissances. Ce type d'exercice ne peut être laissé à l'entière charge des élèves. C'est pourquoi une discussion collective est prévue pour sa résolution. Nous pensons que cela peut aider les élèves à poser le problème dans le registre algébrique mais aussi dans leur organisation du raisonnement. L'enseignant peut insister sur le sens des calculs effectués à partir des équations en s'appuyant sur le graphique réalisé. L'enseignant peut également mettre en avant les avantages et les inconvénients des démarches propres aux deux cadres géométriques pour déterminer la section d'un cube par un plan. Nous pensons que cet exercice permet de ne pas perdre le côté visuel du problème et de ne pas limiter le travail des élèves à des calculs comme le suggère notre étude historique et épistémologique. Ainsi, la technique et le sens peuvent être tous les deux travaillés dans ce type d'exercices. Rappelons que nous avons trouvé quelques exercices dans les manuels scolaires permettant de travailler la dimension outil des notions mais ceux-ci ne sont généralement pas abordés dans les classes.

4 Bilan

Notre scénario est découpé en deux parties : l'activité d'introduction à partir de laquelle toutes les notions de géométrie analytique dans l'espace demandées par le programme scolaire émergent et les exercices portant sur l'ensemble de ces nouvelles notions.

L'activité d'introduction est découpée en deux questions. La première a pour objectif de travailler le premier aspect de l'interprétation géométrique. La reconnaissance des objets n'étant que peu travaillée dans l'enseignement secondaire, il s'agit de proposer à partir des connaissances que les élèves ont en géométrie analytique plane un question-

nement sur les équations, les ensembles de points et les objets géométriques associés. La deuxième tâche amène à utiliser ce questionnement comme un levier pour introduire les nouvelles notions (sauf la distance). De la sorte, les notions du plan sont étendues à l'espace avec comme moyen de contrôle interne supposé efficace l'interprétation géométrique.

Dès le début de la séquence, des conversions entre les registres algébrique, ensembliste, graphique et de la langue naturelle sont à réaliser. La deuxième question propose aussi des jeux de cadres entre les géométries synthétique, vectorielle et analytique. Une double articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique y est aussi travaillée. Ainsi, un travail important est proposé lors des moments de cours pour développer la flexibilité des élèves en termes de registres, de cadres et de points de vue. Comme elle ne se développe pas de façon automatique chez les élèves, l'enseignant joue un rôle important dans cette partie de la séquence. Il raccroche le travail à réaliser aux connaissances que les élèves ont déjà et à ce qu'ils ont déjà pu rencontrer afin que les nouvelles connaissances s'intègrent plus facilement dans le bagage mathématique des élèves. Nous pensons que ces occasions de proximités peuvent favoriser chez les élèves le développement de la flexibilité attendue pour ces notions. Toutefois, dans une visée piagétienne, la flexibilité ne peut vraiment se développer qu'à partir du moment où les élèves peuvent effectuer ces traitements internes en autonomie. Les exercices choisis dans la deuxième partie de notre scénario les mettent donc en jeu.

Nous avons illustré avec l'exercice 2 que des applications immédiates des connaissances sont proposées dans notre scénario. Des exercices nécessitant des adaptations variées des connaissances sont également envisagés comme nous l'avons montré pour les exercices 8 et 11. De plus, la reconnaissance des objets travaillée dans l'activité introductive est également exploitée dans certains exercices comme les exercices 12 et 18. Dans ceux-ci, la technique vient valider ce que le travail sur le sens a permis de déterminer. Ce type d'exercices met en jeu les deux aspects de l'interprétation géométrique qui doivent être développés par les élèves. Nous avons aussi mis en évidence que les mises en relation entre les connaissances des élèves sont importantes dans les tâches prescrites. C'est le cas par exemple des exercices de calculs de distances. D'autres exercices permettent de travailler la dimension outil des notions comme nous l'avons expliqué pour l'exercice 23. Les dimensions outil et objet des notions sont donc bien abordées. Finalement, des comparaisons entre les outils et les démarches utilisés en géométrie synthétique et en géométrie analytique sont possibles comme nous l'avons illustré dans l'exercice 22. Nos analyses *a priori* des tâches mettent donc bien en évidence la diversité, la quantité et la variété des adaptations des connaissances en jeu et la flexibilité qu'elles permettent de développer entre les registres, les cadres et les points de vue.

En conclusion, notre scénario semble bien posséder les caractéristiques que nous avons jugées nécessaires pour favoriser la conceptualisation de ces notions chez les élèves. De plus, il est conforme aux programmes actuels de l'enseignement secondaire belge francophone. Les choix effectués dans le chapitre IX ont bien été intégrés à la fois dans la progression des contenus et dans la gestion prévue en classe. Dans le chapitre suivant, nous présentons l'expérimentation du scénario envisagé dans le chapitre X.

Nous voulons tout d'abord savoir si elle est effectivement réalisable dans une classe de l'enseignement secondaire comme les enseignants interrogés semblent le penser. Nous voulons ensuite tester si les apprentissages visés par notre séquence ont été réalisés par les élèves.

Chapitre XII

Expérimentation du scénario

Le scénario décrit au chapitre X a été expérimenté dans une classe de l'enseignement secondaire. Dans ce chapitre, nous présentons tout d'abord la chronologie globale de l'expérimentation. Nous cherchons ainsi à repérer les décalages possibles entre ce que nous avons prévu *a priori* et ce qu'il s'est effectivement passé en classe. Nous analysons ensuite les déroulements correspondants à quelques phases précises de notre scénario. Nous voulons rendre compte de l'organisation du travail choisie par l'enseignant et de ses interventions dans l'objectif d'inférer des éléments sur les activités possibles des élèves en classe.

1 Éléments méthodologiques

Notre scénario a été expérimenté dans une classe de sixième secondaire durant le mois de novembre 2019. Le chapitre de géométrie analytique n'avait pas pu être vu en cinquième année par l'enseignant. Selon lui, le programme de cinquième année est trop chargé et faute de temps il a repoussé ce chapitre en sixième année. Tous les prérequis nécessaires (sauf les déterminants) pour aborder notre scénario ont donc été vus au moment de notre expérimentation. La classe est composée de 7 élèves dans une section de mathématiques pour scientifiques. Ils ont donc six heures de mathématiques par semaine. Le niveau du groupe est faible. Selon l'enseignant, la dynamique de groupe est importante car les élèves ont l'habitude de participer en classe mais ils ne fournissent pas suffisamment de travail personnel. Selon lui, les élèves n'étudient pas et sont souvent en échec lors des interrogations et des examens. Il se peut donc qu'il en soit de même pour notre expérimentation. Les élèves de cette classe ont l'habitude de recevoir un polycopié de la part de l'enseignant pour chaque chapitre du cours. Il estime qu'ainsi le cours des élèves sera en ordre dans le cas d'un contrôle de l'inspection ou de l'homologation. Il nous a donc demandé de fournir aux élèves un document reprenant les notions théoriques à étudier. Nous avons donc décidé de leur proposer un document complétant les notes prises en classe. Celui-ci est disponible dans l'annexe I.

Notre scénario a été découpé en 17 périodes de 50 minutes dont une période est dédiée à l'évaluation. Nous ne parlons pas de cette dernière dans ce chapitre mais dans le chapitre XIII. Comme notre expérimentation s'est déroulée juste avant les examens de

décembre, nous ne pouvons pas augmenter ce nombre de séances si cela est nécessaire. Il est donc possible que nous soyons amenée à faire des choix supplémentaires lors des déroulements. Nous avons filmé les 16 séances de cours. Nous disposons alors de 800 minutes d'enregistrement soit 13 heures et 20 minutes.

Nous présentons un panorama général de notre expérimentation au point suivant.

2 Panorama général de l'expérimentation

Nous donnons tout d'abord une vue d'ensemble des déroulements de notre expérimentation. Nous précisons ensuite ce qu'il s'est effectivement passé en classe afin de fournir quelques éléments expliquant les décalages observés. Une analyse plus fine de certaines phases des déroulements est proposée à la section suivante (cf. point 3). Nous proposons à l'annexe J les déroulements correspondants à l'entièreté de notre scénario.

2.1 Chronologie globale

Nous présentons la chronologie globale de notre scénario et de son déroulement sous la forme d'un tableau à trois colonnes (voir tableaux XII.1, XII.2, XII.3 et XII.4). Nous y précisons pour chaque séance les contenus que nous avons prévus *a priori* et ceux que nous avons effectivement abordés lors de notre expérimentation.

Séance (50 minutes)	Chronologie *a priori*	Chronologie effective
Séance 1	□ Définition d'une équation. □ Distinction entre « résoudre une équation » et « décrire par une équation ». □ Tâche d'introduction 1 - résolution S_1.	□ Définition d'une équation. □ Distinction entre « résoudre une équation » et « décrire par une équation ». □ Tâche d'introduction 1 - correction collective S_1. □ Tâche d'introduction 1 - résolution S_2.
Séance 2	□ Tâche d'introduction 1 - correction S_1. □ Tâche d'introduction 1 - résolution S_2. □ Tâche d'introduction 1 - correction S_2. □ Rappels. □ Tâche d'introduction 1 - résolution S_3 et S_4.	□ Tâche d'introduction 1 - correction S_2. □ Rappels. □ Tâche d'introduction 1 - résolution et correction S_3.
Séance 3	□ Tâche d'introduction 1 - correction S_3 et S_4. □ Rappels. □ Tâche d'introduction 2 - S_1. □ Équations cartésiennes de plans particuliers. □ Tâche d'introduction 2 - S_2. □ Équations paramétriques de droites dans l'espace.	□ Tâche d'introduction 1 - correction S_4. □ Rappels. □ Tâche d'introduction 2 - S_1. □ Équations cartésiennes de plans particuliers. □ Tâche d'introduction 2 - résolution S_2.

TABLE XII.1 – Découpage des séances *a priori* et *a posteriori* (1/4).

Séance (50 minutes)	Chronologie *a priori*	Chronologie effective
Séance 4	□ Tâche d'introduction 2 - S_3 et S_4. □ Équations cartésiennes de droites dans l'espace. □ Équations cartésiennes de droites particulières. □ Articulation des points de vue pour les droites.	□ Tâche d'introduction 2 - correction S_2. □ Équations paramétriques de droites dans l'espace. □ Tâche d'introduction 2 - S_3.
Séance 5	□ Tâche d'introduction 2 - S_5. □ Équations paramétriques de plans. □ Articulation des points de vue pour les plans. □ Vecteur normal à un plan. □ Équations cartésiennes de plans.	□ Tâche d'introduction 2 - S_4.
Séance 6	□ Positions relatives d'une droite et d'un plan. □ Tâche d'introduction 2 - S_5 et S_6. □ Positions relatives de deux plans. □ Exercices 1 et 2.	□ Équations cartésiennes de droites dans l'espace. □ Équations cartésiennes de droites particulières. □ Articulation des points de vue pour les droites.

TABLE XII.2 – Découpage des séances *a priori* et *a posteriori* (2/4).

Séance (50 minutes)	Chronologie *a priori*	Chronologie effective
Séance 7	□ Exercices 3, 4 et 5.	□ Tâche d'introduction 2 - S_5. □ Équations paramétriques de plans. □ Articulation des points de vue pour les plans.
Séance 8	□ Exercices 6, 7 et 8.	□ Vecteur normal à un plan. □ Équations cartésiennes de plans. □ Positions relatives d'une droite et d'un plan. □ Tâche d'introduction 2 - S_5 et S_6. □ Positions relatives de deux plans.
Séance 9	□ Exercices 9, 10, 11 et 12.	□ Exercices 1, 2 et 3.
Séance 10	□ Exercices 13, 14 et 15.	□ Exercices 3, 4 et 5.
Séance 11	□ Exercices 16, 17 et 18.	□ Exercices 6 et 7.
Séance 12	□ Exercices 19, 20 et 21.	□ Exercices 7, 8, 9 et 10.

TABLE XII.3 – Découpage des séances *a priori* et *a posteriori* (3/4).

Séance (50 minutes)	Chronologie *a priori*	Chronologie effective
Séance 13	□ Exercice 22.	□ Exercice 11. □ Distance entre deux points dans l'espace. □ Distance entre un point et une droite dans l'espace. □ Distance entre un point et un plan. □ Exercice 24.
Séance 14	□ Exercice 23.	□ Exercices 12, 16, 15, 26 et 18.
Séance 15	□ Distance entre deux points dans l'espace. □ Distance entre un point et une droite dans l'espace. □ Distance entre un point et un plan. □ Exercice 24.	□ Exercices 20 et 22.
Séance 16	□ Exercices 25, 26 et 27.	□ Exercices 22 et 23.

TABLE XII.4 – Découpage des séances *a priori* et *a posteriori* (4/4).

Plusieurs observations de ce découpage des séances peuvent être faites. Tout d'abord, tous les contenus mathématiques à enseigner ont bien été enseignés. L'ordre choisi *a priori* pour introduire les notions a globalement été suivi. Ensuite, des décalages importants entre la chronologie prévue initialement et celle effective apparaissent. Nous revenons sur les différentes étapes du scénario et donnons des éléments sur les déroulements afin d'apporter quelques explications sur ces décalages.

2.2 L'activité d'introduction

La première partie de l'activité d'introduction a consisté à amener une première formalisation de la notion d'équation. L'enseignant a demandé aux élèves de fournir des exemples d'équations. Il a écrit au tableau les différentes propositions des élèves sans les valider. Toutes les propositions sont correctes. Il y a des équations du premier et du deuxième degré à une inconnue et des équations du second degré à une inconnue. Les exemples sont donc assez variés. L'enseignant a sollicité les élèves pour amener la définition d'une équation. Les réponses des élèves sont validées et des contre-exemples sont fournis pour les appuyer. Par exemple, un élève dit qu'il faut avoir une égalité et l'enseignant lui demande si $5 = 4$ est une équation. Tout comme nous l'avons prévu, l'enseignant a questionné les élèves, noté les exemples proposés et amené les élèves à donner une première formalisation de la notion d'équation. L'enseignant revient par la suite sur la résolution algébrique et graphique d'une équation ou d'un système d'équations. Pour ce faire, il a demandé comment résoudre une des équations proposées par les élèves et en a profité pour revenir sur la notion de solution d'une équation. Lors de cette partie de notre expérimentation, tout s'est passé comme prévu. Les élèves se sont engagés dans la discussion et ont mobilisé leurs connaissances. Nous n'avons pas repéré de difficultés particulières chez les élèves. Le tableau XII.5 fournit la chronologie pour cette étape de l'enseignement.

Définition d'une équation	3'
Résolution algébrique	1'45"
Distribution des feuilles	42"
Lecture individuelle de la tâche introductive 1	1'06"
Résolution graphique	3'03"

TABLE XII.5 – Chronologie pour l'activité introductive : les équations.

La deuxième partie consiste à expliquer aux élèves la distinction entre « résoudre une équation » et « décrire par une équation » (cf. annexe I, page 650). L'enseignant sollicite les élèves pour lire le document qui leur a été fourni. Conformément à la gestion prévue initialement, une discussion collective s'est engagée entre l'enseignant et les élèves pour la fonction $f(x) = x^2 + 3x + 2$. Par un jeu de questions/réponses, l'enseignant amène les élèves à mobiliser leurs connaissances sur les fonctions du premier et du deuxième degré, les équations du deuxième degré, le repérage des points dans un plan et les équations particulières de droites dans l'espace. Dans cette partie, les élèves sont constamment sollicités pour organiser le raisonnement, effectuer des conversions entre

le registre algébrique et le registre graphique et pour le bilan de la démarche suivie pour chaque valeur précise donnée à y. L'enseignant s'appuie sur cette démarche pour aborder le cas où la valeur de y est quelconque. Il essaie d'établir des connexions entre ce que les élèves ont fait dans les cas particuliers et ce qu'ils font maintenant dans le cas général. Des proximités ascendantes sont tentées par l'enseignant conformément à ce qui a été prévu *a priori*. Les élèves ne semblent pas rencontrer de difficultés pour cette partie. Le tableau XII.6 fournit la chronologie pour cette étape de l'enseignement.

Exemple 1 : le cas où $y = 0$	4'55"
Exemple 1 : le cas où $y = 2$	3'40"
Exemple 1 : le cas où $y = -1$	1'57"
Exemple 1 : le cas où y est quelconque	3'36"
Exemple 2	2'28"

TABLE XII.6 – Chronologie pour l'activité introductive : distinction des deux expressions.

La troisième partie consiste à réaliser la tâche introductive 1 (cf. chapitre X). Afin de s'assurer que les élèves ont compris ce qu'il est attendu d'eux dans cette activité d'introduction, le premier système est résolu collectivement. Nous avons initialement prévu une phase de recherche individuelle pour ce système. Au vu du niveau suppposé des élèves, nous avons choisi de façon improvisée de résoudre le premier système avec eux. Lors de cette résolution collective, les élèves sont toujours sollicités par l'enseignant grâce à un jeu de questions/réponses. Ils organisent eux-mêmes le raisonnement et reconnaissent les objets décrits par les deux équations du système. La gestion prévue est donc différente de la gestion effectivement suivie. Nous analysons en détails les déroulements associés à ce système ultérieurement. Ce choix improvisé par l'enseignant permet de lancer les élèves dans une phase de recherche individuelle pour le deuxième système avant la fin de la première séance. Lors des rappels sur les équations de droites dans le plan prévus par l'enseignant, certaines questions posées par les élèves ont mis en évidence quelques écarts entre l'idée que nous nous faisons de la ZPD des élèves et leur ZPD « réelle ». En effet, les notions de géométrie vectorielle (par exemple : produit scalaire, colinéarité) sont supposées être dans la ZPD des élèves au vu des programmes scolaires. Or, cela ne semble pas être le cas bien qu'elles aient effectivement été vues. Nous pouvons expliquer cela par le fait qu'au moins un an s'est écoulé entre notre expérimentation et le moment où cette matière a été introduite mais éventuellement aussi par un manque de travail personnel de la part des élèves. Ainsi, nous avons passé du temps à rappeler certaines notions essentielles pour la suite de l'expérimentation. Cela peut expliquer les décalages observés lors de la deuxième séance. Une phase de recherche individuelle suivie d'une correction collective ont bien été organisées pour la résolution des systèmes S_3 et S_4. Notons que ces systèmes ont été laissés en préparation à domicile. Aucune difficulté particulière n'a été observée et la préparation semble avoir été faite par la majorité des élèves. Le tableau XII.7 fournit la chronologie pour cette étape de l'enseignement.

Correction collective de S_1	10'38"
Recherche individuelle pour S_2	3'
Correction collective de S_2	7'30"
Rappels	25'
Recherche individuelle pour S_3	5'30"
Correction collective de S_3	7'24"
Correction collective de S_4	6'
Rappels	8'51"

TABLE XII.7 – Chronologie pour l'activité introductive : la tâche introductive 1.

La quatrième partie débute à la séance 3 avec la réalisation de la tâche introductive 2 (cf. chapitre X). La gestion prévue pour cette étape de l'enseignement n'a pas été respectée pour plusieurs raisons. Tout d'abord, nous avons proposé des phases de recherche individuelle à certains moments de la résolution des différents systèmes. Les élèves ont été mis à contribution à certains moments du cours pour organiser les raisonnements, effectuer les calculs ou faire des dessins. Par exemple, ils ont proposé une démarche de résolution pour le système S_1 et représenté les points donnés dans un repère orthonormé. Cela nous a permis de constater que certains ne sont pas capables de placer des points dans un repère orthonormé de l'espace. Pour les systèmes S_4 et S_6, les élèves ont dû chercher une stratégie pour déterminer la position relative des objets. De ce fait, nous avons choisi de leur laisser du temps pour qu'ils puissent réaliser ces activités. Ce choix spontané a été effectué pour dynamiser les séances en les mettant en activité et tester si les connaissances que nous pensions être dans la ZPD le sont effectivement. Les séances 4, 5, 6 et 7 ont été impactées par ce changement de gestion du travail en classe. Ensuite, la résolution du système S_4 a été particulièrement longue. D'une part, les élèves ont eu des difficultés à reconnaître les objets décrits par les équations données et à organiser leurs raisonnements pour déterminer la position relative de la droite et du plan. D'autre part, une confusion entre les expressions « condition nécessaire » et « condition suffisante » a été repérée en classe. En effet, les élèves ont proposé qu'il suffit de montrer que trois points sont alignés pour prouver que les équations $x = \frac{y}{2} = z - 2$ décrivent une droite. Nous avons donc passé du temps supplémentaire sur ce système pour leur expliquer que cela ne suffit pas et qu'il est nécessaire de le prouver pour tous les points vérifiant ces équations. Les déroulements associés à la résolution du système S_4 seront détaillés ultérieurement. Le tableau XII.8 fournit la chronologie pour cette partie de l'enseignement.

Correction collective de S_1	14'45"
Équations cartésiennes de plans particuliers	4'
Recherche individuelle pour S_2	4'26"
Correction collective de S_2	6'33"
Équations paramétriques de droites dans l'espace	22'06"
Recherche individuelle pour S_3	7'35"
Correction collective de S_3	11'13"
Recherche individuelle pour S_4	3'35"
Correction collective de S_4	62'46"

Équations cartésiennes de droites dans l'espace	6'44"
Équations cartésiennes de droites particulières dans l'espace	15'05"
Recherche individuelle pour S_5	6'46"
Correction collective de S_5	29'39"
Équations paramétriques de plans	10'54"
Articulation des points de vue	12'44"
Vecteurs normaux	3'
Équations cartésiennes de plans	6'15"
Positions relatives d'une droite et d'un plan	4'09"
Correction collective de S_6	5'13"
Positions relatives de deux plans	1'18"

TABLE XII.8 – Chronologie pour l'activité introductive : la tâche introductive 2.

Toutes les notions théoriques à part la notion de distance ont bien été introduites à la fin de la tâche introductive 2 (fin de la séance 9). Nous observons un décalage de deux séances entre la gestion effective et la gestion prévue. Puisque notre expérimentation ne pouvait en aucun cas dépasser 16 séances, des choix supplémentaires ont été effectués pour que toutes les notions soient étudiées et travaillées. D'une part, la notion de distance a été vue lors de la séance 13 au lieu de la séance 15. Ce choix a permis de nous assurer que cette notion soit bien introduite et exploitée car l'examen de décembre en mathématiques est commun à toutes les classes de sixième année. D'autre part, nous avons cherché à exploiter au mieux le temps qu'il nous restait. Cela nous a amené à sélectionner certaines tâches parmi celles prescrites, à demander aux élèves d'en réaliser certaines à domicile en s'assurant qu'ils se sentent engagés dans leur préparation et à modifier la nature du travail prévu à certains moments. Nous abordons les déroulements généraux pour la phase d'exercices au point suivant.

2.3 Les exercices

Les exercices dont nous parlons ici sont présentés dans le chapitre X (voir point 2). De nombreuses modifications entre la gestion et la nature du travail prévus *a priori* et celles effectives sont observées. Nous revenons brièvement sur l'ensemble des tâches effectives afin de les préciser et de les expliquer.

Les exercices 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 22 et 23 se sont déroulés conformément à ce qui a été prévu. Une résolution collective a bien directement été réalisée pour l'exercice 23. Une phase de recherche individuelle a bien été proposée aux élèves suivie d'une correction collective pour tous les autres exercices cités. Durant les phases de recherche, l'enseignant a circulé entre les bancs et n'est pas intervenu. Toutefois, il a répondu individuellement aux questions posées par les élèves. Le tableau XII.9 fournit la chronologie globale pour chaque exercice.

Recherche individuelle pour les exercices 1, 2 et 3	33'02"
Correction collective de l'exercice 1	4'05"
Correction collective de l'exercice 2	2'28"
Correction collective de l'exercice 3	8'18"
Recherche individuelle pour l'exercice 5	6'58"
Correction collective de l'exercice 5	5'38"
Recherche individuelle pour l'exercice 6	8'04"
Correction collective de l'exercice 6	22'15"
Recherche individuelle pour les exercices 9 et 10	10'10"
Correction collective de l'exercice 9	1'33"
Correction collective de l'exercice 10	5'30"
Recherche individuelle pour l'exercice 22	21'35"
Correction collective de l'exercice 22	18'27"
Recherche individuelle pour l'exercice 23	5'37"
Correction collective de l'exercice 23	29'59"

TABLE XII.9 – Chronologie pour les exercices 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 22 et 23.

La phase de recherche individuelle pour l'exercice 4 a été plus longue que prévue. Nous avons choisi d'attendre que tous les élèves aient fini les calculs avant de corriger la question au tableau. Trois élèves ont rapidement fini et sont passés à l'exercice suivant. Les quatre autres élèves ont été plus lentement et ont rencontré des difficultés pour déduire la conclusion attendue une fois que le système de trois équations à deux inconnues est résolu. C'est donc une difficulté liée à la conversion entre le registre algébrique et le registre de la langue naturelle qui a notamment ralenti les élèves dans leur résolution. L'enseignant est passé dans les bancs et a répondu individuellement aux questions lorsqu'il était sollicité par un élève. Le tableau XII.10 donne la chronologie suivie pour cet exercice.

Recherche individuelle pour l'exercice 4	10'35"
Correction collective de l'exercice 4	5'

TABLE XII.10 – Chronologie pour l'exercice 4.

La gestion prévue *a priori* pour les exercices 11, 12, 15, 16 et 20 a légèrement été modifiée. Ils ont été préparés à domicile par les élèves. Ainsi, bien qu'une phase de recherche individuelle a certainement eu lieu, nous n'avons accès qu'aux déroulements des corrections collectives. Dans celles-ci, l'enseignant sollicite énormément les élèves pour déterminer les activités qu'ils ont potentiellement pu développer et les difficultés éventuellement rencontrées. Le tableau XII.11 précise la chronologie générale pour ces exercices.

Correction collective de l'exercice 11	23'17"
Correction collective de l'exercice 12	4'
Correction collective de l'exercice 16	1'54"
Correction collective de l'exercice 15	6'32"
Correction collective de l'exercice 20	9'48"

TABLE XII.11 – Chronologie pour les exercices 11, 12, 15, 16 et 20.

L'exercice 11 relève du niveau disponible de mise en fonctionnement des connaissances. Les élèves doivent avoir réalisé plusieurs adaptations des connaissances en toute autonomie et à domicile. Nous choisissons d'analyser en détails les déroulements de cette correction collective ultérieurement. Les exercices 12 et 15 mettent en jeu un travail sur la reconnaissance des objets décrits par un ensemble de points et par des équations. Puisqu'un tel travail est un des enjeux de notre séquence d'enseignement, nous choisissons également d'analyser en détails les déroulements de ces deux exercices ultérieurement.

Les exercices 8, 18, 24 et 26 ont été directement corrigés sans qu'une phase de recherche individuelle n'ait lieu. La gestion prévue n'a donc pas été respectée. Les adaptations à réaliser dans ces exercices sont similaires à celles mises en œuvre dans les séances précédentes et en particulier dans l'activité d'introduction. Nous avons donc choisi, faute d'un temps plus long, de résoudre collectivement ces exercices. Le tableau XII.12 précise la chronologie générale pour ces exercices.

Correction collective de l'exercice 8	10'31"
Correction collective de l'exercice 24	3'26"
Correction collective de l'exercice 26	19'38"
Correction collective de l'exercice 18	9'32"

TABLE XII.12 – Chronologie pour les exercices 8, 18, 24 et 26.

Les élèves ont été sollicités à toutes les étapes de la résolution de ces exercices. Lorsque les propositions sont correctes, l'enseignant les valide et les écrit au tableau. Si elles sont incorrectes, l'enseignant les guide dans le raisonnement par un jeu de questions/réponses ou en rapprochant le travail à réaliser à ce qui a déjà été fait dans l'activité d'introduction ou dans le cours magistral sur les distances. La majorité des élèves a participé à ces corrections et a rarement fait des propositions incorrectes. L'exercice 18 est le premier exercice réalisé en classe mettant en jeu le premier aspect de l'interprétation géométrique pour les équations de plans. Nous analysons plus finement les déroulements pour cet exercice ultérieurement.

Une phase de recherche individuelle a été proposée pour l'exercice 7. Toutefois, la nature du travail a été modifiée en classe. Les élèves n'ont pas réussi à déterminer une équation paramétrique du plan. Certains élèves ont bien constaté que les deux droites sont parallèles et n'ont pas pu organiser un raisonnement pour réaliser la tâche prescrite. D'autres élèves n'ont pas vu que les vecteurs sont colinéaires et ont écrit une équation

paramétrique incorrecte. De ce fait, l'enseignant a choisi d'interrompre la phase de recherche individuelle pour guider les élèves dans leur raisonnement à la fin de la séance 11. Les élèves devaient alors mettre en œuvre cette démarche pour la séance suivante. La séance 12 a notamment consisté à corriger collectivement la préparation laissée à domicile. Le tableau XII.13 précise la chronologie générale pour cet exercice.

Recherche individuelle pour l'exercice 7	11'46"
Correction collective de l'exercice 7	20'14"

TABLE XII.13 – Chronologie pour l'exercice 7.

Nous analysons maintenant en détails les différentes phases de la séquence sélectionnées ici.

3 Analyse de quelques phases précises des déroulements

3.1 Présentation des analyses

Nous analysons plus finement certaines phases précises de notre expérimentation illustrant bien le travail réalisé en classe, les interventions de l'enseignant et les activités potentielles des élèves. Au point précédent, nous avons ciblé les phases suivantes :

- Le premier système de la tâche introductive 1. Cette tâche permet d'installer chez les élèves le questionnement sur les objets géométriques décrits par une équation et d'associer les objets à des ensembles de points. C'est lors de cette phase que l'interprétation géométrique des objets est introduite.
- Le quatrième système de la tâche introductive 2. Nous choisissons de présenter cette phase précise de l'enseignement car nous avons repéré au point précédent des décalages importants avec ce que nous avons prévu *a priori*. Les élèves sont sollicités pour mobiliser de nombreuses connaissances anciennes et organiser le raisonnement pour réaliser la tâche. De plus, nous y avons relevé quelques difficultés des élèves en logique nous amenant à improviser en classe.
- Quatre exercices du scénario. Nous choisissons de présenter les analyses *a posteriori* des exercices 11, 12, 15 et 18. L'exercice 11 relève du niveau disponible de mise en fonctionnement des connaissances. Les élèves doivent en toute autonomie organiser leur raisonnement, mobiliser des connaissances anciennes et nouvelles, effectuer des conversions entre certains registres et choisir une méthode pour déterminer une équation cartésienne. Les exercices 12, 15 et 18 mettent tous les trois en jeu le premier aspect de l'interprétation géométrique que nous travaillons depuis le début de notre scénario. Nous choisissons de présenter les déroulements correspondant à la correction de ces trois exercices afin d'étudier le développement de cet aspect par les élèves.

Nous présentons les déroulements de celles-ci dans un tableau spécifiant la nature du travail mathématique à réaliser, les interventions de l'enseignant et les activités potentiellement développées par les élèves. Au vu du nombre d'heures filmées, nous ne proposons pas de transcription pour la totalité des séances mais nous illustrons nos propos par des extraits du discours de l'enseignant pour les phases visées. Nous pouvons par la suite déduire les activités *a minima* et *a maxima* des élèves par comparaison à nos analyses *a priori*.

3.2 La tâche introductive 1 : S_1

Tâche introductive 1

Recherchez graphiquement l'ensemble des solutions des systèmes suivants dans $\mathbb{R}^2$.

$$(S_1)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4y+4=0 \end{cases}$$

Le déroulement est détaillé dans le tableau XII.14.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
2'12"	Lecture du système S_1	P écrit le système au tableau. P demande comment résoudre graphiquement le système.	Un E propose de donner une valeur à y.
		P demande à l'E de préciser sa réponse.	Un autre E donne la démarche attendue.
		P valide et trace les axes d'un repère orthonormé du plan. P dit qu'il faut prendre note.	Les E prennent une feuille et tracent le repère.
		P sollicite l'E qui voulait donner des valeurs à y et demande de préciser son raisonnement.	L'E répond.
		P explique qu'il ne faut pas résoudre algébriquement le système. P revient sur la démarche graphique proposée.	Les E écoutent.
8'26"	Correction collective	P numérote les équations du système. P écrit la démarche graphique à suivre. P demande l'objet géométrique décrit par la première équation du système.	Un E répond correctement. Les E recopient.
		P valide et demande de préciser sa réponse. P écrit ce que l'E lui dit.	L'E précise sa réponse.
		P valide que l'équation $x = 2$ décrit une droite. P demande pourquoi il s'agit bien d'une droite et pas juste du point $(2,0)$ qu'il montre du doigt.	Un E dit que x est quelconque.
		P corrige l'E.	Un E dit que y est quelconque.
		P valide. P revient sur le fait qu'on cherche des couples tels que $x = 2$. P écrit l'ensemble des couples qui vérifient cette équation. P insiste sur le vocabulaire ensembliste.	Les E écoutent et recopient.
		P donne un couple appartenant à cet ensemble. P demande aux E d'autres éléments appartenant à l'ensemble.	Les E répondent correctement.
		P ajoute le couple $(2, \frac{3}{4})$ car les E ne proposent que des couples dont les valeurs sont naturelles.	Les E recopient et écoutent.
		P revient sur le graphe et met en évidence les points donnés.	Les E écoutent.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P demande l'objet décrit par la deuxième équation.	Un E répond correctement.
		P donne l'ensemble des points vérifiant cette équation.	Les E recopient.
		P demande des couples appartenant à cet ensemble.	Des E proposent des couples appartenant à l'ensemble.
		P ajoute le couple $(\sqrt{2},-1)$ car les E ne proposent que des couples dont les valeurs sont entières.	Les E recopient et écoutent.
		P trace la droite $y=-1$. P demande comment résoudre le système.	Les E tracent la droite. Des E répondent correctement.
		P explique les différents cas : aucun point d'intersection, un point d'intersection, une infinité de points d'intersection.	Les E écoutent.
		P demande quels sont les points d'intersection des deux droites.	Un E répond correctement.
		P écrit au tableau la conclusion de l'exercice.	Les E recopient.
		P insiste sur le fait que $(2,-1)$ est bien solution du système car $x=2$ et $y=-1$.	Les E écoutent.

TABLE XII.14 – Déroulements de la résolution du système S_1 de la tâche introductive 1.

Voici des extraits de transcriptions des interventions de l'enseignant et des élèves pour la correction collective du système S_1 pour la tâche introductive 1. L'enseignant est représenté par la lettre « P ». Les élèves sont numérotés et représentés par la lettre « E ».

P: Qu'est-ce qu'il faut faire pour résoudre graphiquement ce système ?

E_7: Tracer les deux et regarder les intersections.

P: C'est ça. Tracer les deux comme tu dis et chercher les intersections entre les objets. Je veux représenter l'objet décrit par l'équation numéro 1. Donc je regarde $x+5=2x+3$. Comment je peux représenter l'objet décrit par cette équation ?

La démarche pour résoudre graphiquement un système semble comprise par au moins un élève de la classe. Les élèves ont tous participé à la correction et ont bien reconnu les objets décrits par les deux équations cartésiennes données. Le premier aspect de l'interprétation géométrique pour les droites dans le plan semble bien développé par les élèves.

L'enseignant introduit ensuite les descriptions des droites dans le plan par des ensembles de points. Cela est illustré par l'extrait suivant.

P: Une droite verticale. Donc ça c'est le premier objet qui est une droite que j'appelle d_1. Petite question. Là-bas on a $x=2$ pourquoi ça serait une droite ?

E_5: Parce que x ça peut être n'importe quel nombre.

P: Ah non. x ça ne peut pas être n'importe quel nombre.

E_5: y peut être n'importe quoi.

P: Oui. y peut être n'importe quoi. Et pourquoi ? Parce qu'on est dans un plan. Et dans le plan, on cherche des couples et ces couples qu'est-ce qu'ils vérifient ? Il n'y a qu'une seule condition sur eux, c'est que le x donc l'abscisse du couple doit absolument valoir 2. Le y peut valoir tout et n'importe quoi. Donc en fait ce qu'on cherche c'est l'ensemble suivant. C'est un ensemble, je mets des accolades. On est dans le plan donc on travaille avec des couples. Et ces couples ils sont tels que cette condition elle est obligatoirement vérifiée. Donc c'est l'ensemble des couples tels que $x=2$. Des couples qui peuvent être dans cet ensemble ce sont par exemple $(2,0)$ parce que le x vaut bien 2. Donnez moi un autre couple qui est dans cet ensemble.

E_7: $(2,-1)$.

P: $(2,-1)$. Un autre ?

E_1: $(2,4)$.

P: Oui. Il y a aussi $(2,\frac{3}{4})$. D'accord ? Il n'y a pas que des nombres entiers. Le y peut valoir n'importe quel réel. Ce qui explique pourquoi on a des couples qu'on a représentés ici. On obtient tous les points qui sont là. Ça va ? Ok.

L'enseignant s'appuie bien sur les connaissances que les élèves ont déjà pour introduire le nouveau vocabulaire et les nouvelles notations ensemblistes. Il montre ensuite

que cette description ensembliste représente bien la droite décrite précédemment en se donnant plusieurs points de l'ensemble et en montrant qu'ils sont bien tous sur la droite. L'enseignant tente donc de rapprocher cette nouvelle description des droites à celles que les élèves ont déjà rencontrées (équations, dessins). Des proximités horizontales sont donc tentées par cet enseignant pour amener les élèves à développer l'interprétation géométrique des droites dans le plan à partir d'ensembles de points.

Pour ce système, bien que la résolution soit collective, les élèves ont énormément été sollicités. Ils n'ont pas tous participé à chaque étape de la correction mais ils ont tous au moins répondu à un moment donné de celle-ci. Les activités *a maxima* des élèves sont l'organisation du raisonnement pour résoudre graphiquement le système, la mobilisation de connaissances anciennes de géométrie analytique plane et la réalisation de conversions entre les registres algébrique, de la langue naturelle et graphique. *A minima*, les élèves ont mobilisé leurs connaissances de géométrie analytique plane et effectué une conversion entre les registres algébrique, de la langue naturelle et graphique. Nous ne pouvons pas déterminer si tous les élèves ont potentiellement réussi à organiser leur raisonnement à cette étape de l'enseignement puisqu'un seul élève a proposé une démarche pour résoudre graphiquement le système. Nous ajoutons également, au regard de l'analyse *a priori*, que les conversions avec le registre ensembliste ne sont pas laissées à la charge des élèves pour le système S_1. Cela s'explique par le fait que lors de la distinction entre « résoudre une équation » et « décrire par une équation » l'enseignant s'est rendu compte que les élèves rencontraient des difficultés avec le vocabulaire et les notations ensemblistes. Il a donc choisi d'essayer de donner du sens à ceux-ci en prenant à sa charge ces conversions dans son discours et dans ses gestes. Cette activité n'est potentiellement pas développée par les élèves sur ce système comme cela a été prévu.

3.3 La tâche introductive 2 : S_4

Tâche introductive 2

En vous inspirant de ce qui a été fait au point 1, trouvez l'ensemble des solutions des systèmes suivants dans $\mathbb{R}^3$.

$$(S_4)\begin{cases} x = \dfrac{y}{2} = z - 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

Le déroulement est détaillé dans le tableau XII.15. La correction collective de ce système est entrecoupée de moments de cours sur les équations cartésiennes de droites. Nous n'en tenons pas compte ici car l'enseignant ne fait que reprendre le travail réalisé avec les élèves et nous renvoyons le lecteur à l'annexe J pour avoir les déroulements de ces moments.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
33”	Lecture de l’énoncé	P recopie le système S_4 au tableau et rappelle la démarche suivie jusqu’à présent.	Les E écoutent et recopient.
11’44”	Correction collective	P demande si on peut déjà déterminer les objets décrits par l’une ou l’autre équation.	Un E dit que $z = 2$ est une droite.
		P demande l’avis des autres.	Les E ne répondent pas.
		P s’adresse à l’E qui s’est trompé. P interroge cet E car il a fait un rappel en début de cours. P s’appuie donc sur les interventions précédentes de l’E pour qu’il puisse se corriger.	L’E dit que les valeurs de x et y varient et que l’équation décrit donc un plan parallèle à Oxy.
		P valide et revient sur le plan décrit par cette équation. P recopie au tableau l’objet décrit par l’E.	Les E recopient.
		P demande ce que les E peuvent dire de la première équation du système.	Un E dit qu’il y a x, y et z.
		P attire l’attention qu’il y a deux symboles d’égalité. P écrit un système de deux équations.	Les E écoutent et recopient.
		P met en avant la transitivité de la relation d’égalité pour montrer que les deux écritures sont équivalentes.	Les E écoutent.
		P explique que chercher l’objet décrit par la double égalité revient à déterminer l’intersection des objets associés aux deux équations.	Les E écoutent.
		P fait un parallèle entre l’équation $2x = y$ et l’équation $x = y$ décrite précédemment.	Les E écoutent, cherchent dans leurs feuilles et recopient.
		P demande l’objet décrit par l’équation $y = 2z - 4$.	Les E ne répondent pas.
		P écrit l’ensemble associé à cette équation.	Les E recopient.
		P demande une autre façon d’écrire cet ensemble. Il s’appuie sur le travail réalisé précédemment.	Des E répondent correctement.
		P demande trois points de cet ensemble.	Des E répondent correctement.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
3'35"	Recherche individuelle	P demande aux élèves de placer les points dans un repère orthonormé et de déterminer l'objet décrit.	Les E travaillent.
24'23"	Retour à la correction collective	P demande ce qu'on peut dire des trois points donnés.	Un E répond correctement.
		P demande de décrire l'objet géométrique.	Des E répondent correctement.
		P demande l'objet décrit par l'intersection des deux plans.	Un E répond correctement.
		P explique comment chercher les traces d'un plan.	Les E écoutent.
		P met en évidence la droite recherchée.	Les E recopient.
		P demande comment le prouver.	Un E propose de montrer que deux points vérifiant les équations sont alignés.
		P rappelle que deux points sont toujours alignés.	L'E en propose trois.
		P explique que cela n'empêche pas qu'un autre point ne soit pas aligné avec les trois premiers.	Les E écoutent.
		P questionne l'E pour amener l'idée que tous les points doivent être alignés.	L'E répond correctement.
		P demande comment le montrer.	Les E ne répondent pas.
		P réexplique la démarche.	Les E écoutent.
		P demande deux points de la droite.	Des E répondent incorrectement.
		P invalide et explique pourquoi c'est incorrect.	Les E écoutent et se corrigent.
		P écrit les deux points au tableau et demande les composantes du vecteur.	Les E répondent correctement.
		P demande comment montrer que tous les vecteurs sont colinéaires.	Les E ne répondent pas.
		P demande la définition de vecteurs colinéaires.	Les E ne répondent pas.
		P rappelle que cela a déjà été rappelé. Il écrit la définition au tableau.	Les E recopient.
		P demande de calculer les composantes des vecteurs.	Un E répond incorrectement.
		P corrige l'E et recopie au tableau les composantes.	Les E recopient.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P rappelle la multiplication d'un vecteur par un scalaire. P écrit au tableau.	Les E recopient.
		P demande quand deux vecteurs sont égaux.	Un E répond incorrectement.
		P demande de préciser la réponse.	L'E se corrige. Les autres écoutent.
		P demande ce qu'on cherche.	Un E répond correctement.
		P demande une démarche pour trouver la valeur de k.	Un E répond correctement.
		P valide et écrit au tableau sous la dictée.	Des E répondent correctement.
		P demande une conclusion.	Un E répond correctement.
		P revient sur les hypothèses.	Les E écoutent.
13'36"	Démonstration	P lit les feuilles. La preuve est celle débutée en classe à la séance 5. P explique et justifie chaque étape.	Les E écoutent et suivent dans les feuilles.
		P donne une deuxième méthode utilisant les ensembles.	Les E écoutent et suivent dans les feuilles.
		P articule les deux points de vue en écrivant les détails au tableau.	Les E écoutent et recopient.
		P réexplique comment écrire une équation paramétrique d'une droite à partir d'une description ensembliste.	Un E pose une question.
		P réexplique pourquoi le k est non nulle dans la première méthode.	Un E pose une question.
12'30"	Retour à la correction collective	P écrit le système au tableau et demande aux E les objets décrits par chaque équation.	Des E répondent correctement.
		P demande la position relative d'une droite et d'un plan.	Les E répondent.
		P valide et dessine les cas au tableau.	Les E recopient.
		P demande comment déterminer cette position.	Des E proposent des démarches.
		P explique que chaque démarche est invalide.	Les E écoutent.
		P se ramène à un cas précis et demande ce qu'il y a de particulier.	Un E répond correctement.
		P valide et passe aux deux autres cas.	Des E répondent. Les E recopient.
		P demande une démarche pour déterminer la position relative de la droite avec le plan.	Un E répond correctement.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P valide et explique que la droite et le plan ne peuvent pas être parallèles distincts.	Les E écoutent.
		P demande comment savoir si la droite est incluse au plan ou si elle est sécante au plan.	Un E répond correctement.
		P valide et explique que la droite ne peut pas être incluse au plan.	Les E écoutent.
		P demande un point de la droite.	Un E répond correctement.
		P demande si c'est un point du plan.	L'E répond correctement.
		P écrit au tableau l'argument éliminant le cas où la droite est parallèle au plan.	Les E recopient.
		P demande un autre point de la droite.	Un E répond correctement.
		P demande si c'est un point du plan.	Des E répondent correctement.
		P écrit au tableau l'argument éliminant le cas où la droite est incluse au plan.	Les E recopient.
		P demande le point d'intersection entre la droite et le plan.	Un E répond correctement.
		P demande les solutions du système.	Des E répondent correctement.
		P explique qu'ici on cherche juste le point d'intersection entre les deux objets.	Un E demande pourquoi préciser sécante mais pas perpendiculaire.

TABLE XII.15 – Déroulements de la résolution du système S_4 de la tâche introductive 2.

Voici des extraits de transcriptions des interventions de l'enseignant et des élèves pour la correction collective du système S_4 de la tâche introductive 2. L'enseignant est représenté par la lettre « P ». Les élèves sont numérotés et représentés par la lettre « E ».

P: $z = 2$ ça on peut déjà dire de quel objet il s'agit.

E_6: Une droite.

P: Est-ce que tout le monde est d'accord ? $z = 2$ est une droite.

E_5: Non.

P: Qu'est-ce que tu m'as dit dans ton rappel tout à l'heure ?

E_6: Qu'on cherchait des plans.

P: On cherche pas forcément des plans. On cherche des plans et des droites. Mais ici pourquoi $z = 2$ c'est pas une droite mais un plan ?

E_6: Ça va être un plan car on va avoir que les valeurs de x et de y vont varier et le 2 restera donc ça va être un plan qui va être parallèle à Oxy.

P: C'est ça. Si tu reprends ton repère ici, tu as l'axe x, l'axe y et l'axe z. Tu te fixes ton z à deux et tu peux aller à gauche, à droite, devant, derrière. Tu peux aller dans toutes les directions que tu veux mais tu ne peux surtout pas ni monter, ni descendre. Et donc tu décris bien un plan parallèle au plan du sol formé des axes x et y.

Dans cet extrait, l'élève rencontre de prime abord une difficulté à reconnaître les plans à partir d'équations cartésiennes incomplètes. Toutefois, il a réussi à se corriger de lui-même quand l'enseignant lui fait remarquer qu'il s'est trompé. Il fournit même un argument qui a déjà été utilisé plusieurs fois lors des séances précédentes. Il se peut donc que le travail réalisé en amont permette de donner aux élèves des moyens de contrôles suffisants pour qu'ils puissent se corriger d'eux-mêmes quand l'erreur est signalée.

Pour les équations $x = \frac{y}{2} = z - 2$, l'enseignant découpe ce système et amène les élèves à étudier les équations $2x = y$ et $\frac{y}{2} = z - 2$. Pour le système S_3, les élèves ont établit que l'équation $x = y$ décrit un plan. L'enseignant s'appuie donc sur ce système pour amener les élèves à déterminer que ces deux équations décrivent deux plans. Voici un extrait des interventions de l'enseignant pour la deuxième équation.

P: Qu'est-ce qu'on peut dire de cette équation ? De quel objet s'agit-il ? [silence] Ok. Alors écrivons comme on l'a fait hier l'ensemble des triplets qui vérifient cette équation et essayons de réécrire cet ensemble autrement. Comment a-t-on fait hier pour réécrire autrement cet ensemble ? [silence]

L'enseignant demande aux élèves de se réveiller et de lui répondre ou de dire ce qui ne va pas.

E_6: On a donné une valeur soit à y, soit à z. On donnait une valeur à y ou à z et puis on donnait n'importe quelle valeur aux autres.

P: C'est pas ce qu'on a fait. Hier on a fait ceci par exemple. Qu'est-ce qu'on a fait avec ceci ?

L'enseignant a écrit au tableau $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2\}$.

E_2 : Ben on avait écrit 2 et puis y et puis z.

P : C'est ça. On a pris ce qui était là et on est venu remplacer là. On a substitué x par la valeur. On a aussi fait ceci. Qu'est-ce qu'on avait fait avec ça ?

L'enseignant a écrit au tableau $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$.

E_2 : On a écrit y, y et z.

P : On sait que x valait y et on est venu remplacer ici dedans. Là c'est le même principe. Je veux substituer une lettre par une autre. Comment je peux faire ?

E_2 : Si on fait passer ...

E_3 : Isoler y ou le z.

P : Alors une à la fois, qu'est-ce que vous avez proposé ?

E_3 : Moi j'aurais isolé le z.

P : Par exemple. Isolons z. On sait que $\frac{y}{2} + 2 = z$. J'ai isolé z. Et maintenant ? Qu'est-ce que je peux faire ?

E_2 : x, y et $\frac{y}{2} + 2$.

P : Exact. Donc ça donne cet ensemble-ci. J'ai isolé une des lettres et je suis venue remplacer cette valeur dans mon triplet. Donnez-moi des points qui vérifient cette condition-ci, autrement dit des points qui appartiennent à l'ensemble.

E_1 : $(5,4,4)$.

E_3 : $(3,6,5)$.

E_2 : $(3,1,\frac{5}{2})$.

P : Représentez-moi ces points dans l'espace et dites-moi de quel objet il s'agit.

Le parallèle entre le travail réalisé précédemment sur l'équation $y = z$ dans le système S_3 et l'équation $\frac{y}{2} = z - 2$ semble moins évident pour les élèves que pour $2x = y$. L'enseignant propose alors d'utiliser la même démarche que précédemment, c'est-à-dire écrire un ensemble de triplets vérifiant cette équation afin de décrire l'objet associé. Les élèves ne réagissent pas. L'enseignant s'appuie alors sur des ensembles qu'ils ont déjà étudiés pour les amener à déduire ce qu'il faut faire ici. Pour cela, il rapproche le travail à effectuer à ce qu'ils ont fait pour un ensemble où la condition ne porte que sur une variable et pour un ensemble où deux variables sont liées. Cette tentative de proximité horizontale, non prévue *a priori*, permet apparemment aux élèves de déduire une démarche. Des points appartenant à l'ensemble sont donnés par les élèves et doivent être représentés. Une fois qu'il a été déterminé que cette équation décrit un plan, les élèves conjecturent que le système composé des équations $x = \frac{y}{2}$ et $\frac{y}{2} = z - 2$ décrit une droite dans l'espace. À cette étape de l'enseignement, les élèves n'ont à leur disposition que les équations paramétriques des droites dans l'espace. Nous nous attendions donc à ce que les élèves déterminent une équation paramétrique de la droite à partir de l'ensemble écrit précédemment. Or, un élève propose une autre méthode mettant en évidence une difficulté en logique comme le montre l'extrait suivant.

P: Comment peut-on faire pour montrer que c'est une droite ? Qu'est-ce qu'on a à notre disposition comme outils pour prouver que c'est une droite ?

E_1 : On donne des points vérifiant l'équation et on les trace sur un graphique. Si x vaut 4, on sait que y vaut d'office 8 et que z vaut 6.

P: Oui tu vas avoir des points mais cela ne prouve pas que c'est une droite.

E_1 : Oui, mais si on remplace par plein de points.

P: Ah oui et à partir de combien de points ça va prouver que c'est une droite ?

E_1 : Trois.

P: Imagine il y en a un quatrième que je peux trouver et qui n'est pas aligné avec ces trois-là. C'est pas forcément une droite. Imagine par chance tu as trouvé celui-là, celui-là et celui-là.

L'enseignant pointe trois points alignés.

P: Et que tu as oublié celui-là qui n'était pas aligné. Donc comment être sûr que c'est une droite ?

E_3 : On trouve un point et ensuite un vecteur directeur.

P: Bah oui. On va essayer d'écrire une équation paramétrique de cette droite et après montrer que cela donne le même objet. Ok. Donc ça c'est possible de faire. Donner une équation paramétrique. On a besoin de quoi ? D'un point et d'un vecteur directeur. Comment faire pour trouver un point et un vecteur directeur de cette droite ?

E_1 : On peut remplacer x par 0. Ça nous donne $(0,0,2)$.

P: $(0,0,2)$ on aurait un point. Comment obtenir un vecteur directeur ?

E_4 : On a besoin d'un deuxième point.

P: Oui. Donnez-moi un deuxième point.

E_1 : Ouais mais vous avez dit que ça on pouvait pas car si on avait un autre point ça n'allait pas.

P: Ce que j'ai dit c'est qu'on peut pas regarder que deux points car deux points sont toujours alignés. Si je trouve un troisième point qui est aligné ça ne veut pas dire que c'est une droite. D'accord ? Pour que ça soit une droite il faut que tous les points soient alignés.

E_1 : Bah alors ça va changer quoi de faire un vecteur ?

P: Voilà deux points. Comment sont-ils ?

E_1 : Ben alignés.

P: Voilà deux points. Comment sont-ils ?

E_1 : Alignés.

P: Tu es d'accord que deux points sont toujours alignés ?

E_1 : Oui.

P: Donc tu peux construire un vecteur avec ces deux points.

E_1 : Oui.

P: Nous ce qu'on veut montrer c'est que si j'ai un troisième point alors il est aligné avec ces deux points-là. Comment je peux faire pour le montrer ?

E_1 : Ben allonger le vecteur.

P: Allonger le vecteur oui. J'allonge le vecteur. Comment ça s'appelle allonger le vecteur ? Ce vecteur-là il est allongé par rapport à ce vecteur, il est comment ?

E_1 : Colinéaire.

P: Colinéaire. Même direction. Peu importe le sens et la longueur, c'est la même direction qui importe. Donc ils sont colinéaires, ils sont proportionnels. Mais cela ça montre juste que ces trois points-là sont alignés. Si je t'en donne un ici, il est pas aligné. Donc il faut vérifier que ce n'est pas un cas possible. Donc il faut avoir un quatrième point qui est aligné. J'allonge le vecteur. Comment sont les vecteurs ?

E_1 : Colinéaires.

P: Mais attention je pourrais avoir un point qui est là. Mais ça je veux que ça ne soit pas possible. Donc qu'est-ce que je vais devoir faire ? Montrer que tous les points que j'ai vont donner des vecteurs colinéaires.

E_1 : Oui mais alors on fait quoi du point qui n'est pas colinéaire aux autres ?

P: Ok. Je recommence. Si je te donne deux points, ils sont toujours alignés. D'accord ?

E_1 : Ouais ça ouais.

P: Nous ce qu'on veut c'est que tous les points de notre objet vont être alignés avec les deux points que je viens de te donner.

E_1 : Oui.

P: Mais si tu fais juste avec trois points c'est pas suffisant. Trois points ok s'ils sont alignés mais qui dit que sur notre objet il n'y a pas un point non aligné avec ces deux-là ? Donc pour montrer que ça n'est pas le cas, que ça n'existe pas, tu dois montrer que tous les points sont alignés.

E_1 : Oui.

P: Donc tu auras jamais de points pas alignés. Mais on veut montrer que ce cas-là ne se produit jamais.

E_1 : Ah ok. Ça va.

P: Le « si jamais t'en as un » c'est pour te montrer que ce n'est pas suffisant de montrer que trois points sont alignés. Tu dois montrer qu'ils sont tous alignés.

E_1 : Oui.

P: Sûr ?

E_1 : Oui oui.

Cet élève semble penser qu'il suffit de montrer que trois points sont alignés pour montrer que l'objet décrit par ces points est une droite. L'enseignant essaie de lui expliquer qu'il est nécessaire de montrer que la condition d'alignement est respectée par tous

les points de l'objet et que le prouver pour trois points uniquement n'est pas suffisant. Nous pensons que cet élève confond les termes « suffisant » et « nécessaire » et rencontre des difficultés liées à la logique. Rappelons que les notions de logique ne sont que peu travaillées par les élèves. L'enseignant réalise des dessins, fait des gestes, s'appuie sur les connaissances de l'élève telles que la colinéarité et l'alignement de deux points, se répète et reformule ce qu'il a dit et ce que l'élève a dit. Il met toutes ces actions spontanément en place, dont des tentatives de proximités horizontales, pour que l'élève puisse surmonter cette difficulté et semble y parvenir. Il revient à la séance suivante à la démarche prévue initialement comme l'illustre l'extrait suivant.

P: L'ensemble des solutions de ce système, c'est toujours des triplets car on est dans l'espace qui vérifient les deux équations en même temps. Comme on l'a déjà fait plusieurs fois, on va essayer d'écrire cet ensemble autrement. Comme vous le voyez dans vos feuilles, j'ai isolé y et z pour qu'ils soient exprimés en fonction de x. C'est plus facile pour remplacer après. Donc on a $y = 2x$ et $x+2 = z$. J'ai juste isolé y et z. Mais c'est plus facile pour remplacer après car x, je ne connais rien sur x, y je sais qu'il vaut $2x$ et z je sais qu'il vaut $x+2$. Et comme le x vaut n'importe quel réel, j'ai cet ensemble-ci.

L'enseignant a écrit $\{(x, 2x, x+2) |\ x \in \mathbb{R}\}$.

P: Et des ensembles comme celui-ci on en a déjà vu beaucoup. C'est une droite car il n'y a qu'une seule lettre. On peut se donner un point par exemple en prenant $x = 0$, on se retrouve avec le fameux point A. Et je vous ai dit aussi que pour avoir un vecteur directeur de la droite, il suffit de prendre les coefficients devant la lettre. Là le coefficient est 1, là 2 et là 1. Du coup, on a un vecteur directeur qui est $(1,2,1)$. On peut donc écrire une équation paramétrique de la droite.

Cette méthode a l'avantage de rendre possible une articulation des points de vue dans les deux sens. En effet, le passage du point de vue cartésien au point de vue paramétrique est abordé en décrivant l'ensemble des points satisfaisant les équations données. Le passage réciproque se fait en éliminant le paramètre. Les détails sont donnés dans les feuilles des élèves. L'enseignant revient sur ceux-ci et articule les deux points de vue avec les élèves sous la forme d'un jeu de questions/réponses.

La dernière étape de résolution du système S_4 consiste à déterminer l'intersection de la droite et du plan. Pour ce faire, les élèves doivent mobiliser leurs connaissances anciennes en géométrie synthétique et leurs connaissances nouvelles en géométrie analytique. Ils doivent aussi organiser leur raisonnement pour parvenir à déterminer la position relative des deux objets sans résoudre algébriquement le système. Voici un extrait des interventions en classe correspondant à cette étape.

P: Quelle est la position relative d'une droite et d'un plan dans l'espace ? Comment une droite et un plan peuvent-ils être ?

E_1: Ben sécants, perpendiculaires, ...

E_6: Ou gauches.

E_3 : Ou orthogonaux.

P: Alors si je dessine un plan. Sécants ou perpendiculaires il n'y a qu'un point commun entre les objets. Ça c'est une première possibilité. Quelle serait une deuxième possibilité ?

E_3 : Orthogonaux.

P: Alors orthogonaux c'est pour des vecteurs ou des droites. On dit perpendiculaire pour une droite et un plan et cela revient au premier cas.

E_7 : Ah ouais.

P: Donc qu'est-ce qu'il y a d'autres comme possibilités ?

E_3 : Que la droite et le plan soient parallèles.

P: Parallèles, c'est-à-dire ?

E_4 : Ils ne se touchent jamais.

P: Comme ceci. Il y a encore une autre possibilité.

E_1 : À l'intérieur d'un plan.

P: Bah oui.

E_7 : Ben c'est parallèle aussi.

P: Oui, mais quelle est la différence ?

E_7 : Distincts ou non.

P: Oui. Là c'est parallèle distinct et là c'est parallèle confondu. Donc ça c'est vos trois possibilités. Ici, on voudrait savoir dans lequel des trois cas on se situe. Quelle est la stratégie qu'on peut mettre en place pour déterminer, j'invente, qu'on est dans le deuxième cas ?

E_7 : On peut le faire algébriquement ou pas ?

P: Non. Pas encore. Je sais que j'ai une droite et que j'ai plan, comment faire pour déterminer leur position relative ?

E_1 : Ben on sait que ça va être parallèle car la droite elle est horizontale.

P: La droite elle est quelconque c'est pas une droite particulière. Donc pourquoi elle serait horizontale ?

E_1 : En fait ça peut pas être le 3 ou le 2 car le x peut valoir je vais dire l'infini et donc le z peut valoir l'infini et ça sera pas forcément 2. Donc c'est le cas 1.

P: Oui. Regardez le cas 1, qu'est-ce qu'elle a de particulier cette position ?

E_7 : Il y a un point commun.

P: Il n'y a qu'un seul point commun. Et dans ce cas-là ?

E_5 : Aucun.

P: Aucun point commun. Et dans ce cas-ci ?

E_6 : Une infinité.

P: Une infinité de points communs. Est-ce que ça met quelqu'un sur la voie de la stratégie à adopter ?

E_1 : Ben si parce qu'il y aura juste un point commun. Il n'y aura qu'une fois où $z-2$ vaudra 2, non que $x+2$ vaudra z, fin je sais pas comment expliquer mais il n'y en aura qu'un de point. Ben aucun point commun, il y aura d'office un point commun puisqu'il y a un moment où z va valoir 2.

P: C'est ça. Donc en fait ici on va éliminer le deuxième cas car il y a au moins un point commun entre la droite et le plan. Donc s'il y a au moins un point commun ça ne peut pas être ce cas-ci car ici il devrait y avoir aucun point commun. Mais il reste le cas 1 et le cas 3.

E_1 : Ben ça sera pas une infinité car z n'est pas constant.

P: Où est-ce que z n'est pas constant ?

E_1 : Ben dans la droite.

P: Oui. Donc on peut éliminer le cas 3 en prenant un point de la droite qui n'appartient pas au plan. Donc je résume. D'office dans l'espace la droite et le plan peuvent être sécants, parallèles distincts ou confondus. Vous n'aurez pas d'autres cas. Si on arrive à trouver un point commun entre la droite et le plan, ce n'est pas ce cas-ci puisque vous avez au moins un point commun. La différence entre ce cas-là et ce cas-ci, c'est que, par exemple, ici, vous avez un point sur votre droite qui n'est pas un point du plan. Donc si vous arrivez à trouver un point de la droite qui n'est pas un point du plan, vous êtes dans le premier cas puisqu'ici tous les points de la droite sont des points du plan.

Comme prévu, l'enseignant amène les élèves à mobiliser leurs connaissances de géométrie synthétique. La majorité des élèves participe à cette étape de la correction. Des erreurs sont repérées chez deux élèves qui considèrent qu'une droite et un plan peuvent être orthogonaux (ou gauches). L'enseignant corrige alors le vocabulaire des élèves. Une fois les trois cas possibles déterminés, l'enseignant fait des dessins au tableau comme le montre la figure XII.1.

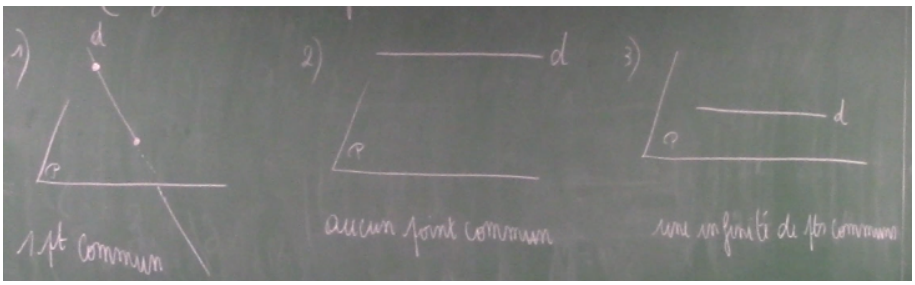


FIGURE XII.1 – Extrait du tableau lors de l'expérimentation.

Un élève trouve directement la solution en étudiant les équations $z=2$ et $x=\frac{y}{2}=z-2$. Il comprend bien que, dans le plan, la valeur de la cote est fixée. Il essaie d'expliquer que la cote des points de la droite ne sera jamais constante. Cet élève est donc capable d'étudier la position relative des objets à partir de leurs équations. Ce raisonnement ne semble pas compris par les autres élèves. L'enseignant essaie alors de proposer une explication s'appuyant sur les connaissances anciennes des élèves sur les positions

relatives d'une droite et d'un plan en toute généralité. Les occasions de proximités horizontales que nous avons repérées *a priori* sont donc tentées par l'enseignant. Cette démarche générale est ensuite particularisée au système S_4 afin de déterminer le point d'intersection entre la droite et le plan. Ce faisant, les occasions de proximités descendantes repérées *a priori* ont bien été tentées par l'enseignant.

L'enseignant a donc bien guidé les réflexions des élèves en raccrochant le travail à réaliser à ce qu'ils ont déjà fait ou vu précédemment. Un travail sur la description des objets par un ensemble de points semble aider les élèves à développer leur reconnaissance des objets à partir d'équations et d'ensembles de points comme nous l'avons vu pour ce système. Les activités *a minima* des élèves sont la mobilisation des connaissances anciennes, les jeux de cadres entre la géométrie analytique et la géométrie synthétique, les conversions entre le registre algébrique et le registre graphique et l'articulation des points de vue dans les deux sens. En plus de ces activités, un élève a réussi à organiser son raisonnement pour déterminer la position relative de la droite et du plan. Toutefois, aucun élève n'est parvenu à organiser seul un raisonnement pour l'ensemble des étapes de la résolution du système. L'enseignant a dû les aider à deux reprises : pour l'équation $\frac{y}{2} = z - 2$ et pour la preuve que l'objet décrit est une droite. Les conversions avec le registre ensembliste ont été prises en charge par l'enseignant en classe comme cela a été prévu initialement. Cette adaptation des connaissances n'est pas réalisée par les élèves pour ce système.

3.4 Les exercices

▶▶ L'exercice 11

Exercice 11

Déterminez une équation cartésienne du plan β comprenant le point $A(1,3,-2)$ parallèle à $d \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y}{3} + 1 = \frac{1-z}{-3}$ et perpendiculaire au plan $\alpha \equiv 2x - 3y + 2z = 1$.

Le déroulement est détaillé dans le tableau XII.16.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
1'21"	Lecture de l'énoncé	P écrit les données au tableau et lit l'énoncé.	Les E écoutent.
21'56"	Correction collective	P demande comment écrire une équation cartésienne du plan β.	Les E ne répondent pas.
		P propose de faire un dessin et demande les informations à utiliser.	Des E répondent correctement.
		P construit au tableau le dessin en fonction des éléments donnés par les E.	Les E recopient.
		P redemande comment faire l'exercice.	Les E ne répondent pas.
		P cible le fait que $\alpha \perp \beta$. Il demande ce qu'on peut faire de cette information.	Un E répond correctement.
		P valide et amène l'E à préciser son vocabulaire et sa réponse.	L'E répond correctement.
		P complète le dessin. P demande ce qu'on peut déduire de $\beta \parallel d$.	Des E font des propositions incorrectes.
		P demande ce qu'on peut déduire comme informations sur d.	Un E répond correctement.
		P revient sur une des propositions faites et la complète pour qu'elle devienne correcte.	Les E écoutent.
		P réexplique.	Un E ne comprend pas.
		P demande ce qu'il manque comme information pour écrire une équation du plan.	Un E répond correctement.
		P revient sur la perpendicularité des deux plans et demande si on peut en déduire un deuxième vecteur directeur.	Un E propose d'utiliser le produit scalaire pour construire un vecteur.
		P explique que dans l'espace ça n'ira pas.	Les E écoutent.
		P change la position du vecteur normal sur le dessin.	Un E finit par dire que c'est un vecteur directeur du plan β.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P demande quoi faire avec les informations.	Des E proposent d'écrire une équation paramétrique.
		P demande un vecteur directeur de la droite.	Des E répondent incorrectement.
		P revient sur le système d'équations cartésiennes et demande s'il est sous forme canonique.	Plusieurs E se corrigent.
		P écrit au tableau et demande un vecteur normal du plan α.	Les E recopient. Un E répond correctement.
		P écrit au tableau et demande une équation paramétrique du plan β.	Un E dicte. Les E recopient.
		P demande à quoi il faut faire attention dans une équation paramétrique.	Un E répond correctement.
		P demande pourquoi les vecteurs ne sont pas colinéaires.	Des E répondent correctement.
		P demande comment obtenir une équation cartésienne.	Des E répondent correctement.
		P écrit la résolution du système sous la dictée.	Des E disent ce qu'il faut écrire. Les E recopient.
		P demande si l'équation obtenue est bien un plan et de donner un vecteur normal.	Des E répondent correctement.
		P demande où se situe le plan.	Un E dit que $y = 0$
		P revient sur le fait que c'est le coefficient devant y qui est nul et explique comment est le plan.	Les E écoutent.
		P demande des points du plan et montre que y est quelconque.	L'E confond la composante nulle du vecteur et la variable y.

TABLE XII.16 – Déroulements de l'exercice 11.

Voici un extrait des transcriptions des interventions de l'enseignant et des élèves pour organiser le raisonnement à réaliser cette tâche. L'enseignant est représenté par la lettre « P ». Les élèves sont numérotés et représentés par la lettre « E ».

P: Comment on pourrait arriver à écrire une équation cartésienne du plan au vu des informations dont on dispose ? [silence] Pour nous aider à répondre à cette question, on peut faire un dessin. Qu'est-ce que je mettrais dans mon dessin ?

E_1: Le plan β.

P: Le plan β. Donc je cherche un plan β.

E_3: Perpendiculaire à un plan.

P: Il est perpendiculaire à mon plan α.

E_3: Et la droite d est parallèle au plan β.

P: La droite est parallèle au plan. Alors, elle peut être parallèle comme ceci ou comme cela. Ça reste parallèle.

L'enseignant dessine une droite d perpendiculaire au plan α, puis l'efface et dessine une droite d parallèle au plan α. Il veut proposer un dessin dans lequel un vecteur directeur de la droite n'est pas colinéaire au vecteur normal du plan. Le dessin réalisé au tableau est présenté à la figure XII.2.

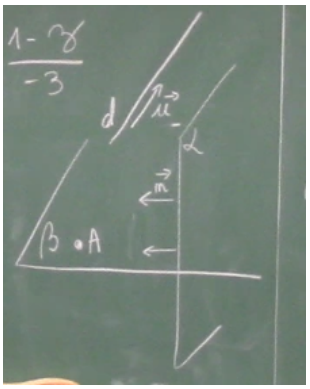


FIGURE XII.2 – Extrait du tableau lors de l'expérimentation.

E_1: Et le point A est compris dans le plan β.

P: Le point A est un point du plan β. Nous ce qu'on veut c'est écrire une équation du plan β. Au vu des informations que l'on a comment on pourrait y arriver ? [silence] Si je prends par exemple le fait que le plan β soit perpendiculaire au plan α ?

E_1: Ça veut dire que leur produit scalaire sera nul.

P: Pas leur produit scalaire mais le produit scalaire de leurs ...

E_1: vecteurs

P: normaux. Le produit scalaire de leurs vecteurs normaux est nul. Ok, donc là on a un vecteur normal du plan α. Ok. Et par rapport à la droite d, qu'est-ce qu'on pourrait faire ?

E_1 : La descendre sur le plan ou ça servira à rien ?

P: Quand tu dis la descendre sur le plan ça veut dire quoi ?

E_1 : Qu'elle soit comprise dans le plan.

P: Alors la droite d tu ne pourras pas la bouger. Elle est là où elle est. Mais par contre, tu as une droite parallèle à celle-ci dans le plan β.

E_7 : C'est l'intersection des deux plans.

P: Pas forcément. Reprenons le problème autrement. Vous avez l'équation de la droite d ici. Quelles informations peut-on en déduire ?

E_3 : Un point.

P: Un point et un ?

E_3 : Un vecteur.

P: Comment s'appelle-t-il ce vecteur ?

E_4 : Directeur.

P: Oui. Donc là j'ai un point et un vecteur directeur. Alors quand tu dis on abaisse ... la droite que tu veux qu'est-ce qu'elle aura comme particularité par rapport à la droite d ?

E_2 : Elle sera dans le plan.

P: Elle sera dans le plan et elle sera comment par rapport à la droite d ?

E_2 : Parallèle.

P: Elle sera parallèle. Donc si elle est parallèle, comment sont les vecteurs directeurs de deux droites parallèles ?

E_1 : Colinéaires.

P: Colinéaires. Donc ce que vous venez de dire c'est que ce vecteur-ci est un vecteur directeur d'une droite dans le plan β.

E_1 : Bah oui.

P: Ben donc c'est un vecteur directeur du plan β.

E_3 : Donc $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur du plan β ?

P: Oui. On est d'accord de dire que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de d ?

E_3 : Oui.

P: Qu'une droite parallèle à d est incluse au plan β ?

E_3 : Oui.

P: Et que du coup le vecteur $\overrightarrow{u}$ est aussi un vecteur directeur de cette droite ?

E_3 : Ah oui.

P: Si c'est un vecteur directeur d'une droite à l'intérieur d'un plan c'est un vecteur directeur du plan.

E_3 : Oui.

P: Ok pour tout le monde ?

E_3: Oui.

P: Donc $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de β. C'est déjà bien car je suis sûr de connaître un point et un vecteur directeur de β. Si je veux écrire une équation de β qu'est-ce qu'il me faudrait encore ?

E_2: Un autre vecteur directeur.

P: Un deuxième vecteur directeur. Ah. Mais toute à l'heure, on a parlé de la perpendicularité entre le plan α et le plan β. Est-ce qu'il n'y a pas un moyen de trouver grâce à cette information un deuxième vecteur directeur ?

E_1: Ben on en fait un perpendiculaire avec le produit scalaire.

P: Oui mais si tu as un vecteur dans l'espace qui est là. Qu'est-ce qui est perpendiculaire à celui-là ? Ben tu peux en avoir un qui est là, un qui est ici, un qui est là ...

E_1: Mais si on ajoute qu'il doit être compris dans le plan ?

P: Donc tu cherches un vecteur directeur du plan qui est perpendiculaire à celui-là ? Comment tu vas faire pour le trouver ?

E_1: C'est ça mon problème.

P: Ben oui puisque tu as une infinité de vecteurs qui sont orthogonaux à ce vecteur-là. Comment savoir que celui que tu vas trouver il est bon et il est dans le plan ? Mais ce vecteur-là j'aurais pu dire qu'il était ici.

E_1: Ah et donc il fait partie du plan β.

P: Voilà. Donc un vecteur normal au plan α est un vecteur directeur du plan β.

E_1: Ah mais alors il faut être sûr que α est perpendiculaire à β.

P: On te le dit dans l'énoncé donc tu es certain que c'est bien le cas.

E_1: Ok. Ça va.

P: Donc $\overrightarrow{n}$ qui est un vecteur normal du plan α est un vecteur directeur du plan β. Est-ce que ça va pour tout le monde ?

E_3: Oui.

P: Du coup maintenant j'ai deux vecteurs directeurs et un point.

E_7: Équation paramétrique.

Comme nous l'avons expliqué précédemment, cet exercice a été laissé en préparation aux élèves. Lors de la correction, nous avons constaté que les élèves n'ont pas pu, à partir de l'énoncé donné en langue naturelle, organiser leur raisonnement pour écrire une équation paramétrique du plan. Comme cela a été prévu, l'enseignant les aide en proposant de réaliser un dessin. Plusieurs élèves guident l'enseignant dans la construction du dessin et effectuent ainsi une conversion entre le registre de la langue naturelle et le registre du dessin. Toutefois, l'enseignant fournit une aide procédurale indirecte car il dessine une droite d qui ne semble pas perpendiculaire au plan α pour éviter

des erreurs de raisonnement par les élèves. L'enseignant les guide par un jeu de questions/réponses à organiser leur raisonnement pour obtenir une équation paramétrique du plan β. Une aide procédurale indirecte est aussi proposée pour déduire qu'un vecteur normal du plan α est un vecteur directeur du plan β. Une fois que les vecteurs directeurs du plan ont été déterminés, les élèves reconnaissent les modalités d'applications des équations et parviennent à passer du point de vue paramétrique au point de vue cartésien. Ainsi, lors de la phase de recherche individuelle, les élèves n'ont pas pu réaliser seuls les adaptations des connaissances repérées. Lors de la correction collective, les élèves ont *a maxima* mobilisé leurs connaissances (anciennes, en cours d'acquisition et nouvelles), reconnu les modalités d'application des équations et articulé les points de vue dans le sens paramétrique/cartésien. *A minima*, les élèves qui n'ont pas participé à cette correction collective ont recopié la résolution de l'exercice.

►► L'exercice 12

Exercice 12

Quel objet géométrique est représenté par l'ensemble $\{(x_1,x_2,x_3) \mid (x_1,x_2,x_3)$ est un vecteur orthogonal à $(-1,3,0)\}$?

Le déroulement est détaillé dans le tableau XII.17.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
36”	Lecture de l’énoncé	P recopie l’ensemble au tableau.	Les E recopient.
3’24”	Correction collective	P demande quels sont les éléments qui appartiennent à l’ensemble.	Un E répond correctement.
		P demande comment sont ces vecteurs.	Des E répondent correctement.
		P demande comment traduire l’orthogonalité entre deux vecteurs.	Des E répondent correctement.
		P revient sur le résultat vu au cours en toute généralité.	Les E écoutent.
		P demande des précisions.	Un E dit que c’est un vecteur normal.
		P demande de calculer le produit scalaire et recopie au tableau.	Des E dictent. Les E recopient.
		P demande ce que décrit cette équation cartésienne.	Un E répond correctement.
		P écrit au tableau et demande un vecteur normal du plan.	Un E répond correctement. Les E recopient.
		P valide et explique en faisant un dessin.	Les E écoutent.

TABLE XII.17 – Déroulements de l’exercice 12.

Voici les transcriptions des interventions de l'enseignant et des élèves pour ce moment précis du scénario. L'enseignant est représenté par la lettre « P ». Les élèves sont numérotés et représentés par la lettre « E ».

P: Alors cet ensemble, il est composé de quels éléments ?

E_1: Un vecteur.

P: Oui (x_1, x_2, x_3) c'est comme si vous aviez d'autres lettres comme (x, y, z). Donc si je le réécris avec les lettres dont vous avez l'habitude, je cherche l'ensemble des vecteurs qui sont comment par rapport au vecteur $(-1, 3, 0)$?

E_5: Orthogonaux.

P: Et comment on traduit encore deux vecteurs qui sont orthogonaux ?

E_6: Produit scalaire nul.

P: Donc le produit scalaire entre (x, y, z) et $(-1, 3, 0)$ doit donner zéro. Et dans votre cours vous avez vu que l'ensemble des vecteurs orthogonaux à un vecteur du type $(-1, 3, 0)$ c'est un objet particulier.

E_5: Ah. C'est un vecteur normal.

P: Qui est un vecteur normal ?

E_5: (x, y, z).

P: Imaginons qu'on ne le sait pas. On verra si tu as raison juste après. Ici, qu'est-ce qu'on peut bien faire ?

E_7: Faire le produit scalaire.

P: Oui, faire le produit scalaire entre les deux vecteurs. Et qu'est-ce qu'on obtient si on fait le produit scalaire entre les deux ?

E_7: $-x + 3y = 0$.

P: $-x + 3y = 0$. Nous sommes dans l'espace. Nous cherchons l'ensemble des triplets (x, y, z) tels que $-x + 3y = 0$. C'est l'équation de quoi ceci ?

E_7: C'est un plan ça.

P: C'est l'équation cartésienne d'un plan. Donc l'objet décrit par cet ensemble-là c'est un plan. Donnez-moi un vecteur normal du plan.

E_7: $(-1, 3, 0)$.

P: C'est ça. Donc ici on cherchait l'ensemble des vecteurs orthogonaux à un vecteur normal d'un plan.

Les élèves n'ont pas réussi à réaliser cette tâche seuls. Ils ne parvenaient pas à organiser leur raisonnement pour se lancer dans la résolution et étaient bloqués par la forme des éléments appartenant à l'ensemble. C'est pourquoi l'enseignant commence la correction en demandant aux élèves la nature des éléments dans cet ensemble. Il décide ensuite de changer le nom des composantes des vecteurs. Cette aide fournie par l'enseignant est une aide constructive car il essaie de rapprocher l'ensemble recherché de ceux déjà travaillés et au résultat vu dans le cours. Les élèves ne semblent pas se rappeler

avoir vu que l'ensemble des vecteurs orthogonaux à un vecteur donné décrit un plan. De ce fait, l'enseignant guide les élèves pour effectuer la conversion entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique. Il donne ici une aide procédurale indirecte. La reconnaissance du plan à partir de l'ensemble donné apparaît encore problématique pour les élèves à cette étape de l'enseignement. Toutefois, la reconnaissance du plan à partir d'une équation semble bien maîtrisée par plusieurs élèves. Lors de la correction collective, les activités *a maxima* des élèves sont la mobilisation des connaissances anciennes (produit scalaire) et nouvelles (équations plans) et les conversions entre le registre algébrique et le registre de la langue naturelle. Les activités *a minima* des élèves ne participant pas à cette correction consistent à écouter et à recopier la correction du tableau.

▶▶ L'exercice 15

Exercice 15

Soient les plans $\alpha \equiv 2x+y+z=1$, $\beta \equiv x+y+z=2$ et $\gamma \equiv x+y+z=0$. Recherchez l'ensemble des points d'intersection de ces trois plans. Expliquez votre démarche.

Cet exercice est le premier donné aux élèves pour exploiter le questionnement sur les objets décrits par des équations introduit lors des deux premières activités introductives. Le déroulement est détaillé dans le tableau XII.18.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
34”	Lecture de l’énoncé	P recopie les équations au tableau.	Les E attendent.
5’58”	Correction collective	P demande une démarche.	Un E explique son raisonnement.
		P dit qu’il y a du bon et du mauvais dans la proposition faite et dit qu’on y reviendra après. P demande à un autre E sa démarche.	L’E explique son raisonnement.
		P valide le raisonnement de cet E et explique à l’autre E ce qui est mauvais dans sa démarche.	Les E écoutent.
		P attire l’attention des E sur les équations des plans β et γ. P demande un vecteur normal des deux plans.	Des E répondent correctement.
		P demande ce qu’on peut déduire de la position des deux plans.	Un E répond correctement.
		P valide et fait un dessin des deux positions possibles.	Les E écoutent.
		P demande comment déterminer si les plans sont parallèles distincts ou confondus.	Un E répond correctement.
		P valide et reprend l’argument en le précisant.	Les E écoutent.
		P revient sur l’intersection des trois plans.	Les E écoutent.
		P écrit au tableau les arguments donnés.	Les E recopient.
		P demande ce qu’on aurait pu dire des équations $x+y+z=2$ et $2x+2y+2z=4$.	Des E répondent correctement.

TABLE XII.18 – Déroulements de l’exercice 15.

Nous proposons les extraits des transcriptions des interventions de l'enseignant et des élèves pour l'organisation du raisonnement. Le reste de la correction consiste principalement à reprendre les arguments donnés et à les écrire au tableau. L'enseignant est représenté par la lettre « P ». Les élèves sont numérotés et représentés par la lettre « E ».

P: Qu'est-ce qu'on aurait pu faire ?

E_7: Au départ moi j'ai essayé de faire en un seul et même système en essayant de supprimer les inconnues pour avoir des valeurs pour les inconnues sauf que j'y arrivais pas.

P: Tu n'y arrivais pas ou tu obtenais quelque chose qui te semblait bizarre ?

E_7: C'est plutôt ça.

E_5: Moi aussi il y avait quelque chose qui n'allait pas.

E_7: Du coup j'ai changé et j'ai regardé β et l'autre.

P: L'autre c'est qui ? C'est α ou γ ?

E_7: γ voilà. J'ai regardé β et γ et je me suis dit qu'ils étaient juste parallèles en fait et que c'est pour ça que j'arrivais pas à donner d'intersection. Du coup, j'ai fait deux systèmes différents. L'un avec β et α et avec α et γ. J'ai trouvé deux droites et du coup ben c'était juste les intersections des trois plans.

P: Alors, il y a du bon et du mauvais. Je réponds à la question et puis on revient sur ta démarche. Qu'est-ce qu'il y a ?

E_3: Ah non c'était juste pour expliquer.

P: Toi tu as fait comment ?

E_3: Ben moi en fait j'avais déterminé que du coup il fallait faire un système comme lui. Ensuite j'ai aussi compris que c'était parallèle β et γ. Du coup ben il n'y avait rien à faire.

P: Oui, ça c'est bon. Ce qui n'est pas bon pour toi c'est que tu as pris deux plans deux à deux. Et donc tu vas avoir une équation de droite pour l'intersection de ces deux plans-là et aussi pour ceux-là. Mais nous ce qu'on demande c'est une intersection entre les trois plans. Et les deux droites que tu vas obtenir, elles n'ont pas d'intersection. Donc forcément quand tu fais ton système avec les trois équations, tu n'as pas de solution.

E_7: Ok.

P: Donc en fait il n'y avait aucun point commun entre les trois plans. Il n'y avait aucune intersection. Donc une première méthode est de résoudre le système et d'obtenir l'ensemble vide, la deuxième méthode consiste à étudier directement les équations et de se dire qu'en fait ceci c'est la même chose qu'ici sauf que les termes indépendants sont différents. Donc on essaye de regarder comment sont situés les plans l'un par rapport à l'autre. Donnez-moi un vecteur normal de β ?

E_5: $(1,1,1)$.

P: Un vecteur normal de γ ?

E_5 : $(1,1,1)$.

P : Donc ces deux plans ont un vecteur normal identique. Donc forcément quelles sont les possibilités ?

E_7 : Parallèles confondus ou parallèles distincts.

P : Soit ils sont parallèles distincts, soit parallèles confondus. Comment on peut savoir s'ils sont parallèles distincts ou bien confondus ?

E_3 : Ben ici parallèles distincts car le 2 est différent de 0.

P : C'est ça. Petite question. Si on avait obtenu ceci $x+y+z=2$ et $2x+2y+2z=4$?

E_7 : Ah ils sont colinéaires.

P : Les deux plans ils sont comment ?

E_1 : Ben c'est les mêmes.

E_6 : Ils sont parallèles confondus.

P : Oui. Et si là on avait regardé l'intersection de ces deux plans avec α, est-ce qu'il y aurait eu une intersection ?

E_3 : Ben oui, une droite.

P : Oui.

Au vu des propositions faites par les élèves, la résolution algébrique est encore la méthode principalement choisie pour déterminer l'intersection entre des objets géométriques. Cependant, ils ont le réflexe d'étudier les équations du système lorsqu'ils sont bloqués dans la résolution algébrique ou bien lorsqu'ils veulent vérifier les résultats obtenus. Ces élèves ont apparemment développé une certaine interprétation géométrique des équations. Nous repérons toutefois une erreur de raisonnement chez le premier élève. Celle-ci peut être associée soit à un manque de connaissances anciennes en géométrie synthétique sur les positions relatives de trois plans, soit à un manque de compréhension sur les systèmes d'équations. L'enseignant discute avec l'élève et fait des gestes pour qu'il comprenne son erreur. Il propose alors dans son discours une aide constructive car il part de ce que l'élève a fait et l'aide à prendre du recul sur cette méthode. Il revient ensuite sur la démarche proposée et l'explicite pour les autres élèves. L'enseignant constate que, pour un élève, les plans sont distincts juste parce que les termes indépendants sont différents. Il ajoute spontanément une question dans son discours pour s'assurer qu'une conception erronée n'apparaît pas chez les élèves. Les activités *a maxima* des élèves sont l'organisation du raisonnement, la mobilisation de connaissances anciennes et nouvelles, un jeu entre les cadres géométriques et une conversion entre le registre algébrique et le registre de langue naturelle et entre le registre de la langue naturelle et le registre ensembliste. C'est par exemple le cas du deuxième élève ayant réalisé en toute autonomie cette tâche. *A minima*, les élèves qui n'ont pas participé à la correction ont écouté et recopié la solution. Puisque cet exercice était une préparation à domicile, il est difficile de dire si d'autres activités ont été potentiellement développées.

▶▶ L'exercice 18

Exercice 18

Soit le système

$$\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ 3x+2y-5z=2 \end{cases}$$

Décrivez géométriquement l'ensemble des solutions de ce système. Expliquez votre démarche. Déterminez ensuite algébriquement quel est cet ensemble de solutions.

Cet exercice a été corrigé lors de la même séance que les exercices 12 et 15 analysés précédemment. Le déroulement est détaillé dans le tableau XII.19.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
16”	Lecture de l’énoncé	P lit l’énoncé.	Les E écoutent.
9’16”	Correction collective	P écrit le système au tableau.	Un E dit qu’il s’agit de deux plans.
		P valide et demande pourquoi les équations décrivent bien des plans.	Un E répond correctement.
		P valide et complète la réponse donnée. P demande ce qu’on peut en déduire.	Les E écoutent. Un E dit que l’intersection est une droite.
		P attire l’attention sur le fait que si les deux plans sont parallèles ce n’est pas forcément une droite.	Des E répondent que les plans ne sont pas parallèles.
		P valide. P demande un vecteur normal du premier plan.	Des E répondent correctement.
		P écrit au tableau.	Les E recopient.
		P demande un vecteur normal du deuxième plan.	Des E répondent correctement.
		P écrit au tableau.	Les E recopient.
		P demande pourquoi ces vecteurs sont non colinéaires.	Des E répondent correctement.
		P valide. P écrit la définition au tableau en expliquant que le système est bien impossible.	Les E écoutent et recopient.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P écrit au tableau la conclusion qui a été proposée par les E.	Les E recopient.
		P demande quel est l'objet décrit par l'ensemble des solutions du système.	Des E répondent correctement.
		P demande comment résoudre le système.	Un E répond correctement.
		P écrit la résolution algébrique du système en suivant les indications d'un E.	Un E dit ce qu'il faut faire à chaque étape de la résolution.
		P explique qu'on a un système indéterminé.	Les E écoutent.
		P explique qu'il faut exprimer deux inconnues en fonction de la troisième.	Les E écoutent.
		P écrit la fin de la résolution du système et l'ensemble des solutions.	Les E recopient.
		P demande si l'ensemble des solutions décrit bien une droite.	Des E répondent et justifient correctement.
		P demande un point et un vecteur directeur de la droite.	Des E répondent correctement.
		P écrit au tableau les coordonnées proposées.	Les E recopient.
		P revient sur les avantages de cette démarche en tant que méthode de vérification des calculs.	Les E écoutent.

TABLE XII.19 – Déroulements de l'exercice 18.

Nous proposons les extraits des transcriptions des interventions de l'enseignant et des élèves pour la reconnaissance des objets décrits par les équations et par l'ensemble des solutions. L'enseignant est représenté par la lettre « P ». Les élèves sont numérotés et représentés par la lettre « E ».

P: Je vous donne un système et cette fois-ci je vous dis ne calculez pas tout de suite. Décrivez l'ensemble des solutions géométriquement et puis après vérifiez ce que vous avez dit en faisant des calculs. Donc si je prends le système ici ...

E_7: On a deux plans là.

P: On a deux équations et effectivement ce sont deux plans. Pourquoi ce sont deux plans ?

E_7: C'est des équations cartésiennes.

P: Ce sont deux équations cartésiennes de la forme $ax+by+cz=d$. Ok, et alors ?

E_7: Ben du coup l'intersection entre deux plans c'est une droite.

P: Pas forcément. S'ils sont parallèles ...

E_7: S'ils sont parallèles non.

P: ... soit il n'y a pas d'intersection, soit il y en a une infinité.

E_1: Mais ils sont d'office non parallèles puisqu'ils ne sont pas ...

E_7: Proportionnels.

E_1: Voilà.

P: Qu'est-ce qui n'est pas proportionnels ?

E_6: Les coefficients.

P: Voilà. Donc on écrit. La ligne 1 on a le plan α et là on a le plan β. Un vecteur normal de α est ?

E_6: $(2,1,1)$.

P: $(2,1,1)$. Un vecteur normal de β est ?

E_2: $(3,2,-5)$.

P: $(3,2,-5)$. Est-ce que ces vecteurs sont bien non colinéaires ?

E_3: Oui.

P: Pourquoi ?

E_3: Parce qu'il n'y a pas de k si on fait l'équation vectorielle.

P: C'est ça. Pour être colinéaires, il faut qu'il existe un réel k non nul tels que $(2,1,1) = k(3,2,-5)$. Dire ceci, cela revient à chercher un k tel que k vaut $\frac{2}{3}$, k vaut $\frac{1}{2}$. Est-ce que c'est possible d'avoir deux valeurs différentes ?

E_4: Non.

P: Donc ici il n'existe pas de k. Donc cela prouve bien que les deux plans ne sont pas parallèles. Ça veut dire quoi alors ?

E_7: Qu'ils ont bien une intersection.

P: Ils sont donc sécants.

E_3: Et donc on pourrait trouver l'équation de la droite.

P: C'est ça. On cherche une équation d'une droite. Comment je fais pour savoir de quelle droite il s'agit ?

E_3: On fait un système.

P: Oui on résout ce système-là.

La reconnaissance des plans à partir des équations cartésiennes semble maîtrisée par les élèves. 5 d'entre-eux ont réussi à déterminer les objets décrits et leurs positions relatives assez rapidement. Le reste de l'exercice consiste à décrire la droite en résolvant le système de deux équations. La résolution d'un système indéterminé pose des difficultés aux élèves. L'enseignant rappelle alors la méthode à suivre et propose d'isoler les variables x et z en fonction de y. L'extrait suivant concerne l'écriture de l'ensemble des solutions.

P: Mon ensemble de solutions c'est l'ensemble des (x,y,z) qui vérifient les deux équations. Donc le x je sais qu'il vaut ceci, le y peut valoir n'importe quoi et le z je sais ce qu'il vaut et je dis que y vaut n'importe quel réel. Ça c'est votre ensemble de solutions de votre système. Est-ce que c'est bien une droite ?

E_5: Oui.

P: Pourquoi ?

E_5: Parce qu'on a un y qui peut valoir n'importe quoi.

P: Il n'y a qu'une lettre qui varie. Donnez-moi un vecteur directeur et un point de cette droite.

E_7: $\frac{17}{13}$.

E_1: 0.

P: Alors vous me dites $(\frac{17}{13}, 0 \ldots$

E_1: $\frac{5}{13}$.

P: Ça c'est quoi ?

E_1: C'est le point.

P: C'est un point de la droite. Et un vecteur directeur ça serait quoi ?

E_1: $\frac{-7}{13}$

E_5: 1

E_5: et $\frac{1}{13}$.

P: C'est bien.

La majorité des élèves a reconnu et justifié que l'ensemble donné décrit bien une droite. Ils ont aussi tous participé pour l'écriture d'une équation paramétrique de la droite. Ainsi, les élèves ont été capables de reconnaître les objets décrits par des équations et des ensembles de points. Toutefois, la description de la droite par un ensemble

est entièrement prise à la charge de l'enseignant puisque les élèves ne parvenaient pas à résoudre un système simplement indéterminé. Les élèves ayant participé à cette correction collective ont *a maxima* organisé leur raisonnement, mobilisé leurs connaissances (anciennes, en cours d'acquisition et nouvelles), effectué des jeux entre les cadres géométriques et des conversions entre les registres (algébrique vers langue naturelle, ensembliste vers algébrique). *A minima*, les élèves ont recopié et écouté la solution. La conversion entre le registre algébrique et le registre ensembliste a été effectuée par l'enseignant en classe et non par les élèves. Cette adaptation n'est potentiellement pas réalisée par les élèves pour cet exercice.

3.5 Premières conclusions

L'analyse des déroulements des deux premières tâches introductives montre qu'il y a quelques variations entre la gestion prévue *a priori* du scénario (cf. chapitre X) et la gestion effective en classe.

Pour la tâche introductive 1, seule la gestion du système S_1 a été modifiée en classe. L'enseignant a choisi de résoudre collectivement ce système pour s'assurer que les élèves comprennent ce qu'il est attendu d'eux et pour introduire la description des objets par des ensembles de points. En effet, il a constaté que les élèves n'étaient pas capables d'utiliser correctement le vocabulaire ensembliste pour les ensembles de solutions des équations du premier et du deuxième degré présentes dans la partie du cours permettant de distinguer les expressions « résoudre une équation » et « décrire par une équation ». Les interventions de l'enseignant montrent qu'il essaie dans son discours (accompagné de gestes) d'amener les élèves à utiliser le vocabulaire et les notations ensemblistes et à raccrocher cette nouvelle description des objets géométriques aux connaissances qu'ils possèdent déjà dans le cadre de la géométrie analytique plane. Ce changement de gestion pour le système S_1 amène un écart entre les activités attendues des élèves et les activités possibles. En particulier, tous les élèves n'ont pas dû organiser leur raisonnement pour se lancer dans la réalisation de la tâche puisqu'il n'y a pas eu de phase de recherche individuelle. Pour les trois autres systèmes de la tâche introductive, la gestion effective a bien été conforme à celle prévue initialement. Les activités possibles des élèves sont donc conformes à celles prévues *a priori*. Ils sont parvenus à résoudre les trois systèmes en toute autonomie.

L'objectif visé par cette première tâche introductive est selon nous atteint. Les deux aspects de l'interprétation géométrique pour les droites dans le plan ont bien été travaillés. En effet, le questionnement sur les équations, les ensembles de points et les objets géométriques associés semble bien avoir été mis en place comme le suggère notre analyse des déroulements et des interventions en classe pour le système S_1. Nous avions fait l'hypothèse que ce questionnement peut facilement être mis en place chez les élèves à la condition que l'enseignant fasse des rapprochements avec ce qu'ils connaissent déjà des droites dans le plan. Nos analyses des déroulements et des interventions de l'enseignant en classe en termes de tentatives de proximités semblent valider cette hypothèse.

Les déroulements de la tâche introductive 2 mettent en évidence une variabilité entre la gestion prévue *a priori* du scénario et la gestion effective. La nature et la durée du travail ont été modifiées notamment parce que l'enseignant a repéré des difficultés ou des conceptions erronées chez les élèves. Nous avons par exemple montré pour le système S_4 des difficultés à organiser un raisonnement et à manipuler les ensembles. Nous avons aussi mis en évidence une conception erronée en logique. En effet, un élève pense qu'il suffit de montrer que trois points sont alignés pour décrire une droite. L'enseignant a également inséré des phases de recherche individuelle dans la résolution de chaque système pour que les élèves puissent déterminer les objets décrits par les ensembles de points. Nos analyses des interventions de l'enseignant en classe mettent en évidence qu'il essaie le plus possible de rapprocher le travail qui est à réaliser de ce que les élèves ont déjà fait auparavant. En particulier, nous avons relevé des tentatives de proximités horizontales de la part de l'enseignant. En effet, il a essayé d'amener les élèves à établir des connexions entre ce qu'ils avaient déjà fait sur les ensembles pour les systèmes précédents et l'ensemble qu'il fallait décrire. Celles-ci n'avaient pas été prévues *a priori*. Il a aussi tenté les proximités horizontales et descendantes que nous avons prévues pour aider les élèves à déterminer la position relative de la droite et du plan. Ces différents commentaires semblent surtout guider les élèves dans l'organisation de leur raisonnement et dans les jeux de cadres entre la géométrie analytique et la géométrie synthétique. Ils modifient donc les activités attendues des élèves.

L'objectif de cette tâche introductive 2 semble être également atteint. En effet, toutes les notions théoriques ont bien émergé lors de la résolution des différents systèmes. Comme nous l'avons montré dans nos analyses des déroulements pour le système S_4, l'interprétation géométrique des objets semble être un moyen suffisant de contrôle interne pour éviter les difficultés et conceptions erronées lors de l'extension des notions du plan à l'espace. De plus, bien que le travail soit guidé par l'enseignant, il est possible qu'une certaine flexibilité entre les cadres géométriques, les registres et les points de vue soit développée par les élèves. Seul le registre ensembliste reste quelque peu problématique à la fin de la tâche introductive 2.

Nous avons analysé les déroulements de quatre exercices pour lesquels la gestion prévue *a priori* n'a pas été respectée. Les exercices 11, 12 et 15 ont été laissés en préparation à domicile. Une phase de recherche individuelle a normalement été suivie par les élèves mais nous n'avons accès à leurs activités possibles que par l'intermédiaire des corrections collectives. Aucune phase de recherche n'a été proposée pour l'exercice 18. Ces écarts entre la gestion prévue initialement et la gestion effective en classe s'expliquent notamment par un manque de temps. En effet, la gestion effective de l'activité introductive a eu pour conséquence un décalage de deux séances avec la chronologie prévue *a priori*. Des choix ont dû être faits par l'enseignant pour quand même proposer aux élèves une variété et une diversité de tâches dans le temps imparti. Rappelons que nous ne pouvions pas dépasser les 16 séances pour notre expérimentation à cause de contraintes institutionnelles (session d'examens).

L'enseignant prend en charge les corrections collectives pour ces quatre exercices en sollicitant par un jeu de questions/réponses les élèves. L'analyse du déroulement des exercices 11 et 12 montre que les élèves n'ont pas réussi à organiser leur raisonnement pour réaliser ces tâches. Pour l'exercice 11, l'enseignant aide les élèves à effectuer la conversion entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique grâce à la construction d'un dessin. Cette aide apportée par l'enseignant est de type procédurale car l'analyse du dessin proposée met les élèves sur la voie de la démarche à suivre pour la réalisation de la tâche. Les activités attendues des élèves s'en trouvent modifiées. Une fois le raisonnement organisé en classe, les élèves énoncent les adaptations à réaliser telles que la reconnaissance des modalités d'application des équations et l'articulation des points de vue. Pour l'exercice 12, l'enseignant organise lui-même le raisonnement et découpe la tâche à réaliser en plusieurs sous-tâches telles que la conversion entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique, le calcul d'un produit scalaire et la reconnaissance de l'objet décrit par une équation. Les élèves sont constamment sollicités lors de cette correction pour réaliser chaque sous-tâche. L'enseignant propose à la fin de la correction un parallèle entre l'exercice résolu et un résultat du cours, ainsi qu'un dessin permettant de généraliser ce qui a été fait dans le cas de l'exercice. Ces interventions sont des aides à fonction constructive. Les activités possibles ne sont pas conformes aux activités attendues pour cet exercice uniquement à cause des difficultés rencontrées par les élèves à organiser leur raisonnement.

Lors des corrections collectives des exercices 15 et 18, les élèves sont sollicités pour organiser le raisonnement à suivre. Comme ils sont relativement proches de ce qui a été fait lors de l'activité introductive, la plupart des élèves y parviennent seuls. L'enseignant suit alors le découpage de la tâche proposée par les élèves et demande le travail à réaliser pour chacune des sous-tâches définies. Il généralise aussi les démarches proposées par les élèves, leur fait prendre du recul à certains moments et insiste sur les avantages de l'interprétation géométrique des objets pour la vérification des calculs. Des aides constructives sont alors apportées par l'enseignant. Notre analyse *a posteriori* de ces deux exercices montre que la reconnaissance des objets à partir d'une équation ou d'un ensemble de points semble bien maîtrisée par les élèves à la suite de notre expérimentation. Toutefois, la description d'un objet par un ensemble de points peut encore être problématique pour les élèves. Cela peut s'expliquer par une difficulté des élèves à résoudre des systèmes simplement indéterminés comme nous l'avons vu pour l'exercice 18. L'enseignant prend alors à sa charge la résolution algébrique du système et la conversion entre le registre algébrique et le registre ensembliste. Ces aides minorent les activités attendues des élèves. Toutefois, les élèves ont réalisé toutes les adaptations des connaissances attendues d'eux excepté cette conversion. Les activités possibles des élèves ayant participé à la correction sont proches de celles attendues.

En conclusion, les analyses menées pour ces phases précises de l'enseignement mettent en évidence plusieurs premiers résultats qui devront être validés par notre évaluation des apprentissages des élèves sur les droites et les plans dans l'espace. Tout d'abord, le premier aspect de l'interprétation géométrique pour les équations et les ensembles de points semble être maîtrisé par les élèves. Il en est de même pour la description des objets par des équations. Cependant, la description des objets par des ensembles

ainsi que les conversions avec le registre ensembliste ont souvent été prises en charge par l'enseignant. Nous devons être particulièrement attentive à ces activités dans notre évaluation afin de déterminer si les élèves sont capables de les réaliser en toute autonomie. Nos analyses ont ensuite montré qu'un travail sur les jeux de cadres, les conversions de registres et les changements de points de vue a bien été proposé aux élèves dans l'activité d'introduction et dans les tâches réalisées. Il reste à évaluer s'ils ont bien développé la flexibilité qui est attendue d'eux à la suite de notre expérimentation. Nous revenons sur l'évaluation et les apprentissages des élèves dans le chapitre XIII.

4 Bilan et limites de l'expérimentation

Au regard de la conceptualisation attendue des élèves que nous avons décrite au chapitre IX, nous sommes en mesure de dresser un bilan de notre expérimentation. Quelques premiers éléments sur les apprentissages des élèves pour le chapitre de géométrie analytique dans l'espace peuvent, de plus, être formulés.

4.1 Retour sur la conceptualisation visée chez les élèves

Nous avons défini, au chapitre IX, la conceptualisation visée par notre scénario. Rappelons qu'elle est associée à la disponibilité des statuts outil et objet des notions de droites et de plans dans l'espace, à l'organisation des connaissances antérieures et nouvelles en prenant en compte le type des notions, à une flexibilité entre les cadres des géométries synthétique, vectorielle et analytique, à la manipulation et aux conversions entre les registres de la langue naturelle, algébrique, du dessin et ensembliste, à l'articulation entre les points de vue paramétrique et cartésien et à une diversité des niveaux de mises en fonctionnement des connaissances dans les tâches proposées aux élèves. Notre analyse *a priori* du scénario réalisée dans le chapitre XI a permis de mettre en évidence qu'il possède bien ces caractéristiques et qu'il peut favoriser la conceptualisation des notions ciblées par les élèves. L'enseignement expérimenté est globalement conforme au scénario prévu. En effet, l'activité introductive et la majorité des tâches effectives correspondent bien à ce que nous avions prévu en termes de contenus et de gestion. Toutefois, certains écarts entre la gestion prévue *a priori* et celle effective ont été notés principalement pour les exercices. Ces écarts sont en partie expliqués par les difficultés rencontrées par les élèves et par les contraintes institutionnelles (horaire) auxquelles notre expérimentation a été soumises. Nous pensons quand même que notre enseignement mène certains élèves à développer la conceptualisation attendue. Nous proposons une justification de cette affirmation dans ce qui suit.

Tous les contenus mathématiques visés ont bien été introduits grâce à l'activité introductive et aux choix de gestion de celle-ci par l'enseignant. Les équations paramétriques et cartésiennes des droites et des plans dans l'espace ont bien émergé suite à l'étude des différents systèmes proposés dans la deuxième tâche introductive. Les proximités tentées par l'enseignant lui permettent de rapprocher, voire d'étendre, ce que les élèves ont déjà fait avec le travail à réaliser ou les connaissances nouvelles. Notre

analyse des déroulements du système S_1 a par exemple montré que l'enseignant essaie d'établir des connexions entre les objets géométriques décrits par des équations connues des élèves et leur description par des ensembles de points. Les connaissances nouvelles sont ainsi intégrées au bagage mathématique des élèves.

Un questionnement sur les équations, les ensembles et les objets géométriques associés s'installe au fur et à mesure de notre activité d'introduction. La définition des équations construite avec les élèves, ainsi que le travail proposé par l'enseignant pour distinguer les expressions « résoudre une équation » et « décrire par une équation », aident les élèves à développer ce questionnement avant de réaliser l'activité introductive. Ce choix de contenu associé au discours de l'enseignant pendant toute la correction collective nous amènent à penser qu'ils peuvent avoir développé leur interprétation géométrique des objets. Cette hypothèse s'appuie notamment sur notre analyse du système S_4 et des exercices 15 et 18. Nous pensons également que ce questionnement constitue bien un moyen de contrôle suffisant pour les aider à surmonter certaines des difficultés repérées (cf. partie 1) comme nous l'avons illustré pour le système S_4. Nous pourrons confirmer ou non ces hypothèses grâce à l'évaluation proposée.

Le développement chez les élèves d'une certaine flexibilité entre les cadres géométriques, les registres et les points de vue est aussi un enjeu majeur de notre enseignement. Les choix de contenus et de gestion de l'enseignant ont bien permis de proposer un travail permettant de la développer tout au long de l'enseignement. En effet, des jeux de cadres entre les géométries synthétique, vectorielle et analytique, des conversions entre les registres algébrique, de la langue naturelle, ensembliste et une double articulation des points de vue paramétrique et cartésien ont bien été réalisés à la fois dans l'activité introductive et dans les exercices. Dans l'activité introductive, l'enseignant a découpé le raisonnement en différentes sous-tâches en fonction des adaptations mathématiques à réaliser. Il guide alors les élèves à effectuer ces adaptations en s'appuyant sur des dessins, sur leurs connaissances anciennes et sur le travail qu'ils ont déjà dû faire auparavant. Le discours de l'enseignant et sa gestion en classe de l'activité introductive aident, selon nous, les élèves à développer la flexibilité attendue. Toutefois, notre analyse des déroulements révèle que les élèves ont rencontré des difficultés à manipuler le registre ensembliste tout au long de l'expérimentation. Un travail dans ce registre est relativement nouveau pour eux. De ce fait, l'enseignant a souvent pris à sa charge les traitements et les conversions avec ce registre d'écriture. Il est donc possible que les élèves ne soient pas capables de traiter en autonomie ce registre. Cela semble être confirmé par notre analyse *a posteriori* de l'exercice 12. Nous faisons donc l'hypothèse qu'une certaine flexibilité peut avoir été développée par quelques élèves mais que celle-ci peut être plus restreinte que celle attendue. Nous pourrons confronter cette hypothèse à l'évaluation proposée.

Bien que la liste des tâches prescrites a été restreinte lors de notre expérimentation, des tâches relevant des trois niveaux de mise en fonctionnement des connaissances ont été proposées aux élèves. Nous avons également travaillé les dimensions outil et objet des notions de droites et de plans dans l'espace avec par exemple les exercices 22 et 23. Une comparaison entre les outils et les démarches propres aux géométries synthétique et

analytique a bien été proposée par l'enseignant en classe notamment pour l'exercice 22. Ainsi, les tâches effectuées en classe sont bien variées. L'analyse des déroulements, et en particulier des phases précises de l'enseignement, nous renseigne déjà sur les adaptations réalisées par les élèves. Les activités possibles décrites dans ces moments de l'enseignement nous éclairent sur leurs apprentissages mais ceux-ci restent à confirmer par notre évaluation. Les élèves rencontrent peu de difficultés à organiser leur raisonnement, à reconnaître les modalités d'application des équations, à effectuer des jeux de cadres géométriques, à articuler les points de vue dans les deux sens et à effectuer des conversions entre le registre de la langue naturelle et algébrique. Cependant, certaines de ces adaptations peuvent devenir plus compliquées à réaliser pour les élèves lorsque la tâche proposée relève du niveau disponible de mise en fonctionnement des connaissances. Nous avons par exemple montré lors de l'analyse *a posteriori* de l'exercice 11 que les élèves rencontrent des difficultés à organiser leur raisonnement et à effectuer des conversions entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique. En ce qui concerne l'interprétation géométrique des objets, la reconnaissance des objets à partir d'équations ou d'ensembles de points ne semble pas amener de difficultés chez les élèves. Toutefois, si les ensembles sont plus complexes, comme c'est par exemple le cas de l'exercice 12, des difficultés peuvent apparaître chez les élèves dans l'organisation du raisonnement ou dans les traitements au sein du registre ensembliste. La description des objets géométriques par des équations ne pose pas de difficultés aux élèves. La description des objets par des ensembles a souvent été prise en charge par l'enseignant lors des corrections collectives. Il se peut que cet aspect ne soit que peu développé par les élèves.

Nos analyses des déroulements en classe ont également montré que les deux leviers que nous avions choisis dans le chapitre IX semblent bien favoriser la conceptualisation des notions par les élèves. En effet, nous avons montré que l'interprétation géométrique des objets peut aider les élèves à donner du sens aux équations, aux ensembles et aux objets qu'ils décrivent et à éviter certaines difficultés repérées dans la partie 1. Nous avons également montré que le discours de l'enseignant semble favoriser, d'une part, l'intégration de l'interprétation géométrique des objets chez les élèves et, d'autre part, le développement de la flexibilité attendue pour ces notions. En effet, nous avons mis en évidence à plusieurs reprises que les proximités (anticipées ou spontanées) tentées par l'enseignant, ainsi que les aides constructives proposées lors des exercices, ont permis de rapprocher le travail à réaliser de la ZPD des élèves. Cela a eu pour effet d'aider les élèves à organiser leur raisonnement, à étendre les notions du plan à l'espace, à développer un questionnement sur les objets décrits par des équations et des ensembles, à surmonter certaines de leurs difficultés et à effectuer des jeux entre les cadres géométriques. L'impact positif que semble avoir le discours de l'enseignant sur les apprentissages des élèves peut être confirmé (ou non) par l'analyse de l'évaluation proposée.

Ces premiers résultats émergent de ce que nous avons observé en classe lors de notre expérimentation. Ils sont en partie validés par nos analyses *a posteriori*. Pour caractériser davantage les apprentissages des élèves sur les notions de droites et de plans dans l'espace, nous avons proposé une évaluation à la suite de notre enseignement. La présentation, l'analyse et les résultats de cette évaluation sont abordés au chapitre XIII.

4.2 Limites méthodologiques

Les choix que nous avons effectués lors de notre expérimentation nous amènent à formuler des limites méthodologiques à notre travail. Dans un premier temps, nous n'avons expérimenté notre scénario que dans une seule classe et celle-ci n'est composée que de sept élèves. Il nous paraît évident que les activités possibles des élèves auraient pu être déterminées avec plus de précision si nous avions expérimenté notre scénario dans plusieurs classes ou du moins sur un nombre plus important d'élèves. De plus, notre gestion en classe a été fortement influencée par les difficultés des élèves, le plus souvent liées à un manque de connaissances anciennes ou de travail personnel. Il se peut que les activités possibles d'élèves plus investis dans leurs études soient différentes de celles déterminées ici.

Dans un deuxième temps, notre posture à la fois d'enseignant et de chercheur a certainement influencé notre expérimentation. Nous nous sommes fortement investie dans celle-ci et avons été guidée par les objectifs que nous voulions atteindre par cet enseignement. Il peut alors être intéressant de proposer à un enseignant d'expérimenter notre scénario en classe. Une comparaison des apprentissages des élèves peut nous permettre de déterminer de façon plus précise l'effet des pratiques enseignantes sur ceux-ci à partir d'un même scénario. Nous constatons également qu'il a été difficile pour les élèves de s'habituer au changement de contrats didactiques. En effet, ils ont le même enseignant depuis au moins un an et le contrat établi avec celui-ci est relativement différent de celui que nous avons imposé. Par exemple, les élèves ont pris beaucoup de notes dans notre enseignement alors qu'ils en prennent peu avec leur enseignant. Il peut donc être intéressant d'expérimenter une nouvelle fois notre scénario avec une classe dont l'enseignant impose un contrat similaire au nôtre.

Bien que nous ayons filmé l'entièreté de notre enseignement, nous n'avons pas relevé les copies des élèves lors des phases de recherche individuelle. L'analyse de ces copies aurait pu affiner nos analyses *a posteriori* des activités des élèves et en particulier leurs activités *a minima*. En effet, tous les élèves ne participent pas toujours aux corrections collectives. Il est donc difficile de dire quelles sont les adaptations qu'ils ont effectivement pu réaliser.

Finalement, la période de l'année choisie pour notre expérimentation a aussi eu un impact sur nos choix. En effet, notre enseignement a dû prendre fin car la période des révisions et des examens débutait. Il est un fait certain que l'ajout d'une ou deux séances supplémentaires (autorisées par le référentiel) nous aurait permis de proposer plus de tâches ou plus de phases de recherches individuelles aux élèves. Les apprentissages peuvent en être aussi influencés.

Nous sommes consciente que nos analyses auraient pu être davantage précisées. Nous ne pouvons cependant pas affirmer que les apprentissages des élèves pour le chapitre de géométrie analytique dans l'espace auraient été très différents si nous avions pris en compte d'autres choix méthodologiques.

Chapitre XIII

Apprentissages des élèves

Dans ce chapitre, nous présentons les évaluations que nous avons élaborées. La première évaluation est adressée aux étudiants de BAB1 de notre université pour les sections mathématique, informatique et physique. Celle-ci a lieu en début d'année avant tout enseignement d'algèbre linéaire. Les notions de droites et de plans dans l'espace ont donc été vues par les étudiants en sixième secondaire. La deuxième évaluation est adressée aux élèves qui ont suivi notre séquence d'enseignement. Nous analysons ici les réponses fournies aux deux évaluations. Le dépouillement des copies nous permet d'inférer des éléments sur les apprentissages des étudiants et des élèves pour ces notions. Une comparaison entre les résultats des deux évaluations peut nous aider à préciser les effets de nos choix méthodologiques sur les apprentissages.

1 Éléments méthodologiques

Nous avons ébaloré deux évaluations adressées à des publics différents : les étudiants en première année universitaire et les élèves ayant suivi notre enseignement. Ce choix s'explique par une volonté de comparer les apprentissages d'un groupe témoin à ceux d'un groupe expérimental. L'analyse des copies des étudiants peut nous aider à mieux apprécier les effets de notre expérimentation sur les apprentissages des élèves.

Nous présentons dans un premier temps l'évaluation proposée aux étudiants de BAB1 dans les sections mathématique, informatique et physique. L'échantillon est composé de 132 étudiants. Ils ont été interrogés durant le mois d'octobre 2019 avant tout enseignement de géométrie analytique dans l'espace. L'évaluation se trouve dans l'annexe K (page 713). Nous choisissons de découper l'analyse de cette évaluation en fonction des questions. Pour chacune d'entre elles, nous expliquons les objectifs visés. Nous proposons également les solutions possibles et réalisons leur analyse *a priori*. Nous présentons ensuite les résultats des étudiants en illustrant nos propos par des extraits de copies.

Dans un second temps, nous présentons l'évaluation proposée aux élèves à la fin de notre enseignement. Cette évaluation se situe à l'annexe K (page 716). L'échantillon ici se compose de 7 élèves. Ils ont été directement interrogés après notre expérimenta-

tion (séance 17). L'analyse de cette évaluation est découpée de la même façon que la précédente.

Nous comparons finalement les résultats des deux évaluations pour en inférer des éléments sur les apprentissages des élèves pour les notions de droites et de plans dans l'espace.

2 Questionnaire pour les étudiants de BAB1

Notre étude de terrain réalisée dans le chapitre VIII a montré que l'aspect « description » de l'interprétation géométrique des objets est fortement travaillé dans l'enseignement secondaire pour les équations. L'objectif de ces questions est de tester si la reconnaissance des objets à partir d'équations et d'ensembles de points est développée par les sujets interrogés. Nous ne demandons pas de justifier toutes les affirmations mais seulement celles qui demandent quelques adaptations des connaissances.

Nous nous basons sur notre étude curriculaire (cf. chapitre IV), notre étude des manuels scolaires (cf. chapitre VII) et notre étude de terrain (cf. chapitre VIII) pour rédiger les solutions possibles de chaque question et pour réaliser leurs analyses *a priori*. Les équations des droites et des plans dans l'espace sont des connaissances anciennes des étudiants. Les ensembles peuvent ne pas avoir été vus dans l'enseignement secondaire mais ont été travaillés dès le début des cours universitaires.

2.1 Question 1

Dites si l'objet de l'espace $\mathbb{R}^3$ décrit par une équation, un système d'équations ou un ensemble est une droite ou un plan. Pour certaines réponses, une justification vous est demandée.

1. $2x+y=3$ — Droite ☐ Plan ☐ Je ne connais pas la réponse ☐

2. $x=1$ — Droite ☐ Plan ☐ Je ne connais pas la réponse ☐

3. $\begin{cases} 2x+3y+4z=2 \\ x=1 \end{cases}$ — Droite ☐ Plan ☐ Je ne connais pas la réponse ☐

4. $\begin{cases} x=1+4\lambda \\ y=2+5\lambda \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \\ z=3+6\lambda \end{cases}$ — Droite ☐ Plan ☐ Je ne connais pas la réponse ☐

5. $\begin{cases} x=1+4\lambda+7\mu \\ y=2+5\lambda+8\mu \text{ où } \lambda,\mu \in \mathbb{R} \\ z=3+6\lambda+9\mu \end{cases}$ — Droite ☐ Plan ☐ Je ne connais pas la réponse ☐

6. $\begin{cases} 2x+3y+4z=2 \\ 4x+6y+8z=4 \end{cases}$ — Droite ☐ Plan ☐ Je ne connais pas la réponse ☐

7. $\left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (a,b,c) \text{ est simultanément orthogonal à } (1,-1,1) \text{ et } (1,2,1)\right\}$ — Droite ☐ Plan ☐ Je ne connais pas la réponse ☐

►► Solutions

Il s'agit de reconnaître les objets de l'espace décrits par des équations (paramétriques et cartésiennes) ou des ensembles de points. Les équations aux points 1 et 2 sont des équations incomplètes de plans. Le système donné au point 3 représente la droite d'intersection des plans d'équations $x = 1$ et $2x+3y+4z = 2$. Le système donné au point 4 est composé des équations paramétriques d'une droite. Le système donné au point 5 est lui composé des équations paramétriques d'un plan. Le système donné au point 6 décrit un plan. En effet, les deux équations données représentent deux plans parallèles confondus. Leur intersection est donc le plan lui-même.

L'ensemble donné au point 7 décrit une droite. Plusieurs justifications peuvent être apportées.

Première méthode

Nous cherchons l'ensemble des vecteurs (a,b,c) qui sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} a-b+c=0 \\ a+2b+c=0 \end{cases}$$

La première équation décrit un plan dont un vecteur normal est $(1,-1,1)$. La deuxième équation est un plan dont un vecteur normal est $(1,2,1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car quelle que soit la valeur du réel k, on n'aura jamais $(1,-1,1) = k(1,2,1)$. Les deux plans sont donc sécants. L'intersection de ces deux plans est donc une droite.

Deuxième méthode

Nous cherchons l'ensemble des vecteurs (a,b,c) qui sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} a-b+c=0 \\ a+2b+c=0 \end{cases}$$

Résolvons algébriquement ce système. Nous avons :

$$\begin{cases} a=b-c \\ a+2b+c=0 \end{cases}$$

En substituant la valeur de a trouvée dans la deuxième équation, nous obtenons :

$$\begin{cases} a=b-c \\ 3b=0 \end{cases}$$

De ce fait, $b=0$ et $a=-c$. L'ensemble des solutions de ce système est : $\{(-c,0,c) \mid c \in \mathbb{R}\}$. Cet ensemble décrit une droite. Il est possible de préciser qu'il s'agit de la droite passant par l'origine du repère et dont un vecteur directeur est $(-1,0,1)$.

►► Analyse *a priori*

La question est fermée.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie vectorielle, cadre de la géométrie synthétique.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre ensembliste, registre de la langue naturelle.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : équations paramétriques et cartésiennes de droites et de plans dans l'espace, colinéarité, orthogonalité, produit scalaire, vecteur, positions relatives de deux plans, résolution de systèmes.
- Connaissances en cours d'acquisition : notions et notations ensemblistes.

Adaptations à réaliser

Aux points 1 et 2, il s'agit de reconnaître un plan à partir du point de vue cartésien (*reconnaissance des modalités d'application*, *mise en jeu de connaissances anciennes*). Aux points 4 et 5, la reconnaissance d'une droite et d'un plan se fait à partir du point de vue paramétrique (*reconnaissance des modalités d'application*, *mise en jeu de connaissances anciennes*).

Au point 3, une *reconnaissance des modalités d'application* des équations cartésiennes de plans est nécessaire (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Il faut tester si les vecteurs normaux sont colinéaires (*mise en jeu de connaissances anciennes en géométrie vectorielle*). Une fois qu'il a été déterminé que les deux plans sont sécants, les connaissances de géométrie synthétique permettent de dire que ce système décrit une droite (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *changement de cadres*). Des adaptations similaires sont à réaliser pour le point 6. Pour ces deux points, un *choix de méthode* s'impose également. En effet, il est possible de résoudre les deux systèmes pour déterminer l'objet décrit par l'ensemble des solutions des systèmes (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *conversion de registres*).

Pour l'ensemble des vecteurs, des *connaissances en cours d'acquisition* sont en jeu (notations ensemblistes) ainsi que des *connaissances anciennes* telles que le produit scalaire entre deux vecteurs. L'*organisation du raisonnement* se découpe en plusieurs étapes. Il s'agit de traduire l'orthogonalité des vecteurs deux à deux en un produit scalaire nul (*conversion de registres*). Un *choix de méthode* est à effectuer. Il est possible de reconnaître que les deux équations écrites décrivent chacune un plan (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Puisque les vecteurs normaux ne sont pas colinéaires, les

plans sont sécants suivant une droite (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *changement de cadres*). Une autre méthode consiste à résoudre le système composé des deux équations à trois inconnues (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Un ensemble de solutions de ce système est écrit (*conversion de registres*). La droite est alors reconnue à partir de cet ensemble de solutions (*reconnaissance des modalités d'application*).

►► Dépouillement des copies

Le tableau XIII.1 donne les réponses des 132 étudiants pour chaque sous-question. L'abréviation « JNCP » est utilisée pour la réponse « Je ne connais pas la réponse ». Nous mettons en gras les réponses correctes.

Questions	Droite	Plan	JNCP
1	108	**20**	4
2	100	**23**	9
3	**50**	60	22
4	**72**	52	8
5	23	**96**	13
6	38	**72**	22
7	**43**	60	29

TABLE XIII.1 – Réponses des étudiants à la première question.

La majorité des étudiants ($> 75\%$ des étudiants) pense que les équations données aux points 1 et 2 décrivent une droite. Ainsi, ils semblent rencontrer des difficultés avec les équations incomplètes de plans dans l'espace. Celles-ci sont souvent repérées chez les étudiants de BAB1 comme nous l'avons montré dans le chapitre II. Nous constatons aussi que 8 étudiants modifient leur réponse entre le point 1 et le point 2. Six d'entre eux pensent que l'équation $2x+y=3$ décrit une droite alors que l'équation $x=1$ décrit un plan. Puisque nous n'avons pas demandé de justification pour ces questions, il est difficile de comprendre ce changement de réponse. Il est possible qu'un parallèle soit effectué par les étudiants entre la première équation et la forme générale des équations de droites dans le plan $ax+by=c$. Celui-ci ne semble pas avoir lieu lorsque la forme de l'équation donnée est moins proche de cette formule générale.

La plupart des étudiants ont reconnu les objets géométriques à partir du point de vue paramétrique (environ 72% pour la droite et 54% pour le plan). Il est possible que la reconnaissance des objets à partir de ce point de vue soit maîtrisée par les étudiants.

Le nombre de réponses « Je ne connais pas la réponse » augmente fortement lorsque des adaptations des connaissances sont à réaliser et lorsqu'une justification est attendue. Nous ne prenons pas en compte ces copies pour les sous-questions 3, 6 et 7. De plus, certains étudiants ont correctement répondu mais n'ont pas justifié leur réponse. Nous ne les prenons donc pas en compte. Le tableau XIII.2 indique le nombre d'étudiants ayant justifié leur réponse.

Questions	Droite	Plan	Total
3	**46**	49	95
6	27	**65**	92
7	**36**	47	83

TABLE XIII.2 – Nombre d'étudiants ayant justifié leurs réponses à la première question.

Nous analysons les justifications apportées par les étudiants pour ces trois sous-questions en illustrant nos propos avec des exemples de leurs productions.

La sous-question 3

Une conception erronée présente chez la plupart des étudiants consiste à penser que le nombre d'inconnues dans une équation cartésienne détermine l'objet géométrique décrit. Pour eux, si les trois inconnues x, y et z sont présentes alors l'objet décrit est un plan. Dans le cas contraire, l'objet décrit est une droite. Nous retrouvons cette justification pour expliquer que l'équation $2x+3y+4z=2$ est un plan chez 31 étudiants (32% des étudiants ayant justifié). Une difficulté liée aux équations incomplètes de plans apparaît pour cette sous-question. La figure XIII.1 illustre le genre de justification donnée.

> Quand il y a 3 variables on parle alors de plan car nous avons 3 composantes (x,y,z).

FIGURE XIII.1 – Réponse de l'étudiant E_2 à la sous-question 3.

Certains étudiants ne tiennent pas compte du système à résoudre. D'ailleurs, parmi les 31 étudiants cités précédemment il y en a 14 qui commettent aussi cette erreur. Il y a ici une difficulté à comprendre que la résolution d'un système de deux équations revient à déterminer les intersections éventuelles entre deux objets géométriques. Cette erreur est commise par 24 étudiants (soit 25% des étudiants ayant justifié). La figure XIII.2 illustre ce fait. L'étudiant y explique que la première équation du système décrit un plan et ne tient pas compte de l'équation $x=1$. Il répond alors que le système décrit un plan.

> Le plan comporte 3 composantes, selon x, y et z.
> $2x+3y+4z=2$ est une équation cartésienne de plan.

FIGURE XIII.2 – Réponse de l'étudiant E_{83} à la sous-question 3.

Une autre justification utilisée par 10 étudiants (10% des étudiants ayant justifié) consiste à dire que les deux droites décrites par le système d'équations définissent un plan. La reconnaissance des objets décrits par les deux équations du système ne semble pas du tout développée par ces étudiants. De plus, ils semblent faire l'union des deux objets au lieu de prendre leur intersection. Il y a donc, selon nous, des difficultés associées à la notion de système d'équations mais aussi liées aux notions ensemblistes. La figure XIII.3 illustre une justification de ce type.

C'est un système où nous avons deux droite qui est impliqué, on regroupe alors c'est deux droites dans un plan.

FIGURE XIII.3 – Réponse de l'étudiant E_{53} à la sous-question 3.

Il y a 28 étudiants qui ont répondu et justifié correctement (29% des étudiants ayant justifié). Deux stratégies apparaissent : résolution algébrique du système et reconnaissance des objets. 15 étudiants ont choisi de résoudre algébriquement le système donné. Ils déduisent que l'objet décrit est une droite à partir d'une équation cartésienne. La figure XIII.4 illustre cette méthode. Les autres étudiants ont bien reconnu que les équations données décrivent chacune un plan et mobilise bien une connaissance ancienne de géométrie synthétique. La figure XIII.5 illustre cette méthode. Cette dernière semble engendrer moins de problèmes que la première. En effet, certains étudiants se lancent dans la résolution algébrique sans trop de difficultés mais ne parviennent pas à reconnaître l'objet décrit par les solutions du système comme dans la figure XIII.6.

$$\begin{cases} 2x+3y+4z=2 \\ x=1 \end{cases}$$
$$3y+4z=0$$
$$3y=-4z$$

Equation d'une droite dans l'espace où le x est fixé à 1.

FIGURE XIII.4 – Réponse de l'étudiant E_{47} à la sous-question 3.

Il s'agit de l'intersection de deux plans dont l'un est d'équation $2x+3y+4z=2$ et l'autre d'équation $x=1$. L'intersection de deux plans est une droite.

FIGURE XIII.5 – Réponse de l'étudiant E_3 à la sous-question 3.

$$\begin{cases} 2x+3y+4z=2 \\ x=1 \end{cases}$$
$$3y+4z=0$$

C'est un plan.

FIGURE XIII.6 – Réponse de l'étudiant E_{119} à la sous-question 3.

La sous-question 6

La reconnaissance des objets décrits par les deux équations cartésiennes du système ne semble pas amener de difficultés à 51 étudiants (55% des étudiants ayant justifié). 24 d'entre eux la justifient comme à la sous-question 3 par la présence de trois variables.

Ils ne justifient pas pourquoi le système décrit bien un plan. Il est donc possible qu'ils décrivent seulement une équation et non le système dans son entièreté. Parmi ces 51 étudiants, 8 n'ont pas constaté que les deux équations sont équivalentes. De ce fait, ces étudiants ont répondu que l'objet décrit par le système d'équations est une droite et ils le justifient par le fait qu'il s'agit de l'intersection de deux plans. Ces étudiants ne semblent donc pas se questionner sur la position relative des plans et considèrent immédiatement qu'ils sont sécants. Cela est illustré à la figure XIII.7. 15 étudiants ont justifié que les deux plans sont confondus comme cela est illustré à la figure XIII.8.

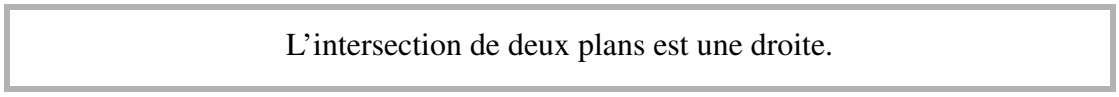


FIGURE XIII.7 – Réponse de l'étudiant E_{10} à la sous-question 6.

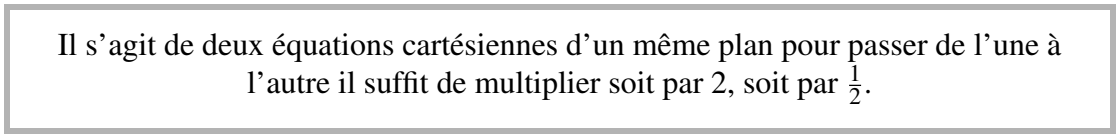


FIGURE XIII.8 – Réponse de l'étudiant E_3 à la sous-question 6.

Pour cette sous-question, aucune résolution algébrique n'a été proposée pour justifier la réponse fournie. Il est possible que cette méthode soit privilégiée par les étudiants lorsque les calculs sont simples et immédiats comme à la sous-question 3.

Parmi les étudiants ayant choisi la réponse « Plan », 10 ont justifié que les équations décrivent chacune une droite et que deux droites définissent un plan (soit 11% des étudiants ayant justifié). Il s'agit de la même conception erronée que celle mentionnée à la sous-question 3. 17 étudiants ont justifié qu'il s'agissait de deux droites confondues (18% des étudiants ayant justifié). Un extrait d'une copie est proposé à la figure XIII.9. Chez ces étudiants, la reconnaissance des objets ne semble pas maîtrisée.

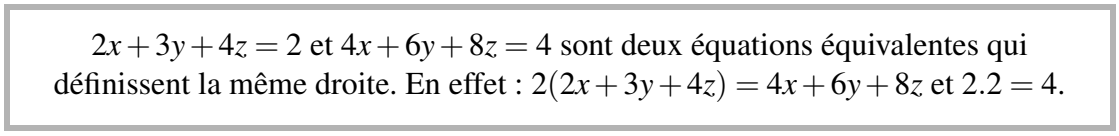


FIGURE XIII.9 – Réponse de l'étudiant E_{16} à la sous-question 6.

La sous-question 7

La principale difficulté rencontrée par les étudiants est de déterminer la nature des objets qu'ils manipulent. C'est une difficulté que nous avons repérée dans le chapitre II. Parmi les 83 étudiants qui ont justifié leur choix, 14 pensent que les triplets donnés représentent des coordonnées d'un point et non des composantes d'un vecteur (17% des étudiants ayant justifié). Certains d'entre eux ont justifié que l'ensemble décrit une droite car les deux points donnés la déterminent. Cela est illustré par l'extrait donné à la figure XIII.10. Ces étudiants ne tiennent absolument pas compte de la condition d'orthogonalité.

Comme (a,b,c) est orthogonal à 2 points, cela donne une droite car il passe par deux points.

FIGURE XIII.10 – Réponse de l'étudiant E_{50} à la sous-question 7.

Tout comme pour les autres sous-questions, il y a 16 étudiants (soit 19% des étudiants ayant justifié) qui justifient que l'objet décrit par cet ensemble est un plan car nous cherchons des triplets. La figure XIII.11 illustre cette justification. Ces étudiants semblent penser que les seuls objets de l'espace sont les plans.

Nous retrouvons ici aussi trois composantes donc nous sommes dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^3$ est un plan.

FIGURE XIII.11 – Réponse de l'étudiant E_2 à la sous-question 7.

La plupart des étudiants ne parviennent pas à reconnaître l'objet décrit par cet ensemble. Seuls 8 étudiants (10% des étudiants ayant justifié) reconnaissent l'objet décrit et le justifie correctement. Certains d'entre eux ont directement dit que l'objet décrit est une droite car elle représente l'intersection de deux plans. Ils ne donnent pas plus de détails. 4 étudiants (5% des étudiants ayant justifié) ont traduit la condition d'orthogonalité en un produit scalaire nul. Ils ont donc écrit un système de deux équations à trois inconnues mais ne l'ont pas résolu. Ils ont reconnu les objets à partir des équations données. Cela est illustré à la figure XIII.12.

Cela équivaut à $\begin{cases} a-b+c=0 \\ a+2b+c=0 \end{cases}$ par produit scalaire. Il s'agit donc de l'intersection de deux plans, donc une droite.

FIGURE XIII.12 – Réponse de l'étudiant E_{42} à la sous-question 7.

▶▶ Conclusion

Notre analyse *a priori* a mis en évidence les adaptations des connaissances à réaliser pour chaque sous-question. Nous pouvons maintenant revenir sur les adaptations qui sont potentiellement réalisées par les étudiants et sur celles qui amènent des difficultés.

La reconnaissance des objets géométriques à partir des équations paramétriques ne semble pas amener de difficultés chez la majorité des étudiants (voir sous-questions 4 et 5) contrairement au point de vue cartésien. En effet, les réponses données pour les sous-questions 1 et 2 laissent penser qu'elle n'est pas développée pour les équations cartésiennes incomplètes de plans. Il semble néanmoins qu'ils parviennent à reconnaître les plans lorsqu'ils sont décrits par une équation où les trois variables sont explicites (voir

sous-question 3). Les justifications apportées pour les sous-questions 3 et 6 nous informent sur le raisonnement des étudiants et les adaptations qu'ils ont réalisées. Les étudiants mobilisent effectivement leurs connaissances anciennes en géométrie analytique, géométrie vectorielle et géométrie synthétique. Toutefois, les connaissances sur les systèmes d'équations ne semblent pas être disponibles chez 32 étudiants. En effet, ils ne considèrent pas le système dans son entièreté et ne raisonnent que sur une des équations du système. Nous avons également montré qu'ils considèrent qu'un système permet de déterminer l'union de deux objets et non leur intersection. La mise en parallèle des sous-questions 3 et 6 met en évidence que la stratégie choisie par les étudiants pour justifier leur raisonnement varie. La résolution algébrique des systèmes apparaît plus souvent pour la sous-question 3 que la 6. À aucun moment, un ensemble de solutions de ces systèmes n'est donné. Il est donc possible que la conversion entre le registre algébrique et le registre ensembliste amène quelques difficultés chez les étudiants. Ils travaillent donc essentiellement dans le registre de la langue naturelle et le registre algébrique. Nous avons également montré que la position relative de deux plans est plus souvent justifiée lorsque les plans ne sont pas sécants. Ainsi, la principale difficulté rencontrée pour les équations cartésiennes est liée à la reconnaissance des modalités d'application des équations dans l'espace.

La reconnaissance des objets à partir d'un ensemble semble être très problématique (voir sous-question 7). Un premier facteur permettant de l'expliquer est que le nombre d'étudiants qui ne répondent pas à cette question est le plus élevé. Nous en déduisons que l'organisation du raisonnement pour cette question est difficile à réaliser pour eux. Cette hypothèse est validée par notre analyse des justifications apportées. En effet, très peu d'étudiants parviennent à traduire la relation d'orthogonalité entre deux vecteurs en un produit scalaire nul. Il est possible que la conversion entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique amène des difficultés chez les étudiants. Il se peut également que leurs connaissances de géométrie vectorielle sur l'orthogonalité ne soient pas disponibles. Ceux qui écrivent le système de deux équations à trois inconnues ne le résolvent pas mais déterminent immédiatement que les équations représentent deux plans sécants. Ainsi, un nombre très faible d'étudiants réalisent des conversions entre le registre algébrique et le registre de la langue naturelle, mobilisent leur connaissances anciennes et déterminent que l'ensemble décrit est une droite.

Les résultats à cette première question sont, selon nous, conformes à ce que nous attendions au vu de notre étude de relief sur les notions de droites et de plans dans l'espace et de notre étude de terrain (cf. parties 1 et 2).

2.2 Question 2

Soit l'ensemble $E = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (a,b,c) \text{ est orthogonal à } (1,-1,1)\right\}$. Déterminez parmi les trois figures suivantes, quel est l'objet décrit par l'ensemble E. Justifiez ensuite votre réponse.

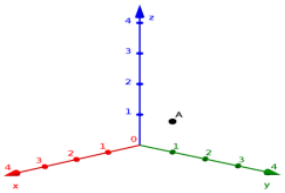


FIGURE 1

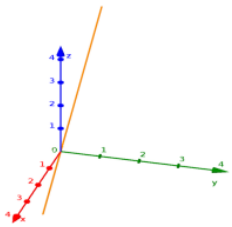


FIGURE 2

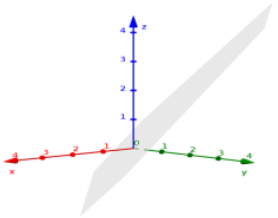


FIGURE 3

Au vu des résultats de nos diverses analyses de la partie 2, il est possible que ce genre de questions n'ait pas été abordé dans l'enseignement secondaire par les étudiants de BAB1. L'orthogonalité de deux vecteurs a été étudiée par les étudiants et les notions ensemblistes ont été un peu travaillées depuis le début de l'enseignement universitaire. Cette tâche relève donc du niveau disponible de mise en fonctionnement des connaissances.

▶▶ Solutions

La bonne réponse est la figure 3. Plusieurs méthodes sont possibles pour justifier qu'il s'agit bien d'un plan.

Première méthode

$$E = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (a,b,c)\cdot(1,-1,1) = 0\right\} = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a-b+c = 0\right\}.$$

La reconnaissance du plan peut se faire à cette étape à partir de l'équation cartésienne $a-b+c=0$.

Il est possible aussi que cet ensemble soit écrit comme $\left\{(b-c,b,c) \;\middle|\; b,c \in \mathbb{R}\right\}$. La reconnaissance du plan se fait alors ici à partir d'un ensemble de points. Il est possible d'écrire une équation paramétrique du plan et de reconnaître le plan à partir de celle-ci.

Deuxième méthode

Le vecteur $(1,1,0)$ est orthogonal au vecteur $(1,-1,1)$ car $1-1=0$. Nous pouvons rejeter la figure 1. Le vecteur $(2,0,-2)$ est orthogonal au vecteur $(1,-1,1)$ car $2-2=0$. Puisque les vecteurs $(1,1,0)$ et $(2,0,-2)$ ne sont pas colinéaires, nous pouvons éliminer la figure 2. Ainsi, cet ensemble est représenté par la figure 3.

►► Analyse *a priori*

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie vectorielle.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre ensembliste, registre de la langue naturelle, registre graphique.

Points de vue

Point de vue cartésien, point de vue paramétrique.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : équations paramétriques et cartésiennes de plans, produit scalaire, vecteur, colinéarité, orthogonalité.
- Connaissances en cours d'acquisition : notions et notations ensemblistes.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Il s'agit de reconnaître l'objet décrit par un ensemble et de l'associer au graphique correspondant. Plusieurs méthodes sont possibles (*existence de choix*). L'*organisation du raisonnement* y est à chaque fois découpée en plusieurs étapes. Pour la première méthode, un travail dans le registre ensembliste est effectué (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Il s'agit de traduire l'orthogonalité des vecteurs en un produit scalaire nul (*conversion de registres*, *mise en jeu de connaissances anciennes en géométrie vectorielle*). La reconnaissance du plan peut se faire à partir de l'équation cartésienne ainsi obtenue (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *reconnaissance des modalités d'application*). Des *traitements dans le registre ensembliste* peuvent être également ajoutés. Dans ce cas, la reconnaissance du plan se fait à partir du point de vue paramétrique (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *conversion de registres*).

Pour la deuxième méthode, le raisonnement se fait par élimination des cas. Il s'agit de traduire l'orthogonalité des vecteurs en un produit scalaire nul (*conversion de registres*, *mise en jeu de connaissances anciennes en géométrie vectorielle*), de se donner des triplets vérifiant cette égalité (*traitements dans le registre algébrique*) et de voir que les vecteurs trouvés ne sont pas colinéaires (*mise en jeu de connaissances anciennes en géométrie vectorielle*). Puisque deux directions différentes sont données, l'ensemble décrit un plan.

►► Dépouillement des copies

Pour cette question, il y a 14 abstentions. Le tableau XIII.3 donne les réponses fournies par 118 étudiants. Nous mettons en gras la réponse correcte. Nous précisons également le nombre d'étudiants qui ont justifié leur réponse.

Nb d'étudiants	Figure 1	Figure 2	Figure 3	Total
qui ont répondu	11	36	**71**	118
qui ont justifié	8	24	**51**	83

TABLE XIII.3 – Réponses des étudiants à la deuxième question.

La majorité des étudiants a correctement répondu à la question. Toutefois, la plupart des justifications sont incorrectes. Nous retrouvons par exemple chez 12 étudiants (14% des étudiants ayant justifié) cette idée qu'un ensemble de triplets ne peut déterminer qu'un plan. Nous repérons également, tout comme à la première question, une confusion chez 12 autres étudiants entre les coordonnées d'un point et les composantes d'un vecteur. De plus, nous relevons ici aussi une confusion chez 7 étudiants (8% des étudiants ayant justifié) entre les vecteurs directeurs et les vecteurs normaux comme cela est illustré à la figure XIII.13. Cette conception erronée peut être liée au passage du plan à l'espace. En effet, la justification fournie est correcte dans le plan $\mathbb{R}^2$ mais fausse dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

L'ensemble des triplets (a,b,c) est l'ensemble des vecteurs normaux à $(1,-1,1)$.
Il est défini par 1 vecteur normal non-nul donc c'est une droite.

FIGURE XIII.13 – Réponse de l'étudiant E_{31} à la question 2.

Nous avons relevé des justifications correctes auxquelles nous ne nous attendions pas. 7 étudiants (8% des étudiants ayant justifié) expliquent qu'une infinité de droites sont orthogonales au vecteur donné et celles-ci forment donc un plan. Cela est illustré par l'extrait à la figure XIII.14. Bien que cette justification soit correcte, nous n'avons aucun élément permettant de déterminer leur raisonnement. La figure XIII.15 donne un extrait de la copie d'un étudiant qui exprime cette idée un peu différemment des autres.

Le vecteur $(1,-1,1)$ doit être un vecteur normal d'un plan pour que toutes les droites dans ce plan soient orthogonales à $(1,-1,1)$.

FIGURE XIII.14 – Réponse de l'étudiant E_{41} à la question 2.

Le vecteur (a,b,c) doit former un angle de 90° avec le vecteur. Toute direction possible tant que l'angle est de 90°. Donc plan.

FIGURE XIII.15 – Réponse de l'étudiant E_{118} à la question 2.

Parmi les justifications correctes, 4 étudiants (5% des étudiants ayant justifié) ont traduit la condition d'orthogonalité en un produit scalaire nul et identifié l'objet décrit par l'équation cartésienne ainsi obtenue (voir figure XIII.16). 8 ont justifié que l'objet

décrit est un plan car tous ses vecteurs directeurs sont orthogonaux à un de ses vecteurs normaux (cf. figure XIII.17). Ces derniers semblent connaître la description du plan par un ensemble.

Par définition du produit scalaire de deux vecteurs :
$(a,b,c)\cdot(1,-1,1) = a.1+b.(-1)+c.1 = a-b+c = 0$.
E est l'ensemble des triplets orthogonaux au vecteur $(1,-1,1)$ tels que $a-b+c=0$. C'est un plan.

FIGURE XIII.16 – Réponse de l'étudiant E_{82} à la question 2.

car un vecteur est orthogonal à tous vecteur directeur d'un plan. Ce vecteur est un vecteur normal du plan.

FIGURE XIII.17 – Réponse de l'étudiant E_{57} à la question 2.

Les étudiants qui n'ont pas répondu correctement donnent des justifications variées. Certains choisissent des valeurs particulières pour (a,b,c) et pensent que l'ensemble décrit un point. Ces étudiants rencontrent des difficultés avec les notions et les notations ensemblistes. D'autres étudiants considèrent que l'ensemble décrit tous les points d'une droite dont un vecteur directeur est $(1,-1,1)$. D'autres encore pensent que les vecteurs (a,b,c) et $(1,-1,1)$ représentent des plans et donc que l'ensemble décrit la droite d'intersection des deux plans. Ces étudiants rencontrent beaucoup de difficultés concernant la nature des objets qu'ils manipulent.

►► Conclusion

Nous pouvons maintenant déterminer les adaptations qui ont été réalisées par les étudiants lors de la résolution de cette question.

Tout d'abord, plus d'un tiers des étudiants ne parviennent pas à organiser leur raisonnement pour répondre à la question et justifier leur choix. Cela peut être lié à un travail inhabituel ou inadéquat dans le registre ensembliste. La reconnaissance des objets à partir d'ensembles ne semble pas du tout développée chez les étudiants. Ce résultat ne nous étonne pas puisque la théorie des ensembles n'était pas dans les programmes scolaires qu'ils ont suivis.

Ensuite, la majorité des étudiants qui justifient leur réponse (erronée ou non) rencontre des difficultés au niveau de la reconnaissance des modalités d'application. En effet, ils utilisent des résultats valides dans le plan mais pas dans l'espace ou ne manipulent pas les bons objets. Ils mobilisent donc bien des connaissances anciennes sans tenir compte des éventuelles ruptures lors du changement de la dimension de l'espace.

Finalement, seuls 20 étudiants ont répondu et justifié correctement. Ces étudiants ont réussi à organiser leur raisonnement, à reconnaître les modalités d'application, à mobiliser leurs connaissances anciennes et en cours d'acquisition sur les ensembles

et à effectuer une conversion entre le registre ensembliste et le registre de la langue naturelle. Selon nous, ils sont capables de reconnaître l'objet décrit par un ensemble. Peu d'étudiants ont traduit l'orthogonalité des vecteurs en un produit scalaire nul. Ces derniers ont effectué une conversion entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique. Ils ont également pu reconnaître l'objet décrit par cette équation.

Ainsi, la reconnaissance des objets à partir d'ensembles n'est pas développée par la plupart des étudiants.

3 Questionnaire auprès des élèves du secondaire

Dans ce questionnaire, les deux premières questions sont identiques à celles posées pour les étudiants de BAB1. Deux autres questions ont été ajoutées pour tester si une certaine flexibilité a été développée par les élèves à la suite de notre enseignement. En particulier, nous regardons l'articulation des points de vue paramétrique et cartésien.

3.1 Question 1

▶▶ Analyse *a priori*

L'analyse *a priori* de cette question se réalise avec comme référence l'enseignement que nous avons proposé. Cette fois-ci, les équations de droites et de plans ainsi que les ensembles sont des connaissances en cours d'acquisition pour les élèves. Cette analyse ne diffère pas beaucoup de celle réalisée précédemment.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : colinéarité, produit scalaire, vecteur, positions relatives de deux plans, résolution de systèmes, orthogonalité.
- Connaissances en cours d'acquisition : équations paramétriques et cartésiennes de droites et de plans dans l'espace, notions et notations ensemblistes.

▶▶ Dépouillement des copies

Le tableau XIII.4 fournit pour chaque sous-question les réponses des 7 élèves. L'abréviation « JNCP » est utilisée pour la réponse « Je ne connais pas la réponse ». Nous mettons en gras les réponses correctes.

Questions	Droite	Plan	JNCP
1	4	**3**	0
2	2	**4**	1
3	**2**	3	2
4	**6**	1	0
5	0	**7**	0
6	1	**4**	2
7	**1**	3	3

TABLE XIII.4 – Réponses des élèves à la première question.

Pour la première sous-question, les élèves sont partagés entre les réponses « Plan » et « Droite ». La différence entre ces deux choix n'est pas très significative. Toutefois, la majorité des élèves rencontre encore des difficultés à reconnaître les plans à partir d'équations incomplètes. Ces difficultés semblent s'atténuer lorsque l'équation n'est pas de la forme $ax+by=c$. En effet, la majorité des élèves a correctement répondu à la deuxième sous-question. La reconnaissance des objets décrits par des équations paramétriques semble quant à elle maîtrisée par la majorité des élèves, et ce, pour les droites et les plans comme en témoignent les résultats des sous-questions 4 et 5.

Nous analysons maintenant les sous-questions 3, 6 et 7 et en particulier les justifications associées. Ici aussi, nous constatons que le nombre de réponses « Je ne connais pas la réponse » augmente lorsque des adaptations sont à réaliser et lorsqu'une justification doit être produite.

La sous-question 3

La majorité des élèves a répondu que le système décrit un plan. Les justifications apportées par ces élèves sont données aux figures XIII.18, XIII.19 et XIII.20.

> cela va nous donner un plan car nous sommes dans un système avec une équation cartésienne avec un inconnu qui est fixe. Donc nous avons une condition sur notre système. Ce qui va nous donner un plan.

FIGURE XIII.18 – Réponse de l'élève E_1 à la sous-question 3.

> Il s'agit de l'équation cartésienne d'un plan car elle est de type $ax+by+cz=d$ et x est fixé à 1 donc le plan sera parallèle à Oyz.

FIGURE XIII.19 – Réponse de l'élève E_2 à la sous-question 3.

> car c'est un plan où le x est invariable et tjr $=1$ et $y,z\in\mathbb{R}$.

FIGURE XIII.20 – Réponse de l'élève E_6 à la sous-question 3.

Les élèves apportent principalement des justifications qui peuvent être correctes pour des ensembles de points. En effet, l'ensemble $\{(1,y,z)\mid y,z\in\mathbb{R}\}$ décrit bien un plan parallèle à Oyz. Nous avons souvent justifié cela en classe par le fait que l'abscisse est fixée et que l'ordonnée et la cote peuvent varier. Il se peut donc que le travail spécifique mené dans notre enseignement sur les ensembles de points n'aide pas les élèves à mieux reconnaître les objets décrits par des équations cartésiennes. Nous notons que ces élèves ont bien tenu compte des deux équations données contrairement à la plupart des étudiants.

Parmi les élèves qui ont correctement répondu, seul un élève a justifié son choix (voir figure XIII.21).

Système d'équation : on isole les inconnues, on trouvera (x,y,z) ce qu'il est une droite car $\frac{x-x_A}{x_v}$ et $x_v = 0$.

FIGURE XIII.21 – Réponse de l'élève E4 à la sous-question 3.

Nous pensons que cet élève est capable de donner un système d'équations cartésiennes d'une droite sous forme canonique et qu'il essaie de faire un parallèle avec la forme générale donnée. Cela peut se justifier par le fait qu'il dit que $x_v = 0$ c'est-à-dire que la première composante du vecteur directeur de la droite est nulle. Toutefois, il ne parvient à donner ni les autres composantes du vecteur directeur, ni la forme canonique du système.

Ainsi, nous considérons que tous les élèves ont échoué à cette question. En effet, seuls deux élèves ont correctement répondu et ils ne justifient qu'en partie ou pas du tout leur choix. Nous pensons que ce n'est pas la reconnaissance des objets à partir des équations qui fait défaut aux élèves mais plutôt la prise en compte de toutes les équations du système. Bien que cela ait fait l'objet d'un travail important dans notre activité d'introduction, il semble difficile pour les élèves d'associer à ce système d'équations l'ensemble de triplets correspondant. Cela peut s'expliquer par le fait que cette conversion entre le registre algébrique et le registre ensembliste a souvent été prise en charge par l'enseignant à cause notamment du caractère nouveau de celle-ci et des difficultés rencontrées par les élèves.

La sous-question 6

La sixième sous-question est réussie par la majorité des élèves. Les justifications apportées sont données aux figures XIII.22, XIII.23, XIII.24 et XIII.25.

$\overrightarrow{v_n}(1)(2,3,4)$
$\overrightarrow{v_n}(2)(4,6,8)$
$\exists k \in \mathbb{R}_0, (2,3,4) = k(4,6,8)$
$k = \frac{1}{2}$
plan parallèle confondu

FIGURE XIII.22 – Réponse de l'élève E_2 à la sous-question 6.

α et β sont parallèles confondu car les vecteurs sont colinéaires.
$\exists k \in \mathbb{R}_0, (4,6,8) = k(2,3,4), k = 2.$

FIGURE XIII.23 – Réponse de l'élève E_3 à la sous-question 6.

2 plans $\parallel$ confondus $\rightarrow$ plan.

FIGURE XIII.24 – Réponse de l'élève E_7 à la sous-question 6.

Ces trois élèves ont réussi à reconnaître les plans à partir des équations données mais aussi à déterminer leur position relative. Bien que les élèves E_2 et E_3 montrent que les vecteurs normaux des plans sont colinéaires, aucun élève ne justifie que les plans sont effectivement bien confondus et non distincts. Les connaissances des élèves en géométries vectorielle, synthétique et analytique ont bien été mobilisées.

À la figure XIII.25, l'élève reconnait bien l'objet décrit par l'équation cartésienne donnée mais ne parle pas de l'équivalence des deux équations. Il est donc difficile de dire si cet élève a bien considéré le système dans son entièreté.

Système d'équation : déterminer les inconnues pour vérifier l'égalité.
$2x+3y+4z=2 \Rightarrow$ eq. cartésienne d'un plan

FIGURE XIII.25 – Réponse de l'élève E_4 à la sous-question 6.

Un élève a répondu que le système décrit une droite. Celui-ci a bien reconnu les objets décrits par une équation mais n'a pas constaté que les équations sont équivalentes comme cela est illustré à la figure XIII.26.

Cela va donner une droite car on nous donne 2 équations cartésiennes et dans un système comme cela, ça va nous donner l'intersection de 2 plans donc une droite.

FIGURE XIII.26 – Réponse de l'élève E_1 à la sous-question 6.

Un élève a répondu qu'il ne pouvait pas répondre à la question. Pourtant, il a bien reconnu que les équations décrivent un plan et qu'elles sont équivalentes. Toutefois, à l'inverse des élèves précédents, il ne considère pas que les plans peuvent être confondus. Un manque de connaissances anciennes sur les positions relatives de deux plans peut expliquer cette erreur. La figure XIII.27 donne un extrait de la copie de cet élève.

équations cartésiennes du plan qui sont colinéaires. Donc pas d'intersection entre ces 2 plans.

FIGURE XIII.27 – Réponse de l'élève E_5 à la sous-question 6.

Globalement, cette sous-question a été bien réussie. La reconnaissance des objets à partir des équations ne semble pas du tout problématique pour les élèves. Par contre, c'est la mobilisation de leurs connaissances antérieures qui peut faire défaut telles que la colinéarité ou les positions relatives de deux plans.

La sous-question 7

La sous-question 7 est très mal réussie. Nous repérons non seulement une difficulté à organiser leur raisonnement à partir de cet ensemble de points mais aussi à traiter le registre ensembliste. Les figures XIII.28 et XIII.29 mettent en évidence celles-ci pour des élèves qui ont répondu que l'ensemble décrit un plan.

FIGURE XIII.28 – Réponse de l'élève E_4 à la sous-question 7.

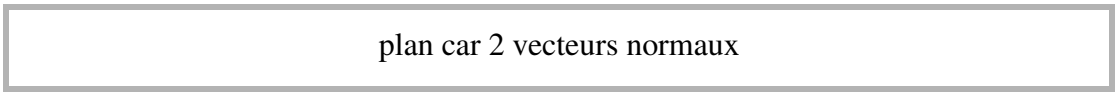


FIGURE XIII.29 – Réponse de l'élève E_5 à la sous-question 7.

L'élève E_4 considère à juste titre que les deux vecteurs donnés sont des vecteurs directeurs d'un plan. Toutefois, il ne prend pas en compte que l'ensemble ne décrit pas ce plan mais plutôt une droite perpendiculaire à ce plan. L'élève E_5 considère quant à lui qu'il faut deux vecteurs normaux pour décrire un plan. Nous pensons qu'il confond les notions de vecteur directeur et de vecteur normal à un plan. Il ne considère pas non plus l'ensemble des vecteurs orthogonaux à ce plan. Il s'agit donc bien chez ces élèves, selon nous, d'une difficulté à raisonner sur un ensemble de vecteurs qui vérifient une condition précise.

L'élève E_1 est le seul à répondre correctement à la question. Sa justification montre cependant un problème qui peut être lié à la notion d'infini ou à la notion de dimension. En effet, il pense qu'il y a moins de points dans une droite que dans un plan comme cela est illustré à la figure XIII.30.

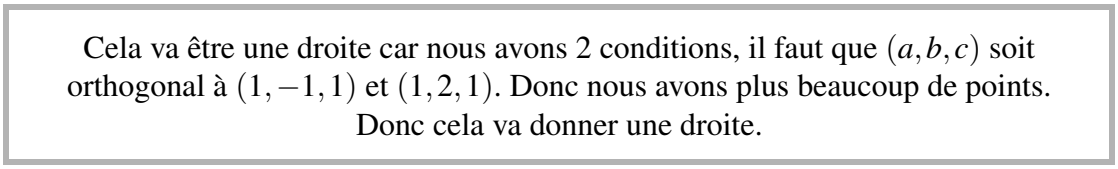


FIGURE XIII.30 – Réponse de l'élève E_1 à la sous-question 7.

L'élève E_3 a réussi à organiser son raisonnement et à traduire l'orthogonalité des vecteurs en un système de deux équations cartésiennes de plans. Par contre, il n'est pas capable de reconnaître l'objet décrit par celui-ci. La figure XIII.31 montre qu'il mobilise bien ses connaissances antérieures en géométrie vectorielle et qu'il reconnait bien que chaque équation décrit un plan. Les positions relatives de deux plans ne semblent pas disponibles chez cet élève ce qui l'amène à répondre qu'il ne connait pas la réponse.

$(a,b,c)\cdot(1,-1,1)=0 \Rightarrow a-b+c=0$
$(a,b,c)\cdot(1,2,1)=0 \Rightarrow a+2b+c=0$
Ce n'est ni un plan, ni une droite car on ne trouve pas la même équation de plan.

FIGURE XIII.31 – Réponse de l'élève E_3 à la sous-question 7.

Ainsi, la reconnaissance des objets à partir d'ensemble de points reste encore très problématique chez les élèves à la suite de notre enseignement.

►► Conclusion

Nous revenons maintenant sur les adaptations des connaissances qui ont été réalisées par les élèves à la suite de notre enseignement.

Au niveau des équations, les analyses menées révèlent que les élèves sont capables de reconnaître les objets décrits par des équations dans le point de vue paramétrique et dans le point vue cartésien. Toutefois, le point de vue cartésien soulève quelques difficultés rencontrées par les élèves. Notre enseignement ne semble pas aider les élèves à surmonter la difficulté liée aux équations incomplètes de plans de la forme $ax+by=c$. Nous avons pourtant passé beaucoup de temps en classe sur ce type d'équations. Nous avons également repéré dans les copies des élèves qu'ils ont tendance à associer à une équation un ensemble de points la vérifiant. C'est donc un point positif de notre expérimentation. Cependant, ils ne considèrent qu'une seule équation à la sous-question 3 et non le système composé de deux équations. Leurs justifications ne sont donc valables que pour l'équation $x=1$ et non pour l'entièreté du système donné. Il est possible que cela soit lié au fait qu'ils n'ont pas eu beaucoup la possibilité d'effectuer en autonomie les conversions entre le registre algébrique et le registre ensembliste. Cette adaptation n'est donc pas réalisée par la majorité des élèves.

Les élèves choisissent une méthode pour justifier leur réponse. Cette méthode n'est jamais une résolution algébrique des systèmes proposés aux sous-questions 3 et 6. Cela semble montrer que la résolution algébrique n'est plus privilégiée par les élèves et qu'un raisonnement plutôt géométrique questionnant les objets décrits par les équations est bien développé. C'est un point positif de notre enseignement. Les justifications proposées sont majoritairement dans le registre de la langue naturelle bien que quelques élèves travaillent plutôt dans le registre algébrique ou le registre du dessin. Dans celles-ci, les connaissances de géométries vectorielle, synthétique et analytique ont bien été mobilisées par la majorité des élèves. Nous avons toutefois constaté que les positions relatives de deux plans ne sont pas disponibles chez un élève.

La reconnaissance des objets à partir d'un ensemble semble encore être très problématique pour la plupart des élèves (voir sous-question 7). Un seul élève parvient à répondre correctement à la question mais la justification apportée montre une conception erronée de la notion d'infini à laquelle nous ne nous attendions pas. En effet, cet élève pense qu'il y a moins de points dans une droite que dans un plan. Nous considérons alors qu'aucun élève n'a réussi cette sous-question. L'organisation du raisonnement et la mobilisation de leurs connaissances en cours d'acquisition (ensembles) ne

sont pas des adaptations réalisées par la majorité des élèves. Seul un élève a effectué une conversion entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique et mobilisé des connaissances anciennes de géométrie vectorielle. Toutefois, il n'est pas parvenu à reconnaître l'objet décrit par le système d'équations certainement à cause d'une absence de connaissances en géométrie synthétique sur la position relative de deux plans.

Les résultats de cette première question mettent en évidence que le premier aspect de l'interprétation géométrique a bien été développé par les élèves pour les équations. Toutefois, le travail sur les ensembles amène des difficultés chez les élèves notamment de par son caractère nouveau, mais aussi parce qu'ils n'ont certainement pas eu beaucoup l'occasion de travailler en autonomie les traitements et les conversions avec le registre ensembliste, comme notre étude des déroulements en classe l'a montré (cf. chapitre XII).

3.2 Question 2

▶▶ Analyse *a priori*

La référence pour cette analyse est l'enseignement que nous avons proposé. L'analyse *a priori* est similaire à celle effectuée précédemment si ce n'est que les connaissances des élèves ne sont pas les mêmes. Nous les précisons.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : orthogonalité, produit scalaire, vecteur, colinéarité.
- Connaissances en cours d'acquisition : équations paramétriques et cartésiennes de plans, notions et notations ensemblistes, description d'un plan par un ensemble de vecteurs.

Adaptations à réaliser

Une autre méthode peut s'ajouter aux deux déjà décrites précédemment. Puisque nous avons vu en classe qu'un plan est un ensemble de vecteurs tous orthogonaux à un vecteur donné, ce résultat peut directement être appliqué ici. Il y a une *mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*.

▶▶ Dépouillement des copies

Le tableau XIII.5 donne les réponses fournies par les 7 élèves. Nous mettons en gras la réponse correcte.

Figure 1	Figure 2	Figure 3
0	3	**4**

TABLE XIII.5 – Réponses des élèves à la deuxième question.

Les élèves se sont répartis entre la figure 2 et la figure 3. Toutefois, la majorité des élèves a répondu correctement. Certains d'entre eux ont traduit l'orthogonalité des

vecteurs en un produit scalaire nul. Ils ont ensuite reconnu le plan à partir d'une équation cartésienne comme à la figure XIII.32.

$$(a,b,c)\cdot(1,-1,1)=0\Rightarrow a-b+c=0.$$

FIGURE XIII.32 – Réponse de l'élève E_3 à la deuxième question.

L'élève E_1 a répondu que l'objet décrit par l'ensemble donné est un plan en fonction du nombre de conditions imposées. Nous repérons encore une fois une conception erronée liée à la notion d'infini ou de dimension dans sa justification. Cela est illustré à la figure XIII.33.

C'est la figure 3 car nous n'avons qu'une condition, il faut que (a,b,c) soit orthogonal à $(1,-1,1)$. Donc nous avons beaucoup de choix de points. Donc cela va donner un plan.

FIGURE XIII.33 – Réponse de l'élève E_1 à la deuxième question.

Parmi les élèves qui ont choisi la figure 2, nous relevons que l'élève E_2 traduit bien l'orthogonalité des vecteurs en un produit scalaire nul mais il ne parvient pas à reconnaître l'objet décrit par cette équation. La figure XIII.34 présente cette copie. Comme cet aspect de l'interprétation géométrique pour les équations cartésiennes ne lui pose pas de problème pour les autres questions, nous pensons qu'une explication peut être liée aux noms des variables. En effet, l'équation à étudier ici est $a-b+c=0$ et non $x-y+z=0$.

Orthogonal : le produit scalaire vaut 0.
$a.1+b.(-1)+c.1=0$
$a-b+c=0$
On ne peut faire le produit scalaire qu'entre deux vecteurs.

FIGURE XIII.34 – Réponse de l'élève E_2 à la deuxième question.

Les autres élèves ont rencontré des difficultés à organiser leur raisonnement et à traiter avec le registre ensembliste. Nous repérons comme pour la première question qu'ils ne considèrent que le vecteur $(1,-1,1)$ et non l'ensemble de tous les vecteurs qui lui sont orthogonaux.

►► Conclusion

La reconnaissance des objets à partir d'ensembles ne semble pas du tout développée chez les élèves. Pourtant, un résultat du cours aurait pu être automatiquement utilisé. Il se peut que les élèves n'aient pas vu que ce résultat pouvait être particularisé à cette

question. Il est également possible que le résultat ne fasse pas partie du bagage mathématique des élèves à cause d'un manque de travail personnel en vue de préparer cette évaluation.

La majorité des élèves a correctement répondu à la question. Ils ont principalement recherché une équation afin de déterminer l'objet qu'elle décrit. Ils ont donc réussi à organiser leur raisonnement, à reconnaître les modalités d'application, à mobiliser leurs connaissances anciennes et en cours d'acquisition sur les ensembles et à effectuer une conversion entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique. Ils ont donc reconnu l'objet décrit à partir d'une équation dans le point de vue cartésien.

3.3 Question 3

> Donnez une équation paramétrique du plan α parallèle au plan $\beta \equiv 2x+3y+4z=8$ et comprenant le point $A(1,4,5)$.

Nous nous basons sur le travail fait en classe lors de notre expérimentation pour donner les solutions possibles et réaliser l'analyse *a priori*.

►► Solutions

Plusieurs méthodes sont possibles.

Première méthode

Puisque le plan α est parallèle au plan β, un vecteur normal de α est colinéaire à un vecteur normal de β. Un vecteur normal de β est $(2,3,4)$. Nous pouvons écrire une équation cartésienne du plan α : $\alpha \equiv 2x+3y+4z=d$.

Puisque le point $A(1,4,5)$ est un point du plan α, nous pouvons déterminer la valeur de d. Nous avons : $2+12+20=d \Leftrightarrow d=34$. Ainsi, $\alpha \equiv 2x+3y+4z=34$.

Nous cherchons une équation paramétrique du plan α. Nous introduisons alors deux paramètres. Posons $x=\lambda$ et $y=\mu$ où λ et μ sont deux paramètres réels. Nous déduisons $z=\frac{34-2\lambda-3\mu}{4}$.

Une équation paramétrique du plan α est (où $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$) :

$$(x,y,z)=\left(0,0,\frac{17}{2}\right)+\lambda\left(1,0,\frac{-1}{2}\right)+\mu\left(0,1,\frac{-3}{4}\right).$$

Deuxième méthode

Puisque le plan α est parallèle au plan β, deux vecteurs directeurs de β sont des vecteurs directeurs de α. Nous devons déterminer deux vecteurs directeur de β. Nous introduisons alors deux paramètres. Posons $x=\lambda$ et $y=\mu$ où λ et μ sont deux paramètres réels. Nous déduisons $z=\frac{8-2\lambda-3\mu}{4}$. Une équation paramétrique du plan β est (où $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$) :

$$(x,y,z)=\left(0,0,2\right)+\lambda\left(1,0,\frac{-1}{2}\right)+\mu\left(0,1,\frac{-3}{4}\right).$$

Ainsi, une équation paramétrique du plan α est (où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$) :

$$(x,y,z) = \left(1,4,5\right) + \lambda\left(1,0,\frac{-1}{2}\right) + \mu\left(0,1,\frac{-3}{4}\right).$$

►► Analyse *a priori*

La question est fermée. Le travail à réaliser ici est relativement proche de ce qui a été fait en classe.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie vectorielle.

Registres d'écriture

Registre de la langue naturelle, registre algébrique.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : parallélisme, colinéarité, vecteur.
- Connaissances en cours d'acquisition : équations cartésiennes et paramétriques de plans, vecteur normal, positions relatives de deux plans.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Il s'agit de déterminer une équation paramétrique d'un plan sachant sa position relative par rapport à un objet décrit dans le point de vue cartésien. Plusieurs méthodes peuvent être envisagées (*existence de choix*). Pour la première méthode, l'*organisation du raisonnement* est découpée en plusieurs étapes. Il s'agit tout d'abord au vu des informations données d'écrire une équation cartésienne du plan α (*reconnaissance des modalités d'application*). Pour ce faire, le parallélisme des deux plans doit être traduit en la colinéarité des vecteurs normaux (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Un vecteur normal du plan β est déterminé (*reconnaissance des modalités d'application*). Un vecteur qui lui est colinéaire doit être choisi (*existence de choix*, *changement de cadres*). Une équation cartésienne avec un terme indépendant générique peut être donnée (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Le point permet de trouver la valeur du terme indépendant (*changement de points de vue au sens de Robert*). Pour obtenir une équation paramétrique du plan α, un *changement de points de vue* doit être effectué.

Pour la deuxième méthode, l'*organisation du raisonnement* est découpée en plusieurs étapes. Il s'agit tout d'abord de traduire le parallélisme des deux plans en termes de colinéarité des vecteurs directeurs (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Pour ce faire, une équation paramétrique du plan β doit être écrite (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Un *changement de points de vue* doit être effectué. Une fois que deux vecteurs directeurs du plan β ont été déterminés (*reconnaissance*

des modalités d'application), deux vecteurs qui leur sont colinéaires doivent être choisis (*existence de choix*, *changement de cadres*). Comme un point du plan α est donné, une équation paramétrique du plan peut être écrite (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*).

▶▶ Dépouillement des copies

La question vaut 4 points et est considérée comme réussie lorsque l'élève a une note supérieure ou égale à 2 sur 4. Les résultats des élèves sont repris dans le tableau XIII.6.

Note	Nombre d'élèves
0	2
1	4
2	1
3	0
4	0

TABLE XIII.6 – Répartition des notes des élèves pour la troisième question.

Le taux de réussite à cette question est de 14%. Nous dépouillons les copies des élèves pour déterminer les adaptations qui sont réalisées de celles qui peuvent amener des difficultés.

Tous les élèves ont choisi une méthode de résolution pour cette question. La première méthode est choisie par 4 élèves. Ils ont tous été capables de traduire le parallélisme des deux plans en termes vectoriels. Ils ont donc bien mobilisé leurs connaissances pour effectuer la conversion entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique. Ils ont également réussi à déterminer un vecteur normal du plan β et donc à reconnaître les modalités d'applications des équations cartésiennes. Le choix d'un vecteur colinéaire au vecteur normal trouvé est bien effectué par 3 élèves sur les 4. L'élève E_7 n'a pas choisi un vecteur en particulier mais a considéré l'ensemble des vecteurs colinéaires au vecteur normal du plan β. Cette adaptation ne lui a pas permis de continuer son raisonnement. Nous illustrons cela avec l'extrait de sa copie à la figure XIII.35.

$$\overrightarrow{v_n}(2,3,4) \perp \alpha.$$
$$2kx + 3ky + 4kz =.$$

FIGURE XIII.35 – Réponse de l'élève E_7 à la troisième question.

L'élève E_2 n'a pas réussi à organiser son raisonnement pour le reste de la tâche. En particulier, il n'est pas parvenu à déterminer ce qu'il pouvait faire pour trouver une équation paramétrique du plan α connaissant un vecteur normal de ce plan. L'élève E_3 a voulu écrire directement une équation paramétrique du plan α en connaissant un point et un vecteur normal du plan. Pour ce faire, il a cherché deux vecteurs orthogonaux au vecteur normal choisi comme la figure XIII.36 le montre.

$$(-2,0,1)\cdot(2,3,4)=0$$
$$(2,3,4)\cdot(a,b,c)=0$$
$$2a+3b+4c=0 \quad \overrightarrow{v_d}(0,0,0)$$
$$\Rightarrow \alpha \equiv (x,y,z)=(1,4,5)+\lambda(0,0,0)+\mu(-2,0,1).$$

FIGURE XIII.36 – Réponse de l'élève E_3 à la troisième question.

Cet élève semble être capable de dire que deux vecteurs directeurs et un point sont nécessaires pour écrire une équation paramétrique d'un plan. Il connait également la relation d'orthogonalité entre les vecteurs directeurs et les vecteurs normaux. Toutefois, il pense que le vecteur nul peut être un vecteur directeur du plan. Une connaissance en cours d'acquisition n'est certainement pas disponible pour lui.

L'élève E_1 a écrit une équation cartésienne valide pour le plan α. Il n'est pas allé plus loin dans la réalisation de la tâche. Il est possible qu'il rencontre des difficultés à passer du point de vue cartésien au point de vue paramétrique. Il se peut également qu'il pense avoir effectivement bien écrit une équation paramétrique du plan α. Nous pensons tout de même que cette dernière possibilité est insensée puisque cet élève a été capable aux trois autres questions de l'évaluation de distinguer les équations cartésiennes des équations paramétriques.

La deuxième méthode possible de résolution a été choisie par 2 élèves. Pour écrire une équation paramétrique du plan β, l'élève E_5 a posé trois variables et a voulu isoler chacune de celles-ci. La figure XIII.37 illustre ses difficultés à passer du point de vue cartésien au point de vue paramétrique.

Posons $x=\lambda$, $y=\mu$ et $z=\delta$.

$$\begin{cases} \lambda = \frac{3\mu+4\delta}{2} \\ \mu = \frac{2\lambda+4\delta}{3} \\ \delta = \frac{2\lambda+3\mu}{4} \end{cases}$$

FIGURE XIII.37 – Réponse de l'élève E_5 à la troisième question.

L'élève E_4 a posé $x=\lambda$ et $z=\mu$. Il a donc bien introduit deux paramètres mais il n'est pas parvenu à écrire le système d'équations paramétriques adéquat comme cela est illustré à la figure XIII.38.

$$\begin{cases} 2x = \lambda \\ 3y = 8 - 2x - 4z \\ 4z = \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\lambda}{2} \\ y = \frac{8-2\lambda-4\mu}{3} \\ z = \frac{\mu}{4} \end{cases}$$

$(x,y,z) = (0,\frac{8}{3},0) + \lambda(\frac{1}{2},\frac{-2}{3},0) + \mu(0,\frac{-4}{3},\frac{1}{4})$ où λ, μ sont des réels.

FIGURE XIII.38 – Réponse de l'élève E_4 à la troisième question.

Cet élève n'écrit pas un système correspondant aux variables qu'il a posées mais plutôt aux variables $2x = \lambda$ et $4z = \mu$. Or, il remplace x et z dans le deuxième système par λ et μ. L'équation paramétrique donnée pour le plan β est donc incorrecte. Nous repérons cependant que cet élève a une démarche globale correcte. En effet, il pose bien deux paramètres, écrit un système dans lequel il vient isoler x, y et z et il est capable de passer du système d'équations à une équation paramétrique. Ainsi, bien qu'il y ait des erreurs algébriques, nous pensons que le changement de points de vue dans le sens cartésien/paramétrique est réalisé par cet élève. Il ne fournit néanmoins aucune équation paramétrique du plan α. Il est possible qu'il ne soit pas capable d'effectuer la conversion entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique permettant de traduire le parallélisme des deux plans.

L'élève E_6 a voulu écrire une équation paramétrique du plan α sans changer de points de vue. La figure XIII.39 illustre sa démarche.

$(x,y,z) = \mu(1,4,5) + \lambda(4x,6y,8z)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x = \mu + \lambda(4x) = 16 \\ y = 4\mu + \lambda(6y) = 16 \\ z = 5\mu + \lambda(8z) = 16 \end{cases}$$

FIGURE XIII.39 – Réponse de l'élève E_6 à la troisième question.

Un vecteur directeur donné par cet élève est $(1,4,5)$. Or, ce sont les coordonnées du point A appartenant au plan. Il semble confondre les vecteurs et les points. De plus, le deuxième vecteur directeur donné n'a aucun sens car il dépend lui aussi de x, y et z. Nous remarquons que $(4,6,8)$ est un vecteur colinéaire au vecteur $(2,3,4)$. Nous pensons qu'il a voulu exprimer qu'il prenait un vecteur colinéaire au vecteur normal du plan β. Cet élève rencontre donc des difficultés à réaliser toutes les adaptations en jeu dans cette tâche. En effet, il ne parvient pas à organiser son raisonnement et à mobiliser ses connaissances anciennes et en cours d'acquisition, ce qui le bloque dans la résolution de l'exercice.

►► Conclusion

Tous les élèves se lancent bien dans la réalisation de la tâche. Toutefois, aucun élève ne parvient à donner une solution complète de cet exercice. Nous avons montré que la majorité des élèves choisit une méthode de résolution valide et mobilise bien

les connaissances anciennes et en cours d'acquisition. La reconnaissance des modalités d'application des équations cartésiennes et paramétriques ne semble pas être problématique pour la plupart d'entre eux.

Nos analyses de copies semblent montrer que la conversion entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique n'amène pas de difficultés chez les élèves (sauf E_6). Il est toutefois difficile de nous prononcer quant au changement de points de vue attendu dans cette question. En effet, 4 élèves sur 7 n'arrivent pas à cette étape du raisonnement. Nous ne pouvons donc pas affirmer qu'ils ne sont pas capables d'articuler les points de vue. Toutefois, ils rencontrent des difficultés à organiser leur raisonnement. Parmi les élèves qui ont changé de points de vue, aucun ne parvient à donner une équation paramétrique valide d'un plan soit parce que la démarche n'est pas acquise, soit par une indisponibilité d'une connaissance nouvelle ou encore par des erreurs de calculs. Il se peut donc que l'articulation des points de vue ne soit pas développée par les élèves à la suite de notre enseignement.

3.4 Question 4

> Déterminez une équation cartésienne du plan α parallèle à la droite $d \equiv \frac{x+1}{2} = y = -2z+1$, perpendiculaire au plan $\beta \equiv x+y+2z=0$ et passant par le point $A(2,3,1)$.

Nous nous basons sur le travail fait en classe lors de notre expérimentation pour donner les solutions possibles et réaliser l'analyse *a priori*.

►► Solutions

Le plan α est parallèle à la droite d. Un vecteur directeur de la droite d est alors un vecteur directeur du plan α. Écrivons le système d'équations cartésiennes de la droite sous la forme canonique. Nous avons :

$$\frac{x-(-1)}{2} = y = \frac{z-\frac{1}{2}}{\frac{-1}{2}}.$$

Un vecteur directeur de la droite d est $(2,1,\frac{-1}{2})$ ou encore $(4,2,-1)$.

Le plan α est perpendiculaire au plan β. Un vecteur normal de β est un vecteur directeur du plan α. Un vecteur normal du plan β est $(1,1,2)$.

Nous avons un point et deux vecteurs directeurs du plan α. Une équation paramétrique du plan α est :

$$(x,y,z) = (2,3,1) + \lambda(4,2,-1) + \mu(1,1,2)$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pour obtenir une équation cartésienne du plan α, nous éliminons les deux paramètres. Nous écrivons un système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 2+4\lambda+\mu \\ y = 3+2\lambda+\mu \\ z = 1-\lambda+2\mu \end{cases}$$

Nous isolons μ dans les deux premières équations. Nous avons :

$$\begin{cases} x-2-4\lambda = \mu \\ y-3-2\lambda = \mu \\ z = 1-\lambda+2\mu \end{cases}$$

Nous pouvons égaler les deux premières équations et isoler λ. Nous obtenons :

$$\begin{cases} x+1-y = 2\lambda \\ y-3-2\lambda = \mu \\ z = 1-\lambda+2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1-y = 2\lambda \\ 2y-4-x = \mu \\ z = 1-\lambda+2\mu \end{cases}$$

En remplaçant dans la troisième équation les valeurs trouvées de λ et μ, nous avons :

$$\begin{aligned} & z = 1-\frac{x+1-y}{2}+4y-8-2x \\ \Leftrightarrow \quad & 2z = 2-x-1-y+8y-16-4x \\ \Leftrightarrow \quad & 5x-9y+2z = -15 \end{aligned}$$

Ainsi, une équation cartésienne de α est $5x-9y+2z=-15$.

▶▶ Analyse *a priori*

L'analyse *a priori* de cette question est similaire à celle de l'exercice 11 que nous avons présentée dans le chapitre XI à la page 378.

▶▶ Dépouillement des copies

La question vaut 4 points et est considérée comme réussie lorsque l'élève a une note supérieure ou égale à 2 sur 4. Les résultats des élèves sont repris dans le tableau XIII.7. L'élève E_6 n'a pas répondu à la question.

Note	Nombre d'élèves
0	1
1	1
2	0
3	4
4	1

TABLE XIII.7 – Répartition des notes des élèves pour la quatrième question.

Le taux de réussite à cette question est de 71%. Nous dépouillons les copies des élèves pour déterminer les adaptations qui sont réalisées de celles qui peuvent amener des difficultés.

La majorité des élèves a réalisé toutes les adaptations attendues pour la réalisation de cette tâche. Le système d'équations cartésiennes de la droite d a été mis sous forme canonique et un vecteur directeur de celle-ci a été déterminé. Un vecteur normal du plan β a également été déterminé. 5 élèves sur 6 ont réussi à organiser leur raisonnement en s'aidant d'un dessin. Une conversion entre les registres de la langue naturelle et du dessin mais aussi entre les registres du dessin et algébrique ont été réalisées correctement. Ces élèves ont tous écrit une équation paramétrique du plan α et ont éliminé les deux paramètres afin d'obtenir une équation cartésienne de celui-ci. Le changement de points de vue dans le sens paramétrique/cartésien semble donc développé par la majorité des élèves. Toutefois, 4 élèves sur 5 ont commis des erreurs de calculs lors de cette articulation. L'équation cartésienne qu'ils fournissent n'est pas une équation cartésienne du plan α.

L'élève E_5 n'a pas réussi à organiser son raisonnement. Bien qu'il ait identifié correctement un vecteur directeur de la droite d et un vecteur normal du plan β, il n'est pas capable de déterminer ce qu'il doit en faire. Comme nous l'avons suggéré en classe, cet élève fait un dessin de la situation. Toutefois, cela ne semble pas l'aider à effectuer la conversion entre le registre de la langue naturelle et le registre algébrique. La figure XIII.40 illustre sa copie.

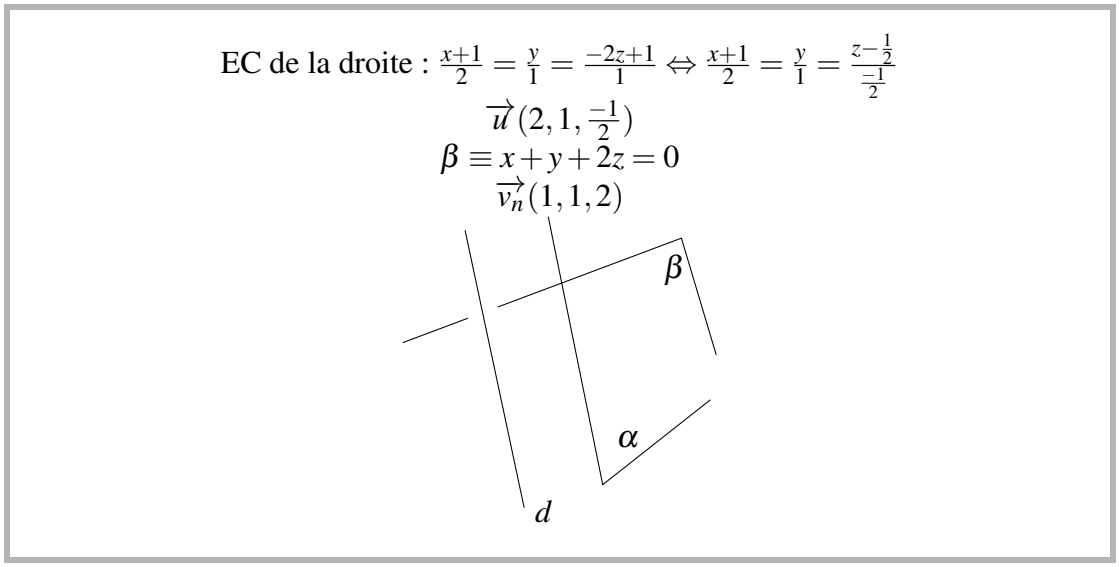


FIGURE XIII.40 – Réponse de l'élève E_5 à la quatrième question.

►► Conclusion

La majorité des élèves se lance bien dans la réalisation de la tâche et propose une équation cartésienne d'un plan. Toutefois, elle n'est correcte que chez un seul élève car ils commettent des erreurs de calculs lors du changement de points de vue. Les

difficultés rencontrées sont, selon nous, liées aux traitements dans le registre algébrique. Le taux de réussite à cette question semble montrer que les élèves font preuve d'une certaine flexibilité entre les registres de la langue naturelle, algébrique et du dessin ainsi qu'entre les points de vue paramétrique et cartésien.

Ce type de tâche a déjà été réalisé en classe lors d'une unique correction collective. Celle-ci avait été improvisée par l'enseignant car les élèves rencontraient des difficultés à organiser leur raisonnement. Nos analyses des copies semblent montrer que la plupart des élèves ont apparemment surmonté cette difficulté à la suite de notre enseignement.

4 Comparaison des résultats

Nous comparons ici les réponses proposées par les étudiants et les élèves aux deux premières questions de l'évaluation. Nous cherchons à mettre en évidence les points communs et les différences entre les deux questionnaires afin de préciser les effets éventuels de notre expérimentation sur la reconnaissance des objets à partir d'équations et d'ensembles.

Le premier aspect de l'interprétation géométrique pour les équations paramétriques semble relativement développé par les étudiants et les élèves. En effet, le taux de réussite aux sous-questions 4 et 5 dans chaque questionnaire est d'au moins 54%.

Dans la première évaluation, la reconnaissance des objets à partir d'équations cartésiennes est très problématique notamment parce que les étudiants pensent qu'il est nécessaire que les trois variables soient présentes dans l'équation pour décrire un plan. Cela ressort particulièrement de nos analyses des copies pour les sous-questions 1, 2 et 3. Dans la seconde évaluation, les élèves semblent rencontrer moins de difficultés à reconnaître un plan à partir d'une équation cartésienne même s'ils pensent encore majoritairement que l'équation $2x+y=3$ est une droite. Ainsi, bien que notre enseignement semble améliorer l'interprétation géométrique des équations chez les élèves, des difficultés demeurent pour les équations dont la forme se rapproche de celle des équations cartésiennes de droites dans le plan.

Le premier aspect de l'interprétation géométrique des objets à partir d'ensembles est très problématique pour les étudiants. La sous-question 7 et la deuxième question montrent qu'ils ont beaucoup de difficultés à organiser leur raisonnement et à déterminer la nature des objets qu'ils manipulent. En particulier, nous avons montré qu'ils ne parviennent pas à traduire l'orthogonalité des vecteurs et confondent même parfois les notions de points et de vecteurs ainsi que les notions de vecteurs directeurs et de vecteurs normaux. Cet aspect de l'interprétation géométrique semble être un peu plus développé par les élèves. En effet, bien qu'ils éprouvent encore des difficultés à organiser leur raisonnement pour la sous-question 7, ils réussissent mieux la deuxième question et parviennent à formuler des justifications valides. De plus, nous ne repérons pas les confusions précédentes chez la plupart des élèves. Ainsi, notre enseignement semble avoir un impact positif sur la reconnaissance des objets à partir d'ensembles. Toutefois, cet aspect de l'interprétation géométrique est encore limité chez eux notamment

parce que le registre ensembliste est relativement nouveau mais aussi parce que l'enseignant l'a souvent pris en charge lors des déroulements. D'autres choix de l'enseignant en classe auraient pu améliorer davantage cet aspect.

5 Inférences sur les apprentissages

Dans le chapitre XII, nous avons partiellement caractérisé les apprentissages des élèves grâce à nos analyses des déroulements en classe. Le dépouillement de leurs copies permet de préciser ce qu'ils sont capables de faire seuls, sans l'aide de l'enseignant, et ainsi d'approcher leurs apprentissages pour le chapitre des droites et des plans dans l'espace.

Un objectif principal de notre enseignement est de développer l'interprétation géométrique des objets chez les élèves. L'analyse des copies montre que la majorité d'entre eux reconnait les objets décrits à partir d'équations paramétriques et cartésiennes. Toutefois, des difficultés persistantes ont été repérées pour les équations incomplètes de plans de la forme $ax + by = c$. De plus, la troisième et la quatrième questions de l'évaluation montrent que les élèves sont capables de décrire un objet à la fois dans le point de vue cartésien et dans le point de vue paramétrique. Ainsi, les élèves interprètent géométriquement les objets dès qu'ils sont décrits par des équations.

L'expérimentation a mis en évidence que les élèves sont capables de reconnaître les objets décrits par des ensembles. Toutefois, lorsque ceux-ci s'éloignent de ceux travaillés en classe des difficultés apparaissent chez les élèves dans la manipulation du registre ensembliste et dans l'organisation de leur raisonnement. Ces constats sont confirmés par notre évaluation. En effet, les élèves ont mieux réussi la deuxième question, plus proche du travail réalisé en classe, que la sous-question 7 pour laquelle deux conditions doivent être traduites. Nous avons repéré dans l'analyse des copies de la sous-question 3 que les élèves veulent décrire l'ensemble des points associés au système d'équations. Or, ils ne tiennent compte que d'une seule des équations du système. De ce fait, la description des objets géométriques par des ensembles est encore problématique pour la plupart des élèves. Cela semble cohérent avec les résultats de notre analyse des déroulements. En effet, nous avons noté que celle-ci est souvent prise en charge par l'enseignant en classe, ce qui a limité le travail individuel des élèves dans ce registre d'écriture. Ainsi, seul le premier aspect de l'interprétation géométrique est dévéloppé par les élèves pour les ensembles.

Un deuxième objectif principal de notre enseignement est de développer une certaine flexibilité chez les élèves entre les cadres, les registres et les points de vue. Notre expérimentation a mis en évidence qu'ils l'ont bien développée mais que celle-ci n'est pas celle attendue. Ce constat se confirme également par le dépouillement des copies des élèves. Nous avons en effet repéré dans l'analyse de la troisième et de la quatrième questions que les élèves sont capables d'effectuer des conversions entre le registre de la langue naturelle, le registre du dessin et le registre algébrique. Cela témoigne donc d'une certaine flexibilité entre les registres. Toutefois, les difficultés repérées avec le registre ensembliste montrent bien qu'elle est moins développée que celle visée dans notre ex-

périmentation. L'articulation des points de vue dans le sens paramétrique/cartésien est bien maîtrisée par la plupart des élèves. Il est difficile de se prononcer de manière semblable pour celle dans le sens cartésien/paramétrique. En effet, la majorité des élèves a été bloquée dans la résolution de la troisième question avant de devoir articuler les points de vue. Cependant, l'analyse des déroulements a bien montré que les élèves sont capables en toute autonomie et sans difficulté majeure de réaliser cette adaptation. La flexibilité entre les deux points de vue semble donc bien développée par les élèves.

6 Bilan

Les analyses didactiques menées dans les parties 1 et 2 nous ont amenée à nous questionner sur la possibilité de proposer un enseignement pour le chapitre des droites et des plans dans l'espace susceptible d'enclencher des activités chez les élèves favorisant leur conceptualisation des notions. Dans cette partie, nous avons présenté un scénario dans lequel un travail sur les traitements internes et l'interprétation géométrique est proposé aux élèves. Nous avons mis en évidence les choix que nous avons effectués en tant que chercheur pour que ce scénario soit conforme aux contraintes institutionnelles et qu'il favorise la conceptualisation visée pour ces notions. Après avoir déterminé les activités attendues des élèves, nous l'avons expérimenté dans une classe de l'enseignement secondaire. L'analyse des déroulements a permis, par comparaison aux activités attendues des élèves, de préciser les activités qu'ils ont potentiellement développées. L'analyse de l'évaluation proposée à la suite de notre enseignement a quant à elle permis d'inférer des éléments sur les apprentissages des élèves.

Nous avons donc montré ici que les objectifs que nous nous sommes fixés ont été globalement atteints. En effet, nos analyses *a posteriori* révèlent que l'interprétation géométrique des objets est bien développée par les élèves pour les équations. Cependant, l'interprétation géométrique des objets à partir d'ensembles n'est pas maîtrisée par les élèves. Nous avons effectivement mis en évidence plusieurs difficultés chez les élèves à organiser leur raisonnement à partir du registre ensembliste et à manipuler les notions et notations de la théorie des ensembles. Ainsi, bien que notre enseignement mette souvent en jeu ce registre d'écriture, son caractère nouveau reste un facteur bloquant pour les élèves. Selon nous, cela témoigne du fait qu'un travail ponctuel sur les notions de théorie des ensembles n'est pas porteur de sens à ce niveau d'enseignement. Il est important que ce travail soit mené plus régulièrement dans le parcours des élèves pour les aider à surmonter leurs difficultés et à développer les dimensions outil et objet de ces notions. Nous avons toutefois montré, grâce à une comparaison entre les résultats des étudiants et des élèves à un même questionnaire, que la reconnaissance des objets à partir des ensembles s'améliore à la suite du travail proposé dans notre expérimentation. Ce résultat semble donc bien valider le fait que les proximités tentées par l'enseignant en classe favorise l'intégration de l'interprétation géométrique des objets chez les élèves.

Nous voulions également développer la flexibilité entre les cadres, les registres et les points de vue chez les élèves. Nos analyses des déroulements et des copies lors de l'évaluation montrent qu'ils ont bien développé une certaine flexibilité entre ces traite-

ments internes mais celle-ci est quelque peu différente de celle que nous visions dans notre scénario. Ainsi, ce résultat semble également valider le fait que les proximités que nous avons tentées en classe favorise le développement d'une certaine flexibilité chez les élèves. Toutefois, les choix spontanés que nous avons faits en classe pour respecter les contraintes horaires et pour rester le plus possible dans la ZPD des élèves peuvent expliquer que la flexibilité développée n'est pas celle attendue. En effet, nous avons souvent pris en charge lors des moments de cours et des corrections collectives les adaptations liées au registre ensembliste. Nous pensons *a posteriori* que les aides apportées réduisent la tâche à l'instant t mais permettent *in fine* à plus d'élèves de développer une certaine flexibilité entre les cadres, les registres et les points de vue. Cela peut se justifier grâce aux résultats de l'évaluation.

En conclusion, nous avons bien proposé un enseignement du chapitre de géométrie analytique dans lequel les activités de traitements internes et d'interprétation géométriques sont possibles. Notre expérimentation a donc bien contribué à l'acquisition de ces notions par les élèves comme en témoignent leurs résultats à l'examen [1] pour cette partie (voir figure XIII.8).

	Note sur 18
E1	16,5
E2	10,5
E3	11
E4	15
E5	9,5
E6	1,5
E7	16,5

TABLE XIII.8 – Notes des élèves pour le chapitre des droites et des plans dans l'espace à l'examen.

1. Celui-ci a été organisé par l'enseignant habituel et les résultats donnés ne sont liés qu'aux questions sur les équations de droites et de plans dans l'espace (sans le calcul de distance). Rappelons que nous n'avons pas accès aux copies des élèves.

Conclusion

Synthèse du travail

Nous nous sommes intéressée dans cette recherche à l'enseignement des notions de droites et de plans dans l'espace en Belgique. Ce questionnement est issu de notre expérience en tant qu'enseignante au sein de l'Université de Mons. En effet, nous constatons depuis plusieurs années des difficultés chez les étudiants de troisième année à associer les objets géométriques à leur description algébrique ou ensembliste. C'est pourquoi, nous avons cherché, dans un premier temps, à mieux comprendre en quoi cette interprétation géométrique des objets est problématique pour eux, d'autant plus que les notions de droites et de plans sont vues dans le secondaire puis reprises dans différents cours à l'université. Dans un second temps, nous avons cherché des pistes et des leviers didactiques à intégrer dans un enseignement de ces notions pouvant favoriser la conceptualisation des apprenants.

Pour atteindre ces objectifs, nous nous sommes intéressée à l'enseignement de la géométrie analytique dans l'espace proposé dans le secondaire supérieur. Il nous a semblé légitime de cibler ce niveau d'enseignement puisque ce chapitre y est abordé pour la première fois. Afin d'analyser cet enseignement et d'en déduire des éléments sur les apprentissages des élèves et sur leurs difficultés, nous avons emprunté des outils théoriques et une méthodologie de recherche pour répondre à nos besoins. De notre point de vue, les apprentissages des élèves dépendent à la fois des contenus mathématiques choisis par l'enseignant, des tâches qu'il leur prescrit mais aussi de sa gestion du scénario en classe. C'est pourquoi nous avons inséré notre questionnement dans le cadre de la Théorie de l'Activité. Nous avons donc cherché à approcher les apprentissages des élèves par le biais de leurs activités, elles-mêmes influencées par les pratiques enseignantes. Pour ce faire, il s'agit tout d'abord de réaliser une analyse *a priori* du scénario envisagé pour en déduire les activités attendues des élèves. Puis, l'analyse des déroulements en classe permet *a posteriori* de reconstruire leurs activités possibles au regard de celles prévues et des interventions de l'enseignant. Cette méthodologie a été suivie dans nos analyses des différents scénarios étudiés.

Dans le but de mieux apprécier les choix de l'enseignant en termes de contenus, nous avons réalisé une étude de relief sur les notions de géométrie analytique dans l'espace. Celle-ci nous a servi de référence dans les analyses didactiques menées. Plusieurs pistes d'enseignement sont issues du croisement des études cognitive, curriculaire, historique et épistémologique. Nous pensons notamment aux jeux de cadres entre la géo-

métrie synthétique et la géométrie analytique, à l'articulation des points de vue paramétique et cartésien ou encore à l'importance de développer l'aspect sémantique des équations. Parmi les spécificités de ces notions, nous avons déterminé qu'il est important que les élèves développent une certaine flexibilité entre les cadres, les registres et les points de vue ainsi qu'une interprétation géométrique des objets à partir d'équations et d'ensembles. L'analyse de plusieurs manuels scolaires pour la Belgique francophone nous a permis de repérer que les activités de traitements internes et d'interprétation géométrique des objets sont finalement peu en jeu. De ce fait, nous nous sommes questionnée sur la possibilité de proposer un scénario à des élèves de l'enseignement secondaire susceptible de déclencher de telles activités, et ainsi de favoriser leur conceptualisation.

Notre étude de terrain a montré que de telles activités sont peu développées par les cinq enseignants filmés. Bien que certains traitements internes soient présents au sein des cours, ils sont rarement exploités par les élèves en autonomie pour les tâches effectivement réalisées en classe. Les enseignants proposent très souvent des corrections collectives dans lesquelles ils organisent les différents raisonnements et fournissent de nombreuses aides procédurales. Les tâches prescrites relèvent le plus souvent du niveau mobilisable de mise en fonctionnement des connaissances. Il y a donc peu de traitements internes à réaliser. De plus, la gestion en classe de la nature du travail et les interventions des enseignants minorent les activités possibles des élèves. Nous avons aussi pointé que l'articulation des points de vue dans le sens cartésien/paramétrique ainsi que des parallèles entre les cadres géométriques sont généralement absents des cinq scénarios. Ainsi, nous avons montré que la flexibilité potentiellement développée par les élèves à la suite de ces enseignements n'est pas suffisante. L'analyse des cinq scénarios a également mis en évidence que l'interprétation géométrique des objets n'est pas un des objectifs de l'enseignement. Seule la description de ceux-ci par des équations est abordée. De ce fait, la reconnaissance des objets n'est jamais travaillée pour les équations, ce qui explique les difficultés que nous avons relevées dans l'étude cognitive avec l'aspect sémantique. Le registre ensembliste étant quasiment absent des scénarios, l'interprétation géométrique des objets à partir d'ensembles n'est pas développée par les élèves.

Au vu de ces résultats, nous avons élaboré un scénario conforme aux contraintes institutionnelles intégrant quelques-unes des pistes issues de nos analyses précédentes. Dans celui-ci, nous avons choisi de proposer deux tâches introductives. La première tâche a notamment pour objectif d'amener les élèves à développer un questionnement sur les objets décrits par des équations et d'introduire une description des objets géométriques dans le registre ensembliste. La deuxième tâche a pour objectif d'introduire toutes les nouvelles notions. Dans ces tâches, l'étude des différents systèmes d'équations permet de travailler à la fois les aspects sémantique et syntaxique des équations et de mobiliser les connaissances antérieures des élèves en géométries synthétique et vectorielle. Lors de la réalisation de ces tâches, des jeux entre les cadres des géométries synthétique, vectorielle et analytique, des conversions entre les registres et des articulations de points de vue sont aussi à effectuer. De plus, le rôle de l'enseignant lors de la correction collective de ces tâches est important. Il amène les élèves à mobiliser, par un jeu de questions/réponses, leurs connaissances antérieures. Il peut ainsi s'assurer que ces connaissances, supposées être dans la ZPD des élèves selon notre étude de relief,

sont bien disponibles. Il peut ensuite s'appuyer sur celles-ci pour introduire, lors de la correction collective de la première tâche, la description des droites du plan dans le registre ensembliste. Les proximités horizontales anticipées lors de l'élaboration de notre scénario pour les traitements et les conversions avec le registre ensembliste sont tentées par l'enseignant pour guider les élèves à développer leur interprétation géométrique des objets. La correction collective de la première tâche introductive est entrecoupée de moments de cours. Lorsqu'il s'agit d'une nouvelle définition ou propriété, l'enseignant introduit les différents résultats en toute généralité. Il les reformule plusieurs fois et accompagne son discours de dessins ou de gestes. L'enseignant tente alors les proximités horizontales anticipées dans notre scénario pour prendre en compte les traitements et les conversions de registres. Lorsqu'il s'agit de rappels théoriques, l'enseignant répète, reformule et généralise les propositions données par les élèves, tentant ainsi les proximités ascendantes anticipées. Lorsque ces résultats sont utilisés dans le reste de la correction collective, l'enseignant répète le résultat général (ou le fait donner par les élèves) et le particularise à l'équation étudiée. Il tente alors les proximités descendantes qui ont été anticipées dans notre scénario.

La correction collective de la deuxième tâche introductive amène les élèves à déterminer des équations de droites et de plans ainsi que leurs positions relatives à partir des différents systèmes étudiés. Afin d'y parvenir, l'enseignant guide les élèves, par un jeu de questions/réponses, à organiser leur raisonnement, à mobiliser leurs connaissances antérieures, à effectuer des jeux de cadres, des conversions de registres et des changements de points de vue. Pour ce faire, il tente des proximités descendantes entre les connaissances rappelées par les élèves en toute généralité et le travail à réaliser mais aussi des proximités horizontales pour les traitements internes et l'interprétation géométrique des objets. En plus des proximités qui avaient été anticipées par nos analyses didactiques, des proximités spontanées ont été tentées par l'enseignant. Elles surviennent principalement lorsqu'il repère des difficultés chez les élèves ou lorsque ceux-ci ont commis une erreur. Notre expérience de chercheur nous a permis d'ajuster notre discours aux élèves afin de les aider à surmonter leurs difficultés. Par exemple, une proximité horizontale a été tentée avec le travail déjà réalisé sur les ensembles pour amener les élèves à organiser leur raisonnement sur un ensemble nouveau. Une proximité descendante a aussi été tentée entre la forme canonique d'un système d'équations cartésiennes d'une droite et la tâche à réaliser afin que les élèves se rendent compte seuls de l'erreur commise. La correction collective de ces tâches est entrecoupée de moments de cours pendant lesquels l'enseignant revient sur les différents résultats utilisés et/ou trouvés. Lorsqu'il s'agit d'un rappel théorique, l'enseignant part toujours d'une proposition d'un ou de plusieurs élèves. Il répète, reformule et complète la proposition faite pour ensuite la généraliser en la décontextualisant. Il tente alors les proximités ascendantes qui ont été anticipées lors de l'élaboration du scénario. Lorsqu'il s'agit d'une nouvelle définition ou propriété, l'enseignant introduit le résultat décontextualisé, le reformule plusieurs fois et accompagne son discours de dessins ou de gestes. L'enseignant tente alors des proximités horizontales (anticipées) principalement pour prendre en compte les traitements au sein d'un même registre ainsi que les conversions entre les registres. Les proximités tentées sont d'autant plus nombreuses lorsque le registre ensembliste

est en jeu puisque le travail à réaliser est moins proche de la ZPD des élèves. Lorsque les équations de droites et de plans ou les positions relatives ont été déterminées par les élèves, l'enseignant s'appuie sur le travail qui vient d'être effectué ou sur le résultat qui vient d'être trouvé dans le cas particulier de l'exercice, pour introduire le résultat général. Il revient par exemple sur la démarche suivie dans l'exercice pour changer de points de vue et la généralise pour n'importe quelle équation. Dans l'exercice, il met en évidence les éléments importants pour déterminer une équation comme le nombre de vecteurs directeurs et le met en évidence dans l'équation générale. Il tente ainsi les proximités ascendantes anticipées par les analyses didactiques menées. L'enseignant tente également des proximités descendantes anticipées pour les nouvelles notions. En effet, à chaque fois qu'une équation doit être écrite, l'enseignant a demandé aux élèves de fournir le résultat général et il le particularise à l'exercice ciblé. C'est notamement le cas pour les exemples traités lors des moments de cours. Ainsi, les proximités tentées par l'enseignant sont variées et nombreuses. Elles concernent notamment les traitements et les conversions de registres (principalement avec le registre ensembliste), les jeux de cadres entre la géométrie synthétique et la géométrie analytique, l'interprétation géométrique des objets par des équations et des ensembles et les liens entre le contextualisé et le décontextualisé. Ces rapprochements effectués permettent donc de travailler explicitement des éléments que nous n'avons pas repéré chez les cinq enseignants filmés dans notre étude de terrain. Les proximités tentées dans notre expérimentation semblent pousser les élèves à développer en autonomie la flexibilité visée par notre scénario et l'interprétation géométrique des objets. En effet, ces activités n'amènent que peu de difficultés chez les élèves lors de la résolution des exercices. Toutefois, les élèves ne notent pas les interventions de l'enseignant lorsqu'elles ne sont pas écrites au tableau. Ainsi, bien que notre évaluation montre que les élèves ont bien développé une certaine flexibilité entre les traitements internes et une interprétation géométrique des objets, il reste difficile de déterminer avec précision l'impact de ces proximités sur les apprentissages des élèves.

Nous avons essayé d'intégrer le plus possible les pistes issues de notre étude historique. Toutefois, certaines d'entre elles n'ont pas pu être entièrement prises en compte notamment à cause des contraintes institutionnelles. Par exemple, le point de vue paramétrique n'a été introduit historiquement qu'après l'émergence de la notion de rang, elle-même issue de l'étude de l'ensemble des solutions des systèmes de n équations à m inconnues ($n < m$) dans le point de vue cartésien. Toutes ces notions ont donc joué un rôle dans l'articulation des points de vue dans le sens cartésien/paramétrique. Or, ni la notion de rang, ni l'étude de tels systèmes d'équations ne sont au programme de l'enseignement secondaire. Cela peut d'ailleurs expliquer le fait que les enseignants ne travaillent pas cette articulation. Cette piste n'a donc pas été complètement intégrée dans notre scénario. Toutefois, nous avons choisi d'adopter une démarche relativement similaire puisque l'étude de l'ensemble des solutions des systèmes de 2 équations à 3 inconnues amène à décrire un objet géométrique et c'est en mobilisant les connaissances anciennes sur celui-ci (aspects direct et générateur du rang) que le point de vue paramétrique émerge. Cette démarche n'a jamais été proposée dans les scénarios analysés probablement parce que la théorie des ensembles n'y est presque pas mobilisée.

Nous avons donc pris le parti dans notre enseignement de proposer un itinéraire cognitif pour le chapitre de géométrie analytique dans l'espace prenant en compte les spécificités des notions. Les résultats des analyses didactiques menées en amont de l'élaboration de notre séquence nous ont permis de nous faire une représentation de la ZPD des élèves et d'élaborer notre scénario tout en nous assurant que le travail proposé soit mené au sein de celle-ci. Pour ce faire, la gestion de l'enseignant en classe est particulière car il doit tenter les proximités que nos analyses ont permis d'anticiper. Or, il se peut que la représentation que nous avons de cette ZPD soit relativement éloignée de la ZPD « réelle » d'un ou de plusieurs élèves. L'enseignant est alors amené à tenter des proximités spontanées pour rapprocher ce qui est à faire de ce que les élèves connaissent et/ou ont déjà fait. Lors des phases d'exercices prévues, les tâches prescrites permettent de développer la flexibilité des élèves en termes de cadres, de registres et de points de vue ainsi que leur interprétation géométrique des objets pour les équations et les ensembles. La gestion de ces phases par l'enseignant est aussi particulière car il doit intervenir le moins possible pour que les élèves puissent développer ces activités en toute autonomie. Nous retrouvons ici les hypothèses piagétienne et vygotskienne sur les apprentissages fondatrices de notre cadre théorique.

Ce scénario a été expérimenté dans une classe de l'enseignement secondaire. L'analyse des déroulements a bien mis en évidence qu'il est possible de proposer notre scénario à des élèves dans une option scientifique. Nos analyses de leurs copies à une évaluation ont illustré que nos objectifs sont bien atteints. La flexibilité entre les cadres, les registres et les points de vue, ainsi que l'interprétation géométrique des objets sont bien développées chez la majorité des élèves. Bien que la réussite à l'évaluation et les apprentissages effectivement réalisés par les élèves soient difficiles à distinguer, les activités de traitements internes et d'interprétation géométrique des objets semblent bien avoir favorisé la conceptualisation des notions chez les élèves. Cela laisse supposer que les difficultés constatées chez nos étudiants de BAB3 au début de notre travail peuvent aussi être surmontées grâce à un tel travail. Toutefois, il persiste des difficultés chez un grand nombre d'élèves avec le registre ensembliste à la suite de notre enseignement. Plusieurs pistes d'explications sont possibles. Nous savons qu'ils n'ont pas l'habitude de travailler dans ce registre. Il est aussi envisageable qu'ils ne soient jamais questionnés sur les objets décrits par des ensembles avant notre expérimentation. Il se peut aussi que cela soit lié au fait que les difficultés avec ce registre, repérées pendant notre enseignement, aient amené un changement de la gestion prévue en classe. En effet, au lieu de les laisser travailler en autonomie, nous avons dû à plusieurs reprises prendre en charge le travail dans ce registre et les traitements et conversions associés. Nous avons par exemple précisé lors de la distinction entre « résoudre une équation » et « décrire par une équation » que les élèves n'étaient pas capables d'utiliser un vocabulaire ensembliste adéquat. Nous avons également repéré lors de la deuxième tâche introductive des difficultés liées à la logique. Il était difficile pour un élève de considérer tous les points vérifiant une certaine propriété. L'analyse des déroulements en classe de l'exercice 12 a aussi révélé qu'il était difficile pour les élèves de déterminer la nature des éléments appartenant à l'ensemble (points ou vecteurs) et d'organiser leur raisonnement pour effectuer les différents traitements et conversions à partir du registre ensembliste.

En conclusion, nous avons réussi à mieux comprendre les difficultés rencontrées par les élèves pour les notions de droites et de plans dans l'espace et à trouver des pistes pour améliorer notre enseignement. Celles-ci peuvent d'ailleurs ouvrir la voie pour aider les étudiants de BAB3 à surmonter leurs difficultés dans le cours d'Introduction aux variétés différentielles. Nous pensons également avoir bien mis en évidence certains effets des pratiques enseignantes sur les apprentissages des élèves ainsi que ceux qui peuvent résulter à la suite de notre enseignement. Bien que notre expérimentation dépende fortement des choix que nous avons effectués en tant que chercheur et des contraintes institutionnelles, nous pensons avoir exploité le plus possible nos possibilités d'action. Le registre ensembliste reste cependant encore sous-exploité par les élèves. Un travail de manipulation des notions et des notations ensemblistes doit être proposé régulièrement aux élèves bien que le programme ne semble pas le préconiser. Le temps long doit être pris en compte pour que les élèves puissent manipuler ces notions dans leurs dimensions outil et objet. Ce travail n'a pas pu être possible à notre échelle car nous n'avions qu'un nombre limité de séances.

Limites du travail

Nous avons dû effectuer de nombreux choix dans ce travail. Ils ont influencé les analyses que nous avons menées mais aussi notre expérimentation. Par exemple, notre étude cognitive se limite à un diagnostic du cours de Mathématiques élémentaires. L'analyse d'autres cours universitaires aurait peut-être précisé davantage les difficultés de nos étudiants de BAB3. Cependant, notre intérêt pour l'enseignement secondaire nous a amené à nous restreindre au cours universitaire dont les contenus sont particulièrement proches des programmes de l'enseignement secondaire.

Une autre limite de ce travail concerne l'analyse des manuels. Nous nous sommes restreinte aux manuels scolaires disponibles pour la Belgique francophone. Il aurait pu être intéressant d'étudier également des manuels scolaires provenant d'autres pays comme la France ou l'Angleterre. Toutefois, bien que nous n'en ayons pas parlé dans ce travail, cette analyse a été menée et les résultats ne sont pas très différents. Nous nous sommes aussi limitée aux manuels destinés à un public de mathématiques pour scientifiques pour l'enseignement secondaire. Une analyse de manuels pour d'autres niveaux d'enseignement ou destinés à un autre public peut donner des résultats relativement différents des nôtres. Néanmoins, les étudiants visés dans notre travail viennent majoritairement de l'option « mathématiques pour scientifiques » de l'enseignement secondaire.

Notre étude de terrain comporte également certaines limites dont nous avons déjà parlé dans le chapitre VIII à la page 301. Le panorama de l'enseignement actuel des notions de droites et de plans dans l'espace aurait peut-être été affiné si nous avions filmé un plus grand nombre d'enseignants. Toutefois, les similitudes entre les cinq enseignants nous amène à suggérer que les résultats n'auraient peut-être pas été très différents.

Plusieurs limites peuvent être évoquées pour notre expérimentation. Tout d'abord, elle n'a été menée qu'une seule fois et pour un public très réduit. Nous sommes bien consciente que la portée de nos conclusions est limitée et qu'elles auraient pu être davantage précisées si nous avions expérimenté plusieurs fois notre scénario. Toutefois, nos contraintes institutionnelles ne nous l'ont pas permis. Puis, les choix effectués dans l'élaboration même du scénario et dans sa gestion en classe ont influencé les apprentissages des élèves. Par exemple, nous avons choisi de ne pas aborder la théorie des déterminants et la notion de rang au sein de notre enseignement. Cela aurait pourtant pu aider les élèves dans l'articulation des points de vue. Cependant, notre scénario est soumis à des contraintes fortes de la part des programmes et de l'enseignant qui nous a reçue. D'autres choix auraient peut-être été faits avec un autre enseignant. Nous nous sommes donc privée de certaines pistes qui auraient pu engendrer d'autres apprentissages ou les favoriser d'autant plus. Une autre limite de notre expérimentation concerne notre posture à la fois de chercheur et d'enseignant. Nous avons été amenée à mener l'expérimentation ce qui a pour conséquence un nombre peu élevé de décalages entre ce que nous avons prévu et ce qu'il s'est effectivement passé. Il aurait été intéressant de demander à un autre enseignant d'expérimenter notre scénario après une discussion préalable avec lui sur les objectifs visés. Il aurait également été intéressant de ne pas avoir cette discussion avec l'enseignant et de voir ce qu'il peut faire à partir du scénario. Nous aurions ainsi pu préciser les choix des enseignants et l'effet de leurs pratiques sur les apprentissages des élèves. Or, nous n'avons pas eu la possibilité de réaliser de telles expériences. En effet, notre pays a été fortement touché par le Covid-19, ce qui a amené une fermeture des écoles à partir de mars 2020. L'enseignement à distance a été imposé lors du confinement et il n'a pas été autorisé d'aborder de la nouvelle matière pendant cette période.

L'évaluation proposée permet de compléter notre analyse des déroulements et d'inférer des éléments sur les apprentissages des élèves. Or, nous n'avons pas pu tester tous les aspects travaillés dans notre enseignement comme par exemple la dimension outil, la reconnaissance des objets à partir d'ensembles de solutions d'un système ou encore les jeux de cadres. Ces différents aspects demandent beaucoup de temps aux élèves pour les réaliser et l'évaluation ne pouvait pas dépasser une séance de classe de 50 minutes (maximum sans compter le temps d'installation des élèves). Un devoir aurait pu être donné dans d'autres circonstances pour tester ceux-ci mais nous n'en avons pas eu la possibilité à cause de la période d'examens qui a suivi notre enseignement. De plus, notre évaluation ne demandait finalement que peu de justifications et nous nous sommes rendue compte qu'il est parfois difficile de comprendre ce que les élèves ont répondu. Cette évaluation aurait pu être complétée par des entretiens individuels. Nous pensons notamment à la question 3 où les élèves n'ont pas achevé la tâche. Cela aurait certainement précisé les activités possibles des élèves mais cela n'a pas été possible puisque les élèves débutaient les examens après notre enseignement.

Apports du travail

Nous pensons que ce travail de thèse apporte quelques éléments nouveaux. Nous les précisons.

D'un point de vue disciplinaire, il y a peu de travaux en didactique des mathématiques qui s'intéressent à l'enseignement d'un contenu spécifique en Belgique. Nous pensons que ce travail centré sur les effets des pratiques des enseignants belges sur les apprentissages des élèves apporte des éléments nouveaux sur l'enseignement des droites et des plans dans l'espace. L'originalité de notre travail consiste en un parallèle entre les activités possibles des élèves suite à un enseignement classique et celles potentiellement développées avec un scénario élaboré grâce à des analyses didactiques poussées. La mise en évidence des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement est d'autant plus importante en Belgique puisque ce domaine de recherche n'y est que peu répandu. Ce travail fournit également des pistes à suivre pour l'enseignement de la géométrie analytique dans l'espace dont il a été prouvé qu'elles favorisent bien les apprentissages.

D'un point de vue plus théorique, notre travail montre que le discours de l'enseignant en classe influence les apprentissages des élèves et sans doute les favorise dans certaines conditions. Cela soulève donc la question de leurs apprentissages potentiels lorsqu'ils sont amenés à travailler en autonomie comme par exemple dans le contexte de la classe inversée. Ce type de pédagogie vise à amener les élèves à s'impliquer plus activement dans l'enseignement qu'ils reçoivent et à développer des apprentissages plus profonds et durables (Dumont & Berthiaume, 2016). D'ailleurs, elle semble engendrer un certain engouement au vu du nombre considérable de sites web qui lui sont dédiés (Bishop & Verleger, 2013) et de documents explicatifs mis à la disposition des enseignants par la Fédération Wallonie-Bruxelles. Cette effervescence pourrait même s'accentuer chez les enseignants à la suite des mesures prises lors de la crise du Covid-19. En effet, les cours en présentiel plus transmissifs ont été brutalement arrêtés au profit de la mise en place d'un enseignement à distance. Il est donc possible que ce type de pédagogie perdure après la fin du confinement. Or, Bridoux (2018) a montré que les apprentissages mathématiques développés par des étudiants de BAB1 à la suite d'une expérience de classe inversée sont très procéduraux et que certaines de leurs difficultés peuvent en être même accentuées (manipulation des définitions, constitution d'un répertoire d'exemples variés, ...) par rapport à un cours classique. Cela a amené l'enseignant à reprendre toutes les notions lors d'une séance de classe ordinaire pour atténuer les conceptions erronées, enrichir les exemples construits par les étudiants et tisser des liens entre les notions. Ces constats mettent ici aussi bien en évidence que le rôle et le discours de l'enseignant en classe sont importants. Nous avons eu recours dans notre expérimentation au levier des proximités-en-acte. Notre cadre théorique suppose que la quantité et la qualité des connexions réalisées par l'enseignant en classe avec ce que les élèves ont déjà faits peuvent influencer les apprentissages des élèves. Nous pensons que notre travail met bien en avant que ces proximités entre le nouveau et ce que les élèves ont déjà faits ou connaissent déjà sont bénéfiques aux apprentissages. L'originalité de notre travail consiste aussi à mettre en œuvre cet outil relativement nouveau pour analy-

ser et comparer le discours de plusieurs enseignants en classe pour les notions de droites et de plans dans l'espace.

Perspectives de recherche

Plusieurs prolongements de notre travail s'offrent à nous. D'une part, les limites que nous avons évoquées amènent déjà quelques perspectives. Notre scénario peut être expérimenté plusieurs fois en faisant varier les conditions initiales : avec un public différent, par un autre enseignant après discussion avec le chercheur sur les objectifs visés, par un autre enseignant sans cette discussion avec le chercheur, ... Il s'agit alors d'augmenter encore nos données afin de préciser davantage nos résultats et nos conclusions.

Nous sommes partie d'un questionnement suite à des difficultés des étudiants de BAB3. Les analyses didactiques menées peuvent être étoffées en étudiant, par exemple, le cours d'Algèbre linéaire en première année universitaire sur les espaces vectoriels (notamment pour la notion de rang et la théorie des ensembles) et en complétant notre synthèse historique par une étude de l'émergence de la théorie des ensembles. Nous pourrions ainsi élaborer un scénario conforme pour le cours d'Introduction aux variétés différentielles intégrant les diverses pistes trouvées. De la sorte, la boucle serait bouclée et cela répondrait à nos besoins actuels d'enseignant à l'université.

D'autre part, nous avons étudié les pratiques des enseignants belges pour un chapitre précis de géométrie. Nous nous demandons si elles sont similaires pour tous les chapitres de ce domaine et pour tous les domaines. Une étude des pratiques des enseignants belges plus générale peut aussi être un prolongement de notre travail.

Enfin, la plupart des enseignants ne connaissent pas le domaine de la didactique des mathématiques. Il peut être intéressant de leur proposer une formation sur l'enseignement des notions de droites et de plans dans l'espace. Celle-ci peut aborder les difficultés repérées chez les élèves sur ces notions et fournir des outils didactiques pour aider les enseignants à mieux comprendre ces difficultés et à intégrer quelques pistes didactiques dans leur enseignement pour mieux les appréhender. La formation peut aussi expliquer comment se faire une représentation de la ZPD des élèves et mettre en évidence l'impact possible sur les apprentissages des élèves des rapprochements entre le travail à réaliser et ce qu'ils ont déjà fait et connaissent déjà. Il s'agit donc de montrer, qu'au delà des choix de contenus, le discours de l'enseignant en classe sur ce contenu peut favoriser les apprentissages des élèves.

Bibliographie

ABBOUD-BLANCHARD, M., ROBERT, A., ROGALSKI, J., & VANDEBROUCK, F. (2017). Pour une théorie de l'activité en didactique des mathématiques. Un résumé des fondements partagés, des développements récents et des perspectives. *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz*, 18, IREM de Paris.

ADMINISTRATION GÉNÉRALE DE L'ENSEIGNEMENT (2015). *Programme d'études : mathématiques pour les scientifiques - 3e degré*, 470/2015/240. Consulté sur https://www.wallonie-bruxelles-enseignement.be/progr/470-2015-240.pdf

ALVES-DIAS, M. (1998). *Les problèmes d'articulation entre points de vue « cartésien » et « paramétrique » dans l'enseignement de l'algèbre linéaire* (Thèse de doctorat, Université Paris VII). Consulté sur https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01252758/document

ALVES-DIAS, M., & ARTIGUE, M. (1995). Articulation Problems Between Different Systems of Symbolic Representations in Linear Algebra. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (19th, Recife, Brazil, July 22-27, 1995)* (vol. 2, pp. 34–41). Brazil : Universidade Federal de Pernambuco.

ARTIGUE, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281–308.

ARTIGUE, M. (1989). Epistémologie et Didactique. *Cahier de Didactique des Mathématiques*, 3, Université Paris VII.

ARTIGUE, M. (1991). Epistémologie et Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2/3), 241–286.

ARTIGUE, M. (2002). Ingénierie didactique : quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui ?. *Les dossiers des sciences de l'éducation*, 8, 59–72.

ARTIGUE, M. (2004). Le défi de la transition secondaire/supérieur : que peuvent nous apporter les recherches didactiques et les innovations développées dans ce domaine ?. *Papier présenté à the first French-Canadian Congress of Mathematical Sciences*, Toulouse.

ARTIGUE, M. (2006). Apprendre les mathématiques au niveau universitaire : ce que les recherches récentes nous apprennent dans ce domaine. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 269–288.

ARTIGUE, M. (2011). L'ingénierie didactique comme thème d'étude. In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Flückiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques : XVe école d'été de didactique des mathématiques* (vol. 1, pp. 15–26). Grenoble : La Pensée Sauvage.

BA, C. (2007). *Etude épistémologique et didactique de l'utilisation du vecteur en mathématiques et en physique - lien entre mouvement de translation et translation mathématique* (Thèse de doctorat, Université de Lyon 1 et Université de Dakar). Consulté sur https://tel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/192241/filename/These-BA-2007.pdf

BÄR, C. (2010). *Elementary differential geometry*. Cambridge : Cambridge University Press.

BELAVAL, Y. (1960). *Leibniz, critique de Descartes*. Paris : Gallimard.

BISHOP, J.-L., & VERLEGER, M. (2013). The flipped classroom : A survey of the research. *Proceedings of the 120th American Society for Engineering Education Annual Conference and Exposition*, 30, 1–18.

BITTAR, M. (1998). *Les vecteurs dans l'enseignement secondaire. Aspects outil et objet dans les manuels. Etude de difficultés d'élèves dans 2 environnements : papier-crayon et Cabri-Géomètre II* (Thèse de doctorat, Université de Grenoble I).

BOS, H. (1998). La structure de la Géométrie de Descartes. *Revue d'histoire des sciences*, 51(2/3), 291–318.

BOS, H. (2001). *Redefining geometrical exactness. Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. New York : Springer.

BOSCH, M., FONSECA, C., & GASCÓN, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matematicas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24(2/3), 205–250.

BOSCHET, F. (1988). Un aperçu des travaux de Vygotsky, Leontiev et Bruner, disciples de Vygotsky. *Cahier de Didactique des Mathématiques*, 52, Université Paris VII.

BOURBAKI, N. (1969). *Éléments d'histoire des Mathématiques*. Paris : A. Hermann.

BRIDOUX, S. (2011). *Enseignement des premières notions de topologies à l'université. Une étude de cas* (Thèse de doctorat, Université Paris Diderot). Consulté sur https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00660249/document

BRIDOUX, S. (2014). La transition secondaire-université : une expérience en Belgique. *Repères-Irem*, 95, 81–102.

BRIDOUX, S. (2018). Classe inversée : une expérience en première année universitaire. Quelle réorganisation des apprentissages ?. *Petit x*, 106, 41–64.

BRIDOUX, S., CHAPPET-PARIÈS, M., GRENIER-BOLEY, N., HACHE, C., & ROBERT, A. (2015). Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques (secondaire et début de l'université). *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz*, 14, IREM de Paris.

BRIDOUX, S., GRENIER-BOLEY, N., HACHE, C., & ROBERT, A. (2016a). Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques ; analyses et exemples. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 21, 187–234.

BRIDOUX, S., GRENIER-BOLEY, N., HACHE, C., & ROBERT, A. (2016b). Anciennes et nouvelles questions sur l'enseignement supérieur. Un exemple de recherches actuelles sur l'exposition des connaissances. In T. Barrier & C. Chambris (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2016* (pp. 268–286). Paris : IREM de Paris et Université Paris Diderot.

BRIDOUX, S., & NIHOUL, C. (2015). Difficultés d'élèves à interpréter des constructions dans l'espace. Une étude de cas. *Petit x*, 98, 53–76.

BROUSSEAU, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 309–336.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CERCLÉ, V., CHESNAIS, A., GOSSELIN, R., LEBERRE, J., & NYSSEN, L. (2015). *Enjeux de logique et de raisonnement au croisement des cadres et des registres à propos des équations de droites*. Papier présenté à la CORFEM 22, Nîmes. Consulté sur `http://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique442`

CHALANÇON, F., COPPÉ, S., & PASCAL, N. (2002). Les vérifications dans les équations, inéquations et en calcul littéral. *Petit x*, 59, 23–41.

CHAPPET-PARIÈS, M., PILORGE, F., & ROBERT, A. (2017). Pour étudier le dispositif classe inversée. Analyses des moments d'exposition des connaissances en classe et de capslules vidéos. *Petit x*, 105, 37–72.

CHAPPET-PARIÈS, M., ROBERT, A., MILLON-FAURÉ, K., & DROUHARD, J.-P. (2014). Sur quoi porte le discours du professeur en classe de mathématiques ? Questions méthodologiques et premiers résultats. *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz*, 12, IREM de Paris.

CHELLOUGUI, F. (2003). Approche didactique de la quantification dans la classe de mathématiques dans l'enseignement tunisien. *Petit x*, 61, 11–34.

CHELLOUGUI, F. (2004). *L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite* (Thèse de doctorat, Université de Lyon et Université de Tunis).

CHESNAIS, A. (2009). *L'enseignement de la symétrie axiale en sixième dans des contextes différents : les pratiques de deux enseignants et les activités des*

élèves (Thèse de doctorat, Université Paris VII). Consulté sur https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00450402/document

CHESNAIS, A. (2019). Comment un ancrage didactique en théorie de l'activitè amène à repenser le point de vue de l'élève. *Actes de la XX^eÉcole d'été de didactique des mathématiques (Autrans, France, 13-19 octobre, 2019)*, à paraître. Consulté sur https://eedm20.sciencesconf.org/data/pages/Cours_Chesnais.pdf

CHEVALLARD, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CONSTANTIN, C. (2014). *Quelles alternatives pour l'enseignement du calcul algébrique au collège ?* (Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille). Consulté sur https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01119729/document

COPPÉ, S. (1997). Etude des processus de vérification mis en œuvre par les élèves de 1ère S. *Bulletin de l'APMEP*, 411, 471–484.

DEROUET, C. (2016). *La fonction de densité au carrefour entre probabilités et analyse en terminale S. Étude de la conception et de la mise en œuvre de tâches d'introduction articulant lois à densité et calcul intégral* (Thèse de doctorat, Université Sorbonne Paris Cité et Université Paris Diderot). Consulté sur http://theses.md.univ-paris-diderot.fr/DEROUET_charlotte_2_va_20161125.pdf

DESCARTES, R. (1637). *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences. Plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie qui sont des essais de cette méthode.* Leyde : De l'imprimerie de Ian Maire.

DESCARTES, R. (1886). *La géométrie* (Nvl. éd.). Paris : A. Hermann.

DHOMBRES, J. (1989). Enseignement moderne ou enseignement révolutionnaire des sciences ?. *Histoire de l'éducation*, 42, 55–78.

DIEUDONNÉ, J. (1978). *Abrégé d'histoire des mathématiques* (Vols. 1-2). Paris : A. Hermann.

DIEUDONNÉ, M., DRONIOU, J., DURAND-GUERRIER, V., RAY, B., & THERET, D. (2011). Bilan de praticiens sur la transition lycée-université. *Repères-Irem*, 85, 5–30.

DOGAN-DUNLAP, H. (2010). Linear algebra students' modes of reasoning : Geometric representations. *Linear Algebra and its Applications*, 432, 2141–2159.

DORIER, J.-L. (1990). Analyse historique de l'émergence des concepts élémentaires d'algèbre linéaire. *Cahier de DIDIREM*, 7, Université Paris VII.

DORIER, J.-L. (1993). L'émergence du concept de rang dans l'étude des systèmes d'équations linéaires. *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, 3, 159–190.

DORIER, J.-L. (1995). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 29, 175–197.

DORIER, J.-L. (dir.) (1997). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

DORIER, J.-L. (2000a). Recherche en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'Algèbre linéaire – Perspectives théoriques sur leurs interactions. *Les cahiers du laboratoire Leibniz*, 12, Laboratoire Leibniz-IMAG.

DORIER, J.-L. (dir.) (2000b). *On the Teaching of Linear Algebra*. Dordrecht : Kluwer Academic Publisher.

DORIER, J.-L., & SIERPINSKA, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICMI study* (pp. 255–273). Dordrecht/Boston/London : Kluwer Academic Publishers.

DOUADY, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques. Une réalisation dans tout le cursus primaire* (Thèse de doctorat, Université Paris VII). Consulté sur https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01250665/document

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5–31.

DOUADY, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères-Irem*, 6, 131–158.

DOUADY, R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. *Repères-Irem*, 15, 37–61.

DREYFUS, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics*, 38, 85–109.

DUBOUCLEZ, O. (2012). Mathématiques et philosophie des mathématiques dans les études cartésiennes :1996-2010. Papier présenté à Quarante ans d'études cartésiennes, Paris. Consulté sur http://hdl.handle.net/2268/165033

DUMONT, A., & BERTHIAUME, D. (2016). *La pédagogie inversée. Enseigner autrement dans le supérieur avec la classe inversée*. Louvain-La-Neuve : De Boeck Supérieur.

DUPIN, C. (1819). *Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge*. Paris : Bachelier.

DURAND-GUERRIER, V. (1996). *Logique et raisonnement mathématique - Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication* (Thèse de doctorat, Université de Lyon 1).

DURAND-GUERRIER, V. (2005). *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exmplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique* (Habilitation à diriger des recherches, Université de Lyon 1). Consulté sur https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00201626/document

DURAND-GUERRIER, V., & ARSAC, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ?. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(3), 295–342.

DUVAL, R. (1988). Graphiques et équations : l'articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 235–253.

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 5–31.

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine – Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne : P. Lang.

EPP, S. (2003). The Role of Logic in Teaching Proof. *The American Mathematical Monthly*, 110, 886–899.

EUCLIDE (1632). *Les quinze livres des éléments géométriques d'Euclide*. Paris : Imprimerie d'Isaac Dedin.

GARNIER, J. G. (1813). *Géométrie analytique, ou Application de l'algèbre à la géométrie* (2e éd.). Paris : Vve Courcier.

GHETALDI, M. (1607). *Apollonius redivivus seu restitua Apollonii Pergaei inclinationum geometria*. Venice : Apud Bernardum Iuntam.

GHETALDI, M. (1630). *De resolutione et compositione mathematica libri quinque opus posthumus*. Rome : Ex typ. Rev. Camerae apostolicae.

GRANGER, G.-G. (1988). *Essai d'une philosophie du style* (2e éd.). Paris : O. Jacob.

GRENIER-BOLEY, N. (2019). *La recherche en mathématiques : une ressource pour les didacticiens ?* (Habilitation à diriger des recherches, Université Paris Diderot - Paris VII et Université Sorbonne Paris Cité). Consulté sur https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-02418563/document

GRØNBÆK, N., MISFELDR, M., & WINSLØW, C. (2009). Assessment and Contract-Like Relationships in Undergraduate Mathematics Education. In O. Skovmose, P. Valero & O. R. Christensen (Eds.), *University science and Mathematics Education. Challenges and possibilities* (pp. 85–108). Boston : Springer.

GUEUDET, G. (2000). *Le rôle du géométrique dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire* (Thèse de doctorat, Université Joseph-Fourier - Grenoble I). Consulté sur https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00930634/document

GUEUDET, G. (2008a). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 237–254.

GUEUDET, G. (2008b). La transition secondaire-supérieur : résultats de recherche didactiques et perspectives. In A. Rouchier & I. Bloch (Eds.), *Perspectives en didactique des mathématiques. Cours de la XIIIe école d'été de didactique des mathématiques*

(Sainte Livrade, France, 17-26 août, 2005) (pp. 159–176). Grenoble : La Pensée Sauvage.

GUEUDET, G. (2008c). *Entrée à l'université/Ressources en ligne. Eclairages théoriques et actions didactiques dans deux champs de recherche en didactique des mathématiques* (Habilitation à diriger des recherches, Université Paris Diderot - Paris VII). Consulté sur https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02268977/document

GUEUDET, G., BOSCH, M., DISESSA, A. A., KWON, O. N., & VERSCHAFFEL, L. (2016). *Transitions in Mathematics Education*. ICME-13 Topical Surveys, New York : Springer.

GUEUDET, G., & TROUCHE, L. (2009). Ressources numériques et documentation des professeurs. Un nouveau regard sur conception et usage. In E. Delozanne, A. Tricot & P. Leroux (Eds.), *EIAH 2009 (Le Mans, France, 23-26 juin, 2009)* (pp. 215–222). Lyon : ENS Editions.

GUEUDET, G., & TROUCHE, L. (2010). Des ressources aux documents, travail du professeur et genèses documentaires. In G. Gueudet & L. Trouche (Eds.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 57–74). Rennes/Lyon : Presses Universitaires de Rennes/INRP.

HEATH, T. L. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements* (Vols 1-3). New York : Dover Publications.

HITT, F. (2006). Students' functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. An example : The concept of limit. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 251–267.

ITARD, J. (1952). R. Taton, L'œuvre scientifique de Monge. *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 5(2), 183–185.

JONES, A. (1986). *Pappus of Alexandria Book 7 of the Collection*. Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences, New York : Springer.

JULLIEN, V. (1996). *Descartes : la « géométrie » de 1637*. Paris : Presses Universitaires de France.

KLINE, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York : Oxford University Press.

KOUKI, R. (2006). Équations et inéquations au secondaire entre syntaxe et sémantique. *Petit x*, 71, 7–28.

KOUKI, R. (2008). *Enseignement et apprentissage des équations, inéquations et fonctions au secondaire : entre syntaxe et sémantique* (Thèse de doctorat, Université de Tunis et Université de Lyon 1). Consulté sur https://tel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/349652/filename/these_29_Novembre_2008_NOIR_x.pdf

LALAUDE-LABAYLE, M. (2016). *L'enseignement de l'algèbre linéaire au niveau universitaire - Analyse didactique et épistémologique* (Thèse de doctorat, Université de Pau et des Pays de l'Adour). Consulté sur https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01419021/document

LÊ THI, H. C. (1997). *Etude didactique et épistémologique sur l'enseignement du vecteur dans deux institutions : la classe de dixième au Vietnam et la classe de seconde en France* (Thèse de doctorat, Université de Grenoble I). Consulté sur https://www.researchgate.net/publication/334094371_ETUDE_DIDACTIQUE_ET_EPISTEMOLOGIQUE_SUR_L%27ENSEIGNEMENT_DU_VECTEUR_DEUX_CAS_LA_CLASSE_DE_DIXIEME_AU_VIET-NAM_ET_LA_CLASSE_DE_SECONDE_EN_FRANCE

LEBEAU, C., & SCHNEIDER, M. (2009). *Vers une modélisation algébrique des points, droites et plans*. Liège : Presses Universitaires de Liège.

LEBEAU, C., & SCHNEIDER, M. (2010). Equations incomplètes de plans et obstacles à la nécesité épistémique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 30(1), 11–45.

LEGRAND, M. (1995). Mathématiques, mythes ou réalité. *Repères-Irem*, 21, 111–139.

LEONTIEV, A. N. (1984). *Activité, conscience, personnalité*. Moscou : Editions du Progrès.

LEPLAT, J. (1997). *Regards sur l'activité en situation de travail*. Paris : PUF.

LITHNER, J. (2003). Students' mathematical reasoning in université textbook exercices. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 29–55.

LOUNIS, A. (1989). *L'introduction aux modèles vectoriels en physique et en mathématiques : conceptions et difficultés des élèves, essai et remédiation* (Thèse de doctorat, Université de Provence Aix-Marseille I).

MARCHAND, P. (2006). Comment développer les images mentales liées à l'apprentissage de l'espace en trois dimensions ?. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 103–121.

MARGOLINAS, C. (2015). Connaissances et savoir. Concepts didactiques et perspectives sociologiques ?. *Revue française de pédagogie*, 188, 13–22.

MASON, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra : Perspectives for research and teaching* (pp. 65–87). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

MAUREL, M. (2001). Derrière la droite, l'hyperplan. *Repères-Irem*, 42, 83–114.

MESNIL, Z. (2014). *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématique vers un objet d'enseignement* (Thèse de doctorat, Université Paris Diderot). Consulté sur https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01114281v3/document

MINISTÈRE DE LA COMMUNAUTÉ FRANÇAISE (2000a). *Programme d'études du cours de mathématiques - premier degré commun*, 10/2000/240. Consulté sur https://www.wallonie-bruxelles-enseignement.be/progr/10-2000-240.pdf

MINISTÈRE DE LA COMMUNAUTÉ FRANÇAISE (2000b). *Programme d'études du cours de mathématiques - deuxième degré*, 39/2000/240. Consulté sur https://www.wallonie-bruxelles-enseignement.be/progr/39-2000-240.pdf

MINISTÈRE DE LA COMMUNAUTÉ FRANÇAISE (2000c). *Programme d'études du cours de mathématiques - troisième degré*, 40/2000/240. Consulté sur http://www.wallonie-bruxelles-enseignement.be/prog/40-2000-240.pdf

MOORE, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 249–266.

NAJAR, R. (2010). *Effets des choix institutionnels d'enseignement sur les possibilités d'apprentissages des étudiants. Cas des notions ensemblistes fonctionnelles dans la transition Secondaire/Supérieur* (Thèse de doctorat, Université Paris Diderot et Université de Tunis). Consulté sur https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00564191/document

NAJAR, R. (2012). L'obstacle du formalisme au début du supérieur. In J.-L. Dorier & S. Gousseau Coutat (Eds.), *Enseignement des mathématiques et contract social : enjeux et défis pour le 21e siècle. Actes du colloque EMF 2012 (Genève, Suisse, 3-7 février, 2012)* (pp. 1026–1043). Genève : Université de Genève.

NAJAR, R. (2015). À propos de l'enseignement de la théorie des ensembles : les choix institutionnels dans la transition secondaire/supérieur en Tunisie. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 35(2), 141–182.

NÉGRIER, M., & KERMEN, I. (2011). Quelle adaptation entre intentions didactiques d'un programme de chimie et des manuels scolaires ?. *Recherches en Didactique des Sciences et des Technologies*, 4, 163–194.

NGUYEN, G. (2018). *Ecologie du formalisme "bipoints" dans l'enseignement de la géométrie au niveau secondaire* (Thèse de doctorat, Université de Liège). Consulté sur https://orbi.uliege.be/handle/2268/215086

NIHOUL, C. (2013). *Une étude de quelques difficultés chez les élèves liées au passage de la géométrie plane à la géométrie dans l'espace* (Mémoire de Master, Université de Mons).

NIHOUL, C. (2016). Quelques difficultés d'étudiants universitaires à reconnaître les objets « droites » et « plans » dans l'espace : une étude de cas. In E. Nardi, C. Winslow & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (Montpellier, France, 31 mars - 2 avril, 2016)* (pp. 464–473). France : Université de Montpellier et INDRUM.

NIHOUL, C. (2018). Les équations de droites dans l'espace : une étude des proximités discursives dans les manuels de l'enseignement secondaire belge. In M. Abboud (Ed.), *Actes du colloque EMF 2018 (Gennevilliers, France, 22-26 octobre)* (pp. 597–605). Paris : IREM de Paris.

PAPPUS (1588). *Pappi Alexandrini mathematicae collectiones a Federico Commandino Urbinate in latinum conversae at commentariis illustratae* (F. Commandino, Trans.). Pesaro : Girolamo Concordia.

PARIÈS, M., POUYANNE, N., ROBERT, A., RODITI, E., & ROGALSKI, M. (2007). Mettre du relief sur les mathématiques au collège et au lycée – Quelques exemples. *Document pour la formation des enseignants*, 9, Université Paris VII.

PARIÈS, M., & ROBERT, A. (2009). Changement de cadres en géométrie dans l'espace. *Repères-Irem*, 75, 35–45.

PARIÈS, M., ROBERT, A., & ROGALSKI, J. (2008). Analyses de séances en classe et stabilité des pratiques d'enseignants de mathématiques expérimentés du second degré. *Educational Studies in Mathematics*, 68, 55–80.

PARZYSZ, B. (1988). "Knowing" vs "seeing", problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 72–92.

PAVLOPOULOU, K. (1993). Un problème décisif pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire : la coordination des registres de représentation. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 67–93.

PERRIN, D. (2010). Axiomatique d'Euclide, convexité, géométries non euclidiennes. Consulté sur https://www.math.u-psud.fr/~perrin/Projet-geometrie/Cours1.pdf

PIAGET, J. (1971). *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant* (7e éd.). Neuchâtel : Delachaux et Niestlé.

PIAGET, J. (1985). *The equilibration of cognitive structures : The central problem of intellectual development*. Chicago : University of Chicago Press.

PRASLON, F. (2000). *Continuités et ruptures dans la transition terminale S/DEUG sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement* (Thèse de doctorat, Université Paris VII). Consulté sur https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01253828/document

PRESSIAT, A. (1999). *Aspects épistémologiques et didactiques de la liaison « points-vecteurs »* (Thèse de doctorat, Université Paris VII). Consulté sur https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01253624/document

PRESSLEY, A. (2010). *Elementary differential geometry* (2e éd.). London : Springer.

ROBERT, A. (1982). *L'acquisition de la notion de convergence des suites dans l'enseignement supérieur* (Thèse de doctorat, Université Paris VII). Consulté sur https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01250393/document

ROBERT, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 138–190.

ROBERT, A. (2003a). Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la quatrième : l'organisation des connaissances en niveaux de conceptualisation. *Petit x*, 63, 7–29.

ROBERT, A. (2003b). De l'idéal didactique aux déroulements réels en classe de mathématiques : le didactiquement correct, un enjeu de la formation des (futurs) enseignants (en collège et en lycée), *Didaskalia*, 22, 99–116.

ROBERT, A. (2004). Une analyse de séance de mathématiques au collège, à partir d'une vidée filmée en classe. La question des alternatives dans les pratiques d'enseignants. Perspective en formation d'enseignants. *Petit x*, 65, 52–79.

ROBERT, A. (2007). Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse, des inférences en formation. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27(3), 271–312.

ROBERT, A. (2008). Vous avez dit « didactique des mathématiques » ? Alors fuyons.... *Repères-Irem*, 71, 41–64.

ROBERT, A. (2011). Des recherches « de type ingénierie ». In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Flückiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques : XVe école d'été de didactique des mathématiques* (vol. 1, pp. 207–222). Grenoble : La Pensée Sauvage.

ROBERT, A., PENNINCKX, J., & LATTUATI, M. (2012). *Une caméra au fond de la classe de mathématiques. (Se) former au métier d'enseignant du secondaire à partir d'analyses de vidéos*. Presses universitaires de Franche-Comté.

ROBERT, A., & ROBINET, J. (1993). Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Cahier de DIDIREM*, 21, Université Paris VII.

ROBERT, A., & ROBINET, J. (1996). Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(2), 145–175.

ROBERT, A., ROBINET, J., & TENAUD, I. (1987). De la géométrie analytique à l'algèbre linéaire. *Brochures de l'IREM de Paris*, 72.

ROBERT, A., & RODITI, E. (2019). L'opérationnalisation du cadre théorique : texte des chercheurs invités. Consulté sur https://wejch-ardm19.sciencesconf.org/data/pages/Operationnalisation_du_cadre_theorique_2.pdf

ROBERT, A., & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue Canadienne de l'Enseignement des Sciences, des Mathématiques et des Technologies*, 2(4), 505–528.

ROBERT, A., & VANDEBROUCK, F. (2014a). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz*, 10.

ROBERT, A., & VANDEBROUCK, F. (2014b). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 34(2/3), 239–285.

ROGALSKI, J. (1983). Quelques éléments de théorie piagétienne et didactique des mathématiques. *Cahier de Didactique des Mathématiques*, 2, Université Paris VII.

ROGALSKI, J. (2003). Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 23(3), 343–388.

ROGALSKI, J., & SAMURCAY, R. (1994). Modélisation d'un savoir de référence et transposition didactique dans la formation de professionnels de haut niveau. In G. Arsac, Y. Chevallard, J. Martinand & A. Tiberghien (Eds.), *La transposition didactique à l'épreuve* (pp. 35–71). Grenoble : La Pensée Sauvage.

ROGALSKI, M. (1991). Un enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A première année. *Cahier de Didactique des Mathématiques*, 11, Université Paris VII.

ROGALSKI, M. (1995). Notes du séminaire de São Paulo, Brésil.

ROGALSKI, M. (dir.) (2001). *CAPES/AGREG. Carrefours entre analyse, algèbre, géométrie*. Paris : Ellipses.

ROUSE BALL, W.-W. (1907). *Histoire des mathématiques - volume 2* (3e éd.). Paris : A. Hermann.

SANDOVAL, I., & POSSANI, E. (2016). An analysis of different representations for vectors and planes in $\mathbb{R}^3$. Learning Challenges. *Educational Studies in Mathematics*, 92, 109–127.

SCHNEIDER, M. (1988). *Des objets mentaux 'aire' et 'volume' au calcul des primitives* (Thèse de doctorat, Université Catholique de Louvain). Consulté sur https://orbi.uliege.be/bitstream/2268/178094/1/TheseSchneider.pdf

SERFATI, M. (1998). Descartes et la constitution de l'écriture symbolique mathématique. *Revue d'histoire des sciences*, 51(2/3), 237–290.

SERRANO, L., BOSCH, M., & GASCÓN, J. (2007). Diseño de organizaciones didácticas para la articulatión del bachillerato con el primer ciclo universitario. In L. Ruiz, A. Estepa & F. J. Garcia (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoria Antropológica de lo Didáctico* (pp. 757–766). Jaén : Publicaciones de la Universidad de Jaén.

SIERPINSKA, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 209–246). Dordrecht : Kluwer Academic Publisher.

SIERPINSKA, A., BOBOS, G., & KNIPPING, C. (2008). Souces of students' frustration in preuniversity level, prerequisite mathematics courses. *Instructional Science*, 36, 289–320.

SMITH, D. E. (1958). *History of Mathematics* (Vols 1-2). New York : Dover publications.

SMITH, D. E. (1959). *A source book in mathematics*. New York : Dover publications.

TALL, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

TANGUAY, D. (2002). L'enseignement des vecteurs. *Bulletin AMQ*, XLII, 4, 36–47.

TATON, R. (1949). La préhistoire de la « géométrie moderne ». *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 2/3, 197–224.

TENAUD, I. (1991). *Une expérience d'enseignement de la gémétrie en terminale C : enseignement de méthodes et travail en petits groupes* (Thèse de doctorat, Université Paris VII). Consulté sur https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01251177/document

TRIGUEROS, M., & MARTINEZ-PLANELL, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, 73, 3–19.

TROUCHE, L., CAZES, C., JARRAUD, P., RAUZY, A., & MERCAT, C. (2011). Transition lycée-université, penser des dispositifs d'appui. *Revue internationale des technologies en pédagogie universitaire*, 8, 37–47.

VANDEBROUCK, F. (dir.) (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Octarès.

VANDEBROUCK, F., & ROBERT, A. (2017). Activités mathématiques des élèves avec les technologies numériques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 37(2/3), 333–382.

VANDEBROUCK, F., ROBERT, A., ROGALSKI, J., ABBOUD-BLANCHARD, M., CAZES, C., CHESNAIS, A., & HACHE, C. (2013). Activités des élèves et pratiques des enseignants en classe de mathématiques. *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz*, 5, IREM de Paris.

VERGNAUD, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2/3), 133–170.

VYGOTSKI, L. (1997). *Pensée et langage*. Paris : La dispute.

WARUSFEL, A. (2005). Calcul et géométrie : résoudre des équations algébriques. Consulté sur https://andre.warusfel.fr/quelques-articles/.

WESSEL, C. (1897). *Essai sur la représentation analytique de la direction* (H. G. Zeuthen, Trans). Copenhague.

Manuels consultés

ADAM, A., & LOUSBERG, F. (2004a). *Espace math 5e/ 6e(6 périodes/semaine)* (Vol. 2). De Boeck.

ADAM, A., & LOUSBERG, F. (2004b). *Espace math 5e/ 6e- Coffre à outils - Activités - Exercices*. De Boeck.

ANNOYE, A., GILON, J.-L., VAN EERDENBRUGGHE, A., & WILEMME, J (2014). *CQFD 6e(6 périodes/semaine)*. De Boeck.

ANNOYE, A., GILON, J.-L., VAN EERDENBRUGGHE, A., & WILEMME, J. (2019). *CQFD 6e(6 périodes/semaine)* (2eédition). VAN IN.

DELFELD, H., T'KINDT-DEMULDER, I., SEVRIN, N., & TIMMERMANS, M.-M. (2015). *Actimath 6 - Mathématiques générales* (Vol. 2). VAN IN.

Annexe A

Programmes scolaires

1 Le premier degré de l'enseignement

▶▶ Plan de matières

Nombres

CLASSE DE PREMIÈRE ANNÉE

- □ Dénombrer : organiser un comptage, remplacer un comptage par une formule.
- □ Lire et écrire.
- □ Repérer et classer : situer - ordonner - comparer.
- □ Structurer les nombres naturels à l'aide de la relation de divisibilité : organiser les nombres.
- □ Effectuer des opérations : estimer - calculer - utiliser des propriétés.
- □ Résoudre des problèmes - Représenter des données : grandeurs - proportionnalité, tableaux, diagrammes, graphiques - équations.
- □ Expressions littérales : écrire - transformer - calculer les valeurs numériques.

CLASSE DE DEUXIÈME ANNÉE

- □ Dénombrer : remplacer un comptage par une formule.
- □ Structurer les nombres naturels à l'aide de la relation de divisibilité : organiser les nombres.
- □ Découvrir les fractions à termes entiers : repérer - simplifier - classer - encadrer.
- □ Effectuer des opérations : calculer - utiliser les propriétés - utiliser la calculatrice.
- □ Résoudre des problèmes - représenter des données : proportionnalité - équations - traitement de données.
- □ Expressions littérales : écrire - interpréter - transformer, calculer les valeurs numériques.

Géométrie

CLASSE DE PREMIÈRE ANNÉE

- □ Solides et figures planes : décrire - classer - construire.
- □ Figures géométriques élémentaires et distance : notion - construction - mesure.
- □ Transformations du plan.

CLASSE DE DEUXIÈME ANNÉE

- □ Distance : comparer - mesurer - raisonner.
- □ Transformations du plan : observer - découvrir - reconnaître - construire.
- □ Constructions de figures : reproduire - construire - justifier.
- □ Propriétés géométriques : dégager des régularités, des propriétés - argumenter.

2 Ancien programme du deuxième degré de l'enseignement

►► Plan de matières

Etude des fonctions

CLASSE DE TROISIÈME ANNÉE

- □ Graphiques - Tableaux - Formules.
- □ Fonctions du premier degré.

CLASSE DE QUATRIÈME ANNÉE

- □ Graphiques - Tableaux - Formules.

Algèbre

CLASSE DE TROISIÈME ANNÉE

- □ Equations du premier degré à une inconnue.
- □ Système de deux équations du premier degré à deux inconnues.
- □ Inéquations du premier degré à une inconnue.
- □ Calcul numérique - Expressions algébriques - Polynômes.

CLASSE DE QUATRIÈME ANNÉE

- □ Calcul numérique - Expressions algébriques - Polynômes.
- □ Deuxième degré.

Géométrie et trigonométrie

CLASSE DE TROISIÈME ANNÉE

- □ Théorème de Pythagore - Nombres irrationnels.
- □ Configurations de Thalès - Rapports et proportions.

- Angles.
- Cas d'isométrie des triangles.
- Cas de similitude des triangles.
- Trigonométrie du triangle rectangle.

CLASSE DE QUATRIÈME ANNÉE

- Calcul vectoriel.
- Nombres et trigonométrie.
- Géométrie.

Traitement numérique de données

CLASSE DE QUATRIÈME ANNÉE

►► Extraits du programme

Calcul vectoriel

Compétences à atteindre	Matières	Conseils méthodologiques
Décomposer un vecteur suivant les directions du repère et lui associer un couple de nombres. Interpréter géométriquement l'égalité de deux vecteurs en se référant à des configurations de parallélogrammes. Donner la signification des notations $\vec{0}, -\vec{u}, 2\vec{u}$. Construire la somme et la différence de deux vecteurs et leur associer un couple de nombres. Utiliser la droite graduée ou le théorème de Thalès pour construire le produit d'un vecteur par un nombre et lui associer un couple de nombres.	Vecteur : composantes, somme, produit par un nombre. Propriétés. Relation de Chasles.	Le vecteur sera associé d'une part à un couple de nombres et d'autre part à une translation. L'addition des couples de nombres sera interprétée au moyen de configurations de parallélogrammes. On en déduira la définition et les propriétés de l'addition des vecteurs. La multiplication par un nombre sera interprétée au moyen de configurations de Thalès.
Ecrire et démontrer des propriétés d'alignement, de parallélisme. Exprimer en langage vectoriel le parallélisme de droites et l'alignement de points.	Applications.	On utilisera les vecteurs pour : ▪ exprimer de manière concise certaines propriétés ; ▪ démontrer des propriétés géométriques (par exemple : alignement, parallélisme, centre de gravité d'un triangle). On résoudra graphiquement des problèmes de force ou de vitesse en tenant compte des contraintes physiques.
Calculer un produit scalaire. Interpréter géométriquement des relations vectorielles. Démontrer des propriétés géométriques en utilisant le calcul vectoriel.	Produit scalaire dans le plan et ses propriétés.	On fera référence à l'utilisation du produit scalaire en physique par exemple lors du calcul du travail d'une force. On exprimera le produit scalaire sous des formes faisant intervenir : ▪ la fonction cosinus, ▪ la projection d'un vecteur sur l'autre, ▪ les composantes dans un repère orthonormé. Les propriétés seront justifiées dans un contexte géométrique. Le théorème généralisé de Pythagore sera exprimé en terme de produit scalaire.

Géométrie

Compétences à atteindre	Matières	Conseils méthodologiques
Utiliser les lieux de base et les propriétés connues pour effectuer une construction ou rechercher un lieu. Dans une recherche de lieu discerner ce qui est mobile de ce qui reste fixe.	Problèmes de construction. Recherche de quelques lieux géométriques.	Beaucoup de constructions se ramènent à déterminer l'intersection de deux lieux de base, chaque lieu ne faisant intervenir qu'une contrainte du problème. Par lieux de base, on entend : ▪ ensembles de points situés à une distance donnée d'un point, d'une droite. ▪ ensembles de points équidistants de deux points, de deux droites. Selon le cas traité, on utilisera des propriétés des figures, des transformations du plan ou éventuellement une traduction analytique des propriétés. On fera le lien avec d'autres points du programme (arc capable, parabole). La caractérisation d'un ensemble de points exige des conditions nécessaire et suffisante. Dans certains cas, on pourra se limiter à déterminer des conditions nécessaires pour la découverte d'un ensemble qui contient le lieu. Cela sera mentionné dans les conclusions. On établira les équations de ces lieux géométriques en exprimant des égalités de distances. Lors des exercices, on montrera l'importance du choix d'un repère.
A partir de leurs définitions géométriques, établir, dans des cas numériques, les équations des lieux cités dans le programme.	Médiatrice d'un segment donné. Cercle de centre et de rayon donnés. Parabole de foyer et de directrice parallèle à Ox donnés.	

3 Ancien programme du troisième degré de l'enseignement

►► Plan de matières

Géométrie

CLASSE DE CINQUIÈME ANNÉE

- □ Calcul vectoriel.
- □ Géométrie.

CLASSE DE SIXIÈME ANNÉE

- □ Géométrie plane.
- □ Géométrie analytique dans l'espace.

Calcul matriciel, déterminants, systèmes d'équations du premier degré

CLASSE DE CINQUIÈME ANNÉE

- □ Calcul matriciel.
- □ Déterminants.
- □ Résolutions de systèmes $m \times n$.

Trigonométrie

CLASSE DE CINQUIÈME ANNÉE

- □ Formules.
- □ Equations.
- □ Inéquations.

Analyse

CLASSE DE CINQUIÈME ANNÉE

- □ Graphiques de fonctions.
- □ Limites de fonctions et asymptotes.
- □ Dérivées.

CLASSE DE SIXIÈME ANNÉE

- □ Fonctions cyclométriques.
- □ Primitives et intégrales.
- □ Fonctions logarithmiques et exponentielles.

Algèbre

CLASSE DE SIXIÈME ANNÉE

- □ Nombres complexes.

Probabilités et statistiques

CLASSE DE SIXIÈME ANNÉE

- □ Statistiques à deux variables.
- □ Analyse combinatoire.
- □ Cacul des probabilités.

►► Extraits du programme

Calcul vectoriel

Compétences à atteindre	Matières	Conseils méthodologiques
Décomposer un vecteur suivant les directions du repère et lui associer un triplet de nombres.	Extension à l'espace des notions vues en quatrième : vecteur, composantes d'un vecteur, somme de vecteurs, produit d'un vecteur par un nombre. Propriétés. Relation de Chasles.	Le vecteur sera associé d'une part à un triplet de nombres, d'autre part à une translation. Le but est de traiter vectoriellement quelques configurations de l'espace.
Calculer un produit scalaire. Caractériser en termes vectoriels différentes configurations de l'espace. Interpréter géométriquement des relations vectorielles. Démontrer des propriétés géométriques en utilisant le calcul vectoriel.	Extension du produit scalaire et de ses propriétés à l'espace.	Les propriétés seront justifiées dans un contexte géométrique. On fera référence à l'utilisation du produit scalaire en physique par exemple lors du calcul du travail d'une force.

Géométrie.

Compétences à atteindre	Matières	Conseils méthodologiques
	Définition de la projection parallèle à une droite d'une figure de l'espace sur un plan (non parallèle à la droite). Représentations d'objets de l'espace en perspective cavalière. Caractérisation d'un plan, d'une droite.	Il s'agit de consolider les acquis du premier degré, afin de disposer d'un outil de représentation pour aborder l'incidence et le parallélisme.
Repérer sur une représentation plane des droites sécantes, gauches, parallèles, des plans sécants et parallèles.	Positions relatives de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans.	
Comprendre et savoir expliquer les énoncés de propriétés d'incidence et de parallélisme. Enoncer et démontrer les deux critères de parallélisme cités dans le programme.	Critères de parallélisme d'une droite et d'un plan, de deux plans. Propriétés usuelles du parallélisme de deux droites, de deux plans, d'une droite et d'un plan. Généralisation du théorème de Thalès et de sa réciproque à l'espace.	Le contexte permettra de revenir sur la distinction entre condition nécessaire et condition suffisante et fournira l'occasion de pratiquer la démonstration par l'absurde.
Déterminer un point de percée et construire de façon raisonnée une section d'un cube, d'un tétraèdre ou d'un parallélépipède rectangle par un plan défini par trois points en justifiant les différentes étapes.	Problèmes de constructions dans l'espace : ▪ point de percée, ▪ section plane.	Les problèmes de constructions peuvent servir à introduire les propriétés d'incidence et ensuite à les faire fonctionner dans des démonstrations. La construction du modèle géométrique fera clairement apparaître les propriétés admises à partir de l'observation et celles qui seront démontrées. Une attention particulière sera portée aux règles de la logique : contraposition d'implications ou d'équivalences, réciproques, démonstrations par l'absurde, critères faisant intervenir des conditions nécessaires et suffisantes. Une synthèse des résultats acquis sera établie.

Géométrie (suite).

Compétences à atteindre	Matières	Conseils méthodologiques
Enoncer et démontrer les critères d'orthogonalité d'une droite et d'un plan, de deux plans. Justifier la construction de la perpendiculaire commune à deux droites gauches. Caractériser le plan médiateur comme lieu géométrique et l'utiliser dans des problèmes de distances.	Orthogonalité.	Les critères d'orthogonalité d'une droite et d'un plan, de deux plans seront démontrés. On étudiera au moins la perpendiculaire commune à deux droites gauches et le plan médiateur.
Définir une homothétie et savoir construire l'image d'une figure par une homothétie.	Homothéties : Définition ; image d'une figure par une homothétie.	
Identifier ou caractériser la composée de deux transformations.	Transformations et loi de composition de transformations.	On examinera les propriétés de la loi de composition de quelques transformations dans le but de disposer d'exemples et de contre-exemples de nature géométrique pour illustrer la notion de groupe. Une classification exhaustive des transformations n'est pas au programme. On choisira de traiter au moins un ensemble de transformations parmi les ensembles suivants : isométries, homothéties, isométries qui laissent invariante une figure plane ou de l'espace.
Restituer une démonstration et identifier le mode de raisonnement. Démontrer une propriété nouvelle en exploitant des modes de raisonnement déjà exercés. Rédiger et présenter avec clarté, rigueur et concision une démonstration de type géométrique.	Démonstrations qui utilisent : ▪ des propriétés de figures, ▪ des transformations, ▪ des vecteurs.	Quelques problèmes concernant, par exemple, l'incidence, l'alignement, les points cocycliques, les lieux de points, les distances, l'orthogonalité, le barycentre, les isométries du cube, permettront d'exercer le raisonnement déductif et la rédaction. Lors des démonstrations et lors des résolutions d'exercices, on insistera sur la clarté et la concision de l'argumentation ainsi que sur la qualité de l'expression tant orale qu'écrite.

2. GEOMETRIE ANALYTIQUE DANS L'ESPACE.

Compétences à atteindre	Matières	Conseils méthodologiques
Etablir les équations vectorielles, paramétriques ou cartésiennes d'une droite, d'un plan à partir d'éléments qui les déterminent. Calculer analytiquement la distance entre deux points, d'un point à une droite, d'un point à un plan.	Géométrie analytique des plans et des droites. Equations vectorielle(s), paramétrique(s), cartésienne(s) d'un plan, d'une droite. Distance entre deux points. Distance d'un point à une droite. Distance d'un point à un plan.	Quelques problèmes d'incidence, de parallélisme, d'orthogonalité de droites, de plans faisant intervenir des calculs simples seront traités et interprétés géométriquement. Plusieurs de ces exercices peuvent conduire à la résolution et à la discussion de systèmes du premier degré. On pourra aussi rechercher analytiquement la distance entre deux droites gauches.

3. GEOMETRIE PLANE

Compétences à atteindre	Matières	Conseils méthodologiques
Définir les coniques. Reconnaître une conique à son équation cartésienne réduite, à son équation focale. Donner les caractéristiques d'une conique à partir de l'équation cartésienne réduite ou de l'équation focale.	Coniques : Définitions géométriques et équations cartésiennes réduites.	Les coniques seront définies au moyen d'un foyer, de la directrice associée et de l'excentricité. Les coniques centrées seront définies par leur équation bifocale. On établira le lien entre les 2 définitions. On montrera que l'ellipse, l'hyperbole, la parabole sont des sections planes d'un cône. On signalera que l'ellipse est une transformée du cercle par une affinité.
Enoncer et démontrer les propriétés optiques des coniques. Traiter diverses applications relatives aux coniques en faisant intervenir la géométrie, l'algèbre et l'analyse.	Applications : ▪ intersection d'une droite et d'une conique, ▪ tangentes à une conique, ▪ quelques procédés de construction de coniques et de tangentes, ▪ propriété optique d'un foyer d'une conique, ▪ changement de repère, ▪ quelques exemples numériques de réduction d'une équation du deuxième degré à deux variables, ▪ quelques exemples de représentation de coniques en coordonnées polaires et sous forme paramétrique.	
Traiter des problèmes de lieux et de constructions de courbes données par leurs équations paramétriques analogues à ceux rencontrés en classe.	Problèmes de lieux et constructions de courbes données par leurs équations paramétriques.	Des problèmes de géométrie ou de cinématique seront l'occasion d'étudier quelques propriétés (axe et centre de symétrie, tangente, …) de courbes caractérisées par leurs équations paramétriques telles que cycloïdes, etc.

4 Programme du deuxième degré

▶▶ Plan de matières

Géométrie

CLASSE DE TROISIÈME ANNÉE

- □ Figures isométriques et figures semblables.
- □ Triangle rectangle.

CLASSE DE QUATRIÈME ANNÉE

- □ Géométrie dans l'espace.
- □ Géométrie analytique plane.

Algèbre

CLASSE DE TROISIÈME ANNÉE

- □ Premier degré.
- □ Outils algébriques.

Analyse

CLASSE DE TROISIÈME ANNÉE

- □ Approche graphique d'une fonction.

CLASSE DE QUATRIÈME ANNÉE

- □ Fonctions de référence.
- □ Deuxième degré.

Trigonométrie

CLASSE DE QUATRIÈME ANNÉE

Statistiques

CLASSE DE QUATRIÈME ANNÉE

- □ Statistique descriptive.

▶▶ Extraits du programme

<table>
<tr><th colspan="3">Mathématiques : 2e degré de transition (4e année)</th></tr>
<tr><td>4UAA2</td><td>Unité d'acquis d'apprentissage</td><td>Géométrie dans l'espace</td></tr>
<tr><td colspan="3">Compétences à développer
VISUALISER DANS L'ESPACE DES OBJETS À PARTIR DE LEURS REPRÉSENTATIONS PLANES
CONSTRUIRE DES REPRÉSENTATIONS PLANES D'OBJETS
JUSTIFIER DES CONSTRUCTIONS</td></tr>
<tr><td colspan="2">Processus</td><td>Ressources</td></tr>
<tr><td>Appliquer
Représenter dans un plan un objet de l'espace
Construire un point de percée
Construire une section plane</td><td>Transférer
Justifier la construction d'un point de percée, d'une section plane
Vérifier la coplanarité de points, de droites
Construire l'ombre d'un objet
Interpréter une représentation plane d'un objet de l'espace</td><td rowspan="2">Représentation plane d'un objet de l'espace
Comparaison entre perspectives cavalière et centrale
Caractérisation d'une droite et d'un plan
Positions relatives de deux droites, de deux plans, d'une droite et d'un plan
Propriétés utiles aux constructions des points de percée et des sections planes

Outil logique (utilisation en contexte)
Implication

Vocabulaire ensembliste (utilisation en contexte)
Appartenance, inclusion, intersection</td></tr>
<tr><td colspan="2">Connaitre
Repérer les positions relatives de deux droites, de deux plans, d'une droite et d'un plan</td></tr>
<tr><td colspan="3">Stratégies transversales
Visualiser dans l'espace
Décoder des représentations planes d'objets de l'espace
Justifier et raisonner
Utiliser des logiciels de géométrie dynamique
Tracer avec précision
Dégager des constructions mathématiques dans une œuvre d'art</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">Mathématiques : 2e degré de transition (4e année)</th></tr>
<tr><td>4UAA6</td><td>Unité d'acquis d'apprentissage</td><td>Géométrie analytique plane</td></tr>
<tr><td colspan="3">Compétences à développer
TRADUIRE ANALYTIQUEMENT DES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES</td></tr>
<tr><td colspan="2">Processus</td><td>Ressources</td></tr>
<tr><td>Appliquer
Construire la somme de deux vecteurs
Représenter un multiple de vecteur
Décomposer un vecteur selon deux directions données
Rechercher les équations vectorielle et cartésienne d'une droite
Rechercher l'équation d'une droite comprenant deux points, comprenant un point et de direction donnée
Calculer la distance d'un point à une droite
Rechercher l'équation cartésienne d'un cercle
Rechercher le centre et le rayon d'un cercle d'équation donnée
Construire une parabole de foyer et de directrice donnée
Rechercher une intersection entre droites, entre droite et cercle</td><td>Transférer
Vérifier une propriété géométrique élémentaire par une méthode analytique
Résoudre un problème de géométrie analytique plane
Rechercher les coordonnées de points d'intersection de droites remarquables d'un triangle en limitant la technicité ou en utilisant l'outil informatique</td><td rowspan="2">Vecteurs
Addition de deux vecteurs
Multiplication d'un vecteur par un réel
Vecteurs colinéaires
Repère orthonormé
Composantes d'un vecteur
Vecteur directeur d'une droite
Équations vectorielle, paramétriques et cartésienne d'une droite
Droite d'équation $ax+by+c=0$
Coefficient angulaire d'une droite
Condition de parallélisme et de perpendicularité de deux droites
Distance entre un point et une droite
Milieu d'un segment
Définition de la parabole en tant que lieu géométrique
Équation cartésienne d'une parabole d'axe vertical
Équation cartésienne d'un cercle</td></tr>
<tr><td colspan="2">Connaitre
Associer un lieu à son expression analytique
Représenter un vecteur dans le plan</td></tr>
<tr><td colspan="3">Stratégies transversales
Construire une démarche de pensée
Utiliser des logiciels de géométrie dynamique</td></tr>
</table>

5 Programme du troisième degré

▶▶ Plan de matières

Géométrie

CLASSE DE CINQUIÈME ANNÉE

- □ Géométrie vectorielle du plan et de l'espace.
- □ Géométrie analytique et synthétique de l'espace.

CLASSE DE SIXIÈME ANNÉE

- □ Lieux géométriques.

Algèbre

CLASSE DE SIXIÈME ANNÉE

- □ Nombres complexes.

Analyse

CLASSE DE CINQUIÈME ANNÉE

- □ Suites.
- □ Asymptotes, limites et continuité.
- □ Dérivées.
- □ Fonctions trigonométriques.

CLASSE DE SIXIÈME ANNÉE

- □ Intégrales.
- □ Fonctions exponentielles et logarithmiques.
- □ Fonctions réciproques et cyclométriques.

Statistiques et probabilités

CLASSE DE CINQUIÈME ANNÉE

- □ Statistique à deux variables.

CLASSE DE SIXIÈME ANNÉE

- □ Probabilité.
- □ Lois de probabilités.

▶▶ Extraits du programme

<table>
<tr><th colspan="3">Mathématiques pour scientifiques : 3e degré de transition (5e année)</th></tr>
<tr><td>5S UAA6</td><td>Unité d'acquis d'apprentissage</td><td>Géométrie vectorielle du plan et de l'espace</td></tr>
<tr><td colspan="3">Compétences à développer
UTILISER L'OUTIL VECTORIEL POUR CALCULER ET DÉMONTRER</td></tr>
<tr><td colspan="2">Processus</td><td>Ressources</td></tr>
<tr><td>Appliquer
Associer, dans un repère donné, un point de l'espace à sa coordonnée et réciproquement
Construire une combinaison linéaire de vecteurs
Calculer un produit scalaire
Calculer l'amplitude d'un angle, la distance entre deux points, la norme d'un vecteur
Vérifier l'orthogonalité de deux vecteurs</td><td>Transférer
Démontrer une propriété géométrique à l'aide du calcul vectoriel ou du produit scalaire (alignement, parallélisme, orthogonalité)</td><td rowspan="2">Vecteurs coplanaires
Combinaison linéaire de vecteurs
Repère de l'espace
Composantes d'un vecteur
Produit scalaire
Propriétés du produit scalaire
Norme d'un vecteur
Vecteurs orthogonaux</td></tr>
<tr><td colspan="2">Connaitre
Associer une situation géométrique et une relation vectorielle
Établir les liens entre les trois manières de définir le produit scalaire
Démontrer le théorème d'Al-Kashi à l'aide du calcul vectoriel</td></tr>
<tr><td colspan="3">Stratégies transversales
Mobiliser dans d'autres disciplines les concepts installés
Rédiger, argumenter, structurer, démontrer
Prendre conscience de la diversité des outils et en choisir un de manière raisonnée
Articuler les différents registres de représentation sémiotique d'un objet
Esquisser des figures de l'espace</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">Mathématiques pour scientifiques : 3e degré de transition (5e année)</th></tr>
<tr><td>5S UAA7</td><td>Unité d'acquis d'apprentissage</td><td>Géométrie synthétique et analytique de l'espace</td></tr>
<tr><td colspan="3">Compétences à développer
DÉMONTRER DES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES EN UTILISANT DES OUTILS SYNTHÉTIQUES ET/OU ANALYTIQUES
CARACTÉRISER ANALYTIQUEMENT DES DROITES ET DES PLANS
RÉSOUDRE UN PROBLÈME GÉOMÉTRIQUE EN UTILISANT DES ÉQUATIONS DE PLANS ET DE DROITES</td></tr>
<tr><td colspan="2">Processus</td><td>Ressources</td></tr>
<tr><td>Appliquer
Déterminer des équations vectorielles, paramétriques et cartésiennes de droites et de plans.
Représenter, à partir de leurs équations, des droites et des plans parallèles à un des axes du repère
Déterminer l'équation d'une droite ou d'un plan à partir de sa représentation dans un repère
Calculer la distance entre deux points, un point et une droite, entre un point et un plan, entre deux droites parallèles, entre deux plans parallèles, entre deux droites gauches.
Rechercher l'équation d'un plan médiateur
Déterminer l'intersection de trois plans, de deux droites, d'une droite et d'un plan et en déduire leurs positions relatives</td><td>Transférer
Démontrer une propriété géométrique par une méthode synthétique
Démontrer une propriété géométrique par une méthode analytique
Discuter, en fonction d'un paramètre, l'intersection d'une droite avec une famille de plans ou d'un plan avec une famille de droites</td><td rowspan="2">Point de vue synthétique
Droites orthogonales
Droite perpendiculaire à un plan
Plans perpendiculaires
Critère d'orthogonalité de deux droites
Critère de perpendicularité d'une droite et d'un plan, de deux plans
Construction de la perpendiculaire commune à deux droites gauches
Distance
Plan médiateur et propriété
Point de vue analytique
Vecteur directeur d'une droite
Vecteurs directeurs d'un plan
Équations vectorielle, paramétriques, cartésiennes d'une droite
Équations vectorielle, paramétriques, cartésiennes d'un plan
Équation d'un plan sous forme d'un déterminant
Propriétés du déterminant utiles à la détermination de l'équation d'un plan
Calcul d'un déterminant par la méthode des mineurs
Vecteur normal à un plan
Condition de parallélisme et d'orthogonalité de deux droites
Condition de parallélisme et de perpendicularité de deux plans
Condition de parallélisme et de perpendicularité d'une droite et d'un plan
Distance entre deux points, entre un point et un plan</td></tr>
<tr><td colspan="2">Connaitre
Identifier des droites orthogonales, des droites perpendiculaires, des plans et droites perpendiculaires dans un polyèdre</td></tr>
<tr><td colspan="3">Stratégies transversales
Rédiger, argumenter, structurer, démontrer
Mobiliser l'outil algébrique
Utiliser l'outil informatique
Esquisser des figures de l'espace</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">Mathématiques pour scientifiques : 3e degré de transition (6e année)</th></tr>
<tr><td>6S UAA6</td><td>Unité d'acquis d'apprentissage</td><td>Lieux géométriques</td></tr>
<tr><td colspan="3">Compétences à développer
DÉTERMINER L'ÉQUATION D'UN LIEU GÉOMÉTRIQUE ET EN DÉTERMINER LA NATURE
RÉSOUDRE UN PROBLÈME QUI SE DÉFINIT PAR UN LIEU GÉOMÉTRIQUE</td></tr>
<tr><td colspan="2">Processus</td><td>Ressources</td></tr>
<tr><td>Appliquer
Déterminer l'équation d'une conique
Déterminer les éléments caractéristiques d'une conique
Rechercher l'équation d'une tangente à une conique
Tracer une conique (aux instruments et à l'aide d'un logiciel)</td><td>Transférer
Déterminer l'équation d'un lieu, l'interpréter et le représenter
Résoudre un problème lié aux coniques</td><td rowspan="2">Méthode de traduction d'un lieu défini à partir d'une propriété métrique
Méthode de recherche d'un lieu défini par des génératrices
Intersection d'un cône et d'un plan
Définition, construction et équation d'une ellipse, d'une hyperbole et d'une parabole d'axes de symétrie parallèles aux axes du repère
Définition unifocale d'une conique et cohérence entre les définitions
Éléments caractéristiques d'une conique
Effet d'une translation sur l'équation d'une conique
Propriétés optiques des coniques</td></tr>
<tr><td colspan="2">Connaitre
Identifier une conique d'après son équation
Identifier les éléments caractéristiques d'une conique
Illustrer et décrire les propriétés optiques des coniques</td></tr>
<tr><td colspan="3">Stratégies transversales
Rédiger, argumenter, structurer, démontrer
Utiliser des logiciels de géométrie dynamique
Situer les apports mathématiques dans l'histoire et dans les différentes cultures
Mobiliser dans d'autres disciplines les concepts installés
Mobiliser l'outil algébrique</td></tr>
</table>

Annexe B

Les manuels scolaires : résolution d'une tâche du *CQFD*

Nous présentons ici la résolution d'un exercice se trouvant dans la partie « résoudre un problème » dans le manuel scolaire *CQFD* (Annoye et al., 2014, p. 203–204 ; Annoye et al., 2019, p. 416) dont l'énoncé est le suivant.

Section plane d'un cube

On considère un cube $OABCDEFG$ dont les arêtes sont de longueur 3.

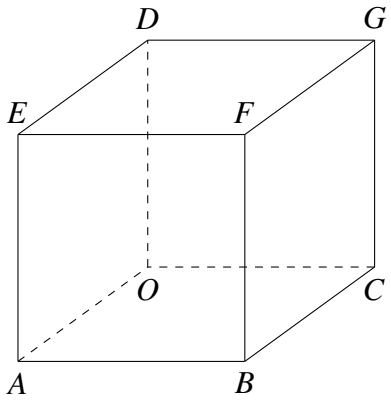
① Dessiner le cube.

② Placer sur les arêtes les points P, Q et R définis par les relations suivantes : $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{DR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DG}$.

③ Construire la section plane du cube par le plan (PQR).

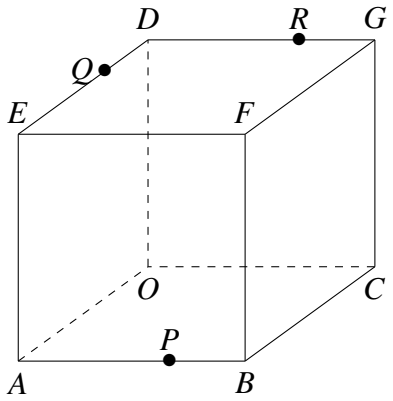
④ Vérifier la précision du tracé de la section en calculant les coordonnées des points d'intersection de ce plan avec les arêtes du cube.

① Soit $OABCDEFG$ un cube d'arêtes de longueur 3.



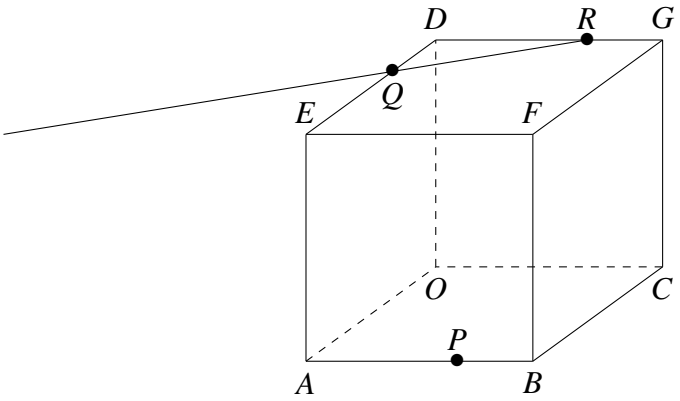
② La relation $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Puisque la longueur de l'arête AB est de 3, le point P est situé à une distance 2 du point A

sur l'arete AB. Par un même argument, nous pouvons déduire que le point Q est placé à une distance de 2 du point F sur l'arête FG et le point R est à une distance de 1 du point D sur l'arête DG. Nous pouvons maintenant placer les points sur le cube.

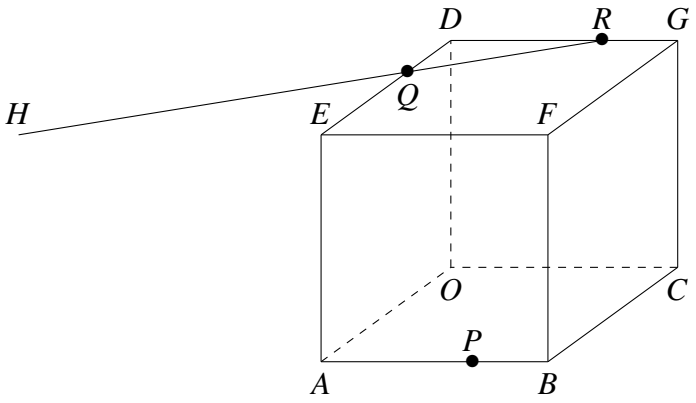


③ Afin de tracer la section de ce cube par le plan PQR, nous cherchons à déterminer l'intersection de ce plan avec chacune des faces du cube.

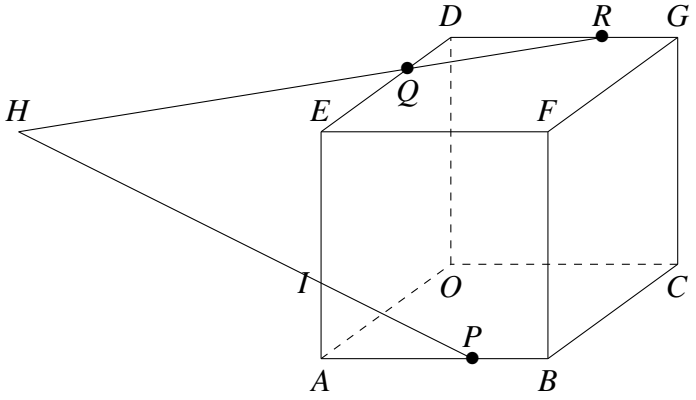
Puisque les points Q et R appartiennent à la face $DEFG$ et au plan PQR, la droite QR est incluse à la fois dans le plan PQR et dans la face $DEFG$. Cette droite représente l'intersection entre le plan et la face supérieure du cube.



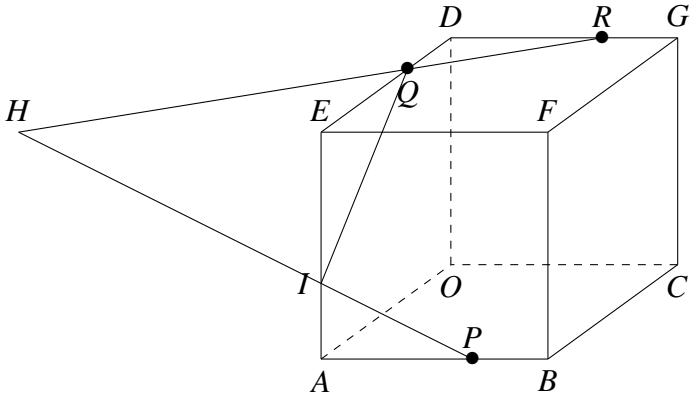
Pour déterminer l'intersection entre le plan PQR et la face $ABFE$, nous cherchons le point de percée de la droite QR dans la face $ABFE$. Pour ce faire, nous devons trouver un plan (auxiliaire) contenant la droite QR, chercher la droite d d'intersection entre ce plan et la face $ABFE$ et déterminer le point d'intersection entre ces deux droites. La droite QR est dans le plan auxiliaire $DEFG$. L'intersection entre ce plan et la face avant du cube est la droite EF. L'intersection entre la droite QR et la droite EF donne le point de percée H de la droite QR dans le face $ABFE$.



Comme les points H et P appartiennent à la fois au plan PQR et à la face $ABFE$, la droite HP représente l'intersection entre le plan et face avant du cube. De plus, les droites HP et AE sont coplanaires. Elles sont donc sécantes au point I.

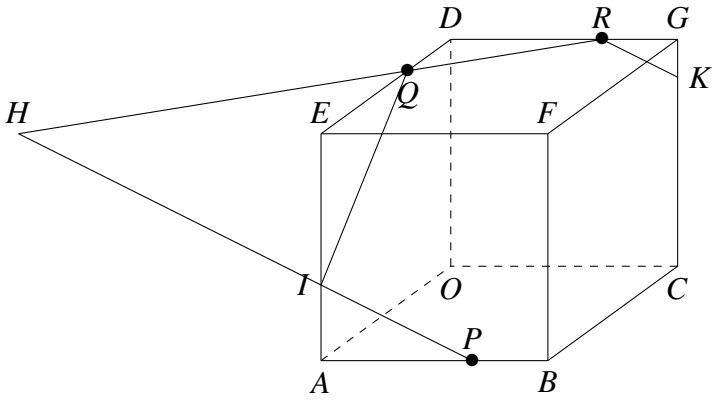


Puisque les points Q et I appartiennent à la fois au plan PQR et à la face $AEDO$, la droite QI décrit l'intersection entre le plan et la face gauche du cube.

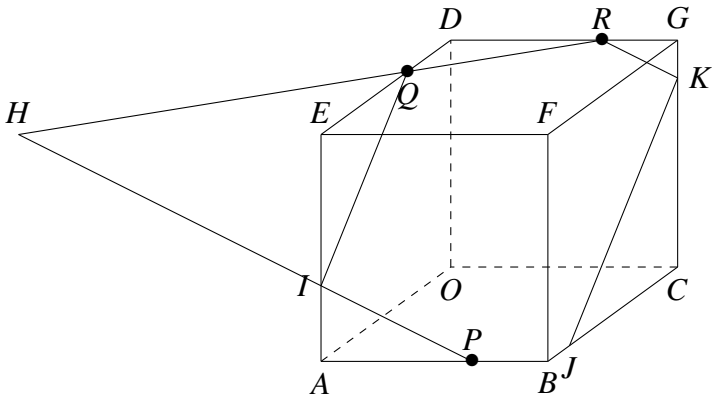


Nous savons qu'un plan coupant deux plans parallèles, les coupe suivant deux droites parallèles. Ainsi, comme les faces $ABFE$ et $ODGC$ sont parallèles, l'intersection du plan PQR avec la face arrière du cube est une droite parallèle à la

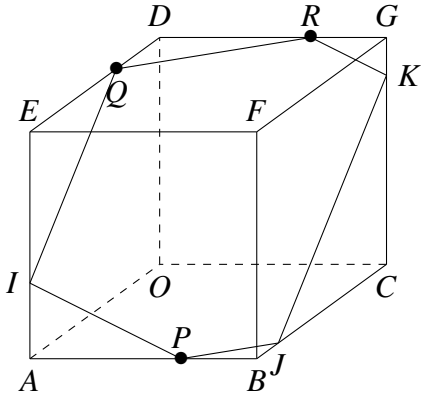
droite IP passant par le point R. Cette droite et la droite GC sont coplanaires. Elles sont donc sécantes au point K.



Par le même argument, comme les faces $AEDO$ et $BCGF$ sont parallèles, l'intersection du plan PQR avec la face droite du cube est une droite parallèle à la droite QI passant par le point K. Cette droite et la droite BC sont coplanaires. Elles sont donc sécantes au point J.



Puisque les points P et J appartiennent à la fois au plan PQR et à la face $ABCO$, la droite PJ décrit l'intersection entre le plan et la face inférieure du cube. Donc, la section du cube par le plan PQR est alors représentée par $QIPJKR$.



④ Pour vérifier notre construction, nous allons déterminer une équation du plan *PQR* et une équation de chaque arête du cube. Nous pouvons ensuite chercher l'intersection du plan avec chacune des arêtes en résolvant un système de deux équations à trois inconnues. Pour cela, nous devons choisir un repère. Posons le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$.

Les coordonnées des différents points peuvent être déterminées. Nous avons :

$$\begin{array}{c} O(0,0,0); \quad A(3,0,0); \quad B(3,3,0); \quad C(0,3,0); \\ D(0,0,3); \quad E(3,0,3); \quad F(3,3,3); \quad G(0,3,3); \\ P(3,2,0); \quad Q(1,0,3); \quad R(0,2,3). \end{array}$$

Le plan *PQR* passe par le point *P* et a comme vecteurs directeurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$. Une équation paramétrique du plan *PQR* est alors $(x,y,z) = (3,2,0) + \lambda(-2,-2,3) + \mu(-3,0,3)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Par facilité, nous choisissons d'éliminer les deux paramètres pour obtenir une équation cartésienne du plan *PQR*.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3-2\lambda-3\mu \\ y = 2-2\lambda \\ z = 3\lambda+3\mu \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3-2\lambda-3\mu \\ \frac{y-2}{-2} = \lambda \\ z = 3\lambda+3\mu \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-y-1 = -3\mu \\ z = \frac{-3}{2}(y-2)+3\mu \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-3}{2}y + 3 - x + y + 1 \Leftrightarrow z = \frac{-1}{2}y + 4 + x \Leftrightarrow 2z = -y + 2x + 8$$

Une équation cartésienne du plan *PQR* est $2x+y+2z = 8$.

Une équation paramétrique de chaque arête peut être donnée avec $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ll} OA \equiv (x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(3,0,0); & AB \equiv (x,y,z) = (3,0,0) + \lambda(0,3,0); \\ BC \equiv (x,y,z) = (0,3,0) + \lambda(-3,0,0); & OC \equiv (x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(0,3,0); \\ EF \equiv (x,y,z) = (3,0,3) + \lambda(0,3,0); & DE \equiv (x,y,z) = (0,0,3) + \lambda(3,0,0); \\ FG \equiv (x,y,z) = (0,3,3) + \lambda(-3,0,0); & GD \equiv (x,y,z) = (0,0,3) + \lambda(0,3,0); \\ AE \equiv (x,y,z) = (3,0,0) + \lambda(0,0,3); & BF \equiv (x,y,z) = (3,3,0) + \lambda(0,0,3); \\ CG \equiv (x,y,z) = (0,3,0) + \lambda(0,0,3); & OD \equiv (x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(0,0,3). \end{array}$$

L'intersection entre le plan PQR et l'arête OA est déterminée en résolvant le système suivant : $\begin{cases} 2x+y+2z=8 \\ (x,y,z)=(0,0,0)+\lambda(3,0,0) \end{cases}$.
Nous avons : $6\lambda+0+0=8 \Leftrightarrow \lambda=\frac{4}{3}$.
Les coordonnées du point d'intersection entre le plan et la droite sont : $(4,0,0)$. Ce point est à l'extérieur du cube.

L'intersection entre le plan PQR et l'arête AB est déterminée en résolvant le système suivant : $\begin{cases} 2x+y+2z=8 \\ (x,y,z)=(3,0,0)+\lambda(0,3,0) \end{cases}$.
Nous avons : $6+3\lambda+0=8 \Leftrightarrow \lambda=\frac{2}{3}$.
Les coordonnées du point d'intersection entre le plan et la droite sont : $(3,2,0)$. Ce sont bien les coordonnées du point P.

L'intersection entre le plan PQR et l'arête BC est déterminée en résolvant le système suivant :
$\begin{cases} 2x+y+2z=8 \\ (x,y,z)=(0,3,0)+\lambda(-3,0,0) \end{cases}$.
Nous avons : $-6\lambda+3+0=8 \Leftrightarrow \lambda=\frac{-5}{6}$.
Les coordonnées du point d'intersection entre le plan et la droite sont : $(\frac{5}{2},3,0)$. Ce sont les coordonnées du point J.

L'intersection entre le plan PQR et l'arête OC est déterminée en résolvant le système suivant :
$\begin{cases} 2x+y+2z=8 \\ (x,y,z)=(0,0,0)+\lambda(0,3,0) \end{cases}$.
Nous avons : $0+3\lambda+0=8 \Leftrightarrow \lambda=\frac{8}{3}$.
Les coordonnées du point d'intersection entre le plan et la droite sont : $(0,8,0)$. Ce point est à l'extérieur du cube.

L'intersection entre le plan PQR et l'arête EF est déterminée en résolvant le système suivant :
$\begin{cases} 2x+y+2z=8 \\ (x,y,z)=(3,0,3)+\lambda(0,3,0) \end{cases}$.
Nous avons : $6+3\lambda+6=8 \Leftrightarrow \lambda=\frac{-4}{3}$.
Les coordonnées du point d'intersection entre le plan et la droite sont : $(3,-4,3)$. Ce point est à l'extérieur du cube. Il s'agit du point H.

L'intersection entre le plan PQR et l'arête DE est déterminée en résolvant le système suivant :
$\begin{cases} 2x+y+2z=8 \\ (x,y,z)=(0,0,3)+\lambda(3,0,0) \end{cases}$.
Nous avons : $6\lambda+0+6=8 \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{3}$.
Les coordonnées du point d'intersection entre le plan et la droite sont : $(1,0,3)$. Ce sont bien les coordonnées du point Q.

L'intersection entre le plan PQR et l'arête FG est déterminée en résolvant le système suivant :
$\begin{cases} 2x+y+2z=8 \\ (x,y,z)=(0,3,3)+\lambda(-3,0,0) \end{cases}$.

Nous avons : $-6\lambda+3+6=8 \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{6}$.
Les coordonnées du point d'intersection entre le plan et la droite sont : $(-\frac{1}{2},3,3)$. Ce point est à l'extérieur du cube.

L'intersection entre le plan *PQR* et l'arête *GD* est déterminée en résolvant le système suivant :
$\begin{cases} 2x+y+2z=8 \\ (x,y,z)=(0,0,3)+\lambda(0,3,0) \end{cases}$.
Nous avons : $0+3\lambda+6=8 \Leftrightarrow \lambda=\frac{2}{3}$.
Les coordonnées du point d'intersection entre le plan et la droite sont : $(0,2,3)$. Ce sont bien les coordonnées du point *R*.

L'intersection entre le plan *PQR* et l'arête *AE* est déterminée en résolvant le système suivant :
$\begin{cases} 2x+y+2z=8 \\ (x,y,z)=(3,0,0)+\lambda(0,0,3) \end{cases}$.
Nous avons : $6+0+6\lambda=8 \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{3}$.
Les coordonnées du point d'intersection entre le plan et la droite sont : $(3,0,1)$. Ce sont les coordonnées du point *I*.

L'intersection entre le plan *PQR* et l'arête *BF* est déterminée en résolvant le système suivant :
$\begin{cases} 2x+y+2z=8 \\ (x,y,z)=(3,3,0)+\lambda(0,0,3) \end{cases}$.
Nous avons : $6+3+6\lambda=8 \Leftrightarrow \lambda=\frac{-1}{6}$.
Les coordonnées du point d'intersection entre le plan et la droite sont : $(3,3,-\frac{1}{2})$. Ce point est à l'extérieur du cube.

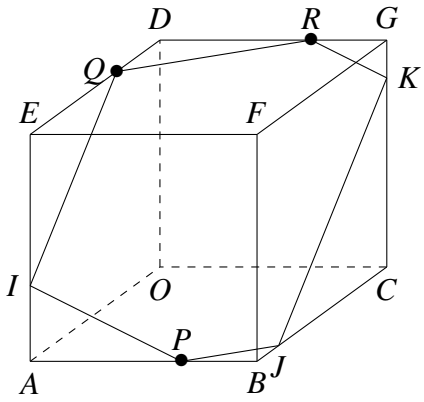
L'intersection entre le plan *PQR* et l'arête *CG* est déterminée en résolvant le système suivant :
$\begin{cases} 2x+y+2z=8 \\ (x,y,z)=(0,3,0)+\lambda(0,0,3) \end{cases}$.
Nous avons : $0+3+6\lambda=8 \Leftrightarrow \lambda=\frac{5}{6}$.
Les coordonnées du point d'intersection entre le plan et la droite sont : $(0,3,\frac{5}{2})$. Ce sont les coordonnées du point *K*.

L'intersection entre le plan *PQR* et l'arête *OD* est déterminée en résolvant le système suivant :
$\begin{cases} 2x+y+2z=8 \\ (x,y,z)=(0,0,0)+\lambda(0,0,3) \end{cases}$.
Nous avons : $0+0+6\lambda=8 \Leftrightarrow \lambda=\frac{4}{3}$.
Les coordonnées du point d'intersection entre le plan et la droite sont : $(0,0,4)$. Ce point est à l'extérieur du cube.

L'intersection entre le plan *PQR* et l'arête *OA* est déterminée en résolvant le système suivant :
$\begin{cases} 2x+y+2z=8 \\ (x,y,z)=(0,0,0)+\lambda(3,0,0) \end{cases}$.
Nous avons : $6\lambda+0+0=8 \Leftrightarrow \lambda=\frac{4}{3}$.
Les coordonnées du point d'intersection entre le plan et la droite sont : $(4,0,0)$. Ce

point est à l'extérieur du cube.

En plaçant les points trouvés algébriquement, nous pouvons comparer nos constructions synthétique et analytique de la section du cube par le plan PQR.



Annexe C

Les tâches prescrites par les enseignants

1 L'enseignant P_1

1. Donne une équation paramétrique et une équation vectorielle de la droite d passant par les points $A(-3,-5,-4)$ et $B(-2,3,1)$. Calcule les coordonnées du point C appartenant à la droite dont l'abscisse vaut 1.
2. Les points $A(3,0,-1)$, $B(-3,-3,5)$ et $C(15,10,3)$ appartiennent-ils à la droite d d'équations $\frac{x-3}{6} = \frac{z+1}{2} = -\frac{y}{5}$?
3. Donne un point appartenant et un vecteur directeur des droites suivantes :
   (a) $1-x = \dfrac{3y-3}{2} = \dfrac{7+z}{5}$.
   (b) $\dfrac{2x-3}{2} = \dfrac{y-4}{5} = 3z+2$.
   (c) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3z \end{cases}$.
   (d) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$.
   (e) $\begin{cases} \frac{x+1}{3} = \frac{2-z}{2} \\ 3y+1 = 0 \end{cases}$.
4. Soit a, b deux réels non nuls. Montre qu'une équation paramétrique de la droite d passant par les points $A(a,0,0)$ et $B(0,b,0)$ est $(x,y,z) = (0,b,0) + \mu(\frac{1}{b}, -\frac{1}{a}, 0)$ où $\mu \in \mathbb{R}$.
5. On donne les points $A(1,2,3)$ et $B(-1,0,1)$. Détermine les coordonnées des points C, D, E de AB sachant que :
   (a) l'abscisse de C est nulle.
   (b) l'ordonnée de D est égale à 3.
   (c) la cote de E vaut 2.

6. Détermine a et b pour que la droite d comprenne le point P ; recherche ensuite un vecteur directeur de la droite d.
   (a) $d \equiv ax+1 = 2-ay = b(z-1) \quad P(1,2,-2)$.
   (b) $d \equiv ax+1 = 2-by = a(z-1) \quad P(1,3,-2)$.
   (c) $d \equiv 2x-1 = 3y-2 = 5z-3 \quad P(a,b,a+b)$.
   (d) $d \equiv 2x-a = y-2b = a-3z \quad P(a,1,b)$.
7. Écris une équation vectorielle et une équation paramétrique du plan :
   (a) α comprenant le point $A(4,-1,-1)$ et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}(-3,4,6)$ et $\overrightarrow{v}(2,\frac{3}{2},\frac{4}{3})$.
   (b) β comprenant les points $J(-6,-2,3)$, $H(3,1,3)$ et $D(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2})$.
   (c) γ comprenant les points $C(1,2,4)$, $X(0,1,0)$ et $Y(-2,3,1)$.
   (d) δ comprenant les droites $d_1 \equiv (x,y,z) = (-5,-5,2)+\lambda(0,13,3)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $d_2 \equiv (x,y,z) = (-5,-5,2)+\rho(9,1,4)$ où $\rho \in \mathbb{R}$. Attention, tu dois d'abord montrer que d_1 et d_2 ne sont pas gauches.
8. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifie.
   (a) Le point $(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$ appartient au plan $\alpha \equiv 3z = 2y-x+\frac{1}{2}$.
   (b) $\overrightarrow{u}(4,1,6)$ est un vecteur directeur du plan $\alpha \equiv x+2y-z = -8$.
   (c) $\overrightarrow{m}(-2,4,-\frac{2}{\pi})$ est un vecteur normal de $\beta \equiv -\pi x+2\pi y-z = \pi$.
   (d) La distance entre le point $A(1,2,3)$ et le plan $\pi \equiv 3x+y-z = 3$ est de 0,3.
9. Écrire les équations des plans de coordonnées Oxy, Oxz et Oyz.
10. Représenter, par leurs traces dans les plans de coordonnées Oxy, Oxz et Oyz, les plans suivants :
    (a) $\alpha \equiv x = 3$.
    (b) $\beta \equiv 2y = 5$.
    (c) $\gamma \equiv x-y = 1$.
    (d) $\delta \equiv 3x+2z-6 = 0$.
    (e) $\varepsilon \equiv x+y-z = 1$.
    (f) $\pi \equiv 2x+3y-z = 6$.
11. Sachant que le repère est orthonormé, écrire la coordonnée d'un vecteur normal au plan α donné :
    (a) $\alpha \equiv x+3y-5z = 3$.
    (b) $\beta \equiv 5x+2z-8 = 0$.
    (c) $\gamma \equiv 2x = -3$.
12. Sachant que le repère est orthonormé, écrire une équation du plan α qui comprend le point P donné et qui est perpendiculaire à la droite AB donnée.
    (a) $P(1,2,3)$, $A(1,-1,0)$ et $B(2,3,1)$
    (b) $P(0,1,0)$, $A(5,-3,1)$ et $B(5,1,2)$

13. Considérons le plan $\alpha \equiv (x,y,z) = (\sqrt{2},\sqrt{3},2) - \lambda(5,1,1) + \mu(0,0,4)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
    (a) Détermine un vecteur normal du plan α.
    (b) Donne une équation cartésienne du plan α.
14. Donne une équation cartésienne du plan α perpendiculaire à l'axe Oz et passant par le point $(0,0,6)$.
15. Sachant que $P(3,\sqrt{2},-2)$ appartient au plan α et que α est perpendiculaire à la droite $d \equiv \begin{cases} x-1 = 4\lambda \\ y+1 = \sqrt{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, donne une équation cartésienne de α.
16. Donne une équation cartésienne du plan α passant par le point $(1,-1,2)$ et parallèle au plan Oyz.
17. Quelle est la position de la droite $d \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = 1 - z$ par rapport au plan $\alpha \equiv 2x - 2y - 2z + 5 = 0$?
18. Les plans $\alpha \equiv x - 2y + 3z = 4$ et $\beta \equiv -2x + 5y + 4z = 1$ sont-ils perpendiculaires ? Explique ta démarche et détaille tes calculs.
19. Le plan $\gamma \equiv -5x - 9y + 3z = \sqrt[3]{99}$ et la droite $d \equiv (x,y,z) = (-11,3,-7) + (25\lambda, 45\lambda, -15\lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ sont-ils perpendiculaires ? Explique ta démarche et détaille tes calculs.
20. Donne une équation cartésienne du plan α comprenant le point $(42,-3,1)$ et parallèle au plan $\delta \equiv -2x + z + 1 = 0$.
21. Donne un système d'équations cartésiennes de la droite d passant par le point $(-1,2,3)$ parallèle à la droite $d' \equiv (x,y,z) = (\lambda + 2, -4, 5\lambda + 1)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
22. Donne une équation paramétrique du plan α passant par les points $(3,0,1)$ et $(-5,-3,-2)$ qui est parallèle à la droite $d \equiv \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{MN}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, $A(-6,5,1)$, $M(-1,-1,-1)$ et $N(3,4,2)$.
23. Donne une équation paramétrique de la droite d passant par le point $(5,0,-2)$ et perpendiculaire au plan $\alpha \equiv \begin{cases} x = 16 + 7\lambda \\ y = 12 + \mu \\ z = 8 + 3\lambda + \mu \end{cases}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
24. Soit la droite d passant par le point $I(3,4,0)$ et par le milieu du segment joignant les points $(-1,1,2)$ et $(3,9,2)$. Montre que la droite d est orthogonale au segment.
25. Trouve la coordonnée du point de percée de la droite d dans le plan α :
    (a) $\alpha \equiv 3x + 2y - z + 1 = 0$ et $d \equiv x + 1 = y + 3 = 4 - z$.
    (b) $\alpha \equiv -3x + 2y - z + 1 = 0$ et $d \equiv x + 1 = y + 3 = 4 - z$.
    (c) $\alpha \equiv 3x + 2y - z + 7 = 0$ et $d \equiv x + 1 = y + 3 = 4 - z$.
    (d) $\alpha \equiv 2x + y - z - 1 = 0$ et $d \equiv x - 1 = y - 2 = z - 3$.
    (e) $\alpha \equiv 2x - y - z - 2 = 0$ et $d \equiv x + 1 = 2y = 3z - 1$.
    (f) $\alpha \equiv 3x - y + 2z = 5$ et $d \equiv x - 1 = y - 3 = 2 - z$.

26. On donne une droite $d \equiv x-1 = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$. Écrire une équation cartésienne du plan π perpendiculaire à d qui passe par le point $A(1,-1,0)$.
27. On donne deux plans $\alpha \equiv 2x+ky-z=3$ et $\beta \equiv 5x-y+3z=1$ où $k \in \mathbb{R}$. Détermine le réel k pour que :
    (a) $\alpha \parallel \beta$.
    (b) $\alpha \perp \beta$.
28. On donne une droite $d \equiv x+2 = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{2}$ et $\alpha \equiv 2x-ky+4z=0$ où $k \in \mathbb{R}$. Détermine le réel k pour que :
    (a) $\alpha \parallel d$.
    (b) $\alpha \perp d$.
29. On donne une droite $d \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = 1-z$.
    (a) Écrire une équation du plan π perpendiculaire à d passant par le point $P(1,2,-1)$.
    (b) Trouver la coordonnée du point de percée de d dans π.
    (c) Écrire une équation de la droite d' parallèle à d et passant par P.

2 L'enseignant P_2

1. Déterminer les équations paramétriques et cartésiennes de la droite passant
    (a) par $A(2,3,9)$ et $B(4,5,2)$
    (b) par $A(2,5,-1)$ et $B(2,5,4)$
    (c) par $A(8,3,2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(2,0,1)$
2. Déterminer le vecteur directeur de la droite $d \equiv \begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$
3. Déterminer les équations paramétriques et cartésiennes du plan passant par $A(1,3,7)$, $B(5,2,1)$, $C(7,8,9)$.
4. (Annoye et al., 2014, p. 198) Écrire des équations vectorielles, paramétriques et cartésiennes de la droite :
    (a) d'intersection des plans Oxy et $\pi \equiv 3x-2y+z=1$;
    (b) comprenant le point $M(1,0,-1)$ et orthogonale au plan $\pi \equiv 2x-y+3z+4=0$.
5. (Annoye et al., 2014, p. 199) Écrire des équations vectorielles, paramétriques et cartésiennes du plan :
    (a) comprenant le point $A(-1,2,-3)$ et parallèle à la droite comprenant les points $B(2,-3,1)$ et $C(3,1,-1)$ ainsi qu'à celle de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$ $(1,0,1)$.
    (b) contenant l'axe Ox et comprenant le point $P(-1,2,3)$.
    (c) comprenant le point $A(2,-1,-1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(1,0,1)$.
    (d) comprenant le point $A(2,-1,3)$ et perpendiculaire à une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(3,-1,-4)$.

(e) comprenant le point $A(1,2,3)$, perpendiculaire au plan $\pi \equiv 2x-3y+5z=1$ et parallèle à la droite $d \equiv \begin{cases} x=2\lambda+4 \\ y=5\lambda-1 \\ z=-\lambda+3 \end{cases}$.

6. (Annoye et al., 2014, p. 200) Déterminer un vecteur normal au plan

(a) $\alpha \equiv \begin{cases} x=4\lambda+2\mu-2 \\ y=3\lambda-\mu+4 \\ z=-\lambda+\mu-5 \end{cases}$.

(b) $\alpha \equiv \begin{cases} x=2\lambda+4\mu \\ y=5\lambda+\mu-1 \\ z=-\lambda+2\mu+4 \end{cases}$.

7. (Annoye et al., 2014, p. 200) Déterminer le point de percée, dans le plan $\gamma \equiv 4x-3y+z-1=0$, de la droite $d \equiv \begin{cases} x=-\lambda+3 \\ y=4\lambda+2 \\ z=2\lambda-1 \end{cases}$.

8. (Annoye et al., 2014, p. 200) Déterminer le point de percée, dans le plan $\pi \equiv 2x-y+3z-2=0$, de la droite comprenant les points $A(-2,1,2)$ et $B(0,3,2)$.

9. (Annoye et al., 2014, p. 200) Déterminer la valeur du paramètre a pour que le point $P(4a,\, 3a+2, -a)$ appartienne au plan $\alpha \equiv 2x+y-z-3=0$.

10. (Annoye et al., 2014, p. 200) Parmi les équations suivantes, préciser celles qui définissent des plans parallèles et celles qui définissent des plans perpendiculaires.

(a) $\pi_1 \equiv 2x-3y+5z=7$

(b) $\pi_2 \equiv -3x-y+2z=1$

(c) $\pi_3 \equiv x-y-z=2$

(d) $\pi_4 \equiv x-2z=5$

(e) $\pi_5 \equiv 2x-5y+z=3$

(f) $\pi_6 \equiv 3x+y-2z=8$

(g) $\pi_7 \equiv 2x-4z+3=0$

(h) $\pi_8 \equiv x+2z=-3$

11. (Annoye et al., 2014, p. 201) Vérifier que la droite $d \equiv \begin{cases} x=-2+3\lambda \\ y=1-4\lambda \\ z=-5+4\lambda \end{cases}$ est parallèle au plan $\pi \equiv 4x-3y+7z-7=0$.

12. (Annoye et al., 2014, p. 201) Déterminer la valeur de s pour que la droite $d \equiv \begin{cases} x=-2+3\lambda \\ y=1-4\lambda \\ z=-5+4\lambda \end{cases}$ soit parallèle au plan $\pi \equiv sx-3y+z-s=0$.

13. (Annoye et al., 2014, p. 201) Déterminer m pour que les droites $d_1 \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y}{2} = z+1$ et $d_2 \equiv \frac{x-2}{2} = y+2 = \frac{z}{m}$ soient orthogonales.

14. (Annoye et al., 2014, p. 201) Déterminer m pour que les plans $\pi_1 \equiv x+my-z+5=0$ et $\pi_2 \equiv 2mx-y+2z+0$ soient perpendiculaires.

15. Déterminer des équations paramétriques et cartésiennes de la perpendiculaire commune aux droites $d_1 \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y}{2} = z+1$ et $d_3 \equiv \begin{cases} x = 4+3\lambda \\ y = 1-2\lambda \\ z = -5-4\lambda \end{cases}$.

16. (Annoye et al., 2014, p. 202) Calculez la distance :
    (a) du point $B(-2,-4,3)$ au plan $\alpha \equiv 2x-y+2z+3=0$.
    (b) du point $C(2,3,-1)$ à la droite $d \equiv \begin{cases} x = 5+3r \\ y = 2r \\ z = -25-2r \end{cases}$.
    (c) entre le plan $\pi \equiv 4x-3y+7z-7=0$ et le point $S(2,-4,5)$.
    (d) entre le point $V(4,5,1)$ et le plan médiateur du segment $[WX]$, si on a $W(1,2,3)$ et $X(2,4,1)$.

17. (Annoye et al., 2014, p. 203) Quelle est l'intersection du plan π et de la droite d ?
    (a) $\pi \equiv \begin{cases} x = 1+4\lambda+6\mu \\ y = 3-\lambda+5\mu \\ z = 7-6\lambda+2\mu \end{cases}$ et $d \equiv \begin{cases} x = -2+4\theta \\ y = 3-3\theta \\ z = 1-5\theta \end{cases}$
    (b) $\pi \equiv 2x-y+2z=1$ et $d \equiv \begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ 4x+2y+z=0 \end{cases}$
    (c) $\pi \equiv 5x-2y+2z=1$ et $d \equiv 3x-2y-3z=2x+y=4$

18. (Annoye et al., 2014, p. 203) On considère les droites d d'équations cartésiennes $d \equiv \begin{cases} ax+3y-z=0 \\ 4x+ay+z=0 \end{cases}$. Quelles sont, en fonction de a, les coordonnées du point d'intersection de la droite d et du plan π d'équation $2x+3y-z=2$?

19. (Annoye et al., 2014, p. 204) Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé d'origine O, on donne les points $M(1,0,0)$, $P(2,3,0)$ et $Q(1,2,2)$. On considère :
    - □ la perpendiculaire d_1 à la droite OM, contenue dans le plan OPQ ;
    - □ la perpendiculaire d_2 à la droite OP, contenue dans le plan OMQ ;
    - □ la perpendiculaire d_3 à la droite OQ, contenue dans le plan OMP ;

    Montrer que ces trois droites sont dans un même plan et déterminer l'équation cartésienne de ce plan.

20. (Annoye et al., 2014, p. 204) On donne un cube de côté L. On nomme A, B, C et D les quatre sommets consécutifs d'une des faces du cube et A', B', C' et D' ceux de la face parallèle. Ces points sont disposés de façon à ce que les segments $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ et $[DD']$ soient des arêtes du cube.
    (a) Démontrer que les plans $AB'D'$ et $C'DB$ sont parallèles.
    (b) Démontrer que la droite $A'C$ est perpendiculaire au plan $AB'D'$.

(c) Si on désigne par T la projection orthogonale du point C sur le plan $AB'D'$ (c'est-à-dire le pied de la perpendiculaire à ce plan issue de C), démontrer que la longueur du segment $[A'T]$ vaut le tiers de celle du segment $[A'C]$.

21. (Annoye et al., 2014, p. 204) Soit un tétraèdre $ABCD$ dont les coordonnées des sommets sont $A(0,4,2)$, $B(3,1,5)$, $C(-1,\frac{3}{2},-6)$ et $D(6,-2,1)$. On demande :
    (a) l'équation cartésienne du plan contenant la base ABC.
    (b) de donner les équations paramétriques de la hauteur issue de D et perpendiculaire au plan ABC, et de calculer les coordonnées du point de percée dans ce même plan.
    (c) de calculer les coordonnées du point H, projection orthogonale de C sur AB dans le triangle ABC.
    (d) de donner la plus petite des hauteurs du tétraèdre.
22. (Annoye et al., 2014, p. 205)
    (a) Quelles sont les coordonnées du pied Q de la perpendiculaire abaissée du point $W(a,a+1,a-1)$ sur le plan π d'équation $2x+ay+az+a^3+4=0$?
    (b) Montrer que ces pieds, lorsque a parcourt $\mathbb{R}$, sont tous situés sur une même droite d, dont on déterminera des équations.
    (c) Déterminer sur quelle partie de la droite d ils sont situés.
23. (Annoye et al., 2014, p. 207) On donne deux droites gauches d_1 et d_2. On demande de déterminer des équations de la perpendiculaire commune à d_1 et d_2, puis de calculer la distance entre ces droites.
    (a) $d_1 \equiv \frac{x}{3} = \frac{1-y}{2} = \frac{z}{4}$ et $d_2 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{3-y}{4} = \frac{z-1}{2}$
    (b) $d_1 \equiv \begin{cases} 4x-z=0 \\ 3y+2z=0 \end{cases}$ et $d_2 \equiv \begin{cases} x=0 \\ 3y-z=5 \end{cases}$

3 L'enseignant P_3

1. Calculez les équations vectorielles, paramétriques et cartésiennes pour la droite d sachant que :
    (a) nous avons deux points $A(3,2)$ et $B(5,1)$.
    (b) elle passe par le point $A(5,4)$ et est parallèle à la droite $y=2x-1$.
2. Écrire une équation vectorielle et des équations paramétriques de la droite d comprenant le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$:
    (a) $A(0,-1,0)$ et $\overrightarrow{v}=(1,-2,1)$.
    (b) $A(1,-2,3)$ et $\overrightarrow{v}=(0,-1,2)$.
3. Écrire une équation vectorielle et des équations paramétriques de la droite AB.
    (a) $A(-1,2,3)$ et $B(0,4,-1)$
    (b) $A(2,-1,5)$ et $B(2,-1,-1)$

4. Les équations paramétriques de la droite AB sont $\begin{cases} x = 5-4k \\ y = -1+2k \\ z = 2+k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$. Calculer les coordonnées du point C de AB dont l'abscisse vaut 1.
5. Écrire des équations cartésiennes de la droite d comprenant le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$.
   (a) $A(2,-1,3)$ et $\overrightarrow{v} = (-1,2,3)$
   (b) $A(2,-1,3)$ et $\overrightarrow{v} = (2,0,0)$
6. Écrire des équations cartésiennes de la droite AB.
   (a) $A(3,-1,2)$ et $B(2,1,-1)$
   (b) $A(3,-1,2)$ et $B(5,-3,2)$
7. Déterminer les réels a et b pour que le point $A(-2a+1, b+2, a-4b)$ appartienne à la droite d lorsque $d \equiv \frac{x-2}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$.
8. Déterminer un point et un vecteur directeur des droites suivantes :
   (a) $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-4}{5} = z+2.$
   (b) $\dfrac{2x-3}{2} = \dfrac{4-y}{5} = 3z+2.$
   (c) $\begin{cases} \frac{x+1}{3} = \frac{2-z}{2} \\ 3y+1 = 0 \end{cases}$.
   (d) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$.
   (e) $\begin{cases} x+y-6 = 0 \\ 3y+z-9 = 0 \end{cases}$.
   (f) $\begin{cases} 3x-6z+1 = 0 \\ y+z = 2 \end{cases}$.
9. Écrire des équations paramétriques du plan π comprenant $P(-2,0,3)$ et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{v}(0,1,-2)$ et $\overrightarrow{w}(1,-1,0)$. Ensuite, calculer les coordonnées du point C du plan π dont l'abscisse vaut 3 et l'ordonnée 1.
10. Écrire des équations paramétriques du plan comprenant les points A, B, C.
    (a) $A(1,-1,2)$, $B(0,3,1)$ et $C(-2,1,2)$
    (b) $A(0,4,5)$, $B(1,-5,1)$ et $C(0,-1,6)$
11. On donne le plan $\pi \equiv \begin{cases} x = 3-2\lambda+\mu \\ y = 1+3\lambda+\mu \\ z = 4-\lambda+3\mu \end{cases}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et les points $P(3,0,3)$ et $Q(0,-2,1)$. Vérifier si les points P et Q appartiennent à π.
12. Déterminer des équations paramétriques du plan π contenant la droite $d \equiv x-3 = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$ et passant par le point $P(1,4,-2)$.
13. Dans un repère de l'espace, on donne le plan π d'équation $11x+9y+z-26 = 0$. Le point $A(4,-5,1)$ appartient au plan π ? Et le point $B(-7,10,13)$?

14. Écrire une équation cartésienne du plan π comprenant $P(-2,0,3)$ et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{v}(0,1,-2)$ et $\overrightarrow{w}(1,-1,0)$.
15. Écrire des équations paramétriques du plan comprenant les points A, B, C et déterminer une équation cartésienne.
    (a) $A(1,-1,2)$, $B(0,3,1)$ et $C(-2,1,2)$
    (b) $A(0,4,5)$, $B(1,-5,1)$ et $C(0,-1,6)$
16. Déterminer une équation cartésienne du plan π comprenant les points $A(2,-1,3)$ et $B(3,1,2)$ et parallèle au vecteur $\overrightarrow{u}(3,-1,3)$.
17. Écrire une équation cartésienne du plan π comprenant $P(1,2,-3)$ et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{v}(3,1,2)$ et $\overrightarrow{w}(2,-1,3)$.
18. Les données suivantes définissent-elles un plan ? Si c'est le cas, en donner une équation cartésienne.
    (a) $d \equiv \begin{cases} \frac{x+1}{-1} = \frac{y+2}{1} \\ z = -3 \end{cases}$ et $P(-1,1,0)$
    (b) $d \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$ et $P(1,0,2)$
19. Les droites suivantes sont-elles parallèles ?
    (a) $d_1 \equiv \begin{cases} x = 2+\frac{1}{3}k \\ y = -1-\frac{k}{6} \\ z = 1+k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$ et $d_2 \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{6}$
    (b) $d_1 \equiv \frac{x}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-4}$ et $d_2 \equiv \begin{cases} 4x-3z=5 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$
20. Écrire des équations cartésiennes de la droite d' parallèle à la droite d et comprenant le point P.
    (a) $d \equiv \begin{cases} \frac{x-3}{2} = \frac{z}{3} \\ y = 5 \end{cases}$ et $P(2,1,-3)$.
    (b) $d \equiv \begin{cases} x = 2\lambda - 1 \\ y = 3\lambda + 5 \\ z = -\lambda + 2 \end{cases}$ avec $P(1,3,2)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
21. Vérifier si la droite d est parallèle au plan π. Si c'est le cas, précisez si la droite et le plan sont disjoints ou non.
    (a) $d \equiv \begin{cases} x = 2+3\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 4+2\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\pi \equiv x+y-2z-3=0$
    (b) $d \equiv \frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-6}{4}$ et $\pi \equiv -3x+4y-5z=0$.
22. Déterminer m et n pour que les plans α et β soient parallèles.
    $\alpha \equiv 2x+my+3z-5=0 \quad \beta \equiv nx-6y-6z+2=0$
23. Les droites d et d' sont-elles orthogonales ?
    (a) $d \equiv \frac{x+5}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{1}$ et $d' \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{1}$

(b) $d \equiv \begin{cases} \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{2} \\ z = 0 \end{cases}$ et $d' \equiv \begin{cases} y = 2x-1 \\ z = 4x+3 \end{cases}$

24. Les plans π et π' sont-ils orthogonaux ?
    (a) $\pi \equiv 2x-3z=0$ et $\pi' \equiv 4x+2y-z=0$
    (b) $\pi \equiv 6x-y+z-7=0$ et $\pi' \equiv 3x-9y-27z+5=0$
25. La droite d est-elle orthogonale au plan π ?
    (a) $d \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ et $\pi \equiv 3x-4y+2z=0$
    (b) $d \equiv \begin{cases} x = -k+2 \\ y = k+1 \\ z = 2k-3 \end{cases}$ et $\pi \equiv \begin{cases} x = \lambda+3\mu-1 \\ y = -\lambda+\mu-2 \\ z = \lambda+\mu \end{cases}$ où $k, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
26. Déterminer des équations cartésiennes de la droite d comprenant le point P et orthogonale au plan π.
    (a) $P(0,4,5)$ et $\pi \equiv -x-y+2z=0$
    (b) $P(-4,1,2)$ et $\pi \equiv -x+3z=0$
27. Déterminer une équation cartésienne du plan π comprenant le point P et orthogonal à la droite d.
    (a) $P(-1,0,1)$ et $d \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{-2}$
    (b) $P(-1,2,3)$ et $d \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 1 \\ z = 3-\lambda \end{cases}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
28. Déterminer une équation cartésienne du plan π orthogonal au plan $\pi' \equiv 2z = x-1$ et qui comprend les points $P(-1,0,1)$ et $Q(0,-1,-2)$.

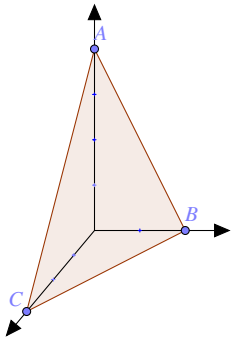
4 L'enseignant P_4

1. Donne un système d'équations paramétriques et une équation vectorielle de la droite d passant par les points $A(-3,-5,-4)$ et $B(-2,3,1)$. Calcule les coordonnées du point C appartenant à la droite dont l'abscisse vaut 1.
2. Les points $A(3,0,-1)$, $B(-3,-3,5)$ et $C(15,10,3)$ appartiennent-ils à la droite d d'équations $\frac{x-3}{6} = \frac{z+1}{2} = -\frac{y}{5}$?
3. Donne un point appartenant et un vecteur directeur des droites suivantes :
    (a) $1-x = \dfrac{3y-3}{2} = \dfrac{7+z}{5}$.
    (b) $\dfrac{2x-3}{2} = \dfrac{y-4}{5} = 3z+2$.
    (c) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3k \\ z = 1-2k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$.
    (d) $\begin{cases} x = 1 \\ y-3 = 0 \end{cases}$.

(e) $\begin{cases} z-k=1 \\ y=2k \\ x+1-2k=3 \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$.

4. Soit a, b deux réels non nuls. Montre qu'un système d'équations paramétriques de la droite d passant par les points $A(a,0,0)$ et $B(0,b,0)$ est $\begin{cases} x=\frac{1}{b}k \\ y=b-\frac{1}{a}k \\ z=0 \end{cases}$, où $k \in \mathbb{R}$.
5. Soit la droite d passant par les points $A(1,2,3)$ et $B(-1,0,1)$. Détermine les coordonnées des points C et D de d sachant que :
   (a) l'abscisse de C est nulle.
   (b) la cote de D vaut 2.
6. Détermine a et b pour que la droite d comprenne le point P ; recherche ensuite un vecteur directeur de la droite d.
   (a) $d \equiv ax+1=2-ay=b(z-1) \quad P(1,2,-2)$.
   (b) $d \equiv ax+1=2-by=a(z-1) \quad P(1,3,-2)$.
   (c) $d \equiv 2x-1=3y-2=5z-3 \quad P(a,b,a+b)$.
   (d) $d \equiv 2x-a=y-2b=a-3z \quad P(a,1,b)$.
7. Donne les équations des axes d'un repère de l'espace.
8. Donne une équation cartésienne des droites :
   (a) d_1 parallèle à Oz et passant par le point $(1,2,3)$.
   (b) d_2 perpendiculaire au plan Oxz et passant par le point $(-1,2,4)$.
   (c) d_3 parallèle au plan Oxz et passant par le point $(2,5,-1)$.
9. Écris une équation vectorielle et un système d'équations paramétriques du plan :
   (a) α comprenant le point $A(4,-1,-1)$ et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}(-3,4,6)$ et $\overrightarrow{v}(2,\frac{3}{2},\frac{4}{3})$.
   (b) β comprenant les points $J(-6,-2,3)$, $H(3,1,3)$ et $D(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2})$.
   (c) γ comprenant les points $C(1,2,4)$, $X(0,1,0)$ et $Y(-2,3,1)$.
   (d) δ comprenant les droites $d_1 \equiv (x,y,z)=(-5,-5,2)+\lambda(0,13,3)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $d_2 \equiv (x,y,z)=(-5,-5,2)+\rho(9,1,4)$ où $\rho \in \mathbb{R}$. Attention, tu dois d'abord montrer que d_1 et d_2 ne sont pas gauches.
10. Détermine des équations paramétriques du plan α contenant le point $P(1,4,-2)$ et la droite $d \equiv x-3=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$.
11. Écris une équation vectorielle et une équation paramétrique du plan δ comprenant les droites $d_1 \equiv (x,y,z)=(1,2,3)+\lambda(2,-1,3)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $d_2 \equiv (x,y,z)=(0,-2,1)+\rho(-4,2,-6)$ où $\rho \in \mathbb{R}$. Attention, tu dois d'abord montrer que d_1 et d_2 ne sont pas gauches.
12. On donne le plan $\begin{cases} x=3-2\lambda+\mu \\ y=1+3\lambda+\mu \\ z=4-\lambda+3\mu \end{cases}$ $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ et les points $P(3,0,3)$ et $Q(0,-2,1)$. Les points P et Q appartiennent-ils au plan ?

13. Dans un repère de l'espace, on donne le plan α d'équation $11x+9y+z-26=0$. Le point $A(4,-5,1)$ appartient-il au plan α ? Même question pour le point $B(-7,10,13)$.
14. Donne une équation cartésienne du plan α comprenant $P(1,2,-3)$ et de vecteurs directeurs $\vec{v}(3,0,2)$ et $\vec{w}(2,-1,3)$.
15. Déterminer une équation cartésienne du plan π comprenant les points $A(2,-1,3)$ et $B(3,1,2)$ et parallèle au vecteur $\vec{u}(3,-1,3)$.
16. Les données suivantes définissent-elles un plan ? Si c'est le cas, en donner une équation cartésienne.
    (a) $d \equiv \begin{cases} \frac{x+1}{-1} = y+2 \\ z=-3 \end{cases}$ et $P(-1,1,0)$
    (b) $d \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$ et $P(1,0,2)$
17. Représente, par leur trace dans les plans de coordonnées Oxy, Oxz et Oyz, les plans :
    (a) $\alpha \equiv x-y=1$.
    (b) $\beta \equiv 3x+2z-6=0$.
    (c) $\gamma \equiv x+y-z=1$.
18. Détermine une équation cartésienne du plan α représenté par sa trace sur les trois plans du repère.



19. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifie.
    (a) $\vec{u}(4,1,6)$ est un vecteur directeur du plan $\alpha \equiv x+2y-z=-8$.
    (b) $\vec{m}(-2,4,-\frac{2}{\pi})$ est un vecteur normal de $\beta \equiv -\pi x+2\pi y-z=\pi$.
20. Sachant que le repère est orthonormé, donne un vecteur normal au plan donné :
    (a) $\alpha \equiv x+3y-5z=3$.
    (b) $\beta \equiv 5x+2z-8=0$.
    (c) $\gamma \equiv 2x=-3$.
21. Détermine une équation cartésienne du plan :
    (a) comprenant le point $A(2,-1,-1)$ et de vecteur normal $(1,0,1)$.
    (b) comprenant le point $A(0,4,-1)$ et de vecteur normal $(0,2,-1)$.

(c) comprenant le point $A(2,-1,3)$ et perpendiculaire à la droite de vecteur directeur $(3,-1,-4)$.

22. Sachant que le repère est orthonormé, écrire une équation de plan α qui comprend le point P donné et qui est perpendiculaire à la droite AB.
    (a) $P(1,2,3), A(1,-1,0)$ et $B(2,3,1)$
    (b) $P(0,1,0), A(5,-3,1)$ et $B(5,1,2)$
23. Considérons le plan $\alpha \equiv (x,y,z) = (\sqrt{2},\sqrt{3},2) - \lambda(5,1,1) + \mu(0,0,4)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
    (a) Détermine un vecteur normal du plan α.
    (b) Donne une équation cartésienne du plan α.
24. Détermine une équation cartésienne du plan α perpendiculaire à l'axe Oz et comprenant le point $(0,0,6)$.
25. Détermine une équation cartésienne du plan α comprenant le point $P(3,\sqrt{2},-2)$ et perpendiculaire à la droite $d \equiv \begin{cases} x-1 = 4\lambda \\ y+1 = \sqrt{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
26. Détermine une équation cartésienne du plan α comprenant le point $(1,-1,2)$ et parallèle au plan Oyz.
27. Les plans $\alpha \equiv x-2y+3z=4$ et $\beta \equiv -2x+5y+4z=1$ sont-ils perpendiculaires ?
28. Le plan $\gamma \equiv -5x-9y+3z = \sqrt[3]{99}$ et la droite $d \equiv (x,y,z) = (-11,3,-7) + (25\lambda, 45\lambda, -15\lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ sont-ils perpendiculaires ? Explique ta démarche.
29. Donne une équation cartésienne du plan α comprenant le point $(42,-3,1)$ et parallèle au plan $\delta \equiv -2x+z+1=0$.
30. Détermine une équation cartésienne du plan β comprenant le point $A(1,3,-2)$, parallèle à $d \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y}{2}+1 = \frac{1-z}{-3}$ et perpendiculaire au plan $\alpha \equiv 2x-3y+2z=1$.
31. Donne une équation cartésienne de la droite d passant par le point $(-1,2,3)$ et parallèle à la droite $d' \equiv (x,y,z) = (\lambda+2,-4,5\lambda+1)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
32. Détermine un système d'équations paramétriques du plan α comprenant les points $(3,0,1)$ et $(-5,-3,-2)$ et parallèle à la droite $d \equiv \overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{MN}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, $A(-6, 5, 1)$, $M(-1,-1,-1)$ et $N(3,4,2)$.
33. Détermine un système d'équations paramétriques de la droite d passant par le point $(4,0,-2)$ et perpendiculaire au plan $\alpha \equiv \begin{cases} x = 16+7\lambda \\ y = 12+\mu \\ z = 8+3\lambda+\mu \end{cases}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
34. On donne une droite $d \equiv x-1 = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$. Écris une équation du plan π perpendiculaire à d qui passe par le point $A(1,-1,0)$.
35. On donne deux plans $\alpha \equiv 2x+ky-z=3$ et $\beta \equiv 5x-y+3z=1$ où $k \in \mathbb{R}$. Détermine le réel k pour que :
    (a) $\alpha \parallel \beta$.
    (b) $\alpha \perp \beta$.

36. On donne une droite $d \equiv x+2 = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{2}$ et $\alpha \equiv 2x-ky+4z=0$ où $k \in \mathbb{R}$. Détermine le réel k pour que :
    (a) $\alpha \parallel d$.
    (b) $\alpha \perp d$.
37. Détermine un système d'équations paramétriques de la droite passant par le point $(2,1,4)$ et parallèle au plan $\pi \equiv \begin{cases} x = 2\lambda + 5\mu + 4 \\ y = 5\lambda + \mu - 1 \\ z = -\lambda - \mu + 3 \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
38. Les droites suivantes sont-elles parallèles ?
    (a) $d_1 \equiv \begin{cases} x = 2 + \frac{1}{3}k \\ y = -1 - \frac{k}{6} \\ z = 1 + k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$ et $d_2 \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{6}$
    (b) $d_1 \equiv \frac{-x}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{1-z}{4}$ et $d_2 \equiv \begin{cases} 4x - 3z = 5 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$
39. Les droites d et d' sont-elles orthogonales ?
    (a) $d \equiv \frac{x+5}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{1}$ et $d' \equiv \frac{x+2}{2} = y+1 = z+3$
    (b) $d \equiv \begin{cases} \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{2} \\ z = 0 \end{cases}$ et $d' \equiv \begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = 4x + 3 \end{cases}$
40. Quelle est la position de la droite $d \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = 1 - z$ par rapport au plan $\alpha \equiv 2x - 2y - 2z + 5 = 0$?
41. Trouve la coordonnée du point de percée de la droite d dans le plan α :
    (a) $\alpha \equiv 3x + 2y - z + 1 = 0$ et $d \equiv x + 1 = y + 3 = 4 - z$.
    (b) $\alpha \equiv -3x + 2y - z + 1 = 0$ et $d \equiv x + 1 = y + 3 = 4 - z$.
    (c) $\alpha \equiv 3x + 2y - z + 7 = 0$ et $d \equiv x + 1 = y + 3 = 4 - z$.
42. Détermine l'intersection du plan $\alpha \equiv \begin{cases} x = \lambda + \mu - 1 \\ y = 3\lambda + 2 \\ z = -\lambda - \mu - 3 \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ avec les droites :
    (a) $d_1 \equiv \begin{cases} x = k - 1 \\ y = 2k + 3 \\ z = -k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$.
    (b) $d_2 \equiv \begin{cases} x = -k \\ y = k + 1k - 4 \\ z = -k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$.
    (c) $d_3 \equiv \begin{cases} x = k - 1 \\ y = 2 - 2k \\ z = 3k - 3 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$.
43. On donne une droite $d \equiv \frac{x-1}{2} = y + 1 = 1 - z$.
    (a) Écris une équation du plan π perpendiculaire à d mené par le point $P(1, 2, -1)$.

(b) Trouve la coordonnée du point de percée de d dans π.

44. Calcule la distance :

(a) du point $A(0,3,2)$ au plan $\alpha \equiv z = 0$.

(b) du point $B(-2,-4,3)$ au plan $\beta \equiv 2x - y + 2z + 3 = 0$.

(c) entre les plans parallèles $\gamma \equiv 2x + 3y - z + 1 = 0$ et $\delta \equiv 2x + 3y - z - 5 = 0$.

(d) du point $C(2,1,3)$ à la droite $a \equiv \begin{cases} x = 1-k \\ y = 2+k \\ z = 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$.

(e) du point $D(4,-1,-2)$ à la droite $b \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{2} = z+1$.

(f) du point $E(5,-3,1)$ à la droite $c \equiv \begin{cases} x = 4+3k \\ y = 5-7k \\ z = 6+k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$.

5 L'enseignant P_5

1. Vrai ou faux ? Entoure la bonne réponse et justifie.

(a) La droite passant par les points $A(-1,0,2)$ et $B(-3,2,4)$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v} = (-1,1,1)$.

(b) La droite $d \equiv 1 - x = \frac{2y+2}{3} = \frac{z-1}{2}$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v} = (-1,3,2)$.

(c) Le point $P(3,-2,4)$ appartient à la droite $d \equiv 1 + x = 2 - y = \frac{z}{2}$.

(d) Le point $A(-3,1,4)$ appartient à la droite $d \equiv \begin{cases} x = 1-2k \\ y = -1+k \\ z = 3k-2 \end{cases}$.

(e) Les équations $\begin{cases} x = 1-2k \\ y = 1+3k \\ z = k-4 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 4t+3 \\ y = -2-6t \\ z = -2t-5 \end{cases}$ définissent la même droite.

2. Écris des équations cartésiennes des droites dont on donne des équations paramétriques :

$$d_1 \equiv \begin{cases} x = 4-3k \\ y = 6k \\ z = 8-5k \end{cases} \qquad d_2 \equiv \begin{cases} x = 3+2k \\ y = -1 \\ z = -2-5k \end{cases}.$$

3. Écris des équations paramétriques et cartésiennes de la droite d définie par :

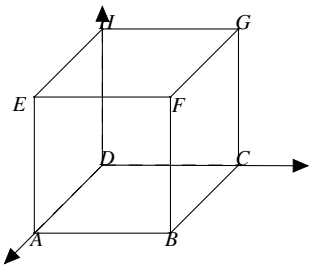
(a) d passe par $A(-1,2,5)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v} = (-1,1,4)$.

(b) d passe par $P(-2,-1,3)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v} = (0,-2,1)$.

(c) d passe par $Q(1,-2,-1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v} = (3,0,0)$.

(d) d passe par $A(5,0,-1)$ et par $B(8,-3,2)$.

(e) d passe par $B(3,-2,-4)$ et $C(1,3,-2)$.

4. Écris des équations paramétriques des droites suivantes :
   $d_1 \equiv \frac{2-x}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{3z-1}{2}$ $\quad d_2 \equiv \begin{cases} \frac{x-8}{2} = z-2 \\ y = 3 \end{cases}$.
5. Une droite d passe par le point $A(2,4,5)$ et est de vecteur directeur $\overrightarrow{v} = (1,-4,2)$. Détermine la coordonnée du point P de la droite d qui a pour abscisse 5.
6. 

   Dans un cube d'arête 4 représenté ci-contre, détermine des équations cartésiennes de :
   - □ la droite DF,
   - □ de la droite AG,
   - □ de la droite IJ où I et J sont les milieux respectifs de EH et AB.
7. Vrai ou faux ? Entoure la bonne réponse et justifie.
   (a) $A(-1,3,1)$ appartient au plan $\pi \equiv 2x+z = 5-2y$.
   (b) les équations $2x-y = z-5$ et $2y-4x+10 = 2z$ définissent le même plan.
   (c) le vecteur de composantes $(-6,4,-2)$ est normal au plan $\pi \equiv 3x+z = 2y-5$.
   (d) le plan $\pi \equiv x-3z = 2y-5$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n} = (3,6,9)$.
8. Écris les équations paramétriques et cartésiennes des plans suivants :
   (a) π comprend les points $A(2,3,5)$, $B(1,0,5)$ et $C(6,-2,5)$.
   (b) π comprend le point $A(2,1,-3)$ et admet le couple de vecteurs directeurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ tels que $\overrightarrow{u} = (1,-1,2)$ et $\overrightarrow{v} = (1,3,-1)$.
   (c) π comprend le point $A(1,2,5)$ et contient la droite d passant par le point $B(6,0,0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (-1,3,1)$.
   (d) π contient la droite d_1 définie par le point $A(2,0,3)$ et le vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (1,-1,1)$ et la droite d_2 définie par le point $B(4,0,0)$ et le vecteur directeur $\overrightarrow{v} = (-1,1,-1)$.
   (e) π comprend le point $A(3,2,1)$ et a pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n} = (-1,1,2)$.
9. Vérifie que les points $A(-4,0,3)$, $B(-2,3,0)$, $C(0,2,1)$ et $D(2,1,2)$ sont coplanaires.
10. Vrai ou faux ? Entoure la bonne réponse et justifie.
    (a) Les droites $d \equiv x-1 = \frac{y+1}{3} = \frac{3-z}{2}$ et $d' \equiv \frac{1-x}{2} = \frac{1-y}{6} = \frac{z+3}{4}$ sont parallèles.
    (b) Les plans $\pi \equiv z-3 = y-2x$ et $\omega \equiv 5+2z = 4x-2y$ sont parallèles.
    (c) La droite $d \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{3-y}{2} = z-5$ est perpendiculaire au plan $\pi \equiv 6x+2z = 4y-5$.
    (d) La droite $d \equiv x-2 = \frac{y-1}{2} = \frac{-1-z}{3}$ est parallèle au plan $\pi \equiv x-3z = 2y-5$.
    (e) Les plans $\pi \equiv z+2 = y+2x$ et $\omega \equiv 11-7z = x+3y$ sont perpendiculaires.

(f) Les droites $d \equiv \frac{3-x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{-z-2}{3}$ et $d' \equiv 1-x = \frac{y+3}{2} = \frac{z-5}{2}$ sont orthogonales.

11. Écris des équations cartésiennes de la droite d déterminée par les conditions :
    (a) d passe par $A(-1,6,2)$ et est parallèle à $d' \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z+2$.
    (b) d passe par le point $B(-1,2,-2)$ et parallèle à $d' \equiv \begin{cases} x = 3+2t \\ y = 5-2t \\ z = t+1 \end{cases}$.
    (c) d passe par $C(1,2,-1)$ et est parallèle à la droite AB avec $A(1,-1,2)$ et $B(1,2,-2)$.
    (d) d passe par le point $A(2,-1,3)$ et est perpendiculaire au plan $\pi \equiv 2x-3y+z-3=0$.
12. Écris des équations cartésiennes du plan π défini par les conditions :
    (a) π passe par le point $A(2,3,-1)$ et est parallèle au plan $\beta \equiv 2x-y=0$.
    (b) π passe par le point $P(2,1,-1)$ et est parallèle au plan $\beta \equiv 3x-5y+7z+1=0$.
    (c) π passe par le point $P(2,3,-1)$ et est perpendiculaire à la droite $d \equiv \begin{cases} x = 2k-8 \\ y = 3k \\ z = 2-k \end{cases}$.
    (d) π passe par le point $P(2,3,-1)$ et est perpendiculaire à la droite $d \equiv 1+x = \frac{2y-1}{2} = \frac{3-z}{5}$.
    (e) π passe par les points $A(1,2,1)$, $B(2,1,1)$ et perpendiculaire au plan d'équation $x+y+z+1=0$.
    (f) π passe par le point $P(1,2,1)$ et est perpendiculaire au plan $x+2y+z+3=0$ et au plan $2x+y-z+1=0$.
13. Détermine l'équation du plan médiateur du segment $[AB]$ avec $A(3,-2,-5)$ et $B(1,4,3)$.
14. Étudie la position relative des droites d et d' :
    (a) $d \equiv \frac{x+1}{2} = 2-y = \frac{z+3}{6}$ et $d' \equiv \frac{x+3}{2} = -1-y = \frac{z-1}{6}$.
    (b) $d \equiv \frac{1-x}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+5}{6}$ et $d' \equiv x+5 = \frac{15-y}{2} = \frac{13-z}{3}$.
    (c) $d \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{5-y}{6} = \frac{z-3}{3}$ et $d' \equiv \frac{x-4}{6} = \frac{-1-y}{12} = \frac{5-z}{5}$.
    (d) $d \equiv \begin{cases} x+y+6 = z \\ 2x+10 = y \end{cases}$ et $d' \equiv x+1 = \frac{y}{2}$ et $z=2$.
15. Étudie la position relative de la droite d et du plan π :
    (a) $d \equiv x = 3-2y = -3-2z$ et $\pi \equiv x+y+z=0$.
    (b) $d \equiv x+2 = \frac{y-4}{3} = \frac{z+3}{2}$ et $\pi \equiv x+z = 5-y$.
    (c) $d \equiv \frac{x-2}{3} = y-1 = \frac{z-4}{2}$ et $\pi \equiv x+y = 3+2z$.
16. Étudie la position relative des plans α et β :
    (a) $\alpha \equiv 3y+2x = 1+5z$ et $\beta \equiv x = 2+2y+z$.

(b) $\alpha \equiv x+3=z+5y$ et $\beta \equiv 2x-2z=1y-7z$.

17. Étudie la position relative des plans α, β et γ :

(a) $\alpha \equiv x+4z=3-3y$; $\beta \equiv z+2y=4-x$; $\gamma \equiv y=5-x+2z$.

(b) $\alpha \equiv 3x+y=1+2z$; $\beta \equiv 3y+4z=x+5$; $\gamma \equiv x+2y=2-z$.

(c) $\alpha \equiv 2x-4z=1-6y$; $\beta \equiv 2x+y=3z-7$; $\gamma \equiv 4-x=3y-2z$.

(d) $\alpha \equiv y=x+3z$; $\beta \equiv 3x+y=6+z$; $\gamma \equiv 2x+z=3$.

(e) $\alpha \equiv 4x+5y=8+2z$; $\beta \equiv x+2z=5+y$; $\gamma \equiv 5x+z=4+2y$.

Annexe D

Les tâches prescrites dans notre scénario

1. Donnez une équation vectorielle, paramétrique et un système d'équations cartésiennes de la droite d passant par le point $A(2,1,-8)$ et dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{v}(3,-2,1)$.
2. Quelles sont les différentes équations d'une droite d passant par les points $A(2,1,-4)$ et $B(-1,3,6)$?
3. (a) Donnez une équation paramétrique de la droite d passant par les points $A(-2,0,-3)$ et $B(-1,4,-3)$.
   (b) Si le point C appartient à la droite d, est-il possible que son abscisse soit égale à 1 ? Si oui, donnez ses coordonnées. Si non, justifiez votre réponse.
   (c) Le point $D(4,1,-3)$ appartient-il à la droite d ?
4. Déterminez un système d'équations cartésiennes de la droite d passant par le point $A(2,-1,3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}(0,-1,2)$.
5. Donnez un point et un vecteur directeur de chacune des droites suivantes :
   (a) $1-x=\dfrac{3y-3}{2}=\dfrac{7+z}{5}$.
   (b) $\dfrac{2x-3}{2}=\dfrac{y-4}{5}=3z+2$.
   (c) $\begin{cases} x=1 \\ y=3k \\ z=1-2k \end{cases}$ où $k\in\mathbb{R}$.
   (d) $\begin{cases} x=1 \\ y-3=0 \end{cases}$.
6. Quelles sont les équations cartésiennes et paramétriques de chaque axe d'un repère de l'espace ?
7. Donnez un système d'équations cartésiennes des droites suivantes :
   (a) d_1 parallèle à Oz et passant par le point $(1,2,3)$.
   (b) d_2 perpendiculaire au plan Oxz et passant par le point $(-1,2,4)$.

(c) d_3 parallèle au plan Oxz et passant par le point $(2,5,-1)$.

8. Sachant qu'un système d'équations cartésiennes d'une droite d est donné par

$$\begin{cases} x = 1 \\ z = 2, \end{cases}$$

quelle serait une équation paramétrique de cette droite ?

9. Sachant qu'un système d'équations cartésiennes d'une droite d est donné par

$$\begin{cases} y = 3 \\ \frac{2x+1}{3} = \frac{-z-2}{5}, \end{cases}$$

quelle serait une équation paramétrique de cette droite ?

10. Donnez une équation paramétrique du plan α défini par les vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}(1,1,1)$ et $\overrightarrow{v}(1,0,2)$ et passant par le point $A(1,2,3)$. Le point $B(1,3,2)$ appartient-il au plan α ?

11. Donnez une équation paramétrique du plan α comprenant les points $A(1,2,4)$, $B(0,1,0)$ et $C(-2,3,1)$.

12. Déterminez une équation cartésienne d'un plan comprenant le point $(2,-1,-1)$ et de vecteur normal $(1,0,1)$.

13. Est-il vrai de dire que le vecteur $(-2,4,-\frac{2}{\pi})$ est un vecteur normal du plan $\beta \equiv -\pi x + 2\pi y - z = \pi$?

14. Quelle est une équation cartésienne du plan α comprenant le point $P(1,2,-3)$ et dont deux vecteurs directeurs sont $\overrightarrow{u}(3,0,2)$ et $\overrightarrow{v}(2,-1,3)$?

15. Donnez une équation vectorielle, paramétrique et cartésienne du plan α comprenant le point $P(1,4,-2)$ et la droite $d \equiv x-3 = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$.

16. Donnez une équation vectorielle, paramétrique et cartésienne du plan α comprenant les droites $d_1 \equiv (x,y,z) = (1,2,3) + \lambda(2,-1,3)$ et $d_2 \equiv (x,y,z) = (0,-2,1) + \mu(-4,2,-6)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

17. Quelles sont les équations cartésiennes des plans Oxy, Oxz et Oyz ?

18. Donnez une équation paramétrique du plan α sachant qu'il passe par le point $P(3,4,5)$ et dont un vecteur normal est $(2,6,4)$.

19. Donnez une équation paramétrique du plan α sachant qu'il passe par le point $P(1,0,5)$ et dont un vecteur normal est $(0,0,1)$.

20. Existe-t-il une valeur du paramètre a pour laquelle le point $P(4a,3a+2,-a)$ appartient au plan $\alpha \equiv 2x+y-z-3=0$?

21. Les plans $\alpha \equiv x-2y+3z=4$ et $\beta \equiv -2x+5y+4z=1$ sont-ils perpendiculaires ? Expliquez votre démarche.

22. Le plan $\gamma \equiv -5x-9y+3z = \sqrt[3]{99}$ et la droite $d \equiv (x,y,z) = (-11,3,-7) + (25\lambda, 45\lambda, -15\lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ sont-ils perpendiculaires ? Expliquez votre démarche.

23. Déterminez la valeur de m pour que les plans $\alpha \equiv x+my-z+5=0$ et $\beta \equiv 2mx-y+2z=0$ soient perpendiculaires. Expliquez votre démarche.
24. Déterminez une équation cartésienne du plan α comprenant le point $(42,-3,1)$ et parallèle au plan $\delta \equiv -2x+z+1=0$.
25. Déterminez une équation cartésienne du plan β comprenant le point $A(1,3,-2)$, parallèle à $d \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y}{3}+1 = \frac{1-z}{-3}$ et perpendiculaire au plan $\alpha \equiv 2x-3y+2z=1$.
26. Déterminez un système d'équations cartésiennes de la droite passant par le point $(2,1,4)$ et perpendiculaire au plan

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 2\lambda + 5\mu + 4 \\ y = 5\lambda + \mu - 1 \\ z = -\lambda - \mu + 3 \end{cases}$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

27. Quelle est la position de la droite $d \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = 1-z$ par rapport au plan $\alpha \equiv 2x-2y-2z+5=0$?
28. Donnez une équation cartésienne du plan α comprenant le point $(3,-2,4)$ et parallèle au plan $\beta \equiv x=z$.
29. Donnez une équation paramétrique de la droite d passant par le point $(-2,3,4)$ et parallèle à la droite d_1 d'équations $x-2 = \frac{3-y}{-2} = \frac{1}{3}(z-4)$.
30. Considérons la droite d_1 passant par les points $(0,2,0)$ et $(4,0,0)$ ainsi que la droite d_2 passant par le point $(2,3,1)$ et perpendiculaire à d_1. Quel est l'ensemble S représentant l'intersection des droites d_1 et d_2 ? Expliquez votre démarche.
31. Soit le système

$$\begin{cases} x+2y=4 \\ 5x-3y=1. \end{cases}$$

Quelles sont les solutions de ce système dans le plan $\mathbb{R}^2$? Interprétez géométriquement les résultats obtenus.
Quelles sont les solutions de ce système dans l'espace $\mathbb{R}^3$? Interprétez géométriquement les résultats obtenus.

32. Donnez une équation cartésienne du plan α passant par le point $(-1,0,2)$ et perpendiculaire à la droite d'intersection des plans d'équations $4x+2y+2z=-1$ et $3x-2y+3z=7$.
33. Quel objet géométrique est réprésenté par l'ensemble $\{(x_1,x_2,x_3) \mid (x_1,x_2,x_3)$ est un vecteur orthogonal à $(-1,3,0)\}$?
34. Soient les plans $\alpha \equiv -4x-5y-5z=-5$, $\beta \equiv x-5y+z=-10$ et $\gamma \equiv x+y-5z=0$. Recherchez l'ensemble des points d'intersection de ces trois plans. Expliquez votre démarche.
35. Soient les plans $\alpha \equiv 2x+y+z=1$, $\beta \equiv x+y+z=2$ et $\gamma \equiv x+y+z=0$. Recherchez l'ensemble des points d'intersection de ces trois plans. Expliquez votre démarche.

36. Quel est l'objet géométrique décrit par l'ensemble $\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y \in \mathbb{R}\}$? Expliquez votre démarche.

37. Quel est l'objet géométrique décrit par l'ensemble $\{(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid (\alpha,\beta,\gamma)$ est un vecteur normal au plan d'équation $x+y+z=4\}$? Expliquez votre démarche.

38. Les ensembles suivants peuvent-ils être des ensembles de solutions de systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$? Justifiez votre réponse.

    (a) $\{(3,4,-2)\}$
    (b) $\{(3,4,-2),(1,6,-1)\}$
    (c) $\emptyset$
    (d) $\mathbb{R}^3$
    (e) $\{(\lambda,2\lambda,-2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
    (f) $\{4,-2,3\}$
    (g) $\{(\lambda,2\lambda,-2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \cup \{(\mu,\mu+3,5) \mid \mu \in \mathbb{R}\}$
    (h) $\{(\lambda+3\mu,\lambda-\mu,\mu-2) \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\} \cup \{(4,5,2)\}$
    (i) $\{(2\lambda+5\mu,2\lambda+3\mu,\lambda+4\mu-2) \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\} \cup \{(12,8,7)\}$

39. Donnez une équation cartésienne du plan α perpendiculaire au plan β d'équation $x-2y+5z=3$ et contenant la droite d passant par le point $(2,1,1)$ et dont un vecteur directeur est $(-1,2,1)$.

40. Soient le plan $\alpha \equiv 4x-z=1-2y$ et le point P de coordonnées $(0,-2,3)$. Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite d passant par le point P et perpendiculaire au plan α. Déterminez ensuite le point d'intersection entre la droite d et le plan α.

41. Quel est l'ensemble des vecteurs (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux aux droites d_1 et d_2 définies par

$$d_1 \equiv 1-x = \frac{y+2}{-3} = \frac{-z+2}{-1}$$

$$d_2 \equiv (x,y,z) = (3\lambda+1,-\lambda-2,5+\lambda), \lambda \in \mathbb{R}?$$

    Décrivez géométriquement l'ensemble obtenu.

42. Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite d passant par $(2,-1,9)$ et dont un vecteur directeur est simultanément orthogonal aux vecteurs $(4,5,6)$ et $(-3,-1,0)$.

43. Soit le système

$$\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ 3x+2y-5z=2. \end{cases}$$

    Décrivez géométriquement l'ensemble des solutions de ce système. Expliquez votre démarche. Déterminez ensuite algébriquement quel est cet ensemble de solutions.

44. Soit le système

$$\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ 4x+2y+2z=6. \end{cases}$$

    Décrivez géométriquement l'ensemble des solutions de ce système. Expliquez votre démarche. Déterminez ensuite algébriquement quel est cet ensemble de solutions.

45. Soit le système
$$\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ -6x-3y-3z=-9 \\ -x+2y-3z=2. \end{cases}$$
Décrivez géométriquement l'ensemble des solutions de ce système. Expliquez votre démarche. Déterminez ensuite algébriquement quel est cet ensemble de solutions.

46. Soit le système
$$\begin{cases} \frac{x-1}{3}=1+\frac{1}{2}y=\frac{2z+3}{-10} \\ 3x+2y-5z=2. \end{cases}$$
Décrivez géométriquement l'ensemble des solutions de ce système. Expliquez votre démarche. Déterminez ensuite algébriquement quel est cet ensemble de solutions.

47. Soit le système
$$\begin{cases} \frac{2x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{-4z+3}{2} \\ 3x+2y-5z=2. \end{cases}$$
Décrivez géométriquement l'ensemble des solutions de ce système. Expliquez votre démarche. Déterminez ensuite algébriquement quel est cet ensemble de solutions.

48. Déterminez une équation paramétrique et un système d'équations cartésiennes de la perpendiculaire commune aux droites d_1 et d_2 définies par
$$d_1 \equiv \frac{x+2}{3}=\frac{y}{2}=z+1$$
$$d_2 \equiv \begin{cases} x=4+3\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=-5-4\lambda \end{cases}$$
où $\lambda \in \mathbb{R}$.

49. Déterminez une équation paramétrique et un système d'équations cartésiennes de la perpendiculaire commune aux droites d_1 et d_2 définies par
$$d_1 \equiv \begin{cases} 4x-z=0 \\ 3y+2z=0 \end{cases} \quad d_2 \equiv \begin{cases} x=0 \\ 3y-z=5. \end{cases}$$

50. Déterminez une équation paramétrique et un système d'équations cartésiennes de la perpendiculaire commune aux droites d_1 et d_2 définies par
$$d_1 \equiv \frac{x}{3}=\frac{1-y}{2}=\frac{z}{4}$$
$$d_2 \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{3-y}{4}=\frac{z-1}{2}.$$

51. On considère les points A, B, C et D de l'espace dont les coordonnées respectives sont $(0,2,0)$, $(\sqrt{3},-1,0)$, $(-\sqrt{3},-1,0)$ et $(0,0,2)$ (*Inspiré du tétraèdre orthocentrique dans (Robert, Robinet, & Tenaud, 1987)*).

(a) Ces points sont-ils coplanaires ?

(b) Montrez que les paires d'arêtes opposées du tétraèdre *ABCD* sont orthogonales.

(c) Montrez que les hauteurs du tétraèdre *ABCD* sont concourantes en un point *H* que l'on appelle l'orthocentre.

(d) Quelles sont les coordonnées des pieds des hauteurs dans chaque face du tétraèdre ?

(e) Les perpendiculaires communes aux arêtes opposées passent-elles par *H* ?

52. On considère les points *O*, *A*, *B* et *C* de l'espace dont les coordonnées respectives sont $(0,0,0)$, $(0,6,0)$, $(0,0,8)$ et $(10,0,8)$.

(a) Ces points sont-ils coplanaires ?

(b) On considère un point *M* sur l'arête *OB*. Quelle est la position exacte du point *M* pour que la section du tétraèdre *OABC* par un plan α soit un rectangle d'aire maximale, sachant que α est perpendiculaire à *OB*, α passe par le point *M* et α coupe les arêtes *AC*, *OC* et *AB* respectivement aux points *P*, *N* et *Q* ?

53. On considère trois points *A*, *B* et *C* de coordonnées respectives $(3,0,3)$, $(3,3,0)$ et $(0,3,3)$. Ces trois points forment un tétraèdre avec l'origine du repère.

(a) Représentez ce tétraèdre.

(b) Ce tétraèdre est-il régulier ? Justifiez votre réponse.

(c) Calculez la distance entre le sommet *O* et la face *ABC* du tétraèdre.

54. Une épreuve de sélection est organisée dans le cadre d'un jeu télévisé. Les candidats doivent répondre à trois questionnaires, côtés sur 20, mais avec des pondérations différentes. Le premier questionnaire porte sur l'histoire des sciences et des techniques (pondération 2), le deuxième sur la géographie de l'Europe (pondération 1) et le dernier comprend des questions de culture générale (pondération 2). Un candidat est sélectionné s'il a obtenu au moins 50 points sur 100. Les notes possibles des candidats dans chacune des matières sont représentées par les variables x (histoire des sciences et techniques), y (géographie) et z (culture générale). Un point $P(x,y,z)$ est associé à chaque candidat.

(a) Dans quelle partie de l'espace sont situés les points *P* ? Représentez-la.

(b) Dans quelle partie de l'espace sont situés les points associés aux candidats ayant obtenu 50 points ? Représentez-la.

(c) Est-il possible de trouver un candidat qui a eu 50 points à l'examen en ayant eu une note de 0 en histoire des sciences et des techniques ? Même question s'il a eu 0 en géographie, puis 0 en culture générale.

(d) Est-il possible de trouver un candidat qui a réussi l'examen avec une note strictement supérieure à 50 mais qui a eu une note de 0 en histoire des sciences et techniques ?

(e) On veut qu'un candidat ayant eu 8 en histoire des sciences et des techniques, 12 en géographie de l'Europe et 9 en culture générale soit sélectionné. Quelles sont les valeurs des pondérations a, b et c que l'on doit choisir pour qu'il soit sélectionné ? Donnez, si possible, un exemple de pondération acceptée.

55. Calculez la distance du point $B(-2,-4,3)$ au plan $\beta \equiv 2x-y+2z+3=0$.
56. Calculez la distance entre les plans $\alpha \equiv 2x+3y-z+1=0$ et $\delta \equiv 2x+3y-z-5=0$.
57. Calculez la distance entre le point $E(5,-3,1)$ et la droite

$$d \equiv \begin{cases} x = 4+3k \\ y = 5-7k \\ z = 6+k \end{cases}$$

où $k \in \mathbb{R}$.

58. Calculez la distance entre les droites d_1 et d_2 définies par

$$d_1 \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y}{2} = z+1$$

$$d_2 \equiv \begin{cases} x = 4+3\lambda \\ y = 1-2\lambda \\ z = -5-4\lambda \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

59. Calculez la distance entre les droites d_1 et d_2 définies par

$$d_1 \equiv \begin{cases} 4x-z=0 \\ 3y+2z=0 \end{cases} \qquad d_2 \equiv \begin{cases} x=0 \\ 3y-z=5. \end{cases}$$

60. Calculez la distance entre les droites d_1 et d_2 définies par

$$d_1 \equiv \frac{x}{3} = \frac{1-y}{2} = \frac{z}{4}$$

$$d_2 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{3-y}{4} = \frac{z-1}{2}.$$

Annexe E

Transcriptions des entretiens menés avec les enseignants

Le chercheur est indiqué par le lettre « C » et l'enseignant interviewé par la lettre « P ».

1 L'enseignant P_1

C: Comme je te le disais, la première partie de l'interview concerne les difficultés de tes élèves dans le chapitre de géométrie analytique dans l'espace.

P_1: Oui.

C: Je voudrais savoir si tu as déjà repéré des difficultés chez tes élèves lorsque justement tu abordes ce chapitre. Cela peut être des difficultés de tout ordre.

P_1: Oui. Ben déjà visualiser dans l'espace entre guillemets, juste placer un point dans l'espace.

C: D'accord.

P_1: Ça j'avais remarqué que c'était déjà très compliqué.

C: Visualiser où est le point ou le cheminement entre l'origine du repère et...

P_1: Les deux.

C: Ok.

P_1: Les deux. Après la méthode ils savaient... ils savaient me la réciter par cœur, savoir où on met un point mais le mettre c'était vraiment compliqué.

C: Ok.

P_1: Par exemple, si ton x il était en diagonal, ils avancent de 1 mais après pour monter suivant les z par exemple ben ils reprenaient les graduations là... ils montaient de 2 alors qu'il faut partir du point 1.

C: Ouais, ok.

P_1: Ça j'avais vu. Après du coup les vecteurs étaient... donc c'est le moment où ça a un peu foiré dans mon cours et qu'il faudrait que je retravaille ça... euh le... la

visualisation des vecteurs n'était pas très bien faite puisque de combien on avance selon x, y et z c'est... c'était compliqué.

C: Et le fait que le vecteur soit libre par rapport à la Physique ça pose problème ou pas ?

P_1: Ça je l'ai pas remarqué.

C: Ok.

P_1: Je l'ai pas remarqué.

C: Tu as d'autres difficultés ? De calculs, de comprendre ce qu'on fait euh...

P_1: Dans mon souvenir, je pense que ça c'était relativement bien passé, mais y avait beaucoup de propriétés liées à la visualisation directement avec des plans parallèles... quels critères avec plans, droites parallèles.

C: Ok. Donc plutôt visualiser les positions relatives...

P_1: Voilà.

C: ... des objets entre eux.

P_1: C'est ça.

C: Et ça serait plutôt partir d'une position relative précise et arriver à déduire la position... fin... des conditions sur les vecteurs ou plutôt à partir de conditions particulières de déduire la position relative des objets ?

P_1: À partir des conditions voir la position que ça a.

C: Ok. Donc...

P_1: Parce que dès que je faisais les petits dessins au tableau et qu'on mettait un vecteur normal ou un vecteur directeur, y avait pas de souci, ils savaient me dire que les vecteurs devaient être parallèles, colinéaires ou perpendiculaires.

C: Ok. Donc c'était dessiner.

P_1: Oui.

C: Et quand tu dis la droite est perpendiculaire au plan, c'était dessiner ça ou c'était dessiner à partir de ce qu'on sait ?

P_1: Je demandais pas de dessiner. Personnellement, je demandais pas parce que ça prend du temps de dessiner en 3D et il faut bien voir les choses.

C: Et schématiquement ?

P_1: Schématiquement je leur avais dit pour euh... ça sert à rien d'étudier les caractéristiques par cœur, les conditions. Je disais vous faites un schéma tout bête à côté et vous voyez quel vecteur est colinéaire à qui ou perpendiculaire. Donc ça y avait pas de souci mais juste étudier bêtement mais sans le schéma ça y comprenaient pas quoi. Et ça heureusement que certains avaient le réflexe de faire le schéma mais sans schéma...

C: Ok. T'as d'autres difficultés ou euh...

P_1: Je me souviens pas.

C: Même cette année hein. Je ne sais pas si tu l'as fait cette année.

P_1: Non. Parce qu'après quand t'as des math 6 après tu redescends quand...

C: Et du coup tu les as plus.

P_1: Voilà.

C: Moi en fait j'ai posé un mot de vocabulaire, c'est pas moi qui l'ai inventé, mais on a pas tous forcément la même interprétation du mot, et c'est justement le cas de le dire, parce que moi j'utilise le mot « interprétation géométrique ». Donc c'est-à-dire à partir d'une équation, je sais de quel objet il s'agit et quand je veux décrire tel objet je sais ce dont j'ai besoin pour le décrire par telle équation.

P_1: Ok.

C: Donc c'est ça que j'appelle l'interprétation géométrique. Est-ce que toi tu as vu que les élèves ils avaient des difficultés à partir d'une équation, par exemple, de dire ben là il s'agit d'une droite, là il s'agit d'un plan, ou à partir du fait que tu veuilles décrire une droite et un plan dire ben j'ai besoin d'un vecteur directeur, d'un vecteur normal et d'un point ?

P_1: Oui. J'avais l'impression qu'ils me récitaient juste par cœur ce qu'ils avaient appris mais qu'une fois que je donnais une équation, si par exemple pour un plan on avait l'habitude de l'appeler α, β ou γ, je le mettais pas et si je mettais pas d devant, de temps en temps ils voyaient pas de quoi je parlais, que ce soit un plan ou une droite or qu'on avait vu bien toutes les caractéristiques, pour une droite y avait besoin que d'une direction, pour un plan y en a besoin de deux mais c'était un peu flou.

C: Ok. Donc pour toi c'est vraiment un souci que tu as constaté.

P_1: Oui.

C: Ok. Justement est-ce que tu essaies de tenir compte de cette difficulté là ou bien si tu pensais pas l'avoir cette difficulté là au moment où tu as fait ton cours, est-ce que maintenant tu tiendrais en compte cette difficulté ? Et si oui, comment tu essaierais de l'amoindrir ?

P_1: Alors... je l'ai remarquée sans prévoir ce problème. Du coup, je ferais peut-être plus de rappels au début de chaque cours, vraiment rappeler les différentes équations, les types d'équations pour un plan ou pour une droite, remontrer en 5 minutes peut-être à chaque fois quelles sont les différences mais après comment passer au-dessus de cette difficulté là autrement je n'ai pas encore d'idée.

C: Ok. On en rediscutera. Donc là on est déjà au deuxième volet. En fait, je ne sais pas si tu es consciente de ce changement de points de vue mais en fait euh... les équations, les élèves ils ont l'habitude de travailler avec les équations, d'entendre ce mot un peu partout depuis le début de l'enseignement secondaire. Sauf que en fait, dans quasiment toute leur scolarité, ce qu'on demande c'est de pouvoir résoudre, résoudre des équations du premier degré, du deuxième degré, des équations logarithmiques, exponentielles, euh ... des systèmes d'équations. Donc c'est essentiellement résoudre. Et dans le chapitre de géométrie analytique, que ça soit dans le plan ou dans l'espace, une équation va décrire un objet géométrique et on demande

pas de résoudre une équation. Donc il y a vraiment un changement de points de vue à avoir sur ce qu'est une équation et ce qu'on en fait. Est-ce que tu étais consciente de ce changement de points de vue sur les équations ?

P_1 : Moi j'étais consciente mais le fait que cela pose problème j'en étais pas consciente mais je l'ai vu parce qu'à chaque fois... au début du chapitre de géométrie, ils me cherchaient, par exemple pour l'équation d'un plan, équation cartésienne d'un plan, ils me cherchaient x, y et z mais ils ne savaient pas me les trouver donc... je ne comprenais pas pourquoi ils faisaient ça mais, cette année avec les quatrièmes que j'ai, en fait les quatrièmes font aussi le même problème quand on cherche des équations de droites, ils cherchent juste x, y. Mais y a pas de valeurs. Et donc dès que tu n'as pas d'équations tu dois pas résoudre, ben ils cherchent quand même. Parce que c'est ce qu'ils ont eu l'habitude de faire et c'est la même chose quatrième, cinquième jusque la rhéto.

C: Donc tu étais consciente de ce changement de points de vue. Est-ce que tu penses qu'il est important pour tes élèves de se rendre compte qu'il y a vraiment un changement de points de vue à avoir ?

P_1 : Oui, mais il faut depuis le début où on parle d'équations qu'on explique qu'on doit pas toujours résoudre. C'est pas parce qu'on a une équation, qu'il faut résoudre. Donc je pense que le problème doit partir... fin la solution de ce problème doit partir dès la troisième quand on rencontre...

C: Je suis d'accord avec ce que tu dis mais, étant donné qu'à ce moment là de leur scolarité, on fait que résoudre, on a juste besoin de résoudre, le dire pourquoi pas mais ça va pas...

P_1 : Ils vont pas le retenir du tout.

C: Voilà. Donc est-ce que quand toi, par exemple, tu abordes en quatrième la géométrie analytique plane ou en cinquième ou rhéto la géométrie analytique dans l'espace, tu penses vraiment qu'il est important qu'ils se rendent compte à ce moment là qu'on fait pas la même chose ?

P_1 : Il faudrait réinsister plus dessus. Ce que je n'ai pas encore mis en place dans mon cours. Mais c'est vraiment cette année comme j'ai dit que je me suis rendue compte qu'ils avaient ... c'était machinal, ils cherchaient x, y. Il faudrait peut-être en parallèle, faire un cours en deux colonnes et dire pourquoi résoudre une équation, ça sert à quoi, pourquoi on le fait et d'un autre côté pourquoi on ne le fait pas et qu'est-ce que ça signifie pour l'objet. Je pense que ce serait intéressant de le faire.

C: Et tu penses que ça serait pas trop difficile d'attirer l'attention justement des élèves sur ce changement de points de vue ?

P_1 : Ça serait peut-être compliqué mais de toute façon j'ai l'impression qu'il faut le faire parce que moi ils me font à chaque fois cette faute là : chercher les valeurs de x et de y. Ils cherchent donc je me dis c'est qu'il y a un problème quelque part, qu'ils n'ont pas compris une subtilité.

C: D'accord. Ben en fait, tu as un peu répondu aussi à la dernière question puisque tu dis que tu t'en es rendue compte que cette année. Donc je suppose que tu n'as encore

rien mis en place toi pour le moment pour justement qu'ils arrivent à comprendre et à effectuer tout seul ce changement de points de vue.

P_1 : Non. À chaque fois je réexpliquais mais je me suis dit punaise si à chaque cours ils me demandent ça dans les lieux géométriques avec la droite, je me dis qu'il allait falloir faire autre chose.

C: Oui, c'est surtout dans les lieux géométriques qu'on en a besoin. Ben c'est bien parce que du coup on arrive déjà à la troisième partie. Je te montre ma séquence, je te l'explique et après je te laisse un peu de temps et on en rediscute juste après.

P_1 : Ça marche.

C: Ok. Donc en fait moi j'ai pris le parti de faire une activité d'introduction. Dans cette activité d'introduction, je vais laisser les élèves faire la première partie de la question tout seul.

P_1 : Sans rien dire ?

C: Alors, quand tu vois l'énoncé, c'est « résolvez graphiquement les systèmes ». Résoudre graphiquement ce n'est pas une habitude dans l'enseignement forcément. Donc j'aimerais bien revenir dans un premier temps à ce qu'est une équation, c'est quoi résoudre une équation, résoudre graphiquement une équation et attirer l'attention qu'ici on ne résout pas une équation mais on décrit un ensemble de points qui vérifient la même condition par une équation. Donc la première activité, j'ai fait exprès de reprendre les équations de droites dans le plan qu'ils ont déjà vues pour me permettre d'introduire cette démarche d'interprétation géométrique : en se disant ben résoudre un système c'est chercher l'intersection des objets, si ces intersections existent ; la première équation quel est l'objet qui est décrit, la deuxième équation quel est l'objet qui est décrit, venir par un pointage décrire les droites, donc considérer les droites comme des ensembles de couples et puis chercher le point d'intersection de ces droites là et puis d'écrire l'ensemble des solutions. Donc la première question sert vraiment à introduire cette démarche. Ce qui me permet ensuite dans la deuxième partie de l'activité, sur la même question, avec des systèmes bien choisis, de venir dire ben maintenant on est dans l'espace, dites moi l'ensemble des solutions. Et donc là ben tu prends le premier système, la première équation quel objet ça décrit, venir placer des points, venir montrer qu'il s'agit d'un plan particulier, deuxième pareil, troisième pareil. Ben ici, on résout un système, on cherche l'intersection des trois plans, c'est un point et déterminer ce point. Donc au fur et à mesure de la résolution des systèmes de la deuxième question, où l'enseignant et l'élève collaboreraient, donc il y aurait vraiment les élèves qui participent à la construction de la théorie et le prof serait là pour guider les élèves dans cette construction. Ce qui permet d'introduire ici avec eux toute la théorie de la géométrie analytique dans l'espace à part la notion de distance. Donc tu as : les plans particuliers, les droites particulières, tu as les points de vue qui vont apparaitre aussi donc point de vue paramétrique, vectoriel, cartésien, les positions relatives d'une droite et d'un plan, de deux plans entre eux etc. Ensuite, j'aimerais bien m'attarder sur des exercices qui permettent de faire les liens entre la géométrie synthétique et la géométrie analytique puisque justement dans les nouveaux programmes on demande de

faire des exercices qui permettent de comparer les démarches dans les deux types de problèmes. Donc c'est pour ça qu'ici il y a deux exercices où on demande de déterminer synthétiquement un point de percée ou une section de plan et puis le faire de façon analytique pour vraiment voir qu'il y a certaines méthodes qui sont plus rapides que d'autres mais qu'il y a une méthode plus précise que l'autre ici.

P_1 : Ok.

C: Ensuite, il y a toute une série d'exercices. Alors il y en a peut-être beaucoup, il y en a 57. Sache que je ne compte pas tous les faire. Donc voilà un peu la séquence que je propose. Je ne sais pas si tu as des questions qui te viennent tout de suite à l'esprit ?

P_1 : Non, mais juste ce que je peux te dire c'est que j'ai insisté quand tu regardes l'intersection de deux objets mathématiques, j'ai changé ma formulation et cette année je pense que c'est bien passé. À chaque fois que je demande l'intersection de deux objets mathématiques peu importe lesquels ce sont, ils me répondent tous on fait un système et on résout et on trouve nos deux inconnues.

C: Donc ça c'est déjà bien. C'est un changement déjà compliqué de comprendre que résoudre un système c'est chercher l'intersection des objets.

P_1 : Donc quand tu m'avais demandé si j'avais mis des choses en place, je t'avais dit non parce que je m'en étais rendue compte cette année mais comme ça je m'en étais rendue compte assez tôt que c'était important jusqu'à la rhéto, j'ai réussi à changer la manière de l'expliquer et ça semble être compris.

C: Ok. Donc ça semble être un truc qui fonctionne relativement bien d'agir de cette façon là. Ok. Donc là je te laisse un peu regarder la séquence et après j'ai juste quatre/cinq questions.

P_1 : Ça marche. Tu as tout renoté en théorie ou tu comptes… parce que tu m'as dit que tu allais dégager toute la théorie de ça, est-ce que tu comptes tout noter au tableau ou est-ce que c'est dans tes feuilles aussi ?

C: Alors, je compte tout noter au tableau mais à la fin ils ont en guise de bilan toutes les équations.

P_1 : Ok. D'accord.

C: et à chaque fois j'ai formulé en disant « pour décrire ceci on a besoin de ».

P_1 : Est-ce que je peux te poser mes questions au fur et à mesure ?

C: Oui, tu peux.

P_1 : Est-ce que tu penses si tu as un plan, par exemple ici tu en as un, ils vont savoir le tracer assez facilement dès une activité d'introduction ?

C: Disons que justement, à l'étape ici que tu me montres pour le système S_5, ils ont déjà un peu abordé les plans puisque les systèmes précédents abordent aussi des plans mais peut-être plus particuliers. Donc ici justement on doit se poser la question quel est l'objet géométrique associé à cette équation. Et comme pour tous les exercices précédents, cette question a été traduite en quels sont les triplets qui vérifient l'équation. Et donc un peu comme tu avais fait donc ton activité à toi, c'est

chercher des triplets qui vérifient, les placer, se rendre compte que tu as trois points qui sont non alignés et donc forcément ces trois points là vont former un plan.

P_1 : Ok, ça va. Je pense qu'utiliser vraiment le mot égalité, parce que moi c'est ce que j'essaie de leur dire, quand ils veulent me chercher x et y alors qu'ils n'ont pas d'égalité, je dis comment voulez-vous trouver x et y si vous n'en avez pas.

C: C'est ça et il y en a beaucoup qui écrivent par exemple $2x+3y+5z$. Ils oublient à chaque fois le « égal quelque chose ».

P_1 : Oui. Donc je leur demande, j'écris bien une égalité avec une équation à une inconnue hein, je vais pas plus loin tout de suite, je demande est-ce que vous êtes capables de trouver x. Oui. Et si je vous donne juste $2x+3$. Ben non madame. Je dis pourquoi parce que là… j'essaie de… le mot égalité est très important.

C: Ces feuilles là, ce que tu as devant toi, l'élève l'aurait dans son cours. Plus les notes qu'il aura prises une fois que la théorie sera introduite. C'est pour ça aussi qu'il y a des exemples et des contre-exemples pour expliquer ce que c'est ou ce que ce n'est pas.

P_1 : Oui. Je pense que c'est bien de le mettre dans le cours noir sur blanc. Parce que le nombre de fois où ils reposent les questions ou se trompent… [silence] Ben en gros, c'est ce que je dis sauf que pour l'instant je le dis que pour le plan quoi.

C: C'est pour introduire justement ce qu'est la démarche d'interprétation géométrique.

P_1 : [silence] Pour mon cours particulier, c'est ce que j'avais fait pour les positions relatives droites/plans, plans/plans, trois plans et j'avais écrit sous forme x, $2x$ pour y et $3x+4$ pour le z par exemple et elle m'a regardé, m'a fait des grands yeux et puis j'ai mis x appartient aux réels. « C'est quoi ça madame ? »

C: Oui mais ça c'est parce qu'ils ont jamais travaillé ça, mais ça c'est aussi une demande des nouveaux programmes donc c'est justement l'occasion de venir insérer ce genre d'écriture ensembliste.

P_1 : Mais c'est bien de différencier. Je trouve que tes deux premières pages ça refixe ce qui devait normalement être fixé mais au moins ils comprennent ce qu'ils font ou tu essaies de leur faire comprendre ce qu'ils font. [silence] Donc tout ceci tu auras fait en long et en large dans ton activité hein ?

C: Oui, avant ça. Là c'est juste un rappel, un bilan de ce qui a été fait.

P_1 : Parce que ça en quatrième je l'avais mal fait. J'avais donné directement si $x_v \neq 0$ et $y_v \neq 0$ et du coup dans le cas particulier ils n'avaient rien compris parce que c'était pas…

C: Là c'est pour être certaine qu'à un moment donné dans leur cours la théorie soit correcte et qu'ils aient pas mal recopié.

P_1 : [silence] Quand tu me l'as montré j'ai trouvé ça super intéressant et j'y aurai jamais pensé quoi. Parce qu'en gros c'est le même un point de percée c'est l'intersection entre une droite et un plan.

C: Oui et comme avant on voyait la géométrie synthétique en cinquième et la géométrie analytique en rhéto, on ne faisait pas forcément les liens. Mais ici c'est justement l'occasion de revoir un peu ça.

P_1 : et mettre un peu de sens aussi. [silence] Globalement, je n'ai pas d'autres questions ou d'autres remarques.

C: Je vais alors te poser les questions qu'il me reste. D'abord, qu'est-ce que tu penses de l'activité d'introduction ?

P_1 : Je suis sceptique dans l'idée de tout noter la théorie au tableau mais c'est bien de la dégager de là. Mais rien avoir sur feuilles avant la page 4... je sais pas trop.

C: Ok, mais si tu écris la théorie sur des feuilles et que tu fournis tout le document...

P_1 : Il y a moins d'intérêt.

C: Oui parce que tu ne construis plus la théorie toi-même. Maintenant si je note tout au tableau et que les élèves ne notent pas et que je donne les feuilles après, ça sert à rien non plus.

P_1 : Je suis d'accord. C'est pour ça que je suis sceptique mais en même temps je ne sais pas ce que j'aurais fait d'autres. Sinon les activités en elles-mêmes sont biens pour visualiser et puis du coup tu ne plaques pas bêtement des définitions. Ils apprennent à étudier l'objet qui n'ont pas eu l'habitude de rencontrer et ça ils ont eu l'habitude de le rencontrer avant.

C: Donc tu penses que c'est une bonne idée de commencer par la démarche dans le plan et de l'étendre à l'espace ?

P_1 : Oui.

C: Et au niveau des exercices, tu penses que...

P_1 : Ben tu as été étape par étape, ils vont pas tomber des nues avec l'équation la plus compliquée entre guillemets. Je pense que ça va.

C: Ok. Est-ce que tu penses que justement la séquence va atteindre l'objectif que je m'étais fixé c'est-à-dire développer l'interprétation géométrique des élèves ?

P_1 : Je pense. Tu as bien axé sur ça, tu as bien insisté sur le sens que pouvait avoir chaque mot, ce que ça décrit. Je pense... en tout cas c'est axé sur ça donc je pense que ça atteindra bien...

C: Ok. Est-ce que tu penses qu'elle est réalisable aussi bien au niveau de la difficulté de ce que je propose, du timing et du public actuel ?

P_1 : Le timing c'est quoi ?

C: Ben dans les programmes, ils disent qu'on peut aller jusque 17 périodes de cours pour ce chapitre. Ce que tu as fait toi c'est entre 14 et 16 périodes.

P_1 : Oui, trois semaines. J'avais moins d'exercices mais les bases sont mieux fixées.

C: Tu trouves que ça fixe mieux les bases et du coup dans les 57 exercices, même si j'en fait que 15 ça sera suffisant ?

P_1 : Peut-être 15 pas assez, mais je veux dire au moins quand ils rencontreront par exemple l'exercice 31, ils vont pas tomber des nues devant la notation. Tandis que moi si je l'ai utilisée, je l'ai pas expliquée et ça peut me faire perdre du temps.

C: Justement au niveau des exercices, tu penses qu'ils sont biens ?

P_1 : Ceux là ils sont très biens parce que ça montre que ce qu'ils ont fait avant ils peuvent le faire d'une autre manière mais que ça revient à la même chose. Par contre, pour le public actuel, je t'avoue que moi ma classe si elle reste comme ça . . . mais c'est un mauvais choix d'option. Ils sont vraiment vraiment nuls. Ce n'est même pas pour certain des niveaux cinquième math 4 et ils sont en math 6. Donc s'ils sont bien écrémés, je pense que ça pourrait le faire, mais il faut encore avoir les bons élèves et les élèves qui travaillent.

C: Et si tu avais une classe un peu comme d'habitude, donc de niveau correct, tu penses que c'est faisable ?

P_1 : Oui. La classe que tu étais venue voir c'est juste qu'ils étaient bruyants. J'avais du mal avec l'autorité, je venais de les avoir. Je pense que ça serait passé.

C: Ok. Dernière question : si jamais je te donne le document et que tu peux le faire en classe toi-même si tu le désires, est-ce que tu serais prête à l'utiliser dans ta classe ?

P_1 : Bien sûr. Après je devrais bien résoudre et le faire moi-même pour être sûre d'où je veux les emmener. Puisque là du coup comme il n'y a aucune résolution, je ne sais pas à quel moment tu veux parler de quoi. Donc moi je pense que ça serait plus pour les exercices et l'activité d'introduction pour bien être sûre de là où je veux les emmener.

C: Ok. Donc autrement dit, si je reformule un peu ce que tu viens de dire, et peut-être guider un peu ton raisonnement, la séquence telle quelle si je te donne que ceci, tu te l'approprierais mais tu devrais quand même fournir un travail important pour te rendre compte où je veux en venir.

P_1 : Oui.

C: Et si jamais moi je te donne un document qui accompagne et qui explique où je veux en venir, est-ce que tu penses que c'est facilement appropriable ?

P_1 : Oui.

C: et tu pourrais te l'approprier ?

P_1 : Oui.

C: mais là comme ça telle quelle peut-être pas ?

P_1 : Oui.

C: Si je te l'avais donnée sans explication, tu n'aurais peut-être pas compris le principe ?

P_1 : Oui.

C: mais avec un document et mes explications tu la ferais sans problème.

P_1 : Pas de problème.

C: Ok. Ben voilà. Merci de ta participation. Je n'ai plus d'autres questions.

P_1 : Avec plaisir, j'espère que ça va t'aider.

2 L'enseignant P_2

C: Voilà. J'ai à-peu-près une quinzaine de questions sur le chapitre des droites et des plans dans l'espace. Il y a trois volets : une partie sur les difficultés, une partie sur un sujet précis et après je présente une séquence que j'ai créée et après vous me dites un peu ce que vous en pensez. Au niveau du premier volet sur les difficultés, est-ce que vous avez déjà repéré des difficultés chez vos élèves lorsque vous abordez le chapitre des équations de droites et de plans dans l'espace ?

P_2: Oui. Oui, donc les difficultés sont souvent les mêmes. C'est le transfert de la 2D à la 3D et donc les repères qui ne sont pas les mêmes. Et donc euh... ils vont imaginer dans leur tête des situations qui ne sont pas vraies...

C: Par exemple ?

P_2: ... comme quand on parle de perpendicularité euh... comment je vais dire euh... je vais essayer d'être clair. Donc c'est dans un certain style d'exercice où on demande par exemple l'équation... que je dise pas de bêtises... euh j'ai plus comme ça en tête parce que ça date d'il y a quelques semaines... où ils vont rechercher, calculer quelque chose mais il en manque un autre c'est par exemple...

C: Plus du côté de la perpendicularité de deux droites et on pense pas qu'elles peuvent être gauches ?

P_2: C'est ça voilà, oui, oui. C'est cet exemple là que je cherchais. Ils vont chercher un produit scalaire nul et le produit scalaire nul ne suffit pas parce que forcément... elles peuvent être orthogonales au loin. Et j'avais aussi une autre situation mais ça va me revenir. Enfin j'espère.

C: Des difficultés, par exemple, est-ce qu'il y en a au niveau des calculs, au niveau de trouver une équation, de passer d'une forme à une autre ?

P_2: Mais ça moins je dirais. Tout dépend des groupes. Il y a des groupes qui sont plus studieux que d'autres et ceux qui ont étudié avant les... les... les... au niveau des équations, je remarque que ça pose pas trop trop de souci. Par contre, forcément, ceux qui n'ont pas encore mémorisé les formes des équations, ben y en a qui ont des difficultés, y en a qui vont peut-être bien s'imaginer ce qu'ils doivent calculer mais ils ne savent pas le faire parce qu'ils ont oublié que... je sais pas moi... qu'un vecteur normal à un plan c'était tel élément et donc ils savent, oui, oui je sais que je dois faire ça mais... Mais sinon au niveau du calcul, je dirais que ça va plus ou moins. Bon jusqu'à présent c'était en sixième. Depuis cette année c'est passé en cinquième et je dois dire que c'est pas le cas forcément de tous mes collègues, mais moi j'ai eu de la chance, j'ai eu une bonne classe de cinquième, classe nombreuse mais qui travaillait bien et euh à part quelques uns au niveau calculs il y a pas trop de souci, je dois dire.

C: C'est un chapitre qui utilise pas mal de connaissances anciennes, est-ce que c'est difficile pour les élèves de remobiliser ces connaissances ?

P_2: Moi je dirais que ça va plus ou moins euh... dans le sens où... au moment où je l'introduis... Bon ici en cinquième, au moment où je l'introduis, je commence par

des choses qui sont faites dans le plan. On refait les choses au niveau du calcul et après on passe à la dimension supérieure mais juste avant... j'ai pas mis au hasard dans le déroulement des chapitres, un petit peu avant on a vu les coordonnées d'un point en dimension 3, puis après les vecteurs en dimension 3, le produit scalaire en dimension 3 et puis pour ne pas que ça soit trop, on a fait quelque chose entre, puis on est revenu là-dessus. Donc c'est pas je dirais trop éloigné et tout ce qui est mobilisable après j'ai essayé d'en mettre une grande partie, pas tout j'ai pas pu forcément tout tout mettre mais j'essaie de mettre une partie là ou avant mais encore une fois ceux qui auront bien réussi la partie avant, bien mémorisé la partie avant ben ça marchera mieux que les autres. Si c'est trop éloigné à mon avis sans doute qu'il y aura des oublis ce qui fait que ça va être plus compliqué quoi.

C: Ok. Moi quand je suis venue vous observer c'était en rhéto justement le chapitre...

P_2: C'est ça oui.

C: ... est-ce qu'il y a des différences par rapport aux cinquièmes ou bien c'est le même document ?

P_2: Je dois dire que, par raison de facilité, j'ai pas beaucoup changé parce que j'avais pas de quatrième l'an passé. J'explique pourquoi. J'avais pas de quatrième l'an passé et j'ai dû refaire un cours de quatrième l'an passé. Par contre, cette année j'en avais et j'ai dû refaire un cours de quatrième et refaire un cours de cinquième et les choses que j'ai pu récupérer d'ailleurs je l'ai fait. Moi je me donne deux, trois ans pour adapter le tout et donc voilà, ici j'ai repris... oh j'ai peut-être fait un ou deux petits rappels en plus...

C: Globalement, c'est le même scénario.

P_2: Voilà. J'ai repris à peu près, vraiment, aller à 95% la même chose par facilité pour moi en tout cas cette année quoi.

C: Ok. Tout à l'heure vous avez dit que le passage du plan à l'espace pouvait être problématique. Je pense par exemple aux équations cartésiennes. Est-ce que ça pose problème de se dire qu'une forme d'une équation cartésienne d'une droite dans le plan ressemble très fort à la forme d'une équation cartésienne d'un plan dans l'espace ? Est-ce que ça ça pose problème ?

P_2: Moi je perçois le problème mais pas longtemps. Je le perçois mais bon bah ok il y a une variable de plus. C'est un plan, ok. Ce qui pose plus problème c'est la différence de forme entre une équation cartésienne de droites dans le plan et dans l'espace où là... le plan ça va. Par contre la droite ils ne se retrouvent pas face à une équation mais à une double ou voire à une triple équation. Là ils ont un petit peu plus de mal parce que pour eux ça c'est pas une équation c'est...

C: Un système.

P_2: ... pas une écriture... Oui, voilà. C'est pas quelque chose de facile à utiliser. C'est là que la difficulté se pose le plus.

C: Ok. Alors deuxième question. Je parle d'interprétation géométrique. Donc c'est à partir d'une équation je sais de quel objet il s'agit et si je veux décrire tel objet je sais ce dont j'ai besoin pour décrire avec tel type d'équation. Est-ce que vous vous avez

constaté des difficultés chez vos élèves à interpréter géométriquement justement les équations ?

P_2 : Chez certains oui. Parce que chez certains, je dirais ils étudient plus des techniques de calculs sans savoir vraiment ce qu'ils font. Ils savent que dans telle situation ben on va prendre ça, on va calculer un vecteur directeur, on va s'arranger pour qu'il soit perpendiculaire à deux autres pour avoir des plans ou ce genre de choses.

C : C'est plus une recette.

P_2 : Voilà et donc là si en cours de route il y a quelque chose qui ne tombe pas bien pour eux ou s'ils font une erreur, ils ne s'en rendent pas compte, même à la fin au niveau de l'interprétation, ils ne vont pas s'en rendre compte. Et puis, il y a forcément la tranche où là ils… comment je vais dire euh… ils comprennent bien, vraiment bien, ce qu'ils font et là ben euh ça va assez bien si on leur demande d'interpréter parce que c'est pas naturel chez les élèves de le faire. Ils font un calcul, ils ont un résultat, voilà, voilà le résultat et c'est tout. Voilà. Et si on demande de vérifier la plausibilité du résultat ou ce genre de choses, ben voilà, c'est là que ce que j'ai dit avant, certains vont le faire correctement, d'autres… plausibilité du résultat, déjà c'est quoi ça, pour certains. En règle générale ils ne cherchent pas à voir si ce qu'ils ont calculé peut fonctionner par rapport à l'énoncé géométrique qu'ils ont. Le calcul est nettement plus confortable à manipuler donc euh voilà on a calculé, on a un résultat, c'est bon.

C : Ok. Justement, est-ce que dans le cours que vous avez fait vous tenez compte des difficultés que vous venez de me dire ? Et si oui, comment vous faites ?

P_2 : Disons que… dans certains cas… avec les cinquièmes, j'ai un peu moins eu le temps parce que le programme est gros.

C : Il paraît qu'il est très chargé oui.

P_2 : Voilà. Très, très chargé. Par contre, avec les sixièmes là je demandais, plus avant, de me décrire ce qu'on allait faire avant de le faire. Et puis après ben de temps à autre euh… quand moi j'y pense aussi parce que le timing fait que, parfois, on essaie de gagner un peu de temps, à ce moment-là ben je pose la question. Voilà. C'est la façon la plus je dirais économe en temps, c'est de poser la question en espérant que si on la pose régulièrement eux vont penser à le faire. Dans certaines classes, il faudra voir ici en cinquième, mais dans certaines classes en sixième, plus en fin d'année quand on fait les révisions et autres, à ce moment-là on peut insister un peu plus. Mais, je dirais que si on leur dit il faut y penser parce qu'au moins vous voyez si vous vous êtes trompés ou pas ça marche pas trop. Par contre, dans les sections où les heures de math sont plus élevées comme ici 8 heures, ça passe mieux quand c'est un conseil, pas pour réussir mon examen, mais pour réussir un examen d'entrée qu'ils vont passer après. À ce moment-là, j'ai l'impression que je passe de l'examinateur à la personne qui donne un conseil pour réussir un examen qui n'est pas le mien. Ça ça passe mieux au niveau des élèves, ils se disent ah oui, ça c'est un bon conseil. Alors que si c'est pour mon examen, c'est une phrase de plus que le prof a dite parmi d'autres.

C: Ok. Dans le deuxième volet, j'aimerais bien qu'on parle un peu plus spécifiquement des équations. Alors, je ne sais pas si vous êtes au courant mais au début de l'enseignement secondaire, on demande beaucoup de résoudre des équations, du premier degré, résoudre des systèmes d'équations, puis on arrive à résoudre des équations du second degré, des équations logarithmiques, exponentielles etc. et dans le chapitre de géométrie analytique c'est pas vraiment la résolution qui est importante mais c'est la description d'un objet géométrique par une équation. Donc, il y a vraiment un changement de regard sur l'objet équation. Est-ce que vous en étiez conscient de ce changement de regard ?

P_2: C'est une bonne question. Je ne sais pas si je suis conscient qu'il y a ce changement de regard. J'ai envie de dire oui [rires] mais je ne sais pas. Non, sérieusement, je pense que le changement de regard je mentionne d'une façon ou d'une autre les choses mais je ne saurais pas dire si c'est vraiment volontaire ou pas.

C: D'accord. Est-ce que vous pensez que c'est important pour un élève de se rendre compte qu'on ne fait pas la même chose au niveau des équations dans le chapitre de géométrie analytique que dans les autres chapitres où on utilise les équations ?

P_2: Oui, dans le sens où, fin... Voilà. Oui, y a ce que moi j'appelle la représentation mentale de l'objet et qui est au niveau de... on a une équation et donc il faut s'imaginer ce que ça peut être, droite, plan, plan particulier, droite particulière, en tout cas au début et puis euh... forcément la résolution ça va être pour chercher des choses particulières de ces objets là et donc oui, je pense que... je ne sais pas si j'insiste vraiment là-dessus mais je pense que j'en parle parce que ceux qui ne savent pas vraiment quoi faire, ils ont une équation ben qu'est-ce qu'ils font, ils essayent de résoudre. Et quand on a une équation de droite ou de plan, on a beau essayer de résoudre une équation si on sait pas ce qu'on cherche ben voila... si maintenant on me dit de résoudre l'équation $2x+3y+4z=5$, voilà, ben je sais pas résoudre ça moi. Les élèves réussissent. Voilà. Les x les embêtent ben ils vont le remplacer par 0 ou par 1, je ne sais pas pourquoi, fin si c'est des nombres qui ont des statuts particuliers mais voilà. Je dirais que ça vient même avant, quand on... même quand on est avec des bêtes, des simples équations de droites, il y en a qui savent pas quoi faire et ils cherchent. On sait résoudre des équations et ils le font à fond. C'est pour ça que je pense, que je demande avant, un canevas de ce que l'on va faire et les outils avant de le faire quoi, avoir une stratégie avant de se lancer.

C: Oui, ok. Est-ce que vous essayez de faire comprendre à vos élèves qu'un objet géométrique qui est décrit par une équation ça représente un ensemble de triplets qui vérifient tous la même caractéristique ? [silence] Si je reformule, est-ce qu'on travaille les ensembles de points ?

P_2: Pas tellement, je pense. Je crois qu'on le mentionne, surtout quand on va résoudre des systèmes pour chercher une intersection, on va peut-être dire une phrase du style parmi tous les points il y en a peut-être un qui... mais je pense pas que ça aille plus loin. En tout cas dans mon discours je pense pas que ça aille plus loin que ça.

C: Les nouveaux programmes demandent d'intégrer de la logique et de la théorie des ensembles au fur et à mesure des chapitres et moi il me semble que c'est justement

un des chapitres où on peut travailler de la théorie des ensembles. C'est pour ça que dans ma séquence je la travaille un petit peu.

P_2 : C'est quelque chose que moi je trouve important en tout cas et j'essaie de le faire, maintenant c'est en quatrième, quand on parle des équations de droites, qu'ils se rendent compte pour les droites, pareil pour les cercles et les paraboles, que c'est simplement qu'on a une fonction, c'est simplement un lien qui unit deux nombres et que voilà, il y en a un qui est une abscisse, l'autre qui est une ordonnée et que si ces liens sont ceux-là on va avoir des ensembles de points qui vont se positionner de manière très particulière : droite, ellipse, hyperbole, non pas ellipse en quatrième, mais les paraboles, cercles et autres. Ça j'en parle en quatrième mais j'ai un peu l'impression que ça... en quatrième en tout cas... passe au-dessus de pas mal d'élèves et là c'est vrai que dans ce chapitre là, cinquième, section scientifique, c'est quelque chose qui pourrait être plus...

C: Plus abordé peut-être ?

P_2 : Oui, c'est ça. Voilà. Ça c'est quelque chose à modifier sans doute par rapport à ma pratique de sixième où là ben...

C: Ces nouveaux programmes demandent aussi de travailler l'interprétation géométrique et de pouvoir sur des exercices comparer des démarches de géométrie synthétique et de géométrie analytique. Et donc moi j'ai essayé justement de tenir compte de ces nouvelles injonctions dans les programmes pour créer une séquence complète : activité d'introduction, théorie, exercices. J'ai pris le parti dans cette activité d'introduction, donc je vous l'explique et après je vous laisse regarder, de partir d'une question où justement on va remobiliser les connaissances du plan. Pourquoi ce choix, pour amener la démarche d'interprétation géométrique, c'est-à-dire voilà, je veux résoudre ce système-là, qu'est-ce que c'est résoudre un système, c'est trouver des intersections entre des objets géométriques, quel est l'objet géométrique de la première équation, c'est une droite, ici c'est une droite, on les représente, on cherche l'intersection graphiquement et on décrit donc des ensembles de points. Pareil pour tous les systèmes. Cela me permet après de passer à l'espace et de réexploiter cette démarche qui vient d'être introduite pour justement amener au fur et à mesure de la correction des exercices avec les élèves la théorie. C'est réfléchi pour que ça soit amené au fur et à mesure : on amène les équations particulières de plans, puis les équations de droites, les positions relatives. Cela m'amène à revenir sur c'est quoi une équation, ce qui n'est pas une équation, qu'est-ce qu'on fait réellement quand on résout algébriquement et graphiquement une équation, il y a un passage pour attirer l'attention que ici on ne résout pas une équation, on résout des systèmes, et une équation ça décrit un objet géométrique. Une fois que toute cette théorie est introduite je leur fournirais un bilan pour être certaine qu'à un moment donné dans leur cours la théorie soit correcte, qu'il y ait pas de fautes de recopiage etc. Je propose deux exercices de points de percée et de section de plans où justement cette fois-ci on va le faire de façon synthétique et de façon analytique pour pouvoir comparer les démarches, les avantages de l'une et de l'autre. Puis il y a toute une série d'exercices qui travaillent un peu toutes sortes de choses allant du classique au plus compliqué. Donc là il y a toute une série de problèmes. Alors, il

y a beaucoup d'exercices mais je ne compte pas faire les 57 exercices hein mais au moins il y en a aussi pour travailler chez eux en exercices supplémentaires ou en révisions. Si vous avez des questions, vous pouvez me les poser au fur et à mesure et je vous laisse prendre connaissance de la séquence.

P_2 : C'est une approche qui est en fait plus basée sur… comment je vais dire… c'est un départ plus calculatoire plutôt qu'une approche basée sur le visuel ou le descriptif.

C: C'est ça. En partant de ce qu'ils connaissent en fait, des connaissances qu'ils ont déjà vues.

P_2 : Ici, on demande de trouver une équation d'un plan perpendiculaire à une droite. Tous les cas sont amenés au fur et à mesure car ici dans le bilan on n'en parle pas ?

C: Oui, mais elles sont amenées dans l'activité d'introduction. Dans les deux derniers systèmes, on introduit toutes les positions relatives. Par exemple, ici, on cherche l'intersection d'une droite et d'un plan. On a reconnu la droite, on a reconnu le plan, de géométrie synthétique qu'est-ce qu'on sait sur les positions relatives ben la droite peut être parallèle distincte, peut être confondue, peut être sécante, comment on peut faire pour savoir ici ce dont il s'agit, et comme on a déjà parlé de vecteur normal au plan et de vecteur directeur de la droite, on peut essayer d'amener toutes les conditions.

P_2 : Oui, oui, oui, oui.[silence] Ah, c'est un exercice comme ça que quand tu étais venue…

C: Oui, la perpendiculaire commune ça avait été compliqué.

P_2 : Ils en trouvaient une mais ne pensaient pas au plan qui la contenait en fait. Ils avaient l'impression qu'ils avaient la perpendiculaire mais non ils avaient trouvé simplement euh…

C: Une perpendiculaire à la première mais pas forcément à la deuxième ?

P_2 : C'est ça, voilà. Ils avaient le plan mais pas la droite particulière.

C: Vous avez des questions ?

P_2 : Non. J'identifie la démarche.

C: Ok. Première question c'est sur l'activité d'introduction. Qu'est-ce que vous en pensez ?

P_2 : Que c'est pas quelque chose que moi j'ai… fin c'est pas le chemin que moi je prends habituellement mais pourquoi pas je dirais. Comme n'importe quel chemin ça a le mérite d'exister et ça devrait être testé pour voir si ça fonctionne aussi bien que ce qu'on a imaginé. Voilà. Donc *a priori*, j'en pense rien de négatif et rien encore de positif puisque forcément ça ne reste pour l'instant que… comme à chaque fois qu'on créée quelque chose de nouveau hein, ça ne reste que dans la tête. Et dans la tête de l'auteur tout se passe bien. Donc voilà il faudrait voir après expérimentation, je suppose.

C: Est-ce que vous pensez que cette séquence elle est réalisable aussi bien au niveau timing, public et difficulté ?

P_2 : Au niveau technique, oui. Je pense bien. De toute façon, la théorie qui n'existe pas ici, parallèle et tout ça, je pense que les élèves se la feront petit à petit aussi, ils se rendront compte que à tel moment on a ça, tiens on a la même chose, donc on a la même conséquence et donc il y a des cheminements de pensée et donc euh voilà. Au niveau timing, je ne sais pas tout ce que toi tu as prévu comme ça, ce que tu imagines que ça prenne comme temps.

C: Dans les programmes, on dit que ce chapitre-là prend maximum 17 périodes. Je pense que ça rentre dans les 17 périodes étant donné que je ne compte pas faire les 57 exercices.

P_2 : Oui, ça façon certaines classes on en fait 15, d'autres 20, ça dépend de ce qu'on a. Puis, en fonction de ce qu'on fait, comme il y en a qui sont vraiment dans le même style eh ben, un c'est bon, puis dans certains groupes il en faut deux ou trois. Oui, bon *a priori* ce que j'imagine c'est que… à première vue, ce que j'imagine c'est l'activité d'introduction qui à mon avis devrait prendre le plus de temps puisque finalement c'est là que tout va se faire. Et puis après on remet en ordre.

C: Exact.

P_2 : Donc je dirais qu'au niveau timing ça dépendra de l'activité d'introduction, comment elle est faite, comment elle est amenée, parce que si on met tout au fur et à mesure et qu'on décortique bien les choses comme ça à première vue, si on fait les 10 systèmes qui sont là avec l'interprétation, rien que ça, je verrais au moins 4 heures de cours.

C: Oui, oui. J'en ai prévu 5.

P_2 : Voilà. On a plus ou moins la même idée. Je dirais au moins 4 heures de cours. Parce que si c'est juste pour faire des systèmes, je crois que tout peut être fait en 2 heures mais il y a pas l'interprétation. Après, on fait peut-être une synthèse qui va durer entre 1 et 2 je pense et puis le reste qui est là. Oui je pense que…

C: En fait, je pense que toute la théorie ça devrait être 7 périodes et que tous les exercices, ça me laisse 10 périodes pour les exercices.

P_2 : Voilà.

C: Et au niveau du public, vous pensez que les élèves de cinquième actuellement seraient capables de travailler de cette façon-là ?

P_2 : Ça dépend des groupes. Le groupe que j'avais cette année, je pense que oui ça pourrait fonctionner. J'avais un groupe investi et quand on leur demande de faire des choses ils le font, on va dire entre 60 et 70% des élèves hein. La grosse majorité est bien réceptive et autre. Ma collègue avait un groupe assez différent. Elle aura d'ailleurs pas fini ce qu'elle voulait faire. Mais comme ça dans l'absolu je dirais que *a priori* ils devraient pouvoir faire ce genre de choses. Et en fonction du moment de l'année, avec une aide plus ou moins importante forcément en début car en quatrième on ne fonctionne pas du tout comme ça je pense. Oui, je pense que ça peut fonctionner. À la personne qui présente la séquence de s'adapter au moment de l'année.

C: Oui, oui mais comme il y a tous les prérequis avant, maintenant que c'est en cinquième, et donc c'est plus un chapitre de fin d'année que de début. Au niveau des exercices, qu'en pensez-vous ?

P_2: Boh qu'*a priori* que c'est varié. Il y a des exercices assez je dirais plus techniques. Si on regarde les premiers c'est simplement… de la technique je dirais. On va tester si on sait manipuler un peu ce qu'on a sous la main : les vecteurs, les points, les équations. Puis ben voilà après, si on regarde le 25, peu importe la technique, quelle est la position de la droite par rapport au plan, ben voilà, à l'élève de savoir ce qu'il doit faire, la technique ne doit plus être un problème. Puis ici 40-41 décrivez géométriquement l'ensemble des solutions, ben voilà. Je pense que il y a la gradation entre la maitrise de la technique et puis petit à petit arriver à un vrai problème géométrique où le calcul vient en renfort. Le cheminement me semble un cheminement tout à fait sensé.

C: Je vous ai dit que mon objectif avec cette séquence c'était justement de travailler cette démarche d'interprétation géométrique. Est-ce que vous pensez que la séquence que je viens de vous présenter va vraiment atteindre cet objectif ?

P_2: Tout est fait pour en tout cas. Tout semble aller dans ce sens-là. Encore une fois il faudra voir quand ça sera testé parce qu'on a parfois, même quand on a dix ou quinze ou vingt ans d'expérience, on a parfois des surprises.

C: Tout à l'heure on a parlé du changement de regard à avoir sur les équations. Est-ce que cette partie-ci ça permettrait d'amener ce changement de regard et de bien fixer les choses ?

P_2: Décris comme ça, oui. Je pense à cet endroit-là, peut-être mettre 2-3-4 petits exercices en disant simplement… fin en décrivant la situation et puis voir si l'élève voit si c'est un cas de description ou un cas de résolution. Parce que pour lui c'est pas évident de toute sa vie il a jamais fait que la résoudre et donc savoir que une équation c'est une description d'objet, ok, peut-être 2 ou 3 éléments parce que quand je vois ici, ça n'y est pas, parce qu'on ne teste pas la même chose, pour que ça ne soit pas juste pour l'élève du blabla.

C: Ok.

P_2: Voilà, je pense que ça pourrait fixer les choses et ça obligerait l'élève à réfléchir et pas juste lire le tout.

C: Ok. Comme un petit vrai ou faux par exemple.

P_2: Oui c'est ça, pourquoi pas.

C: Ok. Dernière question : seriez-vous prêt vous à donner cette séquence si je vous donnais les feuilles ?

P_2: Pourquoi pas. Il faudrait forcément que je m'y prépare mais *a priori* pourquoi pas. Comme… je dois dire que je serais… je pense que… il faudrait forcément que je prépare le tout et il faudrait alors puisqu'ici il y a un but là derrière, il faudrait que je puisse aussi, pas répéter, mais il faudrait que je puisse décrire ce que je vais faire avec l'auteur parce que si je passe à côté d'un objectif à ce moment-là ça veut dire, alors il y a plusieurs possibilités, ça veut dire que soit j'ai pas saisi ce qui était là

donc qu'une petite note ou quelque chose doit être ajoutée ou bien alors ça veut dire que... ou alors je ne sais pas.

C: J'entends bien que tel quel c'est compliqué de se l'approprier parce que vous l'avez pas fait vous-même. Si je reformule un peu ce que vous venez de dire, tel quel c'est compliqué parce que vous devez vous-même essayer de vous mettre dans ma démarche et sans avoir de document d'accompagnement c'est peut-être compliqué.

P_2: Sans avoir de guide, oui, de léger guide. Donc ici c'est parce qu'on a discuté un petit peu mais quand on dit résoudre graphiquement si on prépare pas et qu'on a pas la discussion, je vais les résoudre, je réponds à la consigne et puis voilà. Tandis que le but ici c'est pas ça mais j'ai eu l'information. C'est nécessaire en tout cas de voir où on va aller c'est sûr. Faut pas spécialement un document d'accompagnement, juste un... à mon avis la discussion qu'on a eue ici suffirait et il faudrait juste trouver un moyen de l'écrire je dirais dans un style convenable pour que ça soit écrit. Mais simplement dire avec l'activité d'introduction, on veut mettre en évidence ça, ça et ça plutôt que les techniques de résolution logiquement un prof... normal je dirais... comprendra où on veut aller et alors préciser, on insistera sur les positions particulières de tel plan et tel plan, en disant ben voilà c'est ce système-là qui est... voilà. À mon avis c'est pas quelque chose qui devrait être très long.

C: Moi j'imaginais un document où peut-être en une ou deux pages expliquer la philosophie et peut-être fournir le correctif pour vraiment voir toutes les étapes.

P_2: Oui, par exemple.

C: Ok. Merci. Merci beaucoup. C'est fini.

P_2: De rien.

3 L'enseignant P_3

C: Voilà. La première partie porte sur les difficultés des élèves.

P_3: Ok.

C: As-tu déjà repéré des difficultés chez tes élèves lorsque tu abordes le chapitre des équations de droites et de plans dans l'espace ?

P_3: Oui. Quand on aborde les équations cartésiennes de droites, c'est surtout la manipulation des fractions qui pose problème et au niveau des équations cartésiennes de plans, le passage entre l'équation paramétrique et l'équation cartésienne est difficile pour eux.

C: Ok. Tu me parles des équations cartésiennes de droites. Tu me dis que tu repères surtout des problèmes avec les fractions. Est-ce que l'identification des vecteurs ne pose-t-elle pas aussi des soucis ?

P_3: Si, surtout quand il y a au moins une composante nulle dans le vecteur directeur. Lier l'image à l'équation ça va, quand je l'expliquais ça allait. Par contre, dans un des exercices que j'ai donné, à un moment donné, il y avait une des composantes qui était nulle et là ils étaient complètement perdus quoi.

C: Ok. Parce que tu vois quand tu essaies de mettre du sens toi sur ce que tu fais, surtout pour les équations particulières, tu prenais souvent ton local comme…

P_3: Ouais, je l'ai fait cette année-ci aussi.

C: … référence. Est-ce que tu penses que ça ça peut aider à ce qu'ils comprennent quelque chose ? Est-ce que tu as remarqué que ça allait mieux en faisant ça que si tu le faisais pas ?

P_3: Ben… euh… certains oui. En fait l'année passée, comme j'avais les math 6 ça allait bien… euh je pense que si je l'avais fait avec les sixièmes math 4 heures cette année-ci, ça aurait été aussi. Par contre, ici, oui ça a été d'une certaine façon dans le sens que oui j'ai dû reprendre à plusieurs fois, mais comme je t'ai dit c'est pas des flèches et ils sont pas tous attentifs et donc forcément j'ai dû m'y reprendre à plusieurs fois. Et il y a des gens en fait là-dedans, en math 4, qui en fait sont des math 2, parce qu'en fait ils voulaient partir en math 2 parce qu'ils avaient la même option mais en fait on les a empêchés d'aller en math 2 donc ils sont revenus. Dans mes 22 élèves, j'ai 4 ou 5 math 2 qui sont là. Donc je dois reprendre 4 à 5 fois. Et je pense aussi la difficulté des… qu'ils ont eux, je parle pas en général car il y a des élèves où ça va nickel mais je pense que c'est tellement plein de petits prérequis : travail de systèmes, euh… les fractions, les additions, la mise en évidence, la simplification, la visualisation, composante qui est nulle qu'est-ce qu'on doit faire etc. et des petits chemins à prendre, que forcément tout ça mis en bloc si y en a un qui déraille alors forcément pour aller à l'accomplissement de la tâche, qui est de trouver l'équation, ben ils ont du mal et surtout ils ne se remettent pas en question. Ils se disent j'ai mauvais ben c'est la question qui est trop difficile… Non, c'est juste que tu as fait de la merde quelque part, regarde où t'as fait ton truc quoi.

C: Oui, tous les prérequis. Moi ce que j'avais vu c'était un cours de math 6. Ici tu as des math 4, au niveau de ton cours il y a des grosses différences ?

P_3: Niveau des grosses différences, non. J'ai pas fait vraiment de grosses différences. J'ai repris la même chose exactement. Comme le programme a changé et que c'est en cinquième, si tu veux on en reparle après car niveau nombres d'heures je sais pas combien tu en as là, mais on a regardé avec ma collègue mais comme c'était à refaire etc. je me suis dit cette année-ci je vais pas changer. Donc j'ai gardé la même chose, comme je dis si c'était un peu plus dur sur certains points… mais je pense pas. Je pense qu'il est fait du même niveau, 6 heures ou 4 heures je pense que c'était le même niveau à part qu'en 6 heures tu peux te permettre des exercices beaucoup plus compliqués que en 4 heures non quoi. Normalement la structure j'ai pris la même.

C: Et justement tu dis que ça change de sixième à cinquième, qu'est-ce que tu penses que ça va changer réellement ?

P_3: En cinquième, je pense qu'y a, peut-être pas ce chapitre là, mais je pense qu'il y a des chapitres qui vont sauter. Parce que là j'ai regardé avec ma collègue, en fait t'as les plages horaires, t'as le minimum maximum au niveau du programme. J'ai pris que le maximum pour dire ben voilà si jamais t'as une classe math forte un peu faible etc. … 172 heures je pense que j'ai compté et cette année-ci j'ai compté que

mes math fortes, j'ai compté que les semaines de congé, j'ai pas compté les jours de grève etc. et les journées de formations, on était à 162. Donc déjà il y a 10 heures en moins. C'est pas grave. Puis après on rajoute à ça les jours, l'ascension, surtout que ici c'est pas genre math 6, une heure, une heure, deux heures, une heure, une heure... non, non. C'est 3 heures le lundi puis 2 heures le jeudi et j'ai une heure le vendredi. Quand le lundi c'était congé, j'ai perdu 3 heures. Quand le lundi ils sont en excursion, je perds 3 heures. Et donc cette année-ci, je tourne aux alentours de 110-120 quoi. Donc ici je suis en train de cravacher pour voir un maximum et par exemple ici, tout ce qui est équations de plans de droites j'ai pas eu le temps de le faire. Je ferai ça en PES l'année prochaine quoi. Je m'arrange comme je peux mais c'était... et forcément il y a aussi de ma faute, il y a certains chapitres aussi en fait tu as l'impression que ce sont des chapitres qui sont importants, qu'il faut faire vraiment avec importance et euh... le truc qui est rageant c'est la trigono puisqu'il faut refaire tout ce que tu faisais en quatrième avant, donc en fait tu refais tout ce qui tu as fait en quatrième, tu le réimposes en cinquième, donc tu refais tout, tu développes le radian etc. ce qui est bien hein, mais ça prend du temps et en fait tu te dis si je passe une heure dessus autant pas le faire... donc je vais passer trois heures dessus. Ouais mais non, en fait, tu dois passer qu'une heure dessus. Genre les fonctions harmoniques etc. sinusoïde... forcément si tu veux montrer... Par exemple, le dessin de sinus, cosinus, tangente si tu veux le faire aux élèves, j'en ai fait faire que un, j'ai montré les trois autres. Si quelqu'un veut faire les trois ben ça va prendre deux heures. Donc c'est ça le problème, il y a plein de petites choses, style des trucs à la con, c'est en cinquième année, math forte, cinquième année, je dois démontrer... pas démontrer... je dois évoquer la formule que la racine n-ième de x exposant en p c'est x exposant en p sur n. Cinquième math forte, je trouve ça complètement débile.

C: Oui, ce qui peut aller dans ce sens aussi c'est enlever le chapitre des matrices.

P_3: Oui, alors qu'on en parle. Dans le chapitre, faut voir le déterminant.

C: Exactement.

P_3: Mais si on voit le déterminant, on voit les matrices. Et là tu te dis ben... ou alors on... je sais pas ce qu'il faut faire. Il faut faire un chapitre matrice, droite, matrice, plan.

C: Justement, toi tu ferais un chapitre matrices et au moment des équations pour le déterminant tu auras déjà vu ce qu'il fallait ou plutôt faire sauter l'équation cartésienne d'un plan sous forme de déterminant ?

P_3: Non, je pense qu'il faut le voir, mais je pense qu'à ce moment-là... fin... ou on évoque pas le mot matrice et on essaie de se démerder sans ça ou alors on évoque le mot matrice et on fait tout. Moi je suis pas pour montrer un truc, ouais c'est cool et après on le jette quoi. Moi quand je fais quelque chose j'essaie de le faire à fond pour bien montrer comment ça marche quoi, quitte à perdre du temps, pour bien qu'ils comprennent. Si c'est pour montrer le déterminant c'est quoi et pour l'objet ben on voit pas c'est quoi ben ça sert à rien. Si c'était à faire et que j'avais du temps pour le faire, je ferais un dossier sur les matrices pour montrer comment ça marche

etc., deux trois petits exemples et tout, et puis après quand j'arriverais là-dedans je parlerais des matrices, ceux qui l'ont lu peuvent comprendre et ceux qui l'ont pas lu peuvent s'en sortir sans et puis voilà quoi. Je pense que je ferais ça.

C: Alors, si on revient au niveau des difficultés, quelque chose que tu n'as pas évoqué, c'est ce que moi j'appelle l'interprétation géométrique. Alors, qu'est-ce que j'entends par là. C'est que à partir d'une équation je sais tout de suite dire quel objet il s'agit et à partir de l'objet que tu veux décrire tu sais facilement arriver à une équation. D'accord ?

P_3: Oui.

C: C'est peut-être à relier à ce que toi tu appelles la visualisation.

P_3: Ouais.

C: Mais visualiser c'est juste voir en gros. Tandis que là c'est savoir quel objet tu dois visualiser.

P_3: Parce que... En fait je le fais pas parce que, par exemple, on a l'équation d'un plan, ok c'est un plan, mais à quoi ça peut me servir dans l'exercice ? Tu vois ? Y a pas de... un truc comme ça ainsi ça serait par exemple pour une C3 [1], par exemple, un truc comme ça, donc c'est-à-dire qu'on visualise en fait, par exemple, je sais pas moi euh... l'équation, c'est l'équation d'un plan, et puis après on se rend compte que c'est l'équation d'un plan, on a une trajectoire d'un mobile, est-ce que le mobile va intersecter le plan ? Ben on regarde par rapport au vecteur normal et au vecteur directeur, les vecteurs ne sont pas parallèles, donc oui il y a une intersection qui est possible quoi.

C: Oui donc pour toi ça serait plus une C3 de travailler cela.

P_3: Pour moi, ça serait plus une C3. On voit vraiment l'utilité. Je pense qu'à l'heure actuelle, C2 je fais beaucoup d'exercices etc. de préparation pour les math fortes et en C3 je me permets de mettre des choses que je ne ferais pas du style ici je leur ai donné une petite C3 en exercice, sans leur dire. Je leur ai demandé de calculer... je fais les équations trigonométriques... je leur ai demandé de calculer un domaine avec en-dessous une différence de deux sinus et donc là ils ont réfléchi, on fait ça etc. Voilà. Par contre, j'en ferais pas... Là je l'ai fait parce qu'ils sont pas nombreux mais je le ferais pas en classe.

C: Du coup, comme c'est plus une C3 et que tu ferais peut-être pas ça en classe, tu ne sais pas si c'est une difficulté de la part des élèves de pouvoir interpréter ce qu'ils sont en train de faire.

P_3: Non. Mais en général les C3 au niveau de l'interprétation, ce genre de choses c'est dans quel contexte on est, qu'est-ce qu'on est en train de voir, comment je peux m'en sortir. Et en général c'est un domaine, donc une condition d'existence différent de 0 et puis on regarde différent, égal, c'est plus ou moins la même résolution et après hop ça débloque.

1. Il s'agit de la compétence 3 consitant à transférer les notions vues. Cela consiste souvent à résoudre des problèmes.

C: Donc si toi tu travailles ça, c'est à la fin de ton chapitre, quand ils ont déjà maîtrisé tout ce qu'il fallait, tous les concepts nécessaires.

P_3: C'est ça ouais.

C: Ok. Tu as répondu du coup à la question suivante. Donc là on est plutôt sur le deuxièmet volet où je vais me concentrer sur les équations. Au niveau des équations, les élèves ils voient des équations depuis la première secondaire : les équations du premier degré, du deuxième degré, les résolutions de systèmes. La plupart du temps ce qu'on fait avec les équations c'est les résoudre. Mais dans le chapitre de géométrie analytique c'est pas vraiment résoudre qu'on veut faire c'est décrire un objet par une équation.

P_3: Mouais.

C: Donc il y a un changement de points de vue à adopter sur les équations. Est-ce que tu étais conscient qu'il y avait ce changement de points de vue dans ce chapitre-là ?

P_3: Décrire un objet par rapport à une équation ?

C: Oui, que les élèves avant faisaient que résoudre mais qu'ici on ne demande plus de résoudre mais d'avoir un autre point de vue sur les équations.

P_3: Pas pour ce chapitre là mais pour le chapitre des coniques oui.

C: Mais c'est pareil. Pour moi c'est le même style de chapitre.

P_3: Ouais. Je sais pas. Pour moi, au niveau objet, je trouvais ça plus… comment on va dire… pour les coniques, tout ce qui est hyperbole etc., je trouve qu'au niveau de la représentation etc. mais c'était moins intuitif, il faut plus travailler là-dessus etc. Mais là je sais pas, c'est une droite, c'est une équation comme ça, un plan c'est une équation ainsi. Tu vois ? Tu as un objet qui est quand même je vais pas dire classique mais tu vois par exemple je vais prendre une droite, tu prends x^2, $\sqrt{x}$, déjà t'as un niveau de courbure etc. c'est un peu plus compliqué. Et j'ai l'impression qu'en fait moi, dans le problème, c'est que je préfère plus savoir les équations de coniques etc. travailler dessus, voir les propriétés, voir tu sais c'est comme tout ce que tu as dit, on voit l'objet, on essaie de le représenter, les propriétés dessus et de travailler avec que avec un plan et une droite en général. C'est con hein mais la plupart du temps… ben euh… je te dis je passe plus de temps à essayer de faire, c'est con hein, le système avec eux, parce qu'ils ont vraiment du mal, tandis qu'avec les coniques ça passe nickel. Maintenant, voilà, c'est les math 6. Mais je te dis… je sais pas… j'ai jamais essayé avec les math 4 de vraiment faire le switch entre c'est l'équation d'un plan etc. Avec des bons élèves peut-être, mais je te dis il faut la finalité. Entre ce que te demande le programme, ben si tu fais des choses en plus, c'est du temps que tu perds, si c'est du temps que tu perds, c'est du temps que tu auras pas ailleurs et comme je te dis le nombre d'heures est limité, c'est très difficile à dire.

C: Donc tu penses que pour ce changement de points de vue dans ce chapitre là c'est pas spécialement nécessaire mais qu'il serait nécessaire pour les coniques ?

P_3: Ouais. Maintenant, je suis ouvert à des propositions pour voir comment on peut faire. Certains élèves vont aimer ça, d'autres élèves vont pas aimer mais si on peut

trouver des liens utiles pour leur faire montrer ça je suis d'accord. Maintenant, je te dis à l'heure actuelle là avec le nouveau programme, essayer de booker le programme que ce soit quatrième, cinquième, l'année prochaine sixième, c'est tout un enjeu pour dire voilà, faut qu'ils voient tout, qu'ils voient tout bien etc. Et le problème c'est que si on arrive avec des idées qui ne sont pas dans le programme, qui prennent plus de temps, une heure ça va, mais si ça dure trois-quatre heures dessus, ben à ce moment-là ça va être handicapant pour le reste. Maintenant, si c'est intégré dedans et que ça prend pas d'heure c'est nickel. Et si ça permet de mieux comprendre la matière, s'il y a des gens qui comprennent mieux ben c'est aussi une solution quoi. Le seul truc que tu pourrais avoir c'est genre un énoncé qui donne à la fin une équation de plan qui quand tu demandes ta question c'est les équations d'une droite qui en ressort et on te demande, première question, est-ce qu'il y a des solutions. Tu te dis c'est l'équation d'un plan, c'est l'équation d'une droite et ils sont pas parallèles donc ça veut dire… ça serait vraiment ça mais ça serait vraiment limité à ça parce qu'une fois que tu prends deux autres objets, ben tu prends deux plans, et si tu prends deux droites c'est pas parce que deux droites sont nécessairement pas parallèles qu'elles s'intersectent, tu vois ? Donc c'est vraiment partir là-dessus quoi mais ça c'est un truc que tu feras tout à la fin quand ils savent calculer l'équation d'un plan correctement, calculer la position relative, le point de percée et une fois que tu as fait ces quatre-là à la rigueur ouais et tu le mettrais dans une sorte de problème C3 en fait, tout à la fin quoi.

C: Ok. Justement. J'ai pris le parti de faire l'inverse et commencer par ce que tu appelles le C3.

P_3: Ouais.

C: Donc je te montre ma séquence, je te la présente un petit peu et après tu as le temps de la lire, de…

P_3: Ouais, ça va.

C: et après on en discute. Si tu veux je fais une activité d'introduction et c'est à partir de la correction de cette activité d'introduction que je veux venir intégrer au fur et à mesure la théorie. Donc ici, c'est fait exprès de partir de systèmes de $\mathbb{R}^2$. Pourquoi ? Parce qu'ils connaissent les équations de droites du plan de l'année précédente, ça c'est vu en quatrième. Mon objectif c'est de se dire, ben la première équation est associée à quel objet géométrique ? Une droite. La deuxième équation est associée à quel objet géométrique ? Une droite. Ici qu'est-ce qu'on fait ? On cherche l'intersection de deux droites. Et sur un dessin on arrive à déterminer l'ensemble des solutions sans calculer. Ce premier exercice est fait justement pour introduire cette démarche d'interprétation géométrique sur des notions qu'ils connaissent déjà. Puis après, on fait pareil dans l'espace. En se disant, là on a une équation, qu'est-ce que c'est comme objet ? Cherchons des triplets qui vérifient telle équation. Plaçons-les dans l'espace. Quel objet c'est ? C'est un plan. Et là on introduit les équations de plans particuliers. Puis on arrive petit à petit à introduire les équations de droites. Avoir qu'un plan et une droite ça peut être sécants, ça peut être parallèles et introduire les positions relatives de plans aussi. Et donc si tu veux ça c'est vraiment

pour introduire la démarche d'interprétation géométrique et là c'est pour la mettre en oeuvre sur des nouvelles notions.

P_3 : Un peu plus compliquées, on étend le truc quoi...

C: Un peu plus compliquées mais pour introduire tout le neuf et que ça soit eux qui essaient d'introduire cette nouveauté. Donc ça ça serait l'activité d'introduction et ça me permettrait de revenir sur ce qu'est une équation, c'est quoi résoudre une équation graphiquement et algébriquement, et de bien faire la distinction entre, avant on vous demandait de résoudre une équation, maintenant on vous demande de décrire une équation. Je te laisse lire après. Ça ça serait le bilan qu'ils auraient à la fin de l'activité. Je ne sais pas si tu as vu dans les nouveaux programmes on demande de pouvoir comparer les différentes démarches entre la géométrie synthétique et analytique.

P_3 : Ouais quatrième.

C: et donc proposer des exercices où l'on fait à la fois des points de percée en géométrie synthétique et analytique pour pouvoir comparer les démarches. Puis après il y a toute une série d'exercices. Je sais qu'il y en a beaucoup, je ne compte pas tous les faire.

P_3 : Toute façon, je vais te dire un truc, beaucoup d'exercices c'est bien. Pourquoi ? Une partie c'est fait en classe, une partie...

C: exercices supplémentaires.

P_3 : ... c'est fait en prépa, une partie c'est exercices supplémentaires.

C: Voilà.

P_3 : Et l'autre partie c'est révision.

C: Je ne sais pas si tu as des questions tout de suite ?

P_3 : L'activité 40 là vient après avoir introduit les positions relatives ou pas ?

C: Tous ces exercices là viennent après le bilan, le bilan venant après la correction de cette activité d'introduction.

P_3 : D'accord. Ok.

C: Tu as d'autres questions ?

P_3 : Et tu as compté le nombre d'heures ou pas ? Plus ou moins, par rapport aux programmes ?

C: Les programmes demandent de faire maximum 17 périodes en math fortes et tu peux aller jusque 25 périodes en math faibles. Pour moi, les enseignants que j'ai été voir, font énormément d'exercices et énormément d'exercices identiques. Donc je pense qu'on peut faire un peu moins d'exercices si on comprend vraiment ce qu'on fait derrière et donc quitte à prendre plus de temps pour introduire la théorie. Et là c'est corriger des exercices et introduire la théorie eux-mêmes. J'ai l'impression que même si ça prend un petit peu plus de temps ça sera plus solide comme construction des notions que voilà les notions, étudiez-les et on les applique.

P_3 : Ouais, ouais.

C: Pour moi, il y a moyen que ça tienne dans les 17 périodes mais ça dépend peut-être aussi de la classe et du niveau de...

P_3: Ouais parce qu'au tout début, si je regarde bien,... parce que la géométrie synthétique c'est encore le même problème hein...

C: C'est rappeler des choses qu'ils connaissent déjà normalement.

P_3: Normalement. Donc tu laisses tout faire l'activité aux élèves et puis tu corriges ?

C: Là, je laisse tout faire eux-mêmes. Si tu veux, avant qu'ils commencent, comme c'est un énoncé qu'ils n'ont pas l'habitude de rencontrer, je demande ce qu'est une équation et comment résoudre une équation. Puis je leur demande de faire l'exercice 1. Je corrige entièrement l'exercice 1 et là on comprend que on ne résout pas une équation mais on décrit avec une équation. Donc là ça réinsère un peu tout ce qu'il faut. Et puis en partant de là je fais avec eux tout ceci. Donc le premier système ils ne peuvent pas le résoudre tout seul puisqu'ils n'ont pas les notions nécessaires. Et donc cette démarche qu'on a fait ça serait l'occasion de la retravailler dans chaque système. Les élèves accompagnés du professeur feraient chaque système mais c'est principalement les élèves qui amèneraient la théorie.

P_3: Je regarde un peu parce que nous parfois on fait des activités et c'est parfois ça mais on en laisse beaucoup pour la maison. On en fait quelques-uns et puis on les laisse travailler sur ça. [silence] C'est vrai que ce genre de trucs les quatrièmes ils ont du mal à comprendre.

C: Qu'est-ce qu'ils ont du mal à comprendre ?

P_3: Le fait que quand tu leur donnes par exemple des coordonnées... quand tu donnes un x ils trouvent le y, quand tu donnes le $f(x)$ ils ont du mal de comprendre ce qu'il faut faire tu vois ?

C: Mais ça sous-entend que ça ça serait impossible ou ça sous-entend que ça leur permettrait de comprendre un peu mieux ce qu'on est en train de faire ?

P_3: Mais là ça serait avec des cinquièmes... tu revois les fonctions, tu passes déjà l'étape. Ça devrait aller. Je pense que ça devrait refixer un peu ce qu'ils avaient compris en disant oui, d'accord c'est comme ça que j'avais compris, tu vois ? Après, bon cette année-ci j'ai pas eu des flèches non plus... Probabilités, je leur demande de lancer un dé, y en a une qui se demande pourquoi il y a pas de 7 et de 8 dans ses résultats...

C: D'accord...

P_3: On est à ce niveau-là. C'est du lourd, du très lourd. Non ça va.

C: Alors, il y a beaucoup d'ensembles puisque ces nouveaux programmes demandent d'introduire de la théorie des ensembles au fur et à mesure des chapitres. C'est un chapitre qui est propice aussi à cela.

P_3: Ouais, ouais, ouais. Parce que justement je parlais avec un collègue la dernière fois... dès fois je notais $f(x)$, dès fois je notais y et j'ai jamais eu la question de savoir monsieur pourquoi on peut noter de deux façons différentes. Et à un moment donné j'avais essayé d'introduire le fait ben que $f(x)$ c'est une fonction, en gros à x

on essaie de faire correspondre quelque chose tandis que $y = x$ pouvait partir dans les deux sens, c'est-à-dire c'est des points qu'on doit remplacer et vérifier l'égalité des deux côtés quoi.[silence] Tu leur fais écrire au moins une fois ce truc là en entier ?

C: Oui, à chaque fois qu'on corrige un système en fait. On recherche des triplets puis on décrit par des ensembles.

P_3: Hen ça va. Parce que parfois ça marche avec une notation, tu écris tout et puis tu dis il y a un moyen plus simple et puis tu montres quoi. Donc là c'est la synthèse c'est ça ?

C: Oui, c'est la synthèse de théorie qu'ils n'auraient qu'à la fin de la théorie.

P_3: Ouais c'est bien.

C: Là, il me reste des questions sur certaines parties du cours et après une question globale sur ce que tu penses de la séquence. Au niveau de l'activité d'introduction, qu'est-ce que tu en penses ? Est-ce que tu penses que ça peut fonctionner ? Est-ce que c'est réalisable en termes de difficultés, de public, de timing ? Est-ce que tu penses que la séquence est réalisable ?

P_3: Ouf. En termes de difficultés, ça va. C'est pas non plus insurmontable puisque tu es là pour les aider. Donc voilà, la difficulté elle est correcte. Maintenant il y a beaucoup de choses que tu fais déduire de ces choses-là. Ça serait bien de mettre ce que tu attends d'eux. Tu veux déduire quoi là dedans ? Par exemple, tu veux déduire un certain truc… on va prendre un exemple, je sais pas moi, de cette équation je veux déduire que c'est un plan, par exemple essayer de voir si tu sais pas mettre une question là-dessus. Parce que par exemple si tu ne le dis pas, les gars ils résolvent et puis fin… tu vois ? En général, ce que j'essaie de faire moi quand je fais une introduction c'est je mets un truc, je mets un premier calcul, je mets un deuxième calcul, un troisième calcul et puis je fais soit conclusion s'il y a quelque chose à tirer comme conclusion etc.

C: Oui, faire une conclusion à la fin du S_1 pour se rendre compte de la démarche pour passer au deuxième ?

P_3: C'est ça.

C: Ok.

P_3: Parce que là, tu donnes ça à un prof, il va devoir aller voir la théorie pour voir tout ce qu'il doit déduire de ça.

C: Oui, c'est pour ça que si c'est donné aux enseignants c'est pas donné tel quel. Il y aurait un guide d'accompagnement aussi. Il faut expliquer ce qu'il y a derrière. Je n'ai pas voulu te la donner avant qu'on se voit pour t'expliquer la philosophie.

P_3: Je pense qu'il est bien. Franchement, si… [silence]

C: Est-ce que tu penses que ça va vraiment travailler l'interprétation géométrique dont je te parlais toute à l'heure ? Est-ce que les exercices permettent d'avoir cette démarche toujours présente ?

P_3 : En fait je suis tiraillé entre deux choses. Je trouve qu'elle est bien mais je trouve que si on la fait dès le départ c'est vrai que… parce qu'en fait… en gros, ça, tu t'en sers vraiment aux exercices quand tu as deux systèmes et tu demandes de comparer… en fait non, même pas. Franchement c'est à tester parce que quand je regarde ça je peux pas deviner ce que l'élève va comprendre, pas comprendre. Lui il va voir résolvez graphiquement, il verra que c'est un système d'équations, déjà il va paniquer, et après le résoudre avec lui ben ça va ça va le réconforter. Je pense qu'il y a moyen en faisant ça de bien fixer certaines choses quoi. Ouais, je pense qu'il y a moyen de bien fixer. Et t'as fait, par exemple ici, tu as deux équations de plans. Je suppose que tu as là l'équation d'une droite.

C: Non, parce qu'ils sont parallèles distincts. Cela me permet d'introduire les positions relatives de deux plans.

P_3 : Oui mais à ce moment là ils n'ont pas l'équation cartésienne d'un plan ?

C: Dans le système précédent, tu amènes une équation cartésienne générale d'un plan. Donc quand tu fais ce système-ci tu sais que tu as deux plans, tu veux juste regarder leurs positions relatives et tu utilises la géométrie synthétique.

P_3 : Ouais. Je pense que ça va. J'ai juste un tout petit doute mais je ne saurais pas expliquer pourquoi. Je vais me mettre dans ton esprit. Je pense que ça peut le faire. Au lieu de passer par ce que nous on fait, tu passes par l'intermédiaire en disant x, y, z correspond à quoi. Je pense que ça peut le faire. Maintenant, c'est vrai que je fais toujours de la même façon et j'ai du mal de le concevoir d'une autre façon. Il faut voir si tout ça combiné permet qu'ils comprennent mieux et si en plus tu as un gain de temps à la fin… mais tu m'as dit qu'avec les exercices non. Tu m'as dit que le but c'est qu'ils comprennent ce qu'ils font ben il y a peut-être moyen avec ça qu'ils comparent les objets entre eux.

C: Ok. Au niveau des exercices, tu trouves qu'ils sont suffisamment variés, intéressants ?

P_3 : Oui. Il y a ben je te dis les exercices de types normaux, les exercices de type formalisme, j'appelle ça ainsi, tu as deux points, équation de droite, un point et un vecteur directeur, équation d'une droite. Puis après tu as ceux où t'as compris c'était quoi une droite ? Et hop extraire un vecteur directeur, repartir dans l'autre sens. Puis un peu plus compliqué, tu as des droites qui sont parallèles… et tu vois tu augmentes au fur et à mesure. Je pense que là-dedans il y a tout. Puis tu as les C3 qui arrivent à la fin, ouais non, ils sont suffisamment variés. Je vais dire après tout exercice que tu vas inventer en plus, qui n'est pas dans les exercices-là, c'est directement C3. Qu'est-ce que tu veux faire d'autres ? Tu peux pas non plus…

C: Ouais parce que sinon ça ressemblerait forcément à un exercice déjà proposé.

P_3 : Les exercices les plus faciles à inventer, c'est les calculs et tu en as déjà proposés quoi.

C: Dernière question. Tu dis justement que l'enseignant s'il n'a pas cette philosophie que moi j'ai lorsque j'ai créé la séquence, ça peut être compliqué de le faire lui-même ?

P_3 : Ouais, je pense.

C: Et s'il est guidé, tu penses que ça pourrait être intéressant ?

P_3 : S'il est guidé en mettant bien ce que je veux c'est ça, ce que je veux c'est ça, qui permet de... Je pense que ça peut aller. C'est vrai quand tu regardes la première page d'activité, personnellement si tu me dis pas on veut comparer les objets etc. je lis c'est la résolution graphique, on voit plus ou moins mais on aurait quand même tendance à résoudre en regardant un peu, tu vois, ils seraient un peu perdus.

C: Puisque toi je t'ai expliqué la philosophie, est-ce que tu serais prêt à faire la séquence ?

P_3 : Ouais, je peux essayer. Faudrait que je le lise attentivement pour voir si je pourrais m'imprégner du truc. Il faudrait des heures et des heures pour essayer de déconstruire ce que j'ai mais y a moyen. Faut voir si j'ai plus de facilité avec ça qu'avec ma méthode.

C: Donc tu la ferais à condition d'être bien accompagné.

P_3 : Oui pour bien voir ce qu'il faut faire etc. à condition de remettre certaines choses à ma sauce. Non pas que c'est pas bien fait, mais j'aime bien savoir ce que je dois mettre quand je lis le truc mais normalement... ouais non je serais capable de faire. Pour le public ça dépend vraiment des écoles aussi. Y en a où ça va passer crème pour faire 57 exercices et d'autres où en faire 10 c'est déjà...

C: Ben merci en tout cas d'avoir répondu aux questions et d'avoir donné ton avis.

P_3 : De rien.

4 L'enseignant P_4

C: Il y a trois parties. Une partie où je vais parler des difficultés en général, une partie où je vais parler des équations et une partie où je vais te présenter la séquence que j'ai créée et puis on en discutera un peu une fois que tu en auras pris connaissance.

P_4 : Ok.

C: Comme tu le sais, je m'intéresse au chapitre des équations de droites et de plans dans l'espace et ce que j'aimerais savoir c'est est-ce que tu as déjà repéré des difficultés chez tes élèves dans ce chapitre-là ?

P_4 : Oui. Je dirais pour moi, la plus grosse difficulté c'est peut-être le côté abstrait des équations vectorielles et paramétriques avec justement le paramètre k, à quoi il sert, c'est quoi vraiment son rôle. k c'est pas la même chose que x et y pourtant c'est une lettre aussi pour eux. Ils ont vraiment du mal à distinguer... ou x, y, z dans l'espace, ils ont du mal vraiment à distinguer le x, y, z du k. Pour moi ça c'est la plus grosse difficulté. Euh... sinon qu'est-ce que j'ai vu d'autres comme difficultés ? Faut que je me replonge dedans !

C: Du coup, ça c'est pour les équations vectorielles et paramétriques. Au niveau des équations cartésiennes, là où il n'y a plus ce paramètre...

P_4 : Moi, je ressens moins de difficultés du point de vue des équations cartésiennes. J'ai l'impression aussi qu'ils sont plus vite habitués aux équations cartésiennes notamment avec le $y = mx + p$ qu'ils ont vu en deuxième, troisième je sais pas, qu'on revoit en quatrième euh… mais même en quatrième quand on voit les équations vectorielles et paramétriques de droites dans le plan, c'est toujours la difficulté qui apparaît, c'est quoi ce paramètre k, et le fait de passer à l'espace ça donne pas du sens à ce paramètre k. Euh, sinon… Il y a toujours le côté abstrait lié à… je vais pas dire abstrait mais plutôt visualisation du fait qu'on travaille dans l'espace justement.

C : Visualisation, tu peux préciser ce que tu…

P_4 : C'est plutôt quand on va parler de positions relatives de droites, d'une droite, d'un plan, éventuellement de deux plans. Là aussi c'est quelque chose qu'ils ont peut-être un peu plus de mal à appréhender parce que justement ils ont plus de mal à le visualiser euh sinon comme ça j'en vois pas d'autres. Peut-être, oui, les notions de vecteurs directeurs vecteurs normaux c'est pas toujours très clair ce que c'est pour eux ça. Souvent ils ont tendance à croire que c'est un vecteur qui est sur la droite, ils ont un peu du mal à comprendre je pense le réel rôle de ce vecteur là et donc de comprendre les éléments dont j'ai besoin pour pouvoir créer aussi bien l'équation d'une droite que d'un plan, un point, un vecteur directeur, un vecteur normal, à quoi ça sert. Peut-être le rôle de ces différents vecteurs et pourtant j'essaie toujours de leur en dessiner tout plein en disant c'est pas important qu'il soit exactement à l'endroit où est le point que je connais dans ma droite mais ils ont… je sais pas, c'est pas quelque chose aussi de très naturel pour eux.

C : Ok, tu crois que c'est pour ça… justement que tu disais la différenciation entre inconnues et le paramètre que dans ton cours tu insistes quand même pas mal, tu écris quand même pas mal, sur à quoi sert le paramètre et tu vas dans les deux sens : j'ai un paramètre, j'ai un point ; j'ai un point je peux trouver un paramètre.

P_4 : C'est ça c'est pour ça que j'ai essayé d'insister là-dessus. En fait c'est venu du fait que l'année dernière, j'ai dû enseigner ça aux élèves de quatrième dans le plan et j'ai remarqué que c'est quelque chose qui leur avait vraiment posé quelques problèmes et du coup quand cette année j'ai dû créer un cours dans l'espace je me suis dit, je vais directement insister dessus et voir si ça passe mieux. Mais aujourd'hui j'ai pas vraiment l'impression que c'est passé mieux auprès de mes élèves de rhéto que ce que ça passe auprès de mes élèves de quatrième. Pourtant oui j'ai essayé, j'ai essayé de leur montrer que si je donne une valeur à k je trouve un point mais j'ai pas vraiment senti qu'il y avait une réelle compréhension sur ce rôle du paramètre k.

C : Alors, j'ai repéré une difficulté que tu n'as pas évoquée c'est interpréter les objets qu'on manipule, c'est-à-dire j'ai une équation, de quel objet il s'agit, et ça tu l'as un peu dit, je veux décrire telle équation, de quoi j'ai besoin. Ça c'est l'interprétation géométrique pour moi. Est-ce que toi tu as constaté que ça pouvait être une difficulté pour tes élèves ?

P_4 : Oui, c'est vrai. Je pense qu'ils ont du mal à savoir quels sont les éléments dont ils ont besoin pour construire les différentes équations et c'est vrai comme on en

voit beaucoup, et notamment dans le plan on fait avec les vecteurs directeurs, dans l'espace on passe au vecteur normal… Je pense qu'ils ont un peu du mal à comprendre, oui, le rôle de chaque élément dont on a besoin pour écrire les équations avec lesquelles on travaille.

C: Et si on donne une équation cartésienne, les élèves peuvent directement dire si c'est une droite ou un plan ?

P_4: J'ai pas eu l'impression que ça c'était une grande difficulté dans tous les cas.

C: Distinguer par exemple, une équation cartésienne d'une droite dans le plan d'une équation cartésienne d'un plan dans l'espace ?

P_4: Ça peut-être un peu plus mais ça pourtant c'était mon activité d'introduction, pour justement leur montrer que ce passage à l'espace est pas si évident que ça et c'est vrai que peut-être j'y suis pas revenue réellement dessus non plus, j'ai pas proposé d'exercices en disant ah ben tiens de quel objet il s'agit donc j'ai un peu de mal de répondre à cette question. De prime abord j'ai tendance à dire que oui ils sont capables de la reconnaitre mais en fait j'en suis pas si sûre, je pense que si je donne un système un petit peu tordu, je suis pas sûre que ça soit si évident pour eux.

C: Est-ce que, à part ce qu'on a dit tout à l'heure, tu essaies de tenir compte des difficultés que tu as citées dans ton cours ?

P_4: Dans la mesure où il faut se souvenir que c'était la première fois que je donnais la matière,…

C: Oui, oui, ou ce que tu vas mettre en place pour la prochaine fois !

P_4: Oui, clairement il y a des choses que je vais modifier. Je le fais tout le temps et je tiens vraiment à le faire. Je trouve qu'il y a des choses qui ont relativement bien fonctionné.

C: Comme quoi ?

P_4: J'ai quand même bien aimé mes deux activités d'introduction. Je trouvais que finalement elles amenaient bien les choses après peut-être dans la deuxième, j'exprimais qu'un point appartient à une droite avec une équation vectorielle, paramétrique puis cartésienne et puis après j'étais revenue au tableau avec une écriture un petit peu plus ensembliste et je trouvais très important de le faire parce qu'écrire un point appartient à une droite ça ne donne pas l'équation de la droite mais je ne suis pas persuadée que cette étape-là a été la mieux comprise pour eux mais je pense qu'elle était quand même nécessaire. Donc je ne sais pas si je pourrais travailler ça d'une autre façon. On va dire quand même que je trouvais que c'était vraiment pas mal car ça leur montrait tout. Donc ça ça allait, sinon les droites particulières m'avaient déplu où j'ai senti un tout petit peu plus de difficultés. En fait, c'est pas que j'ai senti qu'ils avaient plus de difficultés mais plutôt qu'ils avaient appris ça un peu par cœur. J'aurais aimé que ça soit un tout petit peu plus intuitif pour eux, un tout petit peu plus visuel à nouveau, faire peut-être des dessins, encore plus représenter les choses. Dans mes exercices aussi c'est sûr que je vais en modifier certains, notamment pour aussi aller plus dans cette visualisation. Je trouve aussi que mon vecteur normal il sort un peu magie, magie. Après, j'y ai réfléchi un peu et j'ai pas

trouvé de façon de l'amener pour vraiment dire chouette c'est important le vecteur normal pour écrire une équation d'un plan mais au moment où je m'y replongerai j'essaierai d'approfondir un tout petit peu plus ça, sur le vecteur normal, sur l'équation cartésienne, comment la trouver facilement, ça oui, effectivement, c'est un truc qui m'avait un peu moins plu.

C: Ok. Donc là on va passer à la deuxième partie sur les équations. Je suppose que tu sais ce qu'on fait au niveau des équations dans le degré supérieur et en quatrième mais je ne sais pas si tu sais ce qu'on fait au niveau des équations dans le degré inférieur. Il faut savoir que les élèves ont rencontré la notion d'équation très tôt dans leur parcours scolaire, dès la première secondaire où on parle d'équations du premier degré et on doit résoudre des équations du premier degré. Puis ainsi de suite on arrive à résoudre des équations du second degré, résoudre des équations logarithmiques et exponentielles, résoudre des systèmes etc. Donc en fait les élèves ils sont quasiment tout le temps face à des équations à devoir résoudre. Et puis on arrive à des chapitres de géométrie analytique, que ça soit la géométrie analytique plane en quatrième ou la géométrie analytique dans l'espace, à devoir non plus résoudre l'équation mais bien décrire un objet par une équation. Il y a un changement de regard à avoir sur je résous une équation, je décris par une équation. Est-ce que tu étais consciente qu'il y avait ce changement de regard à avoir dans ce chapitre-là ?

P_4: Oui. Je m'en suis déjà rendue compte parce que, en quatrième plutôt, clairement en quatrième quand on fait ce chapitre sur les droites, quand on demande de donner une équation d'une droite, il y a beaucoup d'élèves qui ne veulent plus voir de x et de y dans leur équation de droite, ils veulent tout remplacer. Ils veulent avoir un truc qui n'a pas de sens. Ils veulent tout remplacer et donc je me dis là effectivement ça vient toujours du fait qu'on leur demande de résoudre des équations et donc ils cherchent une valeur, soit x, soit y, on s'en fiche en fait du contexte. Du coup, quand moi je leur demande de donner une équation d'une droite, ils ont du mal à faire cette transition et de donner un truc avec du y et avec du x. Ça oui c'est déjà un truc que j'ai remarqué.

C: Plus en quatrième ?

P_4: En quatrième, oui.

C: Plus après ?

P_4: Je le ressens beaucoup en quatrième, je l'ai pas ressenti comme ça après, je l'ai pas ressenti comme ça cette année non. Par contre, en quatrième c'est très très flagrant, oui.

C: Tu penses que c'est important que les élèves en soient conscients aussi de ce changement de regard ?

P_4: Je pense que c'est important pour donner du sens tout simplement. C'est vrai que moi j'essaie de leur dire que quand je donne par l'exemple l'équation d'une droite, je cherche l'équation qui me permet de donner les coordonnées de n'importe quel point de ma droite. C'est vraiment ce que j'essaie de leur faire passer comme intuition. J'ai l'impression que quand je dis ils arrivent à un tout petit peu mieux com-

prendre. Après, quelle est la différence entre ce stade-là et résoudre une équation ça je sais pas si euh... ça non je pense que je n'insiste pas dessus. Non.

C: Donc tu penses que c'est important qu'ils soient conscients de ça et est-ce que toi tu insistes au final tant que ça sur ce changement de regard ? À part juste dire on va regarder l'ensemble des P donc on va regarder l'ensemble des couples ?

P_4: Non, c'est vrai. C'est vrai que ...

C: En tout cas si tu le fais en quatrième, tu ne le fais plus après ?

P_4: Non, non clairement. J'insiste c'est vrai peut-être au départ quand ils sont euh... oui quand ils découvrent un petit peu les droites, bon ils l'ont un peu travaillé mais pas du tout de la même façon, on l'aborde en quatrième... Non c'est vrai que j'ai pas l'impression d'avoir insisté là-dessus quand je l'ai donné cette année. C'est pas une sensation que j'ai donc je pense pas que je l'ai fait tout simplement.

C: Est-ce que tu penses que c'est difficile justement pour les élèves d'avoir ce changement de regard ?

P_4: Oui, je pense que c'est compliqué. Ils ont tendance à vouloir se raccrocher à ce qu'ils connaissent, se raccrocher à ce qu'ils ont déjà fait et donc forcément quand ça ressemble à ce qu'ils ont déjà fait mais c'est pas ce qu'ils ont déjà fait ben ils sont vite un petit peu perdus, un petit peu perturbés. Oui, clairement c'est important. C'est sûr que c'est important.

C: Que fais-tu pour que tes élèves comprennent qu'un objet géométrique décrit par une équation c'est un ensemble de triplets qui ont tous les mêmes caractéristiques ?

P_4: C'est ma deuxième activité d'introduction. C'est vraiment ce passage à l'écriture ensembliste que j'avais écrite sur le tableau. Ça oui, c'est pour ça que j'ai quand même tenu à le faire. Mais je me rends compte au regard de tout mon cours, c'est très mince. Et finalement, les activités d'introduction, je ne suis pas persuadée que quand ils étudient ils y reviennent forcément et du coup oui ils en ont une trace écrite c'est sûr, mais je ne suis pas sûr qu'ils y reviennent quand ils doivent vraiment travailler, quand ils doivent faire les exercices. Donc c'est vrai que là il faudrait peut-être le faire apparaitre ailleurs et peut-être un peu plus formel.

C: Alors, je vais te présenter un peu la séquence. Je t'explique le principe, je te laisse un certain temps, le temps qu'il te faut pour en prendre connaissance. Si tu as des questions, tu peux me les poser tout de suite. Et moi après quand on aura fini tout ça j'ai quelques petites questions à te poser.

P_4: Ok.

C: Voici la séquence. J'aimerais bien commencer par une activité d'introduction qui se déroule en deux temps. Le premier temps c'est avec les élèves, lire l'énoncé, et revenir sur c'est quoi résoudre une équation, déjà qu'est-ce qu'une équation, parce qu'à aucun moment c'est défini réellement. Résoudre graphiquement ça revient à faire quoi, ça revient à se demander quelle est l'intersection des objets décrits... décrits par les équations. Puis de leur laisser faire la résolution graphique pour les quatre premiers systèmes tout seul et puis corriger avec eux. Pourquoi tout seul car comme tu l'as vu c'est dans $\mathbb{R}^2$, c'est des notions de quatrième, les équations de droites

qu'ils ont normalement déjà vues et l'habitude de manipuler et donc là ils devraient être capables de pouvoir faire ces exercices-là. L'objectif de cette première question c'est vraiment d'amener le questionnement suivant : la première équation décrit tel objet, la deuxième équation décrit tel objet, je les représente, je fais un dessin, je cherche l'intersection des deux si elle existe et je viens dire qui elle est par un ensemble. Donc il y a vraiment toute une réflexion sur c'est l'ensemble des couples qui vérifient l'équation, c'est une droite. D'accord ? Ça c'est ce que moi j'appelle la démarche d'interprétation géométrique. L'objectif justement c'est de passer à la question 2 et de réexploiter cette démarche pour venir résoudre des systèmes dans l'espace. Alors là les systèmes je ne peux pas les laisser résoudre tout seul car ils ne sont pas capables de le faire puisque c'est des nouvelles notions. Donc l'objectif c'est, voilà, premier système on travaille ensemble, donc les élèves participent, l'enseignant est là pour guider les élèves vers l'introduction des points de théorie. Première équation c'est l'ensemble des triplets puisqu'on est dans l'espace, de quel objet il s'agit. Ce qui permet aussi de se dire que c'est pas parce qu'il n'y a pas de y et de z dans l'équation qu'ils ne sont pas présents. Là on arriverait à déterminer une équation particulière cartésienne de plan. Et ainsi de suite. Ici on arrive à dire qu'on cherche l'intersection de deux plans et que l'intersection de deux plans c'est une droite. On en arrive aux équations de droites. Puis finalement les positions relatives d'une droite et d'un plan et de deux plans. L'objectif aussi c'est de rappeler pas mal de connaissances anciennes et donc d'utiliser tout ce qu'ils connaissent de géométrie vectorielle et de géométrie synthétique. Toutes les notions de théorie sont introduites par ces six systèmes-là. J'aimerais également revenir sur la différence entre résoudre une équation et décrire par une équation. Ensuite on passe à tout ce qui est exercices. Je propose des exercices qui permettent vraiment d'établir des liens entre les démarches propres à la géométrie synthétique et à la géométrie analytique, comme c'est demandé dans les nouveaux programmes. Pour cela, je demande de faire un point de percée et une section de plan d'abord synthétiquement et puis analytiquement, ce qui permet vraiment de comparer les démarches et de trouver les avantages et les inconvénients de chacune d'elles. Puis il y a toute une série d'exercices. Est-ce que tu as des questions ?

P_4 : Non, ça me semble clair.

C: Je te laisse alors en prendre connaissance.

P_4 : [silence] Ok.

C: Tu as des questions ?

P_4 : Non.

C: Ici, je parle juste de l'activité d'introduction. Qu'est-ce que tu en penses ?

P_4 : Je trouve ça bien. C'est vrai que là du coup ça donne beaucoup de sens aux difficultés que je te parlais au départ : cette visualisation, clairement, cette visualisation dans l'espace, cette manipulation que je trouve vraiment intéressante. Donc euh… oui, je réfléchis en même temps que [rires]

C: Il n'y a pas de souci.

P_4 : Non, clairement, c'est ce que je voulais dire. Oui, clairement, je pense que ça donne du sens directement et ça c'est important pour eux de directement voir ben avec quoi on va travailler, qu'est-ce qu'on va avoir dans ce chapitre-là et je pense que c'est vraiment ce que ça va amener pour eux. La partie derrière est bien et je trouve que ça devrait même arriver plus tôt que dans ce chapitre-là, ça devrait arriver plus tôt dans le plan.

C : Dès qu'on aborde les fonctions aussi.

P_4 : Oui. Il faudrait déjà en parler parce que... c'est vrai qu'on devrait faire ça parce que je pense que ça aiderait beaucoup d'élèves à vraiment comprendre ben c'est quoi une équation qui décrit un objet, clairement ça je trouve ça vraiment vraiment bien. Ça c'est vraiment quelque chose que... c'est vrai que ça parait tellement évident pour nous que finalement on a peut-être pas tendance à insister là-dessus même si on se rend compte que chez certains élèves ça pose effectivement bien une difficulté. Donc, oui, ça je pense que c'est vraiment bien. C'est bien expliqué, il y a vraiment tous les détails, ça reprend aussi ben le parcours de ce qu'ils ont déjà eu donc euh je trouve ça vraiment vraiment très intéressant et puis aussi ben le fait aussi que tu hésites pas à utiliser ce genre de notations ben je trouve ça vraiment bien aussi parce que...

C : C'est pour les habituer aussi, qu'ils l'aient vue au moins une première fois. Puis les notions ensemblistes étant donné qu'on doit les intégrer au fur et à mesure des chapitres avec le nouveau programme, ben c'est pour moi vraiment une occasion de les travailler. Et comme dans l'activité d'introduction on parle aussi d'ensemble de couples, de triplets, c'est une notation qui...

P_4 : C'est une belle façon de l'introduire je trouve. Et puis du coup ça leur montre la différence entre écrire un ensemble de solutions aussi avec des accolades finalement et la différence quand on écrit ici l'ensemble de mes points qui vérifient telle égalité donc oui c'est... fin je trouve ça vraiment bien je dois dire. Mais je dois dire que je le ferais vraiment avant ce chapitre-là, je le ferais en quatrième.

C : Oui, oui. Là l'objectif est que je donne la séquence, je sais pas ce qui a été vu avant...

P_4 : Oui oui tu ne sais pas ce qui a été fait avant, clairement.

C : donc je préfère essayer de réexpliquer certaines choses, ne serait-ce que pour remettre tout le monde sur le même pied d'égalité.

P_4 : Ouais c'est sûr.

C : Ils n'ont peut-être pas tous eu les mêmes enseignants non plus.

P_4 : C'est sûr. Ça a sa place là mais ça a aussi sa place dans d'autres chapitres.

C : Oui, clairement. Quand on voit les fonctions, quand on voit la géométrie analytique plane...

P_4 : Exactement.

C : Dans plein de moments d'enseignement, je ne dis pas qu'il n'y a qu'à ce moment-là qu'on peut faire ça.

P_4 : Clairement. C'est super intéressant.

C: Est-ce que tu penses que la séquence est réalisable que ça soit au niveau des difficultés rencontrées, du timing et du public que tu connais ?

P_4 : Moi je pense que oui.

C: Le programme demande 17 périodes. Toi tu en as fait 15 ou 16. Donc ça reste équivalent à une séance près.

P_4 : Ouais. L'idée j'imagine c'est pas que tu fasses les 57 exercices avec eux. Il y a pas mal d'exercices supplémentaires. Et bon ça c'est bien ils ont une base de données, ils peuvent s'entraîner, ils peuvent les rendre, c'est le principe aussi. Je pense qu'au départ, pour le premier qu'ils vont devoir faire tout seul, c'est sûr ils vont galérer, il leur faudra peut-être une heure complète mais après ils vont quand même attraper ça... l'équation vectorielle n'est plus au programme que je vois ici...

C: Si, si mais je la vois dans l'activité d'introduction mais c'est vrai qu'elle n'est pas dans le bilan.

P_4 : Oui puis c'est la moins intéressante. Elle est intéressante pour passer aux deux autres formes. Sinon, oui, je trouve toujours quand même important, fin tu as vu mon cours, j'écris moi-même les définitions dans leur cours car je trouve que c'est important qu'ils aient la vraie bonne définition dans leur cours et pas le truc qu'ils auront recopié je ne sais comment. Puis je trouve que c'est important qu'ils aient un bilan.

C: J'ai voulu aussi ne pas mettre de points théoriques comme ceci bien formels sur les positions relatives. Tu n'as besoin que de ça. Et comme on a amené la démarche comme tu dis de visualisation ben tu sais que tu as un plan, tu sais que tu veux une droite parallèle, tu te l'imagines, tu te le représentes, qu'est-ce que j'ai besoin...

P_4 : Oui ça sera plus évident pour eux. Je pense aussi qu'ils auront...

C: Au moins c'est pas des choses comme tu dis qu'ils auront étudiées par cœur, il faut vraiment refaire la démarche.

P_4 : C'est vrai qu'ils auront peut-être le réflexe aussi de faire un petit dessin, de visualiser parce que c'est quelque chose... fin je remarque, et dans tous les chapitres, ils sont frileux de faire des dessins vraiment. C'est impressionnant. Sinon je trouve ça intéressant de faire le lien avec ce qu'on fait en quatrième. Ça peut être intéressant parce que ça fait le lien tout simplement et c'est toujours intéressant de faire les liens. C'est vrai que dans les exercices au départ c'est classique mais c'est important qu'ils manipulent les objets dès le départ donc fin moi je trouve ça important qu'ils fassent des exercices comme ça dès le départ qui donnent du sens à tout cet aspect théorique qu'ils ont vu hum...

C: C'est pour ça que la question suivante, à laquelle tu commences déjà à répondre c'est que pensez-vous des exercices proposés [rires] ?

P_4 : Ben je trouve que la première partie, clairement, c'est vraiment nécessaire pour qu'ils manipulent voilà. C'est classique mais c'est important de manipuler. Ensuite quand on avance un peu ben oui ici je vois que tu proposes des équations des plans

donc ça aussi ça les fait plus réfléchir, on est dans des cas plus particuliers. Ça aussi c'est intéressant. Les positions relatives, ben oui comme tu disais, tu fais pas le point théorique avant mais le fait effectivement d'avoir vraiment insisté sur ton activité d'introduction, je pense que ça peut bien marcher comme ça et puis ça fera pas recette de cuisine comme je te le disais au départ. Ensuite, ces exercices-là je les aime bien aussi mais à nouveau ça revient sur...

C: Le 31 ?

P_4: Oui. Comme le 31 ou celui-ci...

C: Le 34.

P_4: ... où à nouveau tu reviens avec ces écritures ensemblistes qu'on aborde pas finalement et qu'on devrait réellement aborder.

C: C'était pas dans les programmes avant.

P_4: Oui mais ça me donne des idées de voir ça. Je me dis c'est vrai qu'en fait c'est vraiment intéressant et que pour eux ça va peut-être permettre de bien comprendre la différence entre résoudre une équation et l'équation d'un objet. Ensuite, ici, c'est bien de réenfoncer le clou sur ce que tu as fait au départ de façon plus intuitive, ils découvraient, là maintenant ils maîtrisent ou du moins ils sont en phase de maîtriser et donc ils peuvent aussi l'aborder avec un autre regard, avec le recul qu'ils ont eu sur la partie théorique qu'ils ont déjà eu et donc ça c'est bien parce que ça réinsiste et ça donne encore plus de sens du coup à ce que tu as fait dès le départ. Je trouve ça super intéressant aussi.

C: C'est aussi pour pouvoir leur montrer que cette démarche-là au début n'était pas là que pour faire joli ou pour introduire...

P_4: Qu'elle peut vraiment leur servir dans les exercices.

C: Oui, c'est ça.

P_4: Oui, clairement, oui et puis ça fait un beau lien avec ce que tu as fait dès le départ. Ça prend encore tout son sens. Alors je t'avoue les C3 je ne les ai pas lues de fond en comble mais c'est toujours bien de les faire réfléchir. Bon faut avoir le temps aussi de faire un truc pareil. Si tu en fais un en une heure c'est bien ! Parce que c'est là clairement où ils vont atteindre leurs limites. Non mais je trouve ça bien. Il n'y a finalement pas tant de théorie que ça mais je trouve ça quand même complet. Tu les maternes pas autant que ce que j'aurais tendance à faire avec eux. Tu sais à vouloir un tout petit peu trop à donner tout sur un plateau et c'est bien parce que finalement ça les fait plus réfléchir. C'est pas aussi facile que d'appliquer un truc qui est écrit dans un encadré. Rien que pour ça c'est intéressant surtout quand on travaille avec des math 6 heures qui sont quand même amenés à devoir réfléchir. Quand je vois ça je me dis mon dieu toute la théorie et tous les détails que je donne, qui sont peut-être pas toujours nécessaires hein mais je me sens... c'est pas que je me sens obligée de les donner mais je me dis c'est important pour eux, c'est important pour ceux qui ont un tout petit peu plus de mal à comprendre, au moins c'est écrit alors qu'au final tu as raison avec ça tu fais tout c'est suffisant.

C: Est-ce que tu penses que cette séquence va permettre aux élèves de vraiment développer leur interprétation géométrique et d'avoir le changement de regard adéquat sur les équations ?

P_4: Oui je pense hein clairement. Je pense que si là ils l'ont pas avec ça je sais pas ce que tu pourrais faire de plus [rires]. Je pense que là on peut pas être plus complet que ça sur cet aspect-là et c'est vraiment très clair. À chaque fois tu prends un exemple, je donne une valeur, j'obtiens, tu donnes une équation... Je pense que tu montres bien la différence entre les deux donc oui, clairement, oui. Le fait d'avoir un côté et puis l'autre en parallèle c'est vraiment ça qui va leur permettre de voir aussi c'est quoi la différence entre les deux. Ça donne du sens par rapport à ce qu'ils ont vu avant et ça permet, oui, d'effectuer ce changement de regard dont tu parles.

C: Si tu avais à disposition cette séquence, serais-tu prête à la donner ?

P_4: Oui, fin pas telle quelle évidemment mais oui je pense qu'il y a des choses dont je m'inspirerais c'est sûr, je pense que clairement c'est intéressant qu'ils visualisent. Je t'en parlais dès le départ mais ça pourrait être une bonne piste pour qu'ils visualisent. Ça je le ferais plus tôt comme je t'ai déjà dit...

C: Oui mais c'est parce que tu as la possibilité de le faire.

P_4: Oui, clairement. C'est dans ce chapitre-ci mais ça pourrait être dans un autre mais en tout cas c'est intéressant. Je le fais pas et je vais me dire en sortant d'ici que c'est un tort de l'avoir jamais fait [rires].

C: Et quand tu dis que tu l'adapterais à ta sauce, tu changerais quoi en fait ?

P_4: Je suis pas sûre que j'abandonnerais mes activités d'introduction. Je pense que la première était pas mal aussi pour faire ce passage entre le plan et l'espace, même si ça apparait là aussi je suis d'accord. Je pense que ça se destine bien à un public du secondaire.

C: Ici, je t'ai donné la philosophie du document avant de te laisser en prendre connaissance, si je te l'avais donné tel quel sans aucune explication, est-ce que tu penses que tu aurais compris ce qu'il fallait faire ?

P_4: J'aurais sans doute bien compris que tu cherchais l'interprétation géométrique après je pense que c'est pas forcément évident de penser à tout ce que tu veux amener et à quels moments. Je pense qu'il y a vraiment des informations qu'on pourrait rater dans ce type de choses parce qu'en fait tu vas dire plein plein de choses là-dedans, plein plein plein plein plein de choses et si tu le vois comme ça tu te dis pas que tu vas dire plein plein plein de choses. Déjà en les faisant soi-même on va bien se rendre compte qu'il y a plein de choses qui apparaissent mais juste à le voir comme ça oui tu te rends peut-être pas compte de tout ce qui peut vraiment se cacher là-dedans. C'est vrai que ça parait tout simple quand on le voit comme ça alors qu'en réalité tu peux faire plein de choses avec ça et c'est ça aussi que c'est super intéressant. Et puis je suis sûre qu'il y a d'autres choses dont tu vas parler et auxquelles on va pas penser forcément comme ça.

C: Donc si un jour elle est disponible, il vaudrait mieux qu'il y ait un document accompagnant expliquant un peu ce que j'attends à chaque question.

P_4 : Oui, expliquant… surtout sur l'activité d'introduction. Je pense que le reste c'est plus clair. Oui, tout ce que ça peut amener comme discussion, tout ce que ça peut amener comme nouvelle théorie, comme nouveaux objets, oui clairement. Puis pour les élèves c'est bien car ça fait pas peur et c'est bien quand ils n'ont pas peur [rires]. Quand tu me l'expliques je me rends compte de tout ce que ça peut être mais sans que tu me l'expliques je m'en serais peut-être pas rendue compte seule.

C: Eh bien merci. Je n'ai plus de questions.

P_4 : Je t'en prie [rires].

C: C'est très gentil d'avoir accepté l'entretien.

P_4 : Pas de souci, c'est pas grand chose.

5 L'enseignant P_5

C: Donc en fait comme vous voyez j'ai trois points. J'aimerais bien qu'on parle des difficultés, parler ensuite des équations en particulier et après vous présenter ma séquence et vous poser quelques questions sur cette séquence.

P_5 : D'accord. Ok.

C: Alors, au niveau du premier volet, des difficultés, est-ce que vous vous avez déjà repéré des difficultés chez vos élèves quand on aborde justement le chapitre des droites et des plans dans l'espace ?

P_5 : Ben les difficultés c'est que ils ont du mal de se représenter visuellement les droites et les plans dans l'espace et sinon… ben comme maintenant on le refait en quatrième dans le plan pour les droites, il y a des similitudes, des points de comparaison donc ça se passe mieux mais ils ont quand même du mal d'appréhender l'espace de manière générale.

C: Justement. Là vous dites qu'il y a des similitudes et des points de comparaison entre le plan et l'espace, est-ce que parfois ça ne pose pas de problème ?

P_5 : Au niveau des équations de droites, oui, parce que eux ils s'attendent toujours à avoir une équation et alors quand on parle d'une double égalité, de deux équations, ben voilà, ils ont du mal d'appréhender le fait qu'un objet soit défini par deux équations et pas par une équation comme ils ont l'habitude d'avoir.

C: Oui, donc c'est vraiment pour l'objet droite avoir différents nombres d'équations et pas le fait qu'une équation cartésienne de droites dans le plan ressemble très fort à une équation cartésienne de plans dans l'espace ?

P_5 : Pour l'équation générale du plan, il y a le z qui intervient maintenant c'est vrai que quand il n'y a plus de z, ils ont parfois… mais… Non, j'ai pas l'impression qu'ils prennent cette équation-là pour une équation de droites parce que comme je le fais dans le sens droite, plan, on n'a plus qu'une équation donc euh ça va mieux.

C: C'est mieux, selon vous, de faire droites et plans plutôt que plans et droites ?

P_5 : Moi je préfère.

C: Ok. C'est basé sur des raisons ou c'est juste une appréciation ?

P_5: C'est... Je pense que c'est juste une appréciation parce que justement on a vu la droite dans le plan et donc on voit la droite dans l'espace, comme la démarche est plus ou moins... fin est la même, vecteur directeur d'une droite, etc., je pense que ça se passe mieux.

C: Ok.

P_5: Maintenant, je ne l'ai jamais fait dans l'autre sens. Peut-être que ça se passerait bien aussi [rires].

C: Alors, pour définir les choses, ce que moi j'appelle l'interprétation géométrique, c'est j'ai une équation, je sais dire de quel objet il s'agit, je veux représenter l'objet, je sais ce dont j'ai besoin pour écrire une équation selon telle ou telle forme. Est-ce que vous pensez que c'est une difficulté que les élèves ont ou que vous avez déjà constaté dans ce chapitre ?

P_5: Euh... en insistant et... Oui, vraiment, en insistant sur l'interprétation géométrique je pense que finalement ils font le lien entre les deux. Si on se borne juste à des équations, ils font du calculs, point. J'insiste toujours, déjà en quatrième d'ailleurs pour une équation de droites dans le plan, ils ont besoin de deux renseignements pour décrire... et donc voilà, ça commence déjà comme ça et pour moi, c'est important de pas juste faire des calculs, des résolutions d'équations, des résolutions de systèmes parce que... c'est rassurant les calculs mais je trouve qu'il est plus utile de savoir ce qu'on fait que de le faire, point.

C: Justement, dans votre cours, à plusieurs endroits vous insistez, aussi bien dans vos notes que dans votre discours, sur cette interprétation. Est-ce que c'était juste une volonté de votre part à la base ou c'est parce que vous aviez constaté des difficultés que vous avez ajouté cela ?

P_5: Euh... je vais dire... de la manière dont on donnait cours avant, puisque maintenant ça fait 33 ans [rires], les élèves savaient ce qu'était une équation, ce qu'était résoudre une équation, etc. maintenant tout ça pour eux c'est pareil. Une égalité pour eux c'est aussi bien une équation qu'une simple égalité et donc c'est pour ça que j'insiste de plus en plus sur ce qu'ils sont en train de manipuler. Donc, au niveau des équations, effectivement, euh... ben ils ne font plus la différence entre le résultat d'un calcul égal et une équation qui est vérifiée pour certaines valeurs, qui est une égalité vérifiée pour certaines valeurs et pas pour tout, et donc c'est pour ça que j'insiste beaucoup maintenant, oui. C'est venu au fil du temps parce que ben parce que de la même façon qu'un nombre c'est un nombre naturel, réel, entier, fractionnaire, tout ça c'est un nombre. Ils ne font plus vraiment la différence. On était plus rôdé avant sur ce qu'on manipulait que maintant, ils exécutent et ils réfléchissent pas.

C: Vous pensez que c'est lié à quoi ça ?

P_5: Peut-être au fait qu'à la base on n'insiste plus suffisamment sur ce qu'on fait réellement. On a aussi des difficultés par rapport à une bête résolution du premier degré, résoudre $2x+3=0$ maintenant c'est galère parce que le 3 il passe de l'autre côté,

le 2 il passe de l'autre côté, mais on ne sait plus s'il faut garder le signe, changer le signe, et donc tout ça ben ça s'apprend normalement à la base et donc je pense que y a beaucoup de… de manquements, je sais pas si c'est vraiment des manquements mais on n'a peut-être plus vraiment le temps d'insister ou il faut voir le programme. Moi je trouve qu'on perd beaucoup en signification de ce qu'on fait.

C: Ok. En fait, ça répond à ma troisième question puisqu'on vient un peu de discuter de ce que vous aviez mis en place pour insister sur le sens. Ce qui amène déjà au deuxième volet et ça rebondit aussi sur les équations. Donc depuis le début de l'enseignement secondaire, les élèves sont habitués à voir le mot équation, mais surtout à résoudre : des équations du premier degré, du second degré, des systèmes, on va même jusqu'aux équations logarithmiques et exponentielles. Or, dans les chapitres de géométrie analytique, qui se résument en fait à deux, deux chapitres, celui dans le plan et celui dans l'espace, les équations ne sont plus à résoudre mais elles servent à décrire des objets. Donc, il y a vraiment un changement de regard à avoir sur la notion d'équation. Est-ce que vous étiez conscients qu'il y avait ce changement de regard sur les équations ?

P_5: Non… fin, pour moi oui mais pour les élèves, effectivement, pour eux une équation c'est résoudre et trouver une inconnue. Et donc, c'est aussi un peu à cause de ça qu'on insiste sur le fait que c'est le mot équation mais qui n'a pas la même signification que résoudre une équation du deuxième degré par exemple. Donc euh… C'est arrivé donc euh… en donnant cours, oui, en me rendant compte que… oui, pour eux équation c'est une égalité avec des lettres inconnues et il faut trouver des valeurs solutions quoi.

C: Et est-ce que vous pensez qu'il est important qu'ils soient conscients qu'on fait pas la même chose dans ces différents chapitres ?

P_5: Ben, oui, justement, parce que ça n'a pas la même signification quand on résout une équation du deuxième degré, c'est trouver une… fin, c'est trouver les solutions, mais il n'y en a peut-être qu'une qui vérifie l'égalité, alors que dans une équation de plan, elle elle décrit un objet, et on a une infinité de solutions.

C: Est-ce que vous vous insistez sur cette différence ?

P_5: Peut-être plus dans l'espace que dans le plan, maintenant que j'y réfléchis, effectivement, parce que dans le plan, par exemple, ils ont déjà résolu des systèmes de deux équations à deux inconnues en troisième année et donc j'insiste peut-être moins mais je pense que l'année prochaine je vais insister plus parce que je me suis rendue compte… fin avec les nouvelles UAA, c'est la première année que je le donne en quatrième, et donc… ben il y a aussi ce genre de… euh… ce genre de difficultés parce que de nouveau, il suffit par exemple de leur donner une équation et de demander si un couple est solution de l'équation. Ils ne vont pas vérifier si le couple vérifie l'équation, ils vont résoudre l'équation. Finalement, il y a des compétences qui se retrouvent à tous les niveaux et vérifier une solution ça peut s'apprendre dès le début mais on leur demande rarement de vérifier une solution. On leur demande de résoudre une équation mais pas de vérifier qu'une valeur est solution d'équation et ça je trouve que c'est dommage parce que c'est des grands principes mathéma-

tiques qui en principe ne devraient plus être rappelés quand on arrive en cinquième ou sixième année. Vérifier qu'un point appartient à une courbe, ils doivent plus réfléchir, ils doivent répondre directement et ça ils ont encore du mal quoi.

C: Alors que si on leur apprend depuis le départ ça aide aussi à vérifier que les calculs sont corrects.

P_5: Ben oui...

C: Est-ce que vous vous pensez qu'il est difficile pour les élèves d'effectuer ce changement de regard sur les équations ?

P_5: Oui et non [rires] parce qu'en insistant toujours, je pense qu'ils acquièrent le réflexe, mais au départ c'est toujours difficile de changer le regard d'un élève sur quelque chose. Il suffit qu'on leur donne comme équation de droite $y = ax + b$ en troisième, et en quatrième $y = mx + p$ c'est plus la même chose. Ils sont assez rigides dans les notations ou dans les interprétations. Ils aiment bien quand ça ressemble à ce qu'ils ont déjà fait alors que parfois si on leur rend des choses qu'ils ont déjà faites, oh mais ça on connait on l'a déjà fait, mais c'est pas forcément vrai quoi.

C: Que faites-vous pour que vos élèves comprennent qu'un objet géométrique décrit par une équation c'est un ensemble de triplets qui vérifient tous les mêmes caractéristiques ?

P_5: En leur répétant à chaque fois [rires].

C: Oui par insistance... et à un moment donné ça rentre ?

P_5: Je pense oui. Parfois je me dis qu'à toujours répéter la même chose, ils ne font plus attention à ce que je dis mais pour moi c'est important que effectivement ils comprennent qu'on décrit un objet et qu'on ne résout pas une équation.

C: Ok. Je vais vous montrer ma séquence. Si vous avez des questions, vous me les posez tout de suite, si vous le désirez. Je vous laisse en prendre connaissance et puis j'aurai quelques questions à vous poser.

P_5: D'accord.

C: Alors, ici, au niveau de ma séquence j'ai décidé de partir d'une activité d'introduction abordant d'abord le plan et puis de passer à l'espace. L'objectif, ici, c'est d'amener cette démarche d'interprétation géométrique mais sur des connaissances qu'ils ont déjà, donc les droites dans le plan. Par exemple, ici, déjà qu'est-ce qu'une équation, qu'est-ce que c'est résoudre une équation algébriquement et graphiquement. Résoudre un système c'est chercher les éventuelles intersections entre les objets. La première équation décrit quel objet, la deuxième équation décrit quel objet. Nous avons deux droites. On représente les deux droites et on cherche l'intersection entre ces deux droites et on écrit ensuite l'ensemble des solutions. Donc cette démarche va être amenée sur les quatre systèmes, démarche qui va être essentielle pour la deuxième partie de la question. Ensuite, je passe à l'espace, où là c'est des équations qu'ils n'ont jamais rencontrées. L'objectif c'est d'utiliser la démarche introduite au point 1 pour introduire au fur et à mesure de la correction de chacun des systèmes toute la théorie nécessaire : les équations particulières de plans, les équations de droites, les positions relatives ; et vraiment se baser sur tout ce qu'on

sait. Donc première équation, c'est un ensemble de triplets qui vérifient cette équation, on va essayer d'en déduire quelques-uns, on va les placer dans un repère, on va amener le fait que si les points sont alignés c'est une droite, si les points ne sont pas alignés, on a un plan. Les positions relatives, la géométrie synthétique qu'est-ce qu'elle permet de dire ? Elle permet de dire etc. Donc ça ça introduit vraiment toute la théorie. J'aimerais bien aussi insister sur la différence entre je résous une équation et je décris par une équation. Ça c'est la seule théorie qui sera présente dans les notes des élèves, tout le reste est en prise de notes lors de la correction de l'activité d'introduction. Puis, il y a des exercices qui permettent de comparer, comme le nouveau programme le demande, la géométrie synthétique et la géométrie analytique. Donc typiquement calcul de point de percée et section de plans. Puis vient tout une série d'exercices. Alors, il y en a 57, il y en a énormément, mais je ne compte pas tous les faire. Je ne sais pas si à brûle-pourpoint vous avez des questions ?

P_5 : Comme ça non.

C: Je vous laisse en prendre connaissance.

P_5 : Oui, ok.

C: [silence] Est-ce que vous avez des questions ?

P_5 : Ben par rapport à une séquence que j'ai l'habitude de faire la découverte se fait... fin la découverte... le raisonnement se fait à chaque fois dans les exercices, finalement. Mais donc, ici, la résolution se fait...

C: Là tout seul. La première question se fait tout seul... fin j'explique l'énoncé déjà, c'est quoi une équation, c'est quoi résoudre graphiquement, puis je les laisse essayer de faire la première question puisque c'est des connaissances qu'ils connaissent, puis je corrige la première question pour bien amener cette démarche et puis la deuxième question on la corrige au fur et à mesure. Donc c'est les élèves et l'enseignant qui travaillent ensemble, l'enseignant est là un peu pour guider les élèves mais je veux que ça soit les élèves qui amènent cette nouvelle théorie.

P_5 : Vous l'avez déjà donnée ?

C: Non, je la teste l'année prochaine.

P_5 : D'accord. [silence] Oui, donc la description des objets se fait au fur et à mesure de la résolution.

C: C'est ça.

P_5 : Ça c'est bien de le préciser parce que effectivement résoudre une équation ou décrire.[silence] Est-ce qu'il y a une synthèse après ? Parce que dans le programme ils parlent de conditions de parallélisme et de perpendicularité. Donc j'imagine qu'après les exercices on fait... fin...

C: En fait, ces positions-là sont amenées dans la correction du système 3 par exemple, ici on a deux plans, comment peuvent être deux plans, on sait qu'en géométrie synthétique il y a tatatatata... et ici, on sait que c'est deux plans mais on ne sait pas dans quelles positions ils sont et donc on amène le fait qu'on va regarder les vecteurs normaux, est-ce qu'ils sont colinéaires ou non, est-ce qu'ils sont perpendiculaires.

Donc ces notions sont amenées ici. Il n'y a pas de récapitulatif synthèse mais ces notions sont vues à cet endroit-là, elles apparaitront dans leurs notes.

P_5 : Oui, puisqu'effectivement il faut faire le lien à chaque fois avec la géométrie synthétique. Et c'est vrai que en donnant la séquence parallélisme, perpendicularité et orthogonalité, ben on le fait déjà un peu avec les vecteurs dans le produit scalaire et donc euh...

C: Oui, on le fait déjà. C'est juste au niveau des vecteurs normaux parce qu'on en parle pas forcément avant. Puis comme ça a été exploité dans les exercices ça permet de remobiliser ce qui a été fait dans l'activité d'introduction.

P_5 : Oui. Ça va les amener à réfléchir beaucoup...

C: sur ce qu'on est en train de faire, sur l'équation qu'on est en train d'utiliser, quel est l'objet qui est décrit, de quoi a-t-on besoin.

P_5 : Oui, ça doit être chouette de pouvoir l'expérimenter.

C: Qu'est-ce que vous pensez de l'activité d'introduction ?

P_5 : C'est sûrement un bon rappel mais... ça ils le font en troisième année, et ils le refont un peu en cinquième et donc repasser un peu des solutions x, y à x, y, z ça peut déjà amener l'extension à l'espace finalement. Oui, parce que le fait d'ajouter la cote à un moment, même si on vit dans l'espace, ils ont du mal de comprendre.

C: Oui et aussi pour insister que même si la lettre n'est pas présente dans l'équation elle est quand même cachée.

P_5 : Oui, ça c'est... effectivement... parce qu'alors une équation de plan sans z devient l'équation d'une droite.

C: C'est pour ça aussi qu'il y a le même système étudié dans les deux questions.

P_5 : Oui, c'est ça parce que effectivement ils peuvent dire ben ça on l'a déjà fait mais on n'est plus dans le même ensemble. [silence] Ça ça serait bien de le faire avant quand on voit les fonctions parce qu'ils ne voient pas bien la différence entre $f(x) =$ la fonction et $y = f(x)$ qui est l'équation de la courbe. J'y penserai pour l'année prochaine [rires].

C: Est-ce que vous pensez que cette séquence elle est réalisable ?

P_5 : A voir combien de temps consacrer... L'activité d'introduction va sans doute déjà démêler beaucoup de choses, maintenant au niveau de la résolution des exercices, je pense que si les élèves ont bien compris l'activité d'introduction et qu'ils maîtrisent les équations, les exercices peuvent aller relativement vite. Mais comme c'est pas une démarche habituelle pour eux, ça risque de les perturber au départ mais ça vaut la peine d'être essayé parce qu'effectivement ça présente... oui ça veut dire qu'ils vont devoir jongler avec ce qu'ils ont appris en géométrie synthétique et en géométrie vectorielle mais c'est justement un bon entraînement pour tout maîtriser en même temps. Donc ça ça peut être chouette.

C: Qu'est-ce que vous pensez des exercices qui sont proposés ?

P_5 : Il y en a qui sont à la fois classiques, et d'autres plus intéressants au niveau du raisonnement. Je pense qu'on couvre à peu près tout effectivement : écrire une équation

mais aussi décrire l'objet dont on donne une équation et trouver les positions. Donc là ça me parait bien complet. Et les exercices qui sont posés autrement, c'est intéressant aussi parce que quel objet géométrique [exo 31] ça va donner effectivement le… la réflexion sur l'ensemble des triplets qui vérifient donc euh… ah moi j'aime beaucoup.

C: Merci [rires].

P_5: Mais ça par exemple, ça j'ai vu aussi, je me suis dit j'aurais dû le faire aussi en classe directement, parce que je demande des équations de droites et des équations de plans, j'ai eu à l'interro que dès qu'une composante d'un vecteur directeur est nulle, ça les gène pas d'écrire -3 divisé par 0 et ils le laissent comme ça. C'est pour ça que je passe toujours du point de vue paramétrique au cartésien. Mais on passe à côté de quelque chose quand même parce que dès qu'ils ont une équation générale, on exécute mais on ne réfléchit pas. Pourtant il me semblait que j'avais beaucoup insisté en classe. Je pense donc qu'il y a un manque d'étude en profondeur à la base. Non, c'est chouette. Et alors… j'avoue que dans ma séquence je me rends compte de ne pas avoir fait suffisamment de liens avec ce qu'on peut faire en géométrie synthétique mais je sais que je perds du temps en expliquant beaucoup de fois les choses, en insistant et malheureusement en voyant que même en ayant insisté c'est pas toujours efficace. Bon y a de tout de toute façon, il y a de l'application, du transfert puisque on nous demande de transférer par rapport à leurs connaissances, donc oui c'est chouette.

C: Donc je vous ai expliqué le principe de cette séquence. Est-ce que vous pensez que cette séquence va permettre de développer chez les élèves l'interprétation géométrique et d'avoir ce changement de regard sur les équations ?

P_5: Dans la mesure où ils ont juste effectivement l'équation donc la description des objets, ils vont être amenés à réfléchir beaucoup sur euh… ce qui est décrit dans l'exercice et comment… Oui, parce que je crois qu'effectivement ils vont devoir à chaque fois passer par l'ensemble des triplets qui décrit l'objet et pas simplement exécuter ou remplacer dans l'équation.

C: Ok. Est-ce que vous feriez cette séquence en classe ?

P_5: Ah ! J'essaierai oui. Ça donne envie d'essayer [rires]. Oui, ça donne envie d'essayer parce que euh… ben parce que je n'aurais jamais pensé introduire comme ça et qu'effectivement la démarche que j'ai est classique donc que… Oui, pourquoi pas essayer. Ça vaut la peine.

C: Est-ce que ça a été plus facile de comprendre les objectifs parce que je vous les ai expliqués ou vous auriez compris les objectifs de cette séquence sans cet entretien ?

P_5: Euh… boh, en y réfléchissant peut-être un peu plus que les cinq minutes que j'ai eu pour regarder oui parce que effectivement c'est ce à quoi j'essaye d'arriver aussi au niveau par exemple de cette résolution-là, même si je ne donne pas de système de cette forme-là. Donc oui, j'aurais pu… j'aurais pu deviner. C'est vrai que ça prend du temps à la base mais on gagne certainement du temps après pour l'interprétation.

C: Ok. Voilà. Merci. Vous avez répondu à toutes mes questions.

P_5: Avec plaisir.

Annexe F

Analyse *a priori* des tâches prescrites dans notre scénario

1 Exercice 1

> ① Donnez une équation paramétrique de la droite d passant par les points $A(-2,0,-3)$ et $B(-1,4,-3)$.
>
> ② Si le point C appartient à la droite d, est-il possible que son abscisse soit égale à 1 ? Si oui, donnez ses coordonnées. Si non, justifiez votre réponse.
>
> ③ Le point $D(4,1,-3)$ appartient-il à la droite d ?

La question est découpée en trois sous-questions. La première est fermée. Les deux autres sous-questions sont ouvertes. Aucune méthode n'est imposée.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie vectorielle.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle.

Point de vue

Point de vue paramétrique.

Connaissances mises en jeu

- □ Connaissances anciennes : résolution de systèmes, composantes d'un vecteur.
- □ Connaissances nouvelles : équations paramétriques de droites dans l'espace.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Pour la question ①, un vecteur directeur de la droite doit être déterminé (*reconnaissance des modalités d'application*). Une équation

paramétrique dans le cadre de la géométrie vectorielle est directement établie. Le calcul de ses composantes *met en jeu des connaissances anciennes* (*conversion de registres*). Une équation paramétrique dans le cadre de la géométrie analytique peut être écrite (*mise en jeu de connaissances nouvelles*, *changement de cadres*).

La question ② amène à utiliser l'équation donnée à la question ① (*utilisation de questions précédentes*). Pour que le point appartienne à la droite, ses coordonnées doivent vérifier l'équation paramétrique donnée (*changement de points de vue au sens de Robert*). Cela amène à résoudre algébriquement un système (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Il y a *un choix* à effectuer pour la valeur du paramètre. La question étant ouverte, une réponse peut désormais être apportée (*conversion de registres*).

Les adaptations à réaliser sont les mêmes pour la question ③ si ce n'est que le système est impossible (*mise en jeu de connaissances anciennes)*.

2 Exercice 4

> Donnez une équation paramétrique du plan α défini par les vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}(1,1,1)$ et $\overrightarrow{v}(1,0,2)$ et passant par le point $A(1,2,3)$. Le point $B(1,3,2)$ appartient-il au plan α ?

La question est découpée en deux sous-questions. La première est fermée. La deuxième est ouverte. Aucune méthode n'est imposée.

Domaine de travail

Cadre de la géométrie analytique.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle.

Point de vue

Point de vue paramétrique.

Connaissances mises en jeu

- □ Connaissances anciennes : résolution de systèmes.
- □ Connaissances nouvelles : équations paramétriques de plans.

Adaptations à réaliser

L'énoncé nous donne un point et deux vecteurs directeurs du plan. Une équation paramétrique du plan peut être déterminée (*mise en jeu de connaissances nouvelles*).

La deuxième sous-question amène à utiliser l'équation donnée juste avant (*utilisation de questions précédentes*). Comme le point appartient au plan, ses coordonnées vérifient l'équation paramétrique donnée (*changement de points de vue au sens de Robert*). Deux quantificateurs existentiels vont être choisis (*existence d'un choix*). Cela

amène à résoudre algébriquement un système (*mise en jeu de connaissances anciennes*). La question étant ouverte, une réponse peut désormais être apportée (*conversion de registres*).

3 Exercice 5

> Est-il vrai de dire que le vecteur $(-2,4,-\frac{2}{\pi})$ est un vecteur normal du plan $\beta \equiv -\pi x + 2\pi y - z = \pi$?

La question est ouverte. La méthode n'est pas imposée.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie vectorielle.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle, registre de la logique.

Point de vue

Point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : vecteurs colinéaires.
- Connaissances nouvelles : équations cartésiennes de plans, vecteur normal.

Adaptations à réaliser

L'*organisation du raisonnement* se découpe en plusieurs étapes. Il faut d'abord identifier un vecteur normal au plan β à partir du point de vue cartésien (*mise en jeu de connaissances nouvelles*, *reconnaissance des modalités d'application*). Il faut ensuite tester la colinéarité du vecteur normal trouvé avec le vecteur donné par l'énoncé (*changement de cadres*, *conversion de registres*). Les deux vecteurs étant colinéaires, un réel k doit être exhibé (*existence de choix forcé*). La réponse à la question est ensuite formulée (*conversion de registres*).

4 Exercice 6

> Quelle est une équation cartésienne du plan α comprenant le point $P(1,2,-3)$ et dont deux vecteurs directeurs sont $\overrightarrow{u}(3,0,2)$ et $\overrightarrow{v}(2,-1,3)$?

La question est ouverte. La méthode n'est pas imposée.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie vectorielle.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : résolution de systèmes, composantes d'un vecteur, orthogonalité, produit scalaire.
- Connaissances nouvelles : équations paramétriques et cartésiennes de plans, vecteur normal.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Il s'agit de déterminer une équation cartésienne d'un plan. Un vecteur normal doit être déterminé (*reconnaissance des modalités d'application*). Deux méthodes peuvent être envisagées (*existence de choix*).

Une première méthode consiste à écrire une équation paramétrique du plan (*mise en jeu de connaissances nouvelles*) et d'éliminer les deux paramètres (*changement de points de vue*, *mise en jeu de connaissances anciennes*). Une équation cartésienne en est déduite.

Une deuxième méthode consiste à chercher un vecteur normal orthogonal aux vecteurs directeurs donnés. Il faut traduire l'orthogonalité en termes de produit scalaire nul entre les vecteurs (*conversion de registres*). Cela amène à utiliser des *connaissances anciennes dans le cadre de la géométrie vectorielle*. Un système de deux équations à trois inconnues est à résoudre. Un choix s'impose pour une des inconnues (*existence de choix*). Une équation cartésienne dont le terme indépendant est générique est écrite (*mise en jeu de connaissances nouvelles*). Le terme indépendant est trouvé avec le point appartenant au plan (*changement de points de vue au sens de Robert*).

5 Exercice 7

> Donnez une équation vectorielle, paramétrique et cartésienne du plan α comprenant les droites $d_1 \equiv (x,y,z) = (1,2,3) + \lambda(2,-1,3)$ et $d_2 \equiv (x,y,z) = (0,-2,1) + \mu(-4,2,-6)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

La question est fermée. La méthode n'est pas imposée. Aucun ordre entre les points de vue n'est imposé.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie vectorielle.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : parallélisme, vecteurs colinéaires, composantes d'un vecteur, résolution de systèmes.
- Connaissances nouvelles : équations paramétriques de droites dans l'espace, équations vectorielles, paramétriques et cartésiennes de plans.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Il s'agit de déterminer des équations d'un plan connaissant sa position relative par rapport à deux objets décrits dans le point de vue paramétrique. L'*organisation du raisonnement* se découpe en plusieurs étapes. Un point et deux vecteurs directeurs du plan doivent être déterminés (*reconnaissance des modalités d'application*). Il faut traduire l'inclusion des deux droites dans le plan en termes de vecteurs (*convertion de registres*). Cela amène à identifier un vecteur directeur de chacune des droites à partir d'un point de vue paramétrique (*mise en jeu de connaissances nouvelles*, *reconnaissance des modalités d'application*). Les vecteurs directeurs des deux droites sont colinéaires (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *changement de cadres*). Il faut alors identifier un point de chacune des droites (*mise en jeu de connaissances nouvelles*) et calculer les composantes d'un vecteur directeur du plan non colinéaire au vecteur déjà déterminé (*mise en jeu de connaissances anciennes*).

Une équation paramétrique dans le cadre de la géométrie vectorielle peut être écrite. Avec les composantes, une équation paramétrique dans le cadre de la géométrie analytique est donnée (*changement de cadres*). Plusieurs méthodes sont possibles pour trouver une équation cartésienne du plan (*existence de choix*) : éliminer les paramètres (*changement de points de vue*), chercher un vecteur orthogonal aux deux vecteurs directeurs trouvés (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Dans les deux cas, une résolution de système est à réaliser (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Dans le deuxième cas, on doit choisir une valeur pour une des inconnues (*existence de choix*). Une équation cartésienne dont le terme indépendant est générique est écrite (*mise en jeu de connaissances nouvelles*). Le terme indépendant est trouvé avec le point appartenant au plan (*changement de points de vue au sens de Robert*).

6 Exercice 9

> Les plans $\alpha \equiv x-2y+3z=4$ et $\beta \equiv -2x+5y+4z=1$ sont-ils perpendiculaires ? Expliquez votre démarche.

La question est ouverte. La méthode n'est pas imposée.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie vectorielle.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle.

Point de vue

Point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- □ Connaissances anciennes : orthogonalité, produit scalaire.
- □ Connaissances en cours d'acquisition : équations cartésiennes de plans.
- □ Connaissances nouvelles : positions relatives de deux plans.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Les deux plans sont décrits dans le point de vue cartésien. Un vecteur normal de chaque plan doit être déterminé (*reconnaissance des modalités d'application*, *mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Le produit scalaire entre ces deux vecteurs est calculé (*mise en jeu de connaissances anciennes dans le cadre de la géométrie vectorielle*). Une conclusion doit être écrite (*conversion de registres*).

7 Exercice 10

> Déterminez une équation cartésienne du plan α comprenant le point $(42,-3,1)$ et parallèle au plan $\delta \equiv -2x+z+1=0$.

La question est fermée. La méthode n'est pas imposée.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie vectorielle.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle.

Point de vue

Point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- □ Connaissances anciennes : parallélisme, vecteurs colinéaires.
- □ Connaissances en cours d'acquisition : équations cartésiennes de plans.
- □ Connaissances nouvelles : positions relatives de deux plans.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Il s'agit de trouver une équation cartésienne d'un plan sachant sa position relative par rapport à un objet décrit dans le point de vue cartésien. Un vecteur normal du plan α doit être déterminé (*reconnaissance des modalités d'application*, *mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Il faut traduire le parallélisme des deux plans en termes de vecteurs colinéaires (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*, *changement de cadres*). Un vecteur normal du plan δ est donné (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Il y a un *choix* à effectuer pour trouver un vecteur colinéaire au vecteur déterminé (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Une équation cartésienne avec un terme indépendant générique peut être écrite (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). La valeur du terme indépendant est trouvée avec le point appartenant au plan (*changement de points de vue au sens de Robert*).

8 Exercice 13

Soit le système

$$\begin{cases} x+2y=4 \\ 5x-3y=1. \end{cases}$$

Quelles sont les solutions de ce système dans le plan $\mathbb{R}^2$? Interprétez géométriquement les résultats obtenus.
Quelles sont les solutions de ce système dans l'espace $\mathbb{R}^3$? Interprétez géométriquement les résultats obtenus.

La question est découpée en deux sous-questions. Elles sont toutes les deux ouvertes. La méthode n'est pas imposée mais il est demandé d'interpréter géométriquement les ensembles des solutions du système étudié.

Domaine de travail

Cadre de la géométrie analytique.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle, registre ensembliste.

Points de vue

Point de vue cartésien, point de vue paramétrique.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : équations cartésiennes et paramétriques de droites dans le plan, résolution de systèmes.
- Connaissances en cours d'acquisition : équations cartésiennes de droites dans l'espace.

□ Connaissances nouvelles : positions relatives de deux droites dans l'espace, positions relatives de deux plans.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Les objets sont décrits dans le point de vue cartésien. Il s'agit de résoudre le système dans le plan et l'espace (*reconnaissance des modalités d'application*). La résolution algébrique du système *met en jeu des connaissances anciennes* (*conversion de registres*). L'ensemble des solutions est écrit pour chaque système (*conversion de registres*). Il reste à reconnaître les objets décrits par ces ensembles à partir du point de vue paramétrique (*conversion de registres*, *mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*).

9 Exercice 14

> Donnez une équation cartésienne du plan α passant par le point $(-1,0,2)$ et perpendiculaire à la droite d'intersection des plans d'équations $4x+2y+2z=-1$ et $3x-2y+3z=7$.

La question est fermée. La méthode n'est pas imposée.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie vectorielle.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle, registre ensembliste.

Points de vue

Point de vue cartésien, point de vue paramétrique.

Connaissances mises en jeu

□ Connaissances anciennes : orthogonalité, résolution de systèmes.

□ Connaissances en cours d'acquisition : équations cartésiennes de plans, équations paramétriques de droites dans l'espace.

□ Connaissances nouvelles : positions relatives entre une droite et un plan.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Il s'agit de déterminer une équation cartésienne d'un plan sachant sa position relative par rapport à des objets décrits dans le point de vue cartésien. Un point et un vecteur normal du plan doivent être déterminés (*reconnaissance des modalités d'application*). L'*organisation du raisonnement* se découpe en plusieurs étapes. Il s'agit dans un premier temps de déterminer une équation de la droite d'intersection des deux plans donnés. Cela entraîne à résoudre algébriquement un système de deux équations à trois inconnues (*mise en jeu de connaissances*

anciennes, *conversion de registres*). L'ensemble des solutions du système décrit une droite (*conversion de registres*, *mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). La perpendicularité entre le plan et la droite doit être traduite en termes de vecteurs (*mise en jeu de connaissances nouvelles*, *changement de cadres*). Un vecteur directeur de la droite doit être déterminé à partir du point de vue paramétrique (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Un vecteur normal colinéaire à ce vecteur doit être choisi (*existence de choix*). Une équation cartésienne avec un terme indépendant générique peut être écrite (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Le point appartenant au plan permet de trouver la valeur du terme indépendant (*changement de points de vue au sens de Robert*).

10 Exercice 15

> Soient les plans $\alpha \equiv 2x+y+z=1$, $\beta \equiv x+y+z=2$ et $\gamma \equiv x+y+z=0$. Recherchez l'ensemble des points d'intersection de ces trois plans. Expliquez votre démarche.

La question est fermée. La méthode n'est pas imposée.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie synthétique, cadre de la géométrie vectorielle.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle, registre ensembliste.

Point de vue

Point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : résolution de systèmes, vecteurs colinéaires, positions relatives de trois plans.
- Connaissances en cours d'acquisition : équations cartésiennes de plans, vecteurs normaux.
- Connaissances nouvelles : positions relatives de deux plans.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Il s'agit de déterminer la position relative de trois plans décrits dans le point de vue cartésien. Plusieurs méthodes sont possibles (*existence de choix*). Une première méthode consiste à résoudre algébriquement le système de trois équations à trois inconnues (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *conversion de registres*). L'ensemble des solutions est ensuite écrit (*conversion de registres*).

La deuxième méthode consiste à interpréter géométriquement le système. L'énoncé indique que les équations données sont des plans. Afin de déterminer la position relative de ces plans, un vecteur normal de chacun d'eux est à déterminer (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Il faut tester la colinéarité de ces vecteurs (*mise en jeu de connaissances anciennes dans le cadre de la géométrie vectorielle*). Puisque deux des trois vecteurs sont colinéaires, il faut en déduire qu'il y a deux plans parallèles (*changement de cadres*). L'étude des termes indépendants permet de préciser que ces deux plans sont parallèles distincts. L'ensemble des solutions du système peut être directement donné (*conversion de registres*).

11 Exercice 16

> Quel est l'objet géométrique décrit par l'ensemble $\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y \in \mathbb{R}\}$? Expliquez votre démarche.

La question est ouverte. La méthode n'est pas imposée.

Domaine de travail

Cadre de la géométrie analytique.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle, registre ensembliste.

Points de vue

Point de vue cartésien, point de vue paramétrique.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : notations ensemblistes.
- Connaissances nouvelles : équations paramétriques et cartésiennes de plans.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Il s'agit de reconnaître l'objet décrit à partir d'un ensemble. Deux méthodes sont possibles (*existence de choix*). La première méthode amène à remarquer que les triplets étudiés ont tous une cote nulle. Une équation cartésienne d'un plan peut être directement déterminée (*mise en jeu de connaissances nouvelles*, *conversion de registres*). La deuxième méthode amène à reconnaître l'objet à partir d'une équation paramétrique du plan (*conversion de registres*, *mise en jeu de connaissances nouvelles*). La conclusion peut être donnée (*conversion de registres*).

12 Exercice 17

Soient le plan $\alpha \equiv 4x - z = 1 - 2y$ et le point P de coordonnées $(0, -2, 3)$. Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite d passant par le point P et perpendiculaire au plan α. Déterminez ensuite le point d'intersection entre la droite d et le plan α.

La question est fermée. La méthode n'est pas imposée. La question est découpée en deux sous-questions : écrire un système d'équations et déterminer un point de percée.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie vectorielle.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle, registre ensembliste.

Point de vue

Point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : vecteurs colinéaires, résolution de systèmes.
- Connaissances en cours d'acquisition : équations cartésiennes de plans, équations cartésiennes de droites.
- Connaissances nouvelles : positions relatives d'une droite et d'un plan, point de percée.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Il s'agit tout d'abord de déterminer une équation cartésienne d'une droite sachant sa position relative par rapport à un objet décrit dans le point de vue cartésien. Pour ce faire, un point et un vecteur directeur de la droite d doivent être recherchés (*reconnaissance des modalités d'application*). Un point est donné dans l'énoncé. Afin de trouver un vecteur directeur de la droite, l'*organisation du raisonnement* est découpée en plusieurs étapes. Il faut traduire la position relative de la droite et du plan en termes de vecteurs (*mise en jeu de connaissances nouvelles*, *conversion de registres*). Un vecteur normal du plan est identifié (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Il faut choisir un vecteur colinéaire au vecteur normal du plan (*existence de choix*, *changement de cadres*). Un système d'équations cartésiennes de la droite peut alors être écrit (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Il faut ensuite déterminer le point de percée de la droite dans le plan. Pour cela, un système de trois équations à trois inconnues doit être résolu (*mise en jeu de connaissances anciennes*). L'ensemble des solutions est écrit (*conversion de registres*) et donne les coordonnées du point.

13 Exercice 19

Quel est l'ensemble des vecteurs (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux aux droites d_1 et d_2 définies par

$$d_1 \equiv 1-x = \frac{y+2}{-3} = \frac{-z+2}{-1}$$

$$d_2 \equiv (x,y,z) = (3\lambda+1, -\lambda-2, 5+\lambda), \lambda \in \mathbb{R}?$$

Décrivez géométriquement l'ensemble obtenu.

La question est découpée en deux sous-questions. La première est ouverte. La méthode n'est pas imposée. La deuxième est fermée et la méthode est imposée.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie vectorielle.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle, registre ensembliste.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : fractions, mises en évidence, résolution de systèmes, orthogonalité, produit scalaire, opérations sur les vecteurs.
- Connaissances nouvelles : équations paramétriques et cartésiennes de droites dans l'espace.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Il s'agit de reconnaître l'objet décrit par un ensemble. L'*organisation du raisonnement* se fait en plusieurs étapes. Un vecteur directeur des deux droites doit être déterminé. Pour cela, la forme générale d'un système d'équations cartésiennes doit être écrite (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Cela entraîne de pouvoir manipuler les fractions et mettre en évidence (*mise en jeu de connaissances anciennes*). La forme générale d'une équation paramétrique doit être écrite pour déterminer un vecteur directeur de la droite d_2 (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Cela entraîne de manipuler les opérations vectorielles (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Il faut ensuite traduire l'orthogonalité entre ces deux vecteurs et le vecteur (a,b,c) (*mise en jeu de connaissances anciennes en géométrie vectorielle*). La résolution d'un système de deux équations à trois inconnues (*mise en jeu de connaissances anciennes*) permet de déterminer l'ensemble recherché (*conversion de registres*). La reconnaissance de l'objet géométrique peut se faire à partir du point de vue paramétrique (*conversion de registres*, *reconnaissance des modalités*

d'application). Une description de la droite est donnée (*conversion de registres*, *mise en jeu de connaissances nouvelles*).

14 Exercice 20

Soit le système

$$\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ 4x+2y+2z=6. \end{cases}$$

Décrivez géométriquement l'ensemble des solutions de ce système. Expliquez votre démarche. Déterminez ensuite algébriquement quel est cet ensemble de solutions.

La question est découpée en deux parties. Pour la première partie, il s'agit de résoudre le système en utilisant la démarche d'interprétation géométrique. Pour la deuxième partie, il s'agit de résoudre algébriquement le système. La méthode est donc imposée dans les deux parties.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie synthétique, cadre de la géométrie vectorielle.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle, registre ensembliste.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : résolution de systèmes, vecteurs colinéaires, parallélisme, orthogonalité.
- Connaissances en cours d'acquisition : équations cartésiennes de plans, équations paramétriques de droites dans l'espace.
- Connaissances nouvelles : positions relatives de deux plans.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Pour décrire géométriquement les solutions du système, le même questionnement que dans l'activité introductive est posé. Chaque équation du système décrit un plan (*reconnaissance des modalités d'application*). Les vecteurs normaux sont identifiés (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Une étude de la colinéarité des vecteurs amène un *changement de cadres*. Ils sont colinéaires (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Les deux plans sont parallèles (*mise en jeu de connaissances nouvelles*, *changement de cadres*). Ils peuvent être parallèles

distincts ou confondus (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Pour déterminer dans quel cas nous nous trouvons, il faut trouver un point d'un des deux plans à partir des équations et déterminer s'il appartient au deuxième plan. Puisque c'est le cas, les deux plans sont parallèles confondus. L'ensemble des solutions du système décrit alors le plan lui-même (*mise en jeu de connaissances anciennes*).

La résolution du système *met en jeu des connaissances anciennes* (*conversion de registres*). L'ensemble des solutions doit être écrit (*conversion de registres*). Il s'agit de reconnaître le plan à partir d'une équation paramétrique (*reconnaissance des modalités d'application*, *conversion de registres*).

15 Exercice 21

Soit le système

$$\begin{cases} \frac{x-1}{3} = 1 + \frac{1}{2}y = \frac{2z+3}{-10} \\ 3x + 2y - 5z = 2. \end{cases}$$

Décrivez géométriquement l'ensemble des solutions de ce système. Expliquez votre démarche. Déterminez ensuite algébriquement quel est cet ensemble de solutions.

La question est découpée en deux parties. Pour la première partie, il s'agit de résoudre le système en utilisant la démarche d'interprétation géométrique. Pour la deuxième partie, il s'agit de résoudre algébriquement le système. La méthode est donc imposée dans les deux parties.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie synthétique, cadre de la géométrie vectorielle.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle, registre ensembliste.

Points de vue

Point de vue cartésien, point de vue paramétrique.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : résolution de systèmes, vecteurs colinéaires, parallélisme, orthogonalité.
- Connaissances en cours d'acquisition : équations cartésiennes de plans, équations paramétriques et cartésiennes de droites dans l'espace.
- Connaissances nouvelles : positions relatives d'une droite et d'un plan.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Pour décrire géométriquement les solutions du système, le questionnement mis en place dans l'activité introductive est posé. La première équation du système décrit une droite et la deuxième équation décrit un plan (*reconnaissance des modalités d'application*). Un vecteur directeur de la droite et un vecteur normal au plan sont identifiés (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Ces vecteurs sont colinéaires (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *changement de cadres*). La droite et le plan sont donc perpendiculaires (*mise en jeu de connaissances nouvelles*, *changement de cadres*). Il reste donc à chercher le point de percée de la droite dans le plan. La résolution algébrique du système *met en jeu des connaissances anciennes* (*conversion de registres*). L'ensemble des solutions doit être écrit (*conversion de registres*) et décrit le point de percée.

16 Exercice 24

Calculez la distance du point $B(-2,-4,3)$ au plan $\beta \equiv 2x-y+2z+3=0$.

La question est fermée. La méthode n'est pas imposée.

Domaine de travail

Cadre de la géométrie analytique.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle.

Point de vue

Point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : valeurs absolues, racines carrées, fractions.
- Connaissances en cours d'acquisition : équations cartésiennes de plans.
- Connaissances nouvelles : distance d'un point à un plan.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Le plan est donné dans le point de vue cartésien. Il s'agit d'appliquer la formule de la distance entre un point et un plan vue en classe (*reconnaissance des modalités d'application*, *conversion de registres*). Cela *met en jeu des connaissances anciennes, en cours d'acquisition et nouvelles*.

17 Exercice 25

Calculez la distance entre les plans $\alpha \equiv 2x+3y-z+1=0$ et $\delta \equiv 2x+3y-z-5=0$.

La question est fermée. La méthode n'est pas imposée.

Domaine de travail

Cadre de la géométrie analytique.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle.

Point de vue

Point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- □ Connaissances anciennes : valeurs absolues, racines carrées, fractions.
- □ Connaissances en cours d'acquisition : équations cartésiennes de plans.
- □ Connaissances nouvelles : distance d'un point à un plan.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Il faut calculer la distance entre deux plans décrits dans le point de vue cartésien. Pour cela, il faut identifier un point appartenant à un des deux plans (*introduction d'un intermédiaire*). Il reste ensuite à appliquer la formule de la distance entre ce point et l'autre plan (*reconnaissance des modalités d'application*). Cela *met en jeu des connaissances anciennes, en cours d'acquisition et nouvelles*.

18 Exercice 26

Calculez la distance entre le point $E(5,-3,1)$ et la droite

$$d \equiv \begin{cases} x = 4+3k \\ y = 5-7k \\ z = 6+k \end{cases}$$

où $k \in \mathbb{R}$.

La question est fermée. La méthode n'est pas imposée.

Domaine de travail

Cadre de la géométrie analytique.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle, registre ensembliste.

Points de vue

Point de vue paramétrique, point de vue cartésien.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances anciennes : résolution de systèmes, fractions, racines carrées.
- Connaissances en cours d'acquisition : équations paramétriques de droites dans l'espace, équations cartésiennes de plans, positions relatives d'une droite et d'un plan.
- Connaissances nouvelles : distance entre deux points dans l'espace, distance entre un point et une droite de l'espace.

Adaptations à réaliser

L'énoncé est donné en langue naturelle. Il s'agit de calculer la distance entre un poitn et une droite dans l'espace (*reconnaissance des modalités d'application*). Pour ce faire, il suffit de suivre la méthode donnée en classe (*mise en jeu de connaissances nouvelles*). L'*organisation du raisonnement* est découpé en plusieurs étapes. Il faut d'abord trouver une équation cartésienne d'un plan passant par le point E et perpendiculaire à la droite d (*introduction d'un intermédiaire*). La perpendicularité de la droite et du plan doit être traduite en termes de vecteurs (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*, *conversion de registres*). Un vecteur directeur de la droite peut être déterminé à partir du point de vue paramétrique (*mise en jeu de connaissances en cours d'acquisition*). Ensuite, il faut déterminer les coordonnées du point de percée de la droite d dans le plan est trouvé. Un système de 4 équations à trois inconnues est à résoudre (*mise en jeu de connaissances anciennes*). L'ensemble des solutions du système décrit le point de percée (*conversion de registres*). Il reste à appliquer la formule de la distance entre deux points de l'espace (*mise en jeu de connaissances nouvelles*). Ce calcul *met en jeu des connaissances anciennes* sur les nombres.

19 Exercice 27

On considère trois points A, B et C de coordonnées respectives $(3,0,3)$, $(3,3,0)$ et $(0,3,3)$. Ces trois points forment un tétraèdre avec l'origine du repère.

① Représentez ce tétraèdre.

② Ce tétraèdre est-il régulier ? Justifiez votre réponse.

③ Calculez la distance entre le sommet O et la face ABC du tétraèdre.

La question est découpée en plusieurs sous-questions. La première et la troisième sont fermées. La deuxième est ouverte. Aucune méthode n'est imposée.

Domaines de travail

Cadre de la géométrie analytique, cadre de la géométrie vectorielle, cadre de la géométrie synthétique.

Registres d'écriture

Registre algébrique, registre de la langue naturelle, registre du dessin.

Point de vue

Point de vue paramétrique.

Connaissances mises en jeu

- □ Connaissances anciennes : perspective cavalière, tétraèdre régulier, triangles isocèles, composantes d'un vecteur, norme d'un vecteur, repère orthonormé de l'espace, résolution de systèmes, valeurs absolues, racines carrées.
- □ Connaissances en cours d'acquisition : équations cartésiennes de plans.
- □ Connaissances nouvelles : distance d'un point à un plan.

Adaptations à réaliser

La question ① amène à dessiner le tétraèdre dans un repère orthonormé. Il faut donc passer du registre de la langue naturelle au registre du dessin (*conversion de registres*). Pour réaliser le dessin, des *connaissances anciennes du cadre de la géométrie synthétique sont mises en jeu*.

Pour la question ②, il faut montrer que les faces du tétraèdres sont des triangles isocèles (*reconnaissance des modalités d'application*, *mise en jeu de connaissances anciennes en géométrie synthétique*). Pour ce faire, puisqu'un repère est fixé, il suffit de montrer que la longueur des arêtes sont égales (*changement de points de vue au sens de Robert*). Les coordonnées de tous les sommets sont données dans l'énoncé. Il reste donc à calculer les composantes de plusieurs vecteurs et à calculer leurs normes (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *changement de cadres*).

La question ③ amène à calculer la distance entre le point O et la face ABC du tétraèdre. Le *raisonnement est organisé* en plusieurs étapes. Tout d'abord, une équation cartésienne du plan ABC doit être déterminée (*introduction d'un intermédiaire*). Puisque les coordonnées des points A, B et C sont connus, une équation paramétrique dans le cadre de la géométrie vectorielle du plan peut être écrite (*mise en jeu de connaissances anciennes*, *conversion de registres*). Après avoir calculé les composantes des vecteurs (*mise en jeu de connaissances anciennes*), une équation paramétrique du plan dans le cadre de la géométrie analytique est donnée (*changement de cadres*). Il reste à éliminer les deux paramètres pour écrire une équation cartésienne de ce plan (*changement de points de vue*, *mise en jeu de connaissances anciennes*). La formule de la distance entre un point et un plan vue en classe est ensuite appliquée (*mise en jeu de connaissances nouvelles*).

Annexe G

Solutions des tâches proposées aux élèves

1 Tâches introductives

Tâche d'introduction 1

Recherchez graphiquement l'ensemble des solutions des systèmes suivants dans $\mathbb{R}^2$.

$$(S_1)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4y+4=0 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} 2x+3y=2 \\ 4y+4=0 \end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases} 2y+5x=1 \\ 3x=1-3y \end{cases} \qquad (S_4)\begin{cases} 2x+3y=6 \\ 4x+6y=8 \end{cases}$$

La solution est donnée dans le scénario (cf. chapitre X, point 2).

Tâche d'introduction 2

En vous inspirant de ce qui a été fait au point 1, trouvez l'ensemble des solutions des systèmes suivants dans $\mathbb{R}^3$.

$$(S_1)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4z-3=2z+1 \\ y=0 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4y+4=0 \end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases} x=y \\ y=z \end{cases} \qquad (S_4)\begin{cases} x=\dfrac{y}{2}=z-2 \\ z=2 \end{cases}$$

$$(S_5)\begin{cases} \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z+2}{4} \\ 2x+3y+4z=5 \end{cases} \qquad (S_6)\begin{cases} 2x+3y+4z=5 \\ 6x+9y+12z=8 \end{cases}$$

La solution est donnée dans le scénario (cf. chapitre X, point 2).

2 Exercice 1

① Donnez une équation paramétrique de la droite d passant par les points $A(-2,0,-3)$ et $B(-1,4,-3)$.

② Si le point C appartient à la droite d, est-il possible que son abscisse soit égale à 1 ? Si oui, donnez ses coordonnées. Si non, justifiez votre réponse.

③ Le point $D(4,1,-3)$ appartient-il à la droite d ?

① Un vecteur directeur de la droite d est le vecteur $\overrightarrow{AB}=(1,4,0)$.
Une équation paramétrique de la droite d est : $(x,y,z)=(-2,0,-3)+\lambda(1,4,0)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

② Supposons que le point C est un point de la droite d et que ses coordonnées sont $(1,y,z)$. Puisque le point C est un point de la droite d, ses coordonnées vérifient l'équation paramétrique donnée au point précédent. Ainsi, le système suivant doit

donc être satisfait pour une valeur de λ :

$$\begin{cases} 1 = -2+\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = -3 \end{cases}$$

Le système est satisfait pour $\lambda = 3$. Il est donc possible qu'un point d'abscisse 1 appartienne à la droite d. Les coordonnées du point C sont $(1, 12, -3)$.

③ Le point D appartient à la droite d si ses coordonnées vérifient l'équation paramétrique de la droite d donnée précédemment. Le système suivant doit être satisfait pour une valeur de λ :

$$\begin{cases} 4 = -2+\lambda \\ 1 = 4\lambda \\ -3 = -3 \end{cases}$$

Ce système est impossible. En effet, la première équation nous donne $\lambda = 6$ et la deuxième équation nous donne $\lambda = \frac{1}{4}$. Comme il n'existe pas une valeur de λ satisfaisant le système, le point D n'appartient pas à la droite d.

3 Exercice 2

Déterminez un système d'équations cartésiennes de la droite d passant par le point $A(2,-1,3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}(0,-1,2)$.

Un système d'équations cartésiennes de la droite d est : $\begin{cases} x = 2 \\ -y-1 = \frac{z-3}{2} \end{cases}$.

4 Exercice 3

Donnez un point et un vecteur directeur de chacune des droites suivantes :

① $1-x = \dfrac{3y-3}{2} = \dfrac{7+z}{5}$.

② $\dfrac{2x-3}{2} = \dfrac{y-4}{5} = 3z+2$.

③ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3k \\ z = 1-2k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$.

④ $\begin{cases} x = 1 \\ y-3 = 0 \end{cases}$.

① Pour déduire un point et un vecteur directeur de la droite, nous écrivons ces équations sous forme canonique : $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{2/3} = \dfrac{z+7}{5}$.

Un point de la droite est $(1,1,-7)$ et un vecteur directeur est $(-1,\frac{2}{3},5)$ ou encore $(-3,2,15)$.

② Pour déduire un point et un vecteur directeur de la droite, nous écrivons ces équations sous forme canonique : $x-\dfrac{3}{2}=\dfrac{y-4}{5}=\dfrac{z+2/3}{1/3}$.

Un point de la droite est $(\frac{3}{2},4,-\frac{2}{3})$ et un vecteur directeur est $(1,5,\frac{1}{3})$ ou encore $(3,15,1)$.

③ Un point de la droite est $(1,0,1)$ et un vecteur directeur est $(0,3,-2)$.

④ Un point de la droite est $(1,3,1)$ et un vecteur directeur est $(0,0,1)$.

5 Exercice 4

Donnez une équation paramétrique du plan α défini par les vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}(1,1,1)$ et $\overrightarrow{v}(1,0,2)$ et passant par le point $A(1,2,3)$. Le point $B(1,3,2)$ appartient-il au plan α ?

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non colinéaires. En effet, quelle que soit la valeur de k, $(1,1,1)\neq k(1,0,2)$. De ce fait, une équation paramétrique du plan α est :

$$(x,y,z)=(1,2,3)+\lambda(1,1,1)+\mu(1,0,2), \text{ où } \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Le point B appartient au plan α si ses coordonnées vérifient l'équation paramétrique donnée ci-dessus. Le point B appartient au plan α s'il existe une valeur de λ et μ pour laquelle le système suivant est satisfait :

$$\begin{cases} 1=1+\lambda+\mu \\ 3=2+\lambda \\ 2=3+\lambda+2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu=-1 \\ \lambda=1 \\ \mu=-1 \end{cases}$$

En prenant $\lambda=1$ et $\mu=-1$, le système est satisfait. Le point B appartient bien au plan α.

6 Exercice 5

Est-il vrai de dire que le vecteur $(-2,4,-\frac{2}{\pi})$ est un vecteur normal du plan $\beta\equiv -\pi x+2\pi y-z=\pi$?

Un vecteur normal du plan β est $(-\pi,2\pi,-1)$. Le vecteur $(-2,4,-\frac{2}{\pi})$ est un vecteur normal du plan β car il est colinéaire au vecteur $(-\pi,2\pi,-1)$. En effet, en prenant $k=\frac{2}{\pi}$, l'égalité $(-2,4,-\frac{2}{\pi})=\frac{2}{\pi}(-\pi,2\pi,-1)$ est vérifiée.

7 Exercice 6

Quelle est une équation cartésienne du plan α comprenant le point $P(1,2,-3)$ et dont deux vecteurs directeurs sont $\overrightarrow{u}(3,0,2)$ et $\overrightarrow{v}(2,-1,3)$?

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non colinéaires. En effet, quelle que soit la valeur de k, $(3,0,2) \neq (2,-1,3)$.

Première méthode

Une équation paramétrique du plan α est :

$$(x,y,z) = (1,2,-3) + \lambda(3,0,2) + \mu(2,-1,3), \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Une équation cartésienne du plan α est obtenue en éliminant les paramètres dans l'équation paramétrique ci-dessus.

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1+3\lambda+2\mu \\ y = 2-\mu \\ z = -3+2\lambda+3\mu \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1+3\lambda+2\mu \\ \mu = -y+2 \\ z = -3+2\lambda+3\mu \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = \frac{x+2y-5}{3} \\ \mu = -y+2 \\ z = -3+2\lambda+3\mu \end{array}\right.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} z &= -3+\frac{2}{3}(x+2y-5)+3(-y+2) \\ &= -3+\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}y-\frac{10}{3}-3y+6 \\ &= \frac{-1}{3}+\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}y \end{aligned}$$

Une équation équivalente est $3z = -1+2x-5y$ ou encore $-2x+5y+3z = -1$. Donc une équation cartésienne d'un tel plan α est : $-2x+5y+3z = -1$.

Deuxième méthode

Nous cherchons un vecteur (a,b,c) normal au plan. Nous savons qu'un vecteur normal au plan est perpendiculaire à tous les vecteurs directeurs du plan. D'où, en particulier, ce vecteur est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Ces conditions d'orthogonalité se traduisent par le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} 3a+2c = 0 \\ 2a-b+3c = 0 \end{array}\right.$$

Nous devons résoudre ce système.

$$\left\{\begin{array}{l} c = \frac{-3a}{2} \\ b = 2a+3\frac{-3a}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c = \frac{-3a}{2} \\ b = \frac{-5a}{2} \end{array}\right.$$

Posons $a = 2$, nous avons $b = -5$ et $c = -3$. Un vecteur normal du plan α est $(2,-5,-3)$. Une équation cartésienne du plan α est alors de la forme : $2x-5y-3z = d$.

Puisque $(1,2,-3)$ est un point du plan, ses coordonnées vérifient l'équation du plan. Nous avons :

$$\begin{aligned}(1,2,-3) \in \alpha &\Leftrightarrow 2-10+9=d\\ &\Leftrightarrow d=1\end{aligned}$$

Une équation cartésienne du plan α est $2x-5y-3z=1$.

8 Exercice 7

> Donnez une équation vectorielle, paramétrique et cartésienne du plan α comprenant les droites $d_1 \equiv (x,y,z)=(1,2,3)+\lambda(2,-1,3)$ et $d_2 \equiv (x,y,z)=(0,-2,1)+\mu(-4,2,-6)$ où $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$.

Un point de la droite d_1 est $A(1,2,3)$ et un vecteur directeur est $(2,-1,3)$. Un point de la droite d_2 est $B(0,-2,1)$ et un vecteur directeur est $(-4,2,-6)$. Les vecteurs directeurs des deux droites sont colinéaires. En effet, prenons $k=-2$, nous avons bien que l'égalité $(-4,2,-6)=-2(2,-1,3)$ est vérifiée. Les deux droites sont donc parallèles.

Puisque les droites d_1 et d_2 sont incluses au plan α, un vecteur directeur de d_1 est un vecteur directeur de α. Un vecteur directeur du plan α est $\overrightarrow{v}=(2,-1,3)$. Afin de trouver un deuxième vecteur directeur du plan α non colinéaire au premier, nous prenons un point de d_1 comme origine de ce vecteur et un point de d_2 comme extrêmité de ce vecteur. Par exemple, $\overrightarrow{AB}=(-1,-4,-2)$ est un vecteur directeur du plan α non colinéaire au vecteur $\overrightarrow{v}$.

Soit $P(x,y,z) \in \alpha$.
Une équation vectorielle du plan est : $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{v}$, où $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$.
Une équation paramétrique du plan est :

$$(x,y,z)=(1,2,3)+\lambda(-1,-4,-2)+\mu(2,-1,3), \text{ où } \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$$

Plusieurs méthodes peuvent être envisagées pour déterminer une équation cartésienne du plan α.

Première méthode

Nous éliminons les paramètres dans l'équation paramétrique donnée ci-dessus.

$$\begin{cases} x=1-\lambda+2\mu \\ y=2-4\lambda-\mu \\ z=3-2\lambda+3\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-\lambda+4-8\lambda-2y \\ \mu=2-4\lambda-y \\ z=3-2\lambda+6-12\lambda-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\frac{x+2y-5}{-9} \\ z=9-14\lambda-3y \end{cases}.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} z=9+\frac{14}{9}(x+2y-5)-3y &\Leftrightarrow 9z=81+14(x+2y-5)-27y\\ &\Leftrightarrow 9z=81+14x+28y-70-27y\\ &\Leftrightarrow 9z=14x+y+11\end{aligned}$$

Une équation cartésienne du plan α est $-14x-y+9z=11$.

Deuxième méthode

Nous cherchons un vecteur (a,b,c) normal au plan. Nous savons qu'un vecteur normal au plan est perpendiculaire à tous les vecteurs directeurs du plan. D'où, en particulier, ce vecteur est orthogonal à $(-1,-4,-2)$ et $(2,-1,3)$. Nous avons le système suivant à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{l} -a-4b-2c=0 \\ 2a-b+3c=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-4b-2c \\ -9b-c=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c=-9b \\ a=14b \end{array}\right.$$

Posons $b=1$, nous avons $a=14$ et $c=-9$. Un vecteur normal du plan α est $(14,1,-9)$. Une équation cartésienne du plan α est alors de la forme : $14x+y-9z=d$. Puisque $(1,2,3)$ est un point du plan, ses coordonnées vérifient l'équation du plan. Nous avons :

$$\begin{aligned}(1,2,3)\in\alpha &\Leftrightarrow 14+2-27=d \\ &\Leftrightarrow d=-11.\end{aligned}$$

Une équation cartésienne du plan α est $14x+y-9z=-11$.

9 Exercice 8

> Donnez une équation paramétrique du plan α sachant qu'il passe par le point $P(3,4,5)$ et dont un vecteur normal est $(2,6,4)$.

Une équation cartésienne du plan est de la forme : $2x+6y+4z=d$. Comme le point P appartient au plan, ses coordonnées vérifient l'équation du plan. Nous avons :

$$\begin{aligned}(2,6,4)\in\alpha &\Leftrightarrow 6+24+20=d \\ &\Leftrightarrow d=50.\end{aligned}$$

Une équation cartésienne du plan α est $2x+6y+4z=50$.

Pour obtenur une équation paramétrique du plan, posons $\lambda=x$ et $\mu=y$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}2\lambda+6\mu+4z=50 &\Leftrightarrow z=\frac{50-2\lambda-6\mu}{4} \\ &\Leftrightarrow z=\frac{25-\lambda-3\mu}{2}\end{aligned}$$

Une équation paramétrique du plan α est :

$$(x,y,z)=\left(0,0,\frac{25}{2}\right)+\lambda\left(1,0,-\frac{1}{2}\right)+\mu\left(0,1,-\frac{3}{2}\right), \text{ où } \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

10 Exercice 9

Les plans $\alpha \equiv x-2y+3z=4$ et $\beta \equiv -2x+5y+4z=1$ sont-ils perpendiculaires ? Expliquez votre démarche.

Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre. Un vecteur normal de α est $(1,-2,3)$ et un vecteur normal de β est $(-2,5,4)$. Calculons le produit scalaire entre ces deux vecteurs. Nous avons :

$$\begin{aligned}(1,-2,3)\cdot(-2,5,4) &= -2-10+12\\ &= 0\end{aligned}$$

Le produit scalaire entre les deux vecteurs est nul. Les deux vecteurs sont donc orthogonaux. Les plans α et β sont perpendiculaires.

11 Exercice 10

Déterminez une équation cartésienne du plan α comprenant le point $(42,-3,1)$ et parallèle au plan $\delta \equiv -2x+z+1=0$.

Deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires. Un vecteur normal du plan δ est $(-2,0,1)$. D'où, un vecteur normal du plan α est $(-2,0,1)$. Une équation cartésienne du plan α est alors de la forme $-2x+z=d$. Puisque le point $(42,-3,1)$ appartient au plan α, ses coordonnées vérifient cette équation. Nous avons :

$$\begin{aligned}(42,-3,1)\in\alpha &\Leftrightarrow -84+1=d\\ &\Leftrightarrow d=-83.\end{aligned}$$

Une équation cartésienne du plan α est : $-2x+z=-83$.

12 Exercice 11

Déterminez une équation cartésienne du plan β comprenant le point $A(1,3,-2)$ parallèle à $d \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y}{3}+1 = \frac{1-z}{-3}$ et perpendiculaire au plan $\alpha \equiv 2x-3y+2z=1$.

Comme le plan α et le plan β sont perpendiculaires, un vecteur normal de α est un vecteur directeur de β. Ainsi, $(2,-3,2)$ est un vecteur directeur du plan β. De plus, la droite d est parallèle au plan β. D'où, un vecteur directeur de la droite d est un vecteur directeur du plan β. Écrivons les équations cartésiennes de la droite d sous forme canonique afin d'identifier un de ses vecteurs directeurs :

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{3}.$$

Ainsi, un vecteur directeur du plan β est $(3,3,3)$ ou encore $(1,1,1)$. Les vecteurs $(1,1,1)$ et $(2,-3,2)$ sont non colinéaires. En effet, quelle que soit la valeur de k, nous avons bien $(1,1,1) \neq k(2,-3,2)$.

Première méthode

Puisque les deux vecteurs directeurs sont non colinéaires, une équation paramétrique du plan β est donnée par :

$$(x,y,z) = (1,3,-2) + \lambda(2,-3,2) + \mu(1,1,1), \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Une équation cartésienne du plan β est déterminée en éliminant les paramètres dans l'équation paramétrique ci-dessus.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1+2\lambda+\mu \\ y = 3-3\lambda+\mu \\ z = -2+2\lambda+\mu \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu = x-1-2\lambda \\ y = 3-3\lambda+x-1-2\lambda \\ z = -2+2\lambda+x-1-2\lambda \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 2-5\lambda+x \\ z = -3+x \end{array} \right.$$

Le plan β a pour équation cartésienne $-x+z=-3$.

Deuxième méthode

Nous cherchons un vecteur (a,b,c) normal au plan. Nous savons qu'un vecteur normal au plan est perpendiculaire à tous les vecteurs directeurs du plan. D'où, en particulier, ce vecteur est orthogonal à $(1,1,1)$ et $(2,-3,2)$. Nous avons donc le système suivant à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} a+b+c=0 \\ 2a-3b+2c=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=-b-c \\ -5b=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b=0 \\ a=-c \end{array} \right.$$

Posons $c=1$, nous avons $a=-1$. Un vecteur normal du plan α est $(-1,0,1)$. Une équation cartésienne du plan est alors de la forme : $-x+z=d$. Puisque $(1,3,-2)$ est un point du plan, ses coordonnées vérifient cette équation du plan. Nous avons :

$$\begin{aligned} (1,3,-2) \in \alpha &\Leftrightarrow -1-2=d \\ &\Leftrightarrow d=-3. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne du plan β est $-x+z=-3$.

13 Exercice 12

Quel objet géométrique est représenté par l'ensemble $\{(x_1,x_2,x_3) \mid (x_1,x_2,x_3)$ est un vecteur orthogonal à $(-1,3,0)\}$?

Première méthode

L'ensemble donné peut se réécrire comme :

$$\begin{aligned}\{(x_1,x_2,x_3) \mid (x_1,x_2,x_3)\cdot(-1,3,0)=0\} &= \{(x_1,x_2,x_3) \mid -x_1+3x_2=0\}\\ &= \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1=3x_2\}\\ &= \{(3x_2,x_2,x_3) \mid x_2,x_3\in\mathbb{R}\}\end{aligned}$$

Cet ensemble décrit le plan passant par le point $(0,0,0)$ et dont deux vecteurs directeurs sont $(3,1,0)$ et $(0,0,1)$.

Deuxième méthode

Nous cherchons l'ensemble des vecteurs de l'espace orthogonaux à un vecteur donné. Nous pouvons dire qu'il s'agit d'un plan dont le vecteur $(-1,3,0)$ est un vecteur normal et passant par le point $(0,0,0)$.

14 Exercice 13

Soit le système

$$\begin{cases} x+2y=4 \\ 5x-3y=1. \end{cases}$$

Quelles sont les solutions de ce système dans le plan $\mathbb{R}^2$? Interprétez géométriquement les résultats obtenus.
Quelles sont les solutions de ce système dans l'espace $\mathbb{R}^3$? Interprétez géométriquement les résultats obtenus.

Dans $\mathbb{R}^2$, chaque équation décrit une droite. Un vecteur directeur de la première droite est $(-2,1)$ et un vecteur directeur de la deuxième droite est $(3,5)$. Les vecteurs n'étant pas colinéaires, les deux droites ne sont pas parallèles. Elles sont donc sécantes. Le système décrit le point d'intersection des deux droites. Déterminons ce point en résolvant le système. Nous avons :

$$\begin{cases} x=4-2y \\ 19=13y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{14}{13} \\ y=\frac{19}{13}. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\{(\frac{14}{13},\frac{19}{13})\}$.

Dans $\mathbb{R}^3$, chaque équation décrit un plan. Un vecteur normal du premier plan est $(1,2,0)$ et un vecteur normal du deuxième plan est $(5,-3,0)$. Les vecteurs n'étant pas colinéaires, les deux plans ne sont pas parallèles. Les plans sont donc sécants. Le système décrit la droite d'intersection des deux plans. L'ensemble des solutions est :

$$\left\{\left(\frac{14}{13},\frac{19}{13},z\right) \;\middle|\; z\in\mathbb{R}\right\}.$$

15 Exercice 14

Donnez une équation cartésienne du plan α passant par le point $(-1,0,2)$ et perpendiculaire à la droite d'intersection des plans d'équations $4x+2y+2z=-1$ et $3x-2y+3z=7$.

Déterminons la droite d'intersection des deux plans. Pour cela, résolvons le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} 4x+2y+2z=-1 \\ 3x-2y+3z=7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 7x+5z=6 \\ 3x-2y+3z=7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{6-5z}{7} \\ \frac{3}{7}(6-5z)-2y+3z=7 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{6-5z}{7} \\ y=\frac{-31+6z}{14} \end{array}\right. .$$

L'ensemble des solutions est : $\left\{\left(\frac{6-5z}{7},\frac{6z-31}{14},z\right) \;\middle|\; z\in\mathbb{R}\right\}$. Cet ensemble décrit la droite dont une équation paramétrique est :

$$(x,y,z)=\left(\frac{6}{7},\frac{-31}{14},0\right)+\lambda\left(\frac{-5}{7},\frac{3}{7},1\right), \text{ où } \lambda\in\mathbb{R}.$$

Un vecteur directeur de la droite est $(-5,3,7)$. Comme le plan α est perpendiculaire à cette droite, $(-5,3,7)$ est un vecteur normal du plan. Une équation cartésienne du plan α est de la forme : $-5x+3y+7z=d$. Puisque le point $(-1,0,2)$ appartient au plan, nous pouvons déterminer la valeur de d. Nous avons :

$$\begin{aligned}(-1,0,2)\in\alpha &\Leftrightarrow 5+0+14=d \\ &\Leftrightarrow d=19.\end{aligned}$$

Une équation cartésienne du plan est : $-5x+3y+7z=19$.

16 Exercice 15

Soient les plans $\alpha\equiv 2x+y+z=1$, $\beta\equiv x+y+z=2$ et $\gamma\equiv x+y+z=0$. Recherchez l'ensemble des points d'intersection de ces trois plans. Expliquez votre démarche.

Un vecteur normal des plans donnés est respectivement $(2,1,1)$, $(1,1,1)$ et $(1,1,1)$. Nous constatons que les plans β et γ sont parallèles puisque leurs vecteurs normaux sont colinéaires. Étant donné que les termes indépendants ne sont pas identiques, les plans sont parallèles distincts. Ainsi, les trois plans ne peuvent pas avoir d'intersection. L'ensemble des solutions est l'ensemble vide.

17 Exercice 16

Quel est l'objet géométrique décrit par l'ensemble $\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y \in \mathbb{R}\}$? Expliquez votre démarche.

Il s'agit du plan dont une équation cartésienne est $z = 0$. Les variables x et y varient alors que la cote est fixe et vaut zéro. Nous pouvons aussi dire que cet ensemble est généré par les vecteurs $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$. Ces deux vecteurs générant le plan Oxy.

18 Exercice 17

Soient le plan $\alpha \equiv 4x - z = 1 - 2y$ et le point P de coordonnées $(0,-2,3)$. Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite d passant par le point P et perpendiculaire au plan α. Déterminez ensuite le point d'intersection entre la droite d et le plan α.

Notons que le point P n'appartient pas au plan α puisque $4.0 - 3 = -3$ et $-3 \neq 5$. Comme la droite d est perpendiculaire au plan α, un vecteur normal du plan est un vecteur directeur de la droite. Un vecteur normal du plan est $(4,2,-1)$. Un système d'équations cartésiennes de la droite d est : $\frac{x}{4} = \frac{y+2}{2} = -z+3$.

Pour trouver le point d'intersection entre la droite et le plan, nous devons résoudre le système composé de leurs équations. Nous résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} 4x+2y-z=1 \\ x=-4z+12 \\ y+2=-2z+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4z+12 \\ y=-2z+4 \\ -16z+48-4z+8-z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4z+12 \\ y=-2z+4 \\ z=\frac{55}{21} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{32}{21} \\ y=\frac{-26}{21} \\ z=\frac{55}{21} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\{\left(\frac{32}{21}, \frac{-26}{21}, \frac{55}{21}\right)\}$. Cet ensemble décrit le point de percée de la droite dans le plan.

19 Exercice 18

Soit le système

$$\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ 3x+2y-5z=2. \end{cases}$$

Décrivez géométriquement l'ensemble des solutions de ce système. Expliquez votre démarche. Déterminez ensuite algébriquement quel est cet ensemble de solutions.

La première équation décrit un plan dont un vecteur normal est $(2,1,1)$. La deuxième équation décrit un plan dont un vecteur normal est $(3,2,-5)$. Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Nous déduisons que les deux plans ne sont pas parallèles. Le système a donc forcément une solution. Nous savons que deux plans sont sécants suivant une droite. L'ensemble des solutions décrit donc une droite dont un vecteur directeur est simultanément orthogonal à ces deux vecteurs.

Résolvons le système pour déterminer cette droite.

$$\left\{\begin{array}{l} y=3-2x-z \\ 3x+6-4x-2z-5z=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=3-2x-z \\ x=4-7z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-5+13z \\ x=4-7z \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est $\{(4-7z,-5+13z,z) \mid z\in\mathbb{R}\}$. C'est une droite passant par le point $(4,-5,0)$ et dont un vecteur directeur est $(-7,13,1)$.

Notons que ce vecteur est effectivement simultanément orthogonal aux vecteurs normaux des plans.

20 Exercice 19

Quel est l'ensemble des vecteurs (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux aux droites d_1 et d_2 définies par

$$d_1 \equiv 1-x=\frac{y+2}{-3}=\frac{-z+2}{-1}$$

$$d_2 \equiv (x,y,z)=(3\lambda+1,-\lambda-2,5+\lambda), \lambda\in\mathbb{R}?$$

Décrivez géométriquement l'ensemble obtenu.

Écrivons les équations des deux droites sous forme canonique. Nous avons :

$$d_1 \equiv \frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{1}$$

$$d_2 \equiv (x,y,z)=(1,-2,5)+\lambda(3,-1,1)$$

Un vecteur directeur de la droite d_1 est $(-1,-3,1)$. Un vecteur directeur de la droite d_2 est $(3,-1,1)$. Nous cherchons tous les vecteurs (a,b,c) orthogonaux à deux vecteurs non colinéaires.

$$\left\{\begin{array}{l} -a-3b+c=0 \\ 3a-b+c=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c=a+3b \\ 3a-b+a+3b=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c=a+3b \\ b=-2a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c=-5a \\ b=-2a \end{array}\right.$$

L'ensemble est : $\{(a,-2a,-5a) \mid a\in\mathbb{R}\}$. Il s'agit d'une droite passant par $(0,0,0)$ et dont un vecteur directeur est $(1,-2,-5)$.

21 Exercice 20

Soit le système

$$\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ 4x+2y+2z=6. \end{cases}$$

Décrivez géométriquement l'ensemble des solutions de ce système. Expliquez votre démarche. Déterminez ensuite algébriquement quel est cet ensemble de solutions.

La première équation décrit un plan dont un vecteur normal est $(2,1,1)$. La deuxième équation décrit un plan dont un vecteur normal est $(4,2,2)$. Nous remarquons que les vecteurs sont colinéaires puisqu'en prenant $k=2$, l'égalité $(4,2,2)=2(2,1,1)$ est vérifiée. Les deux plans sont donc parallèles distincts ou confondus. Un point du premier plan est $(0,0,3)$. Ce point appartient au deuxième plan puisque $4.0+2.0+2.3=6$. Ainsi, les deux plans sont confondus. Il est inutile de résoudre algébriquement le système. Nous pouvons directement déduire l'ensemble des solutions du système. Nous avons : $S=\{(x,3-2x-z,z) \mid x,z\in\mathbb{R}\}$.

22 Exercice 21

Soit le système

$$\begin{cases} \frac{x-1}{3}=1+\frac{1}{2}y=\frac{2z+3}{-10} \\ 3x+2y-5z=2. \end{cases}$$

Décrivez géométriquement l'ensemble des solutions de ce système. Expliquez votre démarche. Déterminez ensuite algébriquement quel est cet ensemble de solutions.

Écrivons les équations cartésiennes sous forme canonique. Nous avons :

$$\frac{x-1}{3}=\frac{2+y}{2}=\frac{z+\frac{3}{2}}{-5}.$$

Ces équations décrivent une droite dont un vecteur directeur est $(3,2,-5)$. L'équation $3x+2y-5z=2$ décrit un plan dont un vecteur normal est $(3,2,-5)$. Puisqu'un vecteur directeur de la droite est un vecteur normal au plan, nous en déduisons que la droite et le plan sont perpendiculaires. L'ensemble des solutions décrit le point de percée de la droite dans le plan. Déterminons les coordonnées de ce point.

$$\begin{cases} 2(x-1)=3(2+y) \\ -10(x-1)=3(2z+3) \\ 3x+2y-5z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=8+3y \\ -10x+1=6z \\ 3x+2y-5z=2 \end{cases}$$

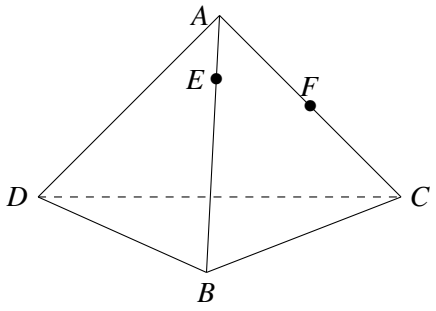
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8+3y}{2} \\ z = \dfrac{-13-5y}{2} \\ 3\dfrac{8+3y}{2} + 2y - 5\dfrac{-13-5y}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8+3y}{2} \\ z = \dfrac{-13-5y}{2} \\ y = \dfrac{-85}{38} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{49}{76} \\ y = \dfrac{-85}{38} \\ z = \dfrac{-69}{76} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\{\left(\frac{49}{76}, \frac{-85}{38}, \frac{-69}{76}\right)\}$.

23 Exercice 22

Tâche de comparaison des démarches analytique et synthétique 1

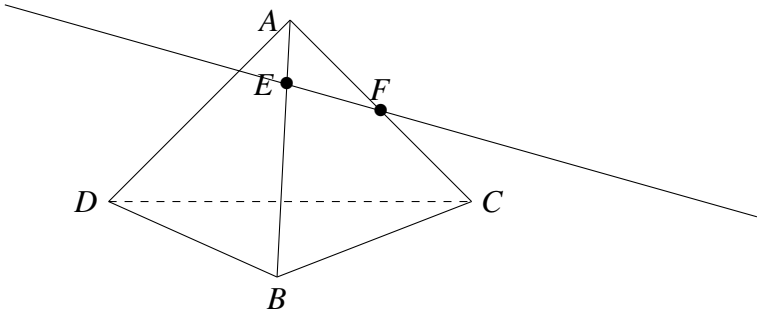
Soit le tétraèdre *ABCD* suivant.



① Déterminez synthétiquement le point de percée de la droite passant par les points E et F dans le plan BCD.

② Considérons un repère orthonormé $(D, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les coordonnées des points A, B et C sont respectivement $(0,2,2)$, $(2,3,0)$ et $(0,4,0)$. Les points E et F sont définis comme étant $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Déterminez analytiquement le point de percée de la droite passant par les points E et F dans le plan BCD.

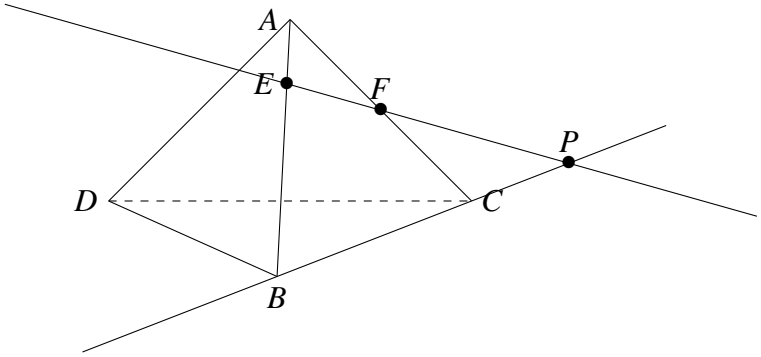
① Pour déterminer le point de percée de la droite passant par les points E et F dans le plan BCD, nous allons tracer la droite EF.



La démarche à suivre est la suivante : trouver un plan auxiliaire α contenant la droite EF et sécant avec le plan BCD, déterminer la droite d'intersection des deux plans, déterminer le point d'intersection des deux droites.

Le plan auxiliaire est ABC. Le point E appartient à la droite AB. Le point F appartient à la droite AC. La droite EF est donc incluse au plan ABC. De plus, ABC et BCD ont deux points communs : B et C. Nous savons que si deux plans distincts ont un point commun alors ils ont une droite commune passant par ce point. Ainsi, la droite BC est la droite d'intersection des plans ABC et BCD.

Le point de percée P de la droite EF dans le plan BCD est alors l'intersection entre la droite EF et la droite BC.



② Pour déterminer le point de percée de la droite EF dans le plan BCD, nous allons chercher une équation de la droite EF et une équation du plan BCD.

Les points B, C et D ont une cote nulle. Une équation cartésienne du plan BCD est $z = 0$.

La droite EF passe par le point E et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{EF}$. Cherchons les coordonnées des points E et F. Nous avons :

$$\overrightarrow{AE} = \tfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (x, y-2, z-2) = \tfrac{1}{4}(2,1,-2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{4} \\ y-2 = \frac{1}{4} \\ z-2 = \frac{-2}{4} \end{cases}.$$

De plus, nous avons :

$$\overrightarrow{AF} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow (x, y-2, z-2) = \tfrac{1}{2}(0,2,-2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y-2 = 1 \\ z-2 = -1 \end{cases}.$$

Les coordonnées de E et F sont respectivement $(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}, \frac{3}{2})$ et $(0,3,1)$.

Les composantes du vecteur $\overrightarrow{EF}$ sont $(\frac{-1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{-1}{2})$ ou encore $(-2,3,-2)$. Une équation paramétrique de la droite EF est : $(x,y,z) = (0,3,1) + \lambda(-2,3,-2)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Déterminons le point de percée de la droite EF dans le plan BCD en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} (x,y,z) = (0,3,1) + \lambda(-2,3,-2) \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 3 + 3\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 3 + 3\lambda \\ \lambda = \frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases}.$$

Les coordonnées du point de percée P de la droite EF dans le plan BCD sont $(-1, \frac{9}{2}, 0)$.

24 Exercice 23

Une épreuve de sélection est organisée dans le cadre d'un jeu télévisé. Les candidats doivent répondre à trois questionnaires, cotés sur 20, mais avec des pondérations différentes. Le premier questionnaire porte sur l'histoire des sciences et des techniques (pondération 2), le deuxième sur la géographie de l'Europe (pondération 1) et le dernier comprend des questions de culture générale (pondération 2). Un candidat est sélectionné s'il a obtenu au moins 50 points sur 100. Les notes possibles des candidats dans chacune des matières sont représentées par les variables x (histoire des sciences et techniques), y (géographie) et z (culture générale). Un point $P(x,y,z)$ est associé à chaque candidat.

① Dans quelle partie de l'espace sont situés les points P ? Représentez-la.

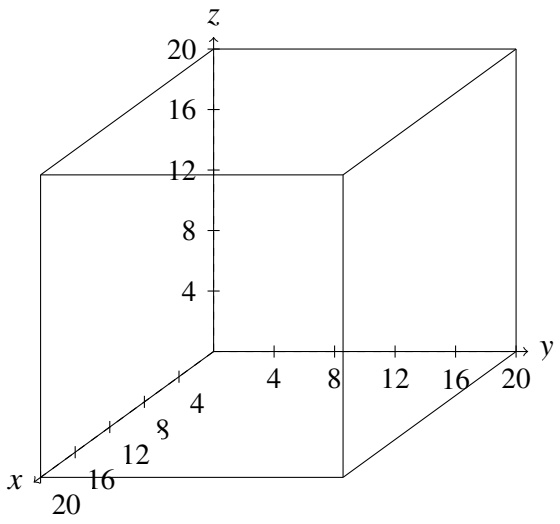
② Dans quelle partie de l'espace sont situés les points associés aux candidats ayant obtenu 50 points ? Représentez-la.

③ Est-il possible de trouver un candidat qui a eu 50 points à l'examen en ayant eu une note de 0 en histoire des sciences et des techniques ? Même question s'il a eu 0 en géographie, puis 0 en culture générale.

④ Est-il possible de trouver un candidat qui a réussi l'examen avec une note strictement supérieure à 50 mais qui a eu une note de 0 en histoire des sciences et techniques ?

⑤ On veut qu'un candidat ayant eu 8 en histoire des sciences et des techniques, 12 en géographie de l'Europe et 9 en culture générale soit sélectionné. Quelles sont les valeurs des pondérations a, b et c que l'on doit choisir pour qu'il soit sélectionné ? Donnez, si possible, un exemple de pondération acceptée.

① La note aux trois questionnaires est sur 20. Ainsi, $0 \leq x \leq 20$, $0 \leq y \leq 20$ et $0 \leq z \leq 20$. Tous les triplets de l'espace vérifiant ces trois conditions forment un cube.



② Nous savons que les questionnaires ont respectivement une pondération de 2, 1 et 3. Une équation représentant tous les triplets permettant d'obtenir 50 points est $2x+y+2z=50$. Il s'agit d'un plan dont un vecteur normal est $(2,1,2)$ et passant par le point $(10,10,10)$.

Pour le dessiner facilement, recherchons la section du cube par ce plan. Autrement dit, décrivons l'intersection de ce plan avec chaque face du cube. Une équation cartésienne de chaque face du cube est nécessaire. Nous avons :

$$x=0; \quad x=20; \quad y=0; \quad y=20; \quad z=0; \quad z=20.$$

L'intersection des plans $x=0$ et $2x+y+2z=50$ est donnée par l'ensemble $S_1 = \{(0,50-2z,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Cet ensemble décrit une droite passant par les points $A(0,10,20)$ et $B(0,20,15)$.

L'intersection des plans $x=20$ et $2x+y+2z=50$ est donnée par l'ensemble $S_2 = \{(20,10-2z,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Cet ensemble décrit une droite passant par les points $D(20,10,0)$ et $E(20,0,5)$.

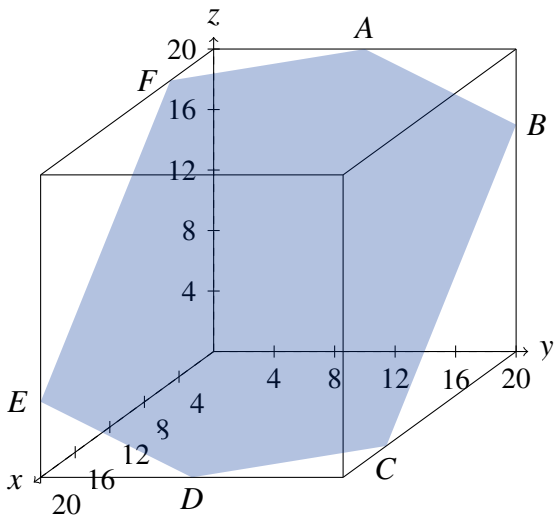
L'intersection des plans $y=0$ et $2x+y+2z=50$ est donnée par l'ensemble $S_3 = \{(25-z,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Cet ensemble décrit une droite passant par les points E et $F(5,0,20)$.

L'intersection des plans $y=20$ et $2x+y+2z=50$ est donnée par l'ensemble $S_4 = \{(15-z,20,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Cet ensemble décrit une droite passant par les points B et $C(15,20,0)$.

L'intersection des plans $z=0$ et $2x+y+2z=50$ est donnée par l'ensemble $S_5 = \{(x,50-2x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Cet ensemble décrit une droite passant par les points C et D.

L'intersection des plans $z=20$ et $2x+y+2z=50$ est donnée par l'ensemble $S_6 = \{(x,10-2x,20) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Cet ensemble décrit une droite passant par les points A et F.

Nous pouvons donc tracer la section du cube par le plan.



③ Puisque que le candidat a 50 points, ses résultats vérifient l'équation donnée au point précédent $2x+y+2z=50$. De plus, nous savons qu'il a eu une note de 0 au premier questionnaire. D'où, les résultats sont également dans le plan $x=0$.

Géométriquement, tous les points d'intersection entre le plan $2x+y+2z=50$ et la face du cube $x=0$ vérifient les deux conditions. Ces points sont représentés par le segment AB.

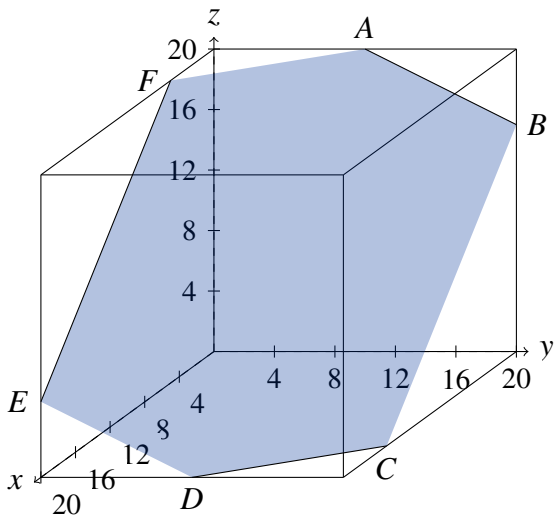
Il est alors possible de trouver un triplet vérifiant toutes les conditions. Par exemple, un candidat qui aurait comme résultats $(0,20,15)$.

Pour un candidat qui a eu une note de 0 au deuxième questionnaire, le raisonnement est similaire. Géométriquement, tous les points d'intersection entre le plan $2x+y+2z=50$ et la face du cube $y=0$ vérifient les deux conditions. Ces points sont représentés par le segment EF.

Il est possible de trouver un candidat dont ses résultats se situent à la fois dans le plan $y=0$ et dans le plan $2x+y+2z=50$. Par exemple, un candidat qui aurait comme résultats $(12.5,0,12.5)$.

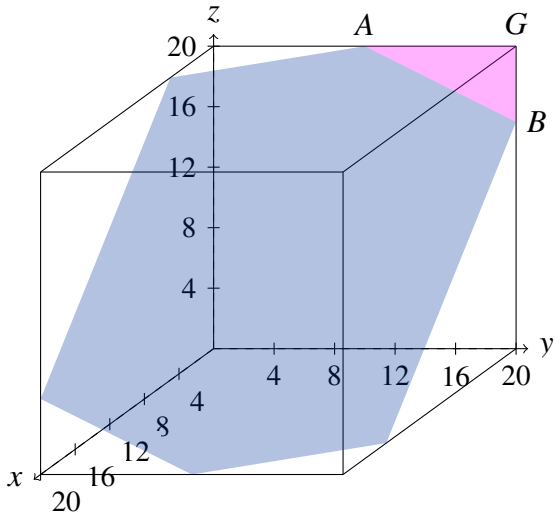
Pour un candidat qui a eu une note de 0 au dernier questionnaire, le raisonnement est similaire. Géométriquement, tous les points d'intersection entre le plan $2x+y+2z=50$ et la face du cube $z=0$ vérifient les deux conditions. Ces points sont représentés par le segment CD.

Il est possible de trouver un candidat dont ses résultats se situent à la fois dans le plan $z=0$ et dans le plan $2x+y+2z=50$. Par exemple, un candidat qui aurait comme résultats $(15,20,0)$.



④ Nous savons que la note au premier questionnaire est de 0. Tous les triplets vérifiant ceci sont dans le plan $x = 0$. Nous savons que les résultats d'un candidat vérifiant cette condition et ayant eu 50 au test se situent sur le segment AB. Puisqu'ici, nous voulons que la note soit strictement supérieure à 50, nous devons délimiter la zone du cube qui est concernée : soit la partie en dessous du segment AB, soit la partie au-dessus.

Nous constatons que le triplet $(0,20,20)$ permet d'avoir une note de $2.0+20+2.20=60$. Ainsi, tous les points situés dans le triangle ABG vérifient les conditions.



⑤ Nous connaissons les notes obtenues par un candidat à chaque questionnaire. Nous savons qu'il est sélectionné. Autrement dit, il a une note finale d'au moins 50 sur 100. Nous avons : $a.8+b.12+c.9 \geq 50$.

Intéressons-nous d'abord à l'équation $8a+12b+9c=50$. C'est une équation cartésienne d'un plan dont un vecteur normal est $(8,12,9)$. Nous cherchons l'intersec-

tion de ce plan avec toutes les faces du cubes dont les équations sont :

$$a=0; \quad a=20; \quad b=0; \quad b=20; c=0; \quad c=20.$$

L'intersection entre les plans d'équations $a=0$ et $8a+12b+9c=50$ est donnée par l'ensemble $S_1=\left\{(0,\frac{50-9c}{12},c) \mid c\in\mathbb{R}\right\}$. Il s'agit d'une droite passant par les points $P\left(0,\frac{25}{6},0\right)$ et $Q\left(0,0,\frac{50}{9}\right)$.
L'intersection entre les plans d'équations $a=20$ et $8a+12b+9c=50$ est donnée par l'ensemble $S_2=\left\{(20,\frac{-110-9c}{12},c) \mid c\in\mathbb{R}\right\}$. Il est à noter que les résultats aux questionnaires sont entre 0 et 20. Nous remarquons que :

$$\begin{aligned}\frac{-110-9c}{12}>0 &\Leftrightarrow -110-9c>0\\ &\Leftrightarrow 9c<-110\\ &\Leftrightarrow c<\frac{-110}{9}<0.\end{aligned}$$

Nous déduisons alors qu'il n'y a pas de point d'intersection entre les deux plans sur le cube.
L'intersection entre les plans d'équations $b=0$ et $8a+12b+9c=50$ est donnée par l'ensemble $S_3=\left\{(\frac{50-9c}{8},0,c) \mid c\in\mathbb{R}\right\}$. Il s'agit d'une droite passant par les points $R\left(\frac{25}{4},0,0\right)$ et $Q\left(0,0,\frac{50}{9}\right)$.
L'intersection entre les plans d'équations $b=20$ et $8a+12b+9c=50$ est donnée par l'ensemble $S_4=\left\{(\frac{-190-9c}{8},20,c) \mid c\in\mathbb{R}\right\}$. Il est à noter que les résultats aux questionnaires sont entre 0 et 20. Nous remarquons que :

$$\begin{aligned}\frac{-190-9c}{8}>0 &\Leftrightarrow -190-9c>0\\ &\Leftrightarrow 9c<-190\\ &\Leftrightarrow c<\frac{-190}{9}<0.\end{aligned}$$

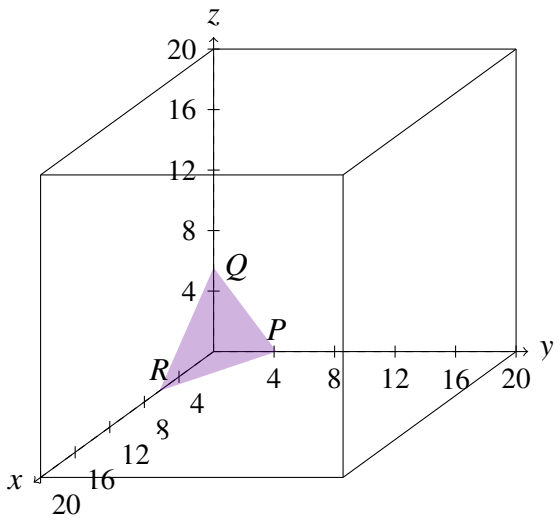
Nous déduisons alors qu'il n'y a pas de point d'intersection entre les deux plans sur le cube.
L'intersection entre les plans d'équations $c=0$ et $8a+12b+9c=50$ est donnée par l'ensemble $S_5=\left\{(\frac{25-6b}{4},b,0) \mid b\in\mathbb{R}\right\}$. Il s'agit d'une droite passant par les points $R\left(\frac{25}{4},0,0\right)$ et $P\left(0,\frac{25}{6},0\right)$.
L'intersection entre les plans d'équations $c=20$ et $8a+12b+9c=50$ est donnée par l'ensemble $S_6=\left\{(\frac{-130-12b}{8},b,20) \mid b\in\mathbb{R}\right\}$. Il est à noter que les résultats

aux questionnaires sont entre 0 et 20. Nous remarquons que :

$$\begin{aligned}\frac{-130-12b}{8} > 0 &\Leftrightarrow -130-12b > 0\\ &\Leftrightarrow 12b < -130\\ &\Leftrightarrow c < \frac{-130}{12} < 0.\end{aligned}$$

Nous déduisons alors qu'il n'y a pas de point d'intersection entre les deux plans sur le cube.

Traçons les droites PQ, PR et RQ sur le cube :



Étudions désormais l'inéquation $8a+12b+9c \geq 50$. Prenons le point $(20,0,0)$ et regardons s'il vérifie cette inéquation. Nous avons : $8.20 \geq 50 \Leftrightarrow 160 \geq 50$.

Ainsi, toutes les valeurs possibles pour a, b et c se trouvent dans tout le cube excepté le zone définie par le tétraèdre $OPQR$.

Un exemple de pondération possible est $a=1$, $b=2$ et $c=2$. En effet, $8.1+12.2+9.2=50$.

25 Exercice 24

Calculez la distance du point $B(-2,-4,3)$ au plan $\beta \equiv 2x-y+2z+3=0$.

Nous appliquons la formule du calcul de la distance entre un point et un plan. Nous avons :

$$\begin{aligned}d(B,\beta) &= \frac{|-4+4+6+3|}{\sqrt{4+1+4}}\\ &= \frac{9}{3}\\ &= 3.\end{aligned}$$

26 Exercice 25

Calculez la distance entre les plans $\alpha \equiv 2x+3y-z+1=0$ et $\delta \equiv 2x+3y-z-5=0$.

Nous prenons un point d'un des deux plans et nous calculons la distance entre ce point et l'autre plan.

Un point du plan α est $A(0,0,1)$. Calculons $d(A,\delta)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} d(A,\delta) &= \frac{|-1-5|}{\sqrt{4+9+1}} \\ &= \frac{6}{\sqrt{14}} \\ &= \frac{6\sqrt{14}}{14} \\ &= \frac{3\sqrt{14}}{7}. \end{aligned}$$

27 Exercice 26

Calculez la distance entre le point $E(5,-3,1)$ et la droite

$$d \equiv \begin{cases} x = 4+3k \\ y = 5-7k \\ z = 6+k \end{cases}$$

où $k \in \mathbb{R}$.

Pour calculer la distance du point E à la droite d, nous devons chercher un plan qui est perpendiculaire à la droite d et passant par le point E. Une équation cartésienne d'un tel plan est de la forme : $3x-7y+z=d$. Puisque le point E appartient au plan, nous pouvons trouver la valeur de d. Nous avons :

$$\begin{aligned} (5,-3,1) \in \alpha &\Leftrightarrow 15+21+1=d \\ &\Leftrightarrow d=37. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne du plan est $\alpha \equiv 3x-7y+z=37$.

Il faut maintenat trouver le point de percée de la droite d dans le plan α. Pour cela, nous devons résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} (x,y,z) = (4+3k, 5-7k, 6+k) \\ 3x-7y+z=37 \end{cases}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} 3(4+3k)-7(5-7k)+6+k=37 &\Leftrightarrow 12+9k-35+49k+6+k=37 \\ &\Leftrightarrow 59k=54 \\ &\Leftrightarrow k=\frac{54}{59}. \end{aligned}$$

Le point de percée P a pour coordonnées : $\left(\frac{398}{59}, \frac{-83}{59}, \frac{408}{59}\right)$.

Il reste à calculer la distance entre les points P et E. ¨Nous avons :

$$\begin{aligned} d(E,P) &= \sqrt{\frac{103}{59}^2+\frac{94}{59}^2+\frac{349}{59}^2} \\ &= \sqrt{\frac{103^2+94^2+349^2}{59^2}} \\ &= \sqrt{\frac{141246}{59^2}} \\ &= \frac{\sqrt{141246}}{59}. \end{aligned}$$

28 Exercice 27

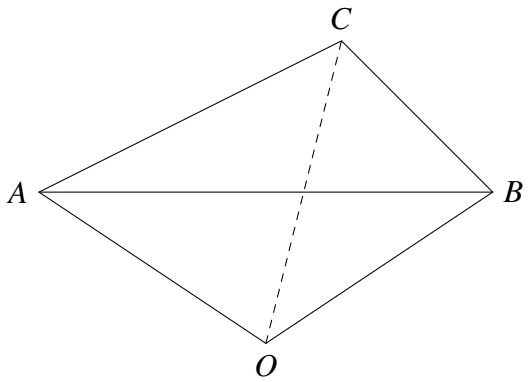
On considère trois points A, B et C de coordonnées respectives $(3,0,3)$, $(3,3,0)$ et $(0,3,3)$. Ces trois points forment un tétraèdre avec l'origine du repère.

① Représentez ce tétraèdre.

② Ce tétraèdre est-il régulier ? Justifiez votre réponse.

③ Calculez la distance entre le sommet O et la face ABC du tétraèdre.

① Représentons le tétraèdre (schématiquement).



② Un tétraèdre est régulier si toutes ses faces sont des triangles équilatéraux. Toutes les faces du tétraèdre sont des triangles. Il reste à montrer qu'ils ont chacun trois côtés de même mesure.

Nous allons chercher les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.
Nous avons :

$$\overrightarrow{AB} = (0,3,-3); \quad \overrightarrow{AC} = (-3,3,0); \quad \overrightarrow{CB} = (3,0,-3)$$

$$\overrightarrow{OA} = (3,0,3); \quad \overrightarrow{OB} = (3,3,0); \quad \overrightarrow{OC} = (0,3,3).$$

Montrons que les normes de ces vecteurs sont égales. Nous avons :
$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$.
Le calcul est le même pour les autres vecteurs au vu de leurs composantes. Il s'agit donc bien d'un tétraèdre régulier.

③ Pour calculer la distance d'un point à un plan, nous avons besoin de connaitre une équation cartésienne du plan ABC.

Le plan ABC passe par le point A et a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Ces deux vecteurs sont bien non colinéaires puisque l'égalité $(0,3,-3) = k(-3,3,0)$ n'est jamais vérifiée pour un $k \in \mathbb{R}_0$.

Première méthode

Une équation paramétrique du plan ABC est :

$$(x,y,z) = (3,3,3) + \lambda(0,3,-3) + \mu(-3,3,0), \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Une équation cartésienne du plan est déterminée en éliminant les deux paramètres de l'équation ci-dessus.

$$\begin{cases} x = 3 - 3\mu \\ y = 3\lambda + 3\mu \\ z = 3 - 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = -3\mu \\ y = 3\lambda + 3\mu \\ z - 3 = -3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow y = -z + 3 - x + 3 \Leftrightarrow x + y + z = 6.$$

Ainsi, la distance entre le point O et le plan ABC est donnée par :

$$\begin{aligned} d(O,ABC) &= \frac{|-6|}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{6\sqrt{3}}{3} \\ &= 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Deuxième méthode

Nous cherchons un vecteur (a,b,c) normal au plan ABC. Nous savons qu'un vecteur normal du plan est perpendiculaire à tous les vecteurs directeurs du plan. D'où, en particulier, ce vecteur est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Nous avons :

$$\begin{cases} 3b - 3c = 0 \\ -3a + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ b = a \end{cases}$$

Posons $a = 1$, nous avons $b = 1$ et $c = 1$. Un vecteur normal du plan est $(1,1,1)$. Une équation cartésienne du plan ABC est alors de la forme : $x + y + z = d$. Puisque $(3,0,3)$ est un point du plan, ses coordonnées vérifient l'équation du plan. Nous avons :

$$\begin{aligned}(3,0,3) \in ABC &\Leftrightarrow 3+3 = d \\ &\Leftrightarrow d = 6\end{aligned}$$

Une équation cartésienne du plan ABC est $x + y + z = 6$.

Ainsi, la distance entre le point O et le plan ABC est donnée par :

$$\begin{aligned}d(O,ABC) &= \frac{|-6|}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{6\sqrt{3}}{3} \\ &= 2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Annexe H

Les équations cartésiennes sous forme de déterminants

Lors de la séance 5, l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique est effectuée. Le passage du point de vue paramétrique au point de vue cartésien peut se faire de plusieurs façons. L'élimination des paramètres est déjà proposée dans notre scénario. La méthode avec les déterminants peut être ajoutée à cette étape de l'enseignement dans le cas où les prérequis (matrices, déterminants, Sarrus, cofacteurs, propriétés des déterminants) nécessaires ont été étudiés.

Discussion collective.

Nous partons de l'équation paramétrique étudiée dans le système S_5 :

$$(x,y,z) = (0,0,\frac{5}{4}) + \lambda(\frac{5}{2},0,-\frac{5}{4}) + \mu(0,\frac{5}{3},-\frac{5}{4}), \text{ où } \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$$

Afin d'obtenir une équation cartésienne de ce plan, cette équation paramétrique est écrite sous forme d'un système de trois équations à trois inconnues. La matrice associée à ce système peut ensuite être écrite.

Nous attirons l'attention des élèves sur le fait que la première colonne de la matrice associée au vecteur $\overrightarrow{AP}$ est combinaison linéaire des deux autres colonnes représentant les deux vecteurs directeurs du plan. Une fois qu'il est déterminé que le déterminant doit donc être nul, les élèves le calculent.

Le passage du point de vue paramétrique au point de vue cartésien est effectué en utilisant les déterminants.

Cours magistral.

Nous généralisons la démarche suivie et les résultats obtenus dans l'exemple particulier du système S_5.

Définition 1. *Soient $A(x_A,y_A,z_A)$ un point du plan α, (x_v,y_v,z_v) et (x_u,y_u,z_u) deux vecteurs directeurs du plan α.*

Une équation cartésienne du plan α est donnée par :

$$\begin{vmatrix} x-x_A & x_v & x_u \\ y-y_A & y_v & y_u \\ z-z_A & z_v & z_u \end{vmatrix} = 0$$

Annexe I

Les documents donnés aux élèves lors de notre expérimentation

1 Activité d'introduction

Nous avons distribué une feuille contenant les deux tâches introductives présentes dans le chapitre X au point 2. Elles ont été étudiées *a priori* dans le chapitre XI.

2 Rappels : les équations

2.1 Qu'est-ce qu'une équation ?

Définition

Une équation est une relation d'égalité qui peut être vérifiée par certaine(s) valeur(s) de la ou des inconnues(s).

EXEMPLES :

① La relation $2x+3=4$ est une équation du premier degré à 1 inconnue.

② La relation $2x+3y=6$ est une équation du premier degré à 2 inconnues.

③ La relation $x^2-x+1=0$ est une équation du second degré à 1 inconnue.

CONTRE-EXEMPLES :

① La relation 5 = 4 est une égalité mais n'est pas une équation.

② L'expression $2x+2$ n'est ni une égalité, ni une équation.

2.2 Que signifie « résoudre une équation » ?

Définition

Résoudre une équation consiste à déterminer toutes les valeurs des inconnues qui vont vérifier l'égalité.

EXEMPLE : 2 vérifie l'équation $2x+1=5$ car l'égalité $2.2+1=5$ est vraie. Par contre, 3 ne vérifie pas cette équation car l'égalité $2.3+1=5$ est fausse. On dit que 2 est solution de l'équation et que l'ensemble des solutions, noté S, est $S=\{2\}$.

Résoudre graphiquement un système d'équations

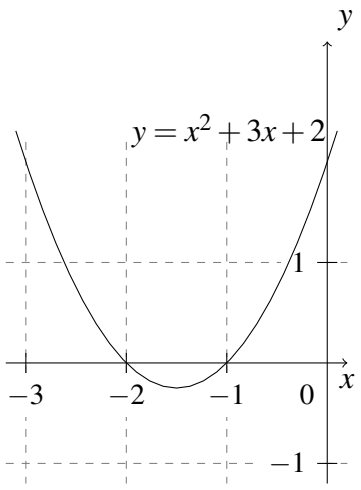
Dans $\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{R}^3$, résoudre graphiquement un système d'équations consiste à déterminer les éventuels points d'intersection entre les objets décrits par chacune des équations du système.

2.3 Est-ce qu'une équation doit toujours être résolue ?

Il est important de distinguer les expressions « **résoudre une équation** » et « **décrire par une équation** ».

EXEMPLES :

① Soit la fonction $f :]-3,0[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2+3x+2$.



Prenons $y=0$. Si nous cherchons les valeurs de x dans l'intervalle $]-3,0[$ telles que

$f(x) = 0$, alors nous devons résoudre l'équation $x^2 + 3x + 2 = 0$. L'ensemble des solutions est $S = \{-2, -1\}$.

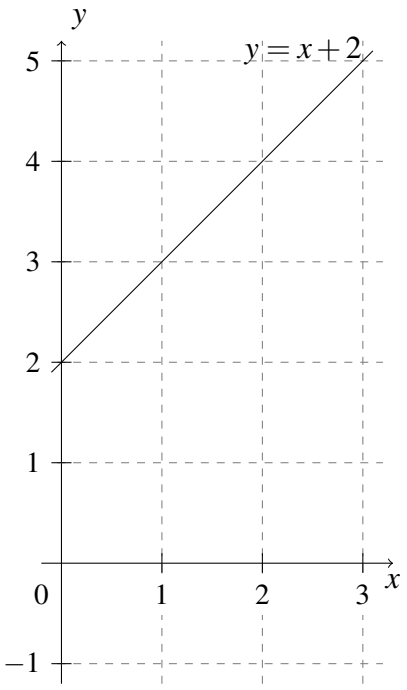
Prenons $y = 2$. Si nous cherchons les valeurs de x dans l'intervalle $]-3, 0[$ telles que $f(x) = 2$, alors nous devons résoudre l'équation $x^2 + 3x + 2 = 2$. L'ensemble des solutions est $S = \{-3, 0\}$.

Prenons $y = -1$. Si nous cherchons les valeurs de x dans l'intervalle $]-3, 0[$ telles que $f(x) = -1$, alors nous devons résoudre l'équation $x^2 + 3x + 2 = -1$. L'ensemble des solutions est $S = \emptyset$.

Dans ces trois cas, nous **résolvons** une équation.

Nous pouvons aussi résoudre l'équation $y = x^2 + 3x + 2$ pour une valeur quelconque de y. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\{(x, y) \mid y = x^2 + 3x + 2\}$. Il est difficile de lister les éléments appartenant à cet ensemble. Cependant, nous pouvons interpréter géométriquement cet ensemble, c'est-à-dire décrire l'objet géométrique représenté par cet ensemble. Dans ce cas, l'équation **décrit** une parabole.

② Soit la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + 2$.



Prenons $y = 2$. Si nous cherchons les valeurs de x dans $\mathbb{R}^+$ telles que $f(x) = 2$, alors nous devons résoudre l'équation $x + 2 = 2$. L'ensemble des solutions est $S = \{0\}$.

Prenons $y = 4$. Si nous cherchons les valeurs de x dans $\mathbb{R}^+$ telles que $f(x) = 4$, alors nous devons résoudre l'équation $x + 2 = 4$. L'ensemble des solutions est $S = \{2\}$.

Dans ces deux cas, nous **résolvons** une équation.

Nous pouvons aussi résoudre l'équation $y = x + 2$ pour une valeur quelconque de y. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\{(x, y) \mid y = x + 2\}$ ou encore $\{(x, x+2) \mid x \in \mathbb{R}^+\}$. Il est difficile de lister les éléments appartenant à cet ensemble. Cependant, nous pouvons interpréter géométriquement cet ensemble, c'est-à-dire

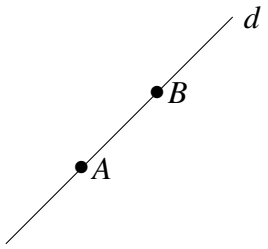
décrire l'objet géométrique représenté par cet ensemble. Dans ce cas, l'équation **décrit** une demi-droite dans le plan.

Au sein de ce chapitre, les équations vont décrire des objets géométriques.

3 Les équations cartésiennes de droites dans le plan

L'activité d'introduction 1 nous amène à rappeler les équations cartésiennes de droites dans le plan.

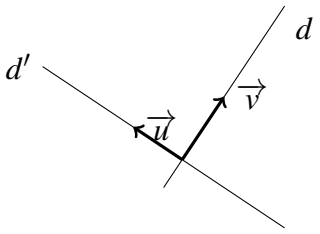
RAPPEL : Une droite est déterminée par deux points.



Un vecteur directeur de la droite d est $\overrightarrow{AB}$. Il donne la direction de la droite. Une droite peut alors être déterminée par un point et un vecteur directeur.

Définition

Soient d et d' deux droites perpendiculaires.
Un **vecteur normal** de d est un vecteur directeur de d'.

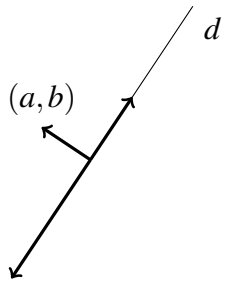


Un vecteur directeur de la droite d est $\overrightarrow{v}$.
Un vecteur directeur de la droite d' est $\overrightarrow{u}$.
Puisque d et d' sont perpendiculaires, un vecteur normal de d est $\overrightarrow{u}$ et un vecteur normal de d' est $\overrightarrow{v}$.

Définition

Soit (a,b) les composantes d'un vecteur normal de la droite d.
La droite d est l'ensemble des vecteurs orthogonaux au vecteur (a,b).

Cet ensemble peut s'écrire comme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \cdot (a,b) = 0\}$.

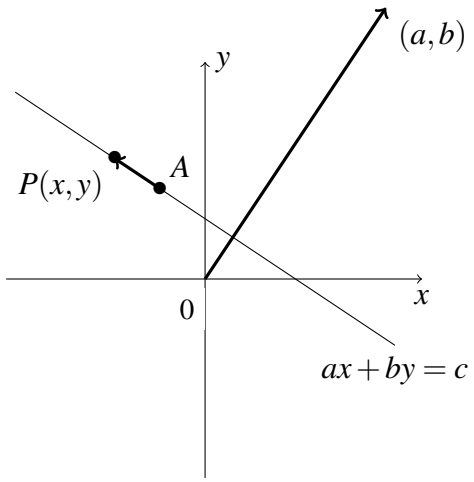


Une droite peut donc être déterminée par deux points, par un point et un vecteur directeur mais aussi par un point et un vecteur normal.

Propriété

Toutes les droites dans le plan ont pour équation cartésienne $ax+by=c$, où $a,b,c\in\mathbb{R}$ et (a,b) est un vecteur normal (non nul) de la droite.

Nous savons qu'une droite d est déterminée par deux de ses points. Soit $A(x_A,y_A)$ un point connu et fixe de la droite d. Soit $P(x,y)$ un point quelconque de la droite d.



Comme les points A et P appartiennent à la droite d, le vecteur $\overrightarrow{AP}$ est un vecteur directeur de cette droite. Puisqu'une droite est l'ensemble des vecteurs orthogonaux au vecteur normal de la droite, nous déduisons :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AP}\cdot(a,b)=0\\
\Leftrightarrow\ &(x-x_A,y-y_A)\cdot(a,b)=0\\
\Leftrightarrow\ &(x-x_A).a+(y-y_A).b=0\\
\Leftrightarrow\ &ax-ax_A+by-by_A=0\\
\Leftrightarrow\ &ax+by=ax_A+by_A.
\end{aligned}$$

Il suffit de poser $c=ax_A+by_A$ pour obtenir $ax+by=c$.

4 Positions relatives de deux droites dans le plan

Propriétés

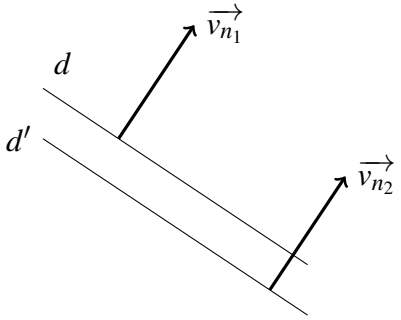
Les droites d et d' sont parallèles si et seulement si

un vecteur normal $\overrightarrow{v_{n_1}}$ de d est colinéaire à un vecteur normal $\overrightarrow{v_{n_2}}$ de d'.

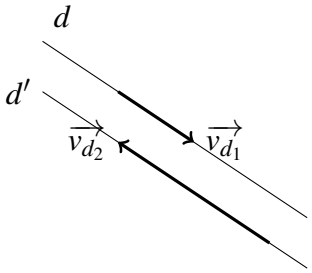
OU

un vecteur directeur $\overrightarrow{v_{d_1}}$ de d est colinéaire à un vecteur directeur $\overrightarrow{v_{d_2}}$ de d'.

Deux droites sont parallèles si et seulement si toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.



Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont la même direction.



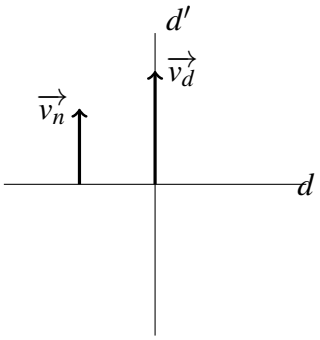
Propriétés

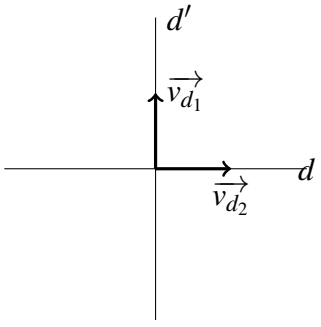
Les droites d et d' sont perpendiculaires si et seulement si

un vecteur normal $\overrightarrow{v_n}$ de d est colinéaire à un vecteur directeur $\overrightarrow{v_d}$ de d'.

OU

le produit scalaire entre un vecteur directeur $\overrightarrow{v_{d_1}}$ de d et un vecteur directeur $\overrightarrow{v_{d_2}}$ de d' est nul.





5 Les équations de droites et de plans dans l'espace

L'étude des systèmes S_2 et S_3 dans l'activité 2, nous amène à décrire une droite comme l'intersection de deux plans.

Équations paramétriques de droites dans l'espace

Une droite de l'espace passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v, z_v)$ a pour équation paramétrique :

$$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + \lambda(x_v, y_v, z_v) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

REMARQUES :

① Le paramètre λ parcourt toutes les valeurs réelles.

② À chaque valeur de λ est associé un unique point de la droite.

EXEMPLES : Prenons l'équation $(x, y, z) = (2, -1, 0) + \lambda(0, 0, 1)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si $\lambda = 0$, alors nous obtenons le point $(2, -1, 0)$.
- Si $\lambda = -\frac{1}{2}$, alors nous obtenons le point $(2, -1, -\frac{1}{2})$.
- Le point $(2, -1, 1)$ appartient à cette droite car il existe une valeur de λ telle que l'égalité $(2, -1, 1) = (2, -1, 0) + \lambda(0, 0, 1)$ est vraie. En effet, prenons $\lambda = 1$. On a bien $(2, -1, 1) = (2, -1, 0) + 1.(0, 0, 1)$.
- Le point $(2, -3, 3)$ n'appartient pas à cette droite car on ne peut pas trouver une valeur de λ pour laquelle l'égalité $(2, -3, 3) = (2, -1, 0) + \lambda(0, 0, 1)$ est vraie. En effet, quelle que soit la valeur de λ, l'égalité $(2, -3, 3) = (2, -1, 0) + \lambda(0, 0, 1)$ n'est vraie que si $(2, -3, 3) = (2, -1, \lambda)$, ce qui est impossible car $-3 \neq -1$.

Système d'équations cartésiennes des droites dans l'espace

Une droite de l'espace passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur (x_v, y_v, z_v) a pour système d'équations cartésiennes :

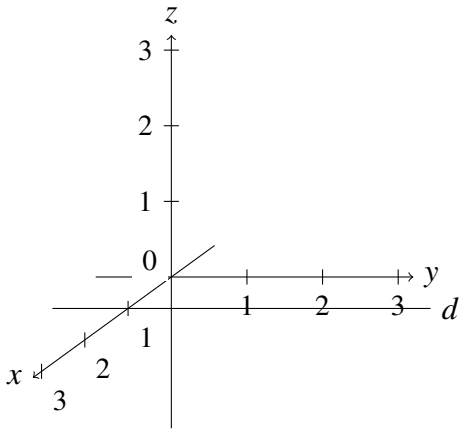
$$\frac{x - x_A}{x_v} = \frac{y - y_A}{y_v} = \frac{z - z_A}{z_v}$$

avec $x_v \neq 0$ et $y_v \neq 0$ et $z_v \neq 0$.

Ce système décrit une droite quelconque de l'espace. Nous nous intéressons aux droites particulières.

① Si $x_v = 0$ et $y_v \neq 0$ et $z_v \neq 0$, alors :

$$\begin{cases} x = x_A \\ \frac{y-y_A}{y_v} = \frac{z-z_A}{z_v} \end{cases}$$



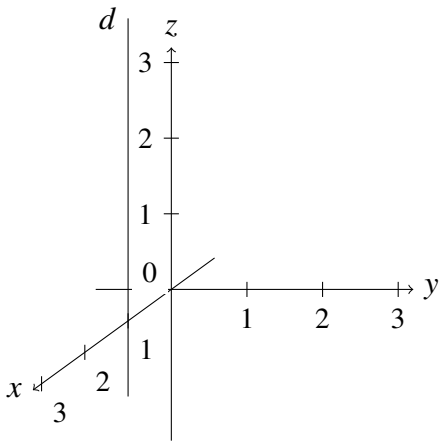
Tous les points de la droite ont une abscisse fixe, une ordonnée et une cote qui varient. La droite est parallèle au plan Oyz.

Si on a uniquement $y_v = 0$ alors on obtient un système semblable. L'ordonnée est fixe, l'abscisse et la cote varient. La droite est parallèle au plan Oxz.

Si on a uniquement $z_v = 0$ alors on obtient un système semblable. La cote est fixe, l'abscisse et l'ordonnée varient. La droite est parallèle au plan Oxy.

② Si $x_v = 0$ et $y_v = 0$ et $z_v \neq 0$, alors :

$$\begin{cases} x = x_A \\ y = y_A \end{cases}$$



Tous les points de la droite ont une abscisse et une ordonnée fixes, seule la cote varie. La droite est parallèle à l'axe Oz.

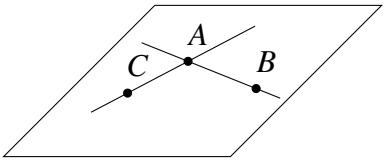
Si on a uniquement $x_v \neq 0$ alors on obtient un système semblable. L'abscisse varie. La droite est parallèle à l'axe Ox.

Si on a uniquement $y_v \neq 0$ alors on obtient un système semblable. L'ordonnée varie. La droite est parallèle à l'axe Oy.

Si $x_v = 0$ et $y_v = 0$ et $z_v = 0$, alors le vecteur (x_v, y_v, z_v) est nul. Il ne peut donc pas définir une direction.

L'étude du système S_5 de l'activité 2 nous amène à décrire les plans par des équations paramétriques et cartésiennes.

RAPPEL : Un plan est déterminé par trois points non alignés ou par deux droites sécantes.



Deux vecteurs directeurs du plan sont $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Un plan peut alors être déterminé par un point et deux vecteurs directeurs non colinéaires.

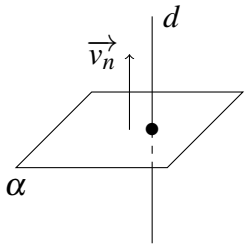
Équations paramétriques de plans dans l'espace

Un plan passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et dont deux vecteurs directeurs sont (x_v, y_v, z_v) et (x_u, y_u, z_u) a pour équation paramétrique

$$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + \lambda(x_v, y_v, z_v) + \mu(x_u, y_u, z_u), \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Définition

Soit une droite d perpendiculaire au plan α.
Un **vecteur normal** du plan α est un vecteur directeur de la droite d.

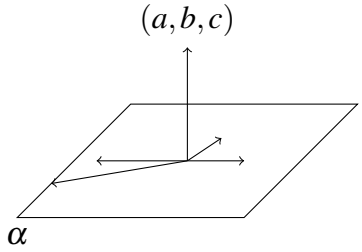


Puisque la droite d et le plan α sont perpendiculaires, d est perpendiculaire à toutes les droites incluses au plan α. Un vecteur directeur de la droite d est orthogonal aux vecteurs directeurs du plan α.

Définition

Soit (a, b, c) les composantes d'un vecteur normal du plan α.
Le plan α est l'ensemble des vecteurs orthogonaux au vecteur (a, b, c).

Cet ensemble peut s'écrire comme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \cdot (a, b, c) = 0\}$.



Soit $P(x,y,z)$ un point quelconque du plan α. Soit $A(x_A,y_A,z_A)$ un point donné du plan α. Le vecteur $\overrightarrow{AP}$ est un vecteur directeur du plan et a pour composantes $(x-x_A, y-y-A, z-z_A)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}(a,b,c)\cdot(x-x_A,y-y-A,z-z_A) &= 0\\ a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A) &= 0\\ ax-ax_A+by-by_A+cz-cz_A &= 0\\ ax+by+cz &= ax_A+by_A+cz_A\end{aligned}$$

En posant $d = ax_A+by_A+cz_A$, nous obtenons alors l'équation $ax+by+cz=d$. Ceci nous donne la forme générale d'une équation cartésienne du plan α.

Équations cartésiennes de plans dans l'espace

Un plan a pour équation cartésienne $ax+by+cz=d$ où $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ et (a,b,c) est un vecteur normal (non nul) au plan.

Un plan peut alors être décrit lorsqu'on connait trois points, un point et deux vecteurs directeurs ou un point et un vecteur normal.

6 Positions relatives des droites et des plans dans l'espace

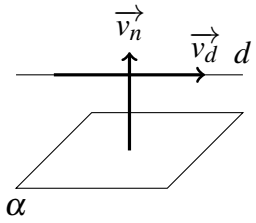
Les positions relatives de deux droites dans l'espace se déterminent de la même façon que dans le plan.

Propriété

Soient la droite d et le plan α.
Le plan α est parallèle à la droite d si et seulement si le produit scalaire entre un vecteur normal $\overrightarrow{v_n}$ du plan et un vecteur directeur $\overrightarrow{v_d}$ de la droite est nul.

Autrement dit,

$$\alpha \parallel d \Leftrightarrow \overrightarrow{v_n}\cdot\overrightarrow{v_d} = 0.$$



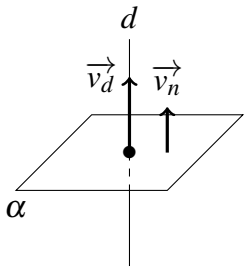
Un vecteur normal du plan est un vecteur directeur d'une droite perpendiculaire au plan. Deux droites sont orthogonales si et seulement si le produit scalaire entre leurs vecteurs directeurs est nul.

Propriété

Soient la droite d et le plan α.
Le plan α est perpendiculaire à la droite d si et seulement si un vecteur normal $\overrightarrow{v_n}$ du plan est colinéaire à un vecteur directeur $\overrightarrow{v_d}$ de la droite.

Autrement dit,

$$\alpha \perp d \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}_0, \overrightarrow{v_n} = k\,\overrightarrow{v_d}.$$



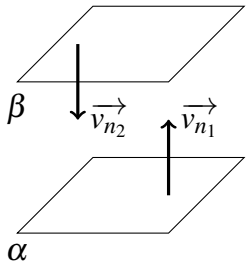
Un vecteur normal du plan est un vecteur directeur d'une droite perpendiculaire au plan. Deux droites perpendiculaires au même plan sont parallèles entre elles.

Propriété

Soient α et β deux plans.
Le plan α est parallèle au plan β si et seulement si un vecteur normal $\overrightarrow{v_{n_1}}$ de α est colinéaire à un vecteur normal $\overrightarrow{v_{n_2}}$ de β.

Autrement dit,

$$\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}_0, \overrightarrow{v_{n_1}} = k\,\overrightarrow{v_{n_2}}.$$



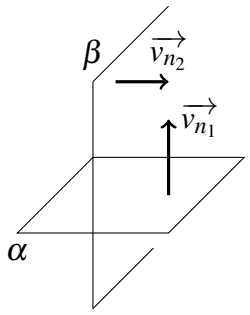
Un vecteur normal du plan est un vecteur directeur d'une droite perpendiculaire au plan. Une droite perpendiculaire à un plan coupe perpendiculairement tout plan qui lui est parallèle.

Propriété

Soient α et β deux plans.
Le plan α est perpendiculaire au plan β si et seulement si le produit scalaire entre un vecteur normal $\overrightarrow{v_{n_1}}$ de α et un vecteur normal $\overrightarrow{v_{n_2}}$ de β est nul.

Autrement dit,

$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \overrightarrow{v_{n_1}} \cdot \overrightarrow{v_{n_2}} = 0.$$



Un vecteur normal du plan α est un vecteur directeur d'une droite d perpendiculaire au plan. Un vecteur normal du plan β est un vecteur directeur d'une droite d' perpendiculaire au plan. Deux droites sont orthogonales si et seulement si le produit scalaire entre leurs vecteurs directeurs est nul.

7 Bilan

	Droite dans $\mathbb{R}^3$ (Dimension **1**)	Plan dans $\mathbb{R}^3$ (Dimension **2**)
Équations paramétriques	Pour la décrire, on a besoin des coordonnées d'un point (x_A, y_A, z_A) et des composantes d'**un** vecteur directeur (x_v, y_v, z_v) (non nul). Une équation paramétrique est de la forme : $(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + \lambda(x_v, y_v, z_v)$ où λ est un réel.	Pour le décrire, on a besoin des coordonnées d'un point (x_A, y_A, z_A) et des composantes de **deux** vecteurs directeurs (x_v, y_v, z_v) et (x_u, y_u, z_u). Une équation paramétrique est de la forme : $(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + \lambda(x_v, y_v, z_v)$ $+\mu(x_u, y_u, z_u)$ où λ et μ sont des réels.
Équations cartésiennes	Pour la décrire, on a besoin des coordonnées d'un point (x_A, y_A, z_A) et des composantes d'**un** vecteur directeur (x_v, y_v, z_v). Un système d'équations cartésiennes est de la forme : - Si $x_v \neq 0$, $y_v \neq 0$ et $z_v \neq 0$, alors : $\frac{x - x_A}{x_v} = \frac{y - y_A}{y_v} = \frac{z - z_A}{z_v}$. - Si $x_v = 0$, $y_v \neq 0$ et $z_v \neq 0$, alors : $\begin{cases} x = x_A \\ \frac{y - y_A}{y_v} = \frac{z - z_A}{z_v}. \end{cases}$ Si $y_v = 0$, $x_v \neq 0$ et $z_v \neq 0$ ou si $z_v = 0$, $x_v \neq 0$ et $y_v \neq 0$, alors on a un système semblable. - Si $x_v = 0$, $y_v = 0$ et $z_v \neq 0$, alors : $\begin{cases} x = x_A \\ y = y_A. \end{cases}$ Si $x_v = 0$, $z_v = 0$ et $y_v \neq 0$ ou si $y_v = 0$, $z_v = 0$ et $x_v \neq 0$, alors on a un système semblable. - Si $x_v = 0$, $y_v = 0$ et $z_v = 0$, alors ce n'est pas un vecteur directeur de la droite.	Pour le décrire, on a besoin des coordonnées d'un point (x_A, y_A, z_A) et des composantes d'un vecteur normal (a, b, c) (non nul). Une équation cartésienne est de la forme : $ax + by + cz = d$ où d est un réel obtenu grâce aux coordonnées du point. On a : $d = ax_A + by_A + cz_A$.

8 Distances

RAPPEL : La distance entre deux points du plan $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ est donnée par :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

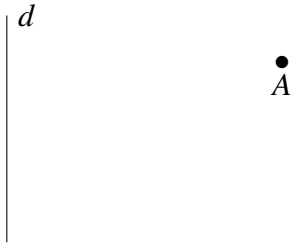
Définition

La distance entre deux points de l'espace $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ est donnée par :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Comment calculer la distance d'un point $A(x_A, y_A, z_A)$ à une droite d dans l'espace ?

MÉTHODE :



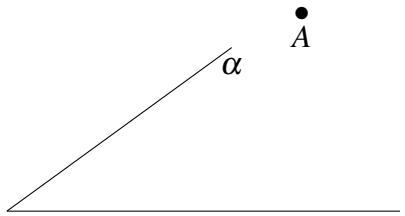
①

②

③

Comment calculer la distance d'un point $A(x_A, y_A, z_A)$ à un plan α ?

MÉTHODE :



①

②

③

Distance d'un point à un plan

La distance d'un point $A(x_A, y_A)$ à un plan α dont une équation cartésienne est $ax + by + cz = d$ est donnée par :

$$dist(A, \alpha) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

PREUVE :

9 Exercices

Des feuilles ont été distribuées aux élèves contenant tous les exercices présentés dans l'annexe D. Ils ont été analysés *a priori* dans l'annexe F et dans le chapitre XI. Les solutions de ces exercices sont proposées dans l'annexe G.

Annexe J

Déroulement du scénario

Nous présentons ici l'entièreté des déroulements pour notre expérimentation. Nous les proposons sous la forme d'un tableau à quatre colonnes. Nous précisons ainsi la durée de chaque phase, la nature du travail réalisé dans celle-ci, les interventions des enseignants et les activités des élèves. Les phases en rouge ont déjà été précisées dans le chapitre XII.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		Séance 1	
56”	Introduction du chapitre	P se présente et explique qu’il n’intervient que pour le chapitre de géométrie analytique dans l’espace.	Les E écoutent.
3’	Cours : définition d’une équation	P demande des exemples d’équations.	Les E participent et proposent des exemples variés et corrects.
		P écrit les exemples donnés et les valide tous à la fin des propositions. P demande ce qui peut caractériser une équation.	Les E répondent qu’il y a une égalité.
		P valide la proposotion et dit que $x+1$ n’est pas une équation car il n’y a pas de relation d’égalité.	Les E écoutent.
		P demande si c’est la seule caractéristique.	Les E répondent qu’il doit y avoir une ou plusieurs inconnues.
		P valide et dit que $5=4$ n’est pas une équation car il n’y a pas d’inconnue.	Les E écoutent.
		P fait un bilan et introduit ainsi la définition d’une équation.	Les E écoutent.
1’45”	Cours : résolution algébrique	P demande ce qu’on cherche lorsqu’on résout algébriquement par exemple l’équation $x+1=0$.	Un E répond qu’il faut isoler l’inconnue.
		P écrit au tableau la résolution de cette équation. Il revient sur le vocabulaire de solution. Il demande pourquoi $x=2$ n’est pas solution de cette équation.	Un E répond correctement.
		P valide et explique qu’une solution de l’équation rend l’égalité vraie alors que $x=2$ rend l’égalité fausse.	Les E écoutent.
42”	Distribution des feuilles	P distribue les feuilles.	
1’06”	Lecture des feuilles	P demande de lire la première tâche introductive et de réfléchir à ce qu’il faut faire ou ce qu’il ne faut pas faire.	Les E lisent et réfléchissent.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
3'03"	Démarche de résolution graphique	P lit l'énoncé et demande une démarche.	Un E dit qu'il faut isoler l'inconnue.
		P demande s'il faut faire une résolution algébrique.	Les E répondent correctement.
		P demande combien il y a d'inconnues.	Les E répondent correctement.
		P demande pourquoi il n'y a que deux inconnues.	Un E répond que c'est parce qu'on regarde $\mathbb{R}^2$.
		P valide. P demande comment faire pour résoudre algébriquement ce système.	Les E répondent correctement.
		P valide et répète. P demande ce qui est obtenu à la fin de la résolution.	Un E répond un nombre.
		P le corrige et dit que la valeur de chaque inconnue sera déterminée car il y a deux équations et deux inconnues.	Les E écoutent.
		P demande ce que ça veut dire $(1,2)$ est solution d'un système.	Les E ne répondent pas.
		P demande ce qu'on cherche lorsqu'on résout un système 2×2.	Les E ne répondent pas.
		P demande ce qu'on cherche lorsqu'on résout une équation.	Les E répondent qu'ils cherchent les solutions.
		P valide. Il reformule. Il dit qu'il faut chercher les valeurs des inconnues qui rendent l'égalité vraie.	Les E écoutent.
		P explique que la résolution d'un système 2×2 revient à chercher les valeurs des inconnues qui rendent les deux égalités vraies.	Les E écoutent.
		P introduit la démarche de résolution graphique. Il explique qu'on cherche les éventuelles intersections entre deux objets géométriques.	Les E écoutent.
1'21"	Lecture des feuilles	P lit les feuilles. À chaque fois, il reformule et revient sur ce qui a été fait avant.	Les E écoutent et suivent dans les feuilles.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
16'36"	Cours : distinction entre résoudre et décrire	P explique l'objectif de cette partie.	Les E écoutent.
		P trace sur un graphique la fonction du premier exemple.	Les E attendent.
		P revient sur le domaine de la fonction.	Les E écoutent.
		P sollicite un E pour lire le premier paragraphe.	Un E lit. Les autres écoutent et suivent.
		P corrige l'E sur le vocabulaire ensembliste.	Les E écoutent.
		P explique au tableau qu'ici $f(x) = 0$ devient $x^2 + 3x + 2 = 0$.	Les E écoutent.
		P demande comment trouver les solutions de cette équation.	Un E répond qu'on cherche l'intersection entre la parabole et l'axe des abscisses.
		P met en évidence les deux points d'intersection sur le graphique.	Les E complètent leur graphique.
		P demande comment trouver les solutions algébriques de cette équation.	Les E répondent correctement.
		P valide et écrit l'ensemble des solutions.	Les E copient.
		P revient sur la résolution graphique. P demande pourquoi avoir regardé l'intersection entre la parabole et l'axe des abscisses.	Un E dit que c'est parce que $y = 0$ et cela représente l'axe Ox.
		P valide et trace en rouge cette droite.	Les E écoutent et complètent leur graphique.
		P demande de faire un bilan.	Des E donnent les différentes étapes.
		P écrit au tableau, guide les E et les corrige sur le vocabulaire.	Les E copient.
		P demande de décrire les points d'intersection.	Un E répond -2 et -1. Un autre propose $(0,-2)$ et $(0,-1)$.
		P attire l'attention sur la position des valeurs -2 et -1 sur le graphique.	Un E répond correctement.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P explique que les deux valeurs de x dépendent du choix de y. P dit qu'une résolution algébrique et graphique a eu lieu.	Les E écoutent.
		P sollicite un E pour lire le deuxième paragraphe.	L'E lit. Les autre écoutent et suivent.
		P corrige le vocabulaire ensembliste.	Les E écoutent.
		P demande de résoudre algébriquement cette équation.	Un E propose le discriminant. Un E propose de mettre en évidence.
		P valide et demande de déterminer les solutions.	Les E répondent correctement.
		P demande de résoudre graphiquement cette équation.	Un E propose de déterminer l'intersection avec la droite $y = 2$.
		P trace en rouge la droite $y = 2$.	Les E complètent leur graphique.
		P demande de faire un bilan.	Les E répondent correctement.
		P écrit au tableau.	Les E copient.
		P demande de décrire les points d'intersection.	Un E répond correctement.
		P écrit et attire l'attention des E sur le fait que les valeurs de x dépendent du choix de y.	Les E écoutent et copient.
		P sollicite un E pour lire le troisième paragraphe.	Un E lit. Les autres écoutent et suivent.
		P revient sur l'ensemble vide.	Les E écoutent.
		P demande de résoudre graphiquement cette équation.	Un E répond correctement.
		P trace en rouge la droite $y = -1$.	Les E complètent leur graphique.
		P écrit le bilan.	Les E copient.
		P dit qu'à chaque fois les équations ont été résolues.	Les E écoutent.
		P sollicite un E pour lire le quatrième paragraphe.	Un E lit. Les autres écoutent et suivent.
		P corrige le vocabulaire ensembliste.	L'E se reprend et continue la lecture. Les autres écoutent.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P explique qu'ici la valeur de y est quelconque et généralise la démarche précédente. Il dit que le graphique est balayé par toutes les droites horizontales. P met en évidence quelques points d'intersection pour dire qu'on décrit tous les points de la parabole.	Les E écoutent.
		P explique les notations ensemblistes. Il écrit l'ensemble en fonction de son discours. Il généralise ensuite les ensembles précédents en expliquant que la valeur de x dépend toujours de la valeur de y. Il dit qu'ici on décrit la parabole par une équation.	Les E écoutent.
		P sollicite un E pour lire le deuxième exemple.	Un E lit. Les autres écoutent et suivent.
		P demande à chaque fois si c'est décrire par une équation ou si l'équation a été résolue.	Les E répondent correctement.
		P corrige à chaque fois le vocabulaire ensembliste.	Les E écoutent.
		P fait un bilan sur la différence entre les deux expressions.	Les E écoutent.
10'38"	Tâche introductive 1 : correction collective S_1	Voir tableau XII.14.	
3'	Tâche introductive 1 : recherche individuelle S_2	P passe dans les bancs.	Les E travaillent.
50"	JDC	P demande aux E de préparer le système S_2.	Les E copient.
Séance 2			
7'30"	Tâche introductive 1 : correction collective S_2	P demande la démarche.	Un E propose une résolution algébrique.
		P invalide et repose la question.	Un E répond correctement.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P revient sur la démarche graphique.	Un E dit qu'il a un problème car il y a deux inconnues dans les équations.
		P dit qu'on peut toujours isoler une des deux inconnues si ça peut l'aider.	Les E écoutent.
		P isole y et demande l'objet décrit par la première équation du système.	Des E répondent correctement.
		P revient sur la forme $y = mx + p$ et demande aux E ce que représentent les lettres m et p.	Les E répondent correctement.
		P demande comment tracer la droite dans un repère orthonormé.	Un E propose de déterminer deux points de la droite.
		P valide et demande deux points de la droite.	Les E répondent correctement.
		P place les deux points proposés dans le repère et trace la droite.	Les E copient.
		P rappelle qu'une droite est déterminée par deux points.	Les E écoutent.
		P demande de décrire l'objet associé à l'équation $y = -1$.	Les E répondent correctement.
		P trace la droite sur le graphique.	Les E copient.
		P met en évidence l'intersection entre les deux droites et demande les coordonnées de ce point.	Des E répondent correctement.
		P écrit une conclusion.	Les E copient.
25'	Cours : rappels	P revient sur les équations de la forme $x = k$, $y = k$ et $y = mx + p$. Il demande s'ils connaissent une forme générale d'équation décrivant toutes les droites.	Les E disent qu'ils ne connaissent pas une telle équation.
		P rappelle qu'une droite est déterminée par deux points. Il demande s'il y a une autre façon de décrire une droite.	Les E ne répondent pas.
		P demande ce qu'est un vecteur.	Les E donnent les trois caractéristiques des vecteurs.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P passe en revue les trois caractértistiques et demande pour chacune si cela peut aider à décrire une droite.	Les E répondent correctement.
		P reformule et dit qu'une droite est décrite par un point et un vecteur directeur. Sur son dessin, il demande un vecteur directeur de la droite.	Un E répond correctement.
		P insiste sur « un vecteur » et non « le vecteur ». Il dit qu'il y a une infinité de vecteurs directeurs pour une droite et en dessine plusieurs au tableau.	Un E dit qu'il n'y en a pas qu'un et donne un exemple correct. Les autres E écoutent.
		P insiste sur l'importance du point pour décrire une droite et trace des droites parallèles au tableau.	Les E écoutent.
		P introduit aussi une troisième description d'une droite en fonction d'une droite qui lui est perpendiculaire. P fait un dessin et introduit alors un vecteur normal de la droite.	Les E écoutent.
		P distribue les feuilles. P lit chaque résultat et revient sur ce qui vient d'être fait. Il illustre chaque résultat par un dessin et fait un parallèle entre le texte et le dessin.	Les E écoutent.
		P trace une droite et un vecteur directeur et normal de celle-ci.	Les E copient.
		P demande comment sont les deux vecteurs.	Un E dit qu'ils sont orthogonaux.
		P demande si un autre vecteur peut être orthogonal au vecteur normal dessiné.	Les E répondent correctement.
		P en trace plusieurs et dit que tous les vecteurs directeurs de la droite sont orthogonaux au vecteur normal donné de la droite.	Les E écoutent.
		P lit la définition d'une droite.	Les E suivent.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P revient sur ce qui a été fait et écrit l'ensemble en lisant la définition morceau par morceau.	Les E écoutent.
		P demande comment traduire l'orthogonalité.	Les E ne répondent pas.
		P revient sur le produit scalaire entre deux vecteurs.	Les E écoutent.
		P demande la différence entre vecteur directeur et vecteur normal.	Les E répondent correctement.
		P donne la forme générale et revient sur les statuts des différentes lettres.	Les E écoutent et copient.
		P fait un dessin et introduit un point P quelconque de la droite. Il explique la différence entre le point A et le point P.	Les E écoutent.
		P part de la définition d'une droite et demande un vecteur directeur de la droite.	Les E répondent correctement.
		P demande comment sont les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{n}$.	Les E répondent correctement.
		P traduit l'orthogonalité en un produit scalaire nul.	Les E écoutent.
		P demande de calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AP}$.	Des E répondent correctement.
		P écrit au tableau et rappelle le calcul général à réaliser.	Les E écoutent.
		P demande comment calculer le produit scalaire.	Des E répondent correctement.
		P répète et écrit au tableau ce que les E ont dit.	Les E écoutent.
		P distribue et demande les infos connues et celles inconnues.	Les E répondent correctement.
		P répète et écrit les informations inconnues dans le membre de gauche et celles connues dans celui de droite.	Les E écoutent.
		P fait un parallèle avec la forme générale.	Un E dit que le membre de droite est un nombre réel qu'on connait.
		P valide et appelle ce nombre c.	Les E écoutent.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P attire l'attention sur les données du problème et la forme générale de l'équation.	Un E dit que les coefficients devant les inconnues sont les composantes du vecteur normal connu.
		P valide et lit les feuilles.	Les E suivent et écoutent.
		P demande pourquoi le vecteur normal ne peut pas être égal au vecteur nul.	Un E répond correctement.
6'	Tâche introductive 1 : correction collective S_3	P demande la démarche à suivre.	Un E propose d'isoler une inconnue.
		P dit qu'on peut utiliser le résultat précédent.	Un E décrit les deux objets géométriques et donne un vecteur normal pour chaque plan.
		P valide et remet les équations sous la forme générale.	Les E copient.
		P écrit les objets décrits par les deux équations.	Les E copient.
		P particularise le résultat en donnant pour chaque équation la valeur de a et b.	Les E écoutent.
		P demande si un vecteur normal suffit à décrire une droite.	Les E répondent oui.
		P montre qu'il y a une infinité de vecteurs normaux sur un dessin.	Les E écoutent.
		P demande quelle est la deuxième information nécessaire.	Un E répond un point.
		P valide et demande un point de la droite.	Un E répond correctement.
		P écrit au tableau une description précise des deux droites.	Les E copient.
5'30"	Tâche introductive 1 : recherche individuelle S_3	P demande aux élèves de tracer les deux droites et de déterminer leur point d'intersection.	Les E travaillent.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
1’24”	Tâche introductive 1 : correction collective S_3	P trace les deux droites en utilisant les vecteurs normaux donnés et les points choisis.	Les E écoutent.
15”	JDC	P demande de préparer le système S_4.	Les E copient.
		Séance 3	
6’	Tâche introductive 1 : correction collective S_4	P demande aux E de rappeler ce qu’ils ont vu à la séance 2.	Des E parlent de la forme générale d’une équation de droite et des vecteurs normaux.
		P demande ce qu’est un vecteur normal.	Les E répondent correctement.
		P écrit le système au tableau et demande la démarche à suivre.	Les E répondent correctement.
		P demande l’objet décrit par la première équation.	Un E répond correctement.
		P écrit sous la dictée un vecteur normal de la droite.	Un E dicte. Les autres vérifient leur réponse et/ou copient.
		P demande si une seule droite est décrite à partir d’un vecteur normal.	Un E dit qu’il faut aussi un point.
		P rappelle la non unicité du vecteur normal.	Les E écoutent.
		P demande l’objet décrit par la deuxième équation.	Les E répondent correctement en donnant un vecteur normal et un point de la droite.
		P écrit au tableau sous la dictée.	Un E dicte. Les autres vérifient leur réponse et/ou copient.
		P demande aux E comment tracer les deux droites. Il les trace en suivant les indications données.	Les E expliquent comment faire.
		P demande l’ensemble des solutions du système.	Les E répondent correctement.
		P demande s’il est possible de déterminer à partir des équations que les deux droites sont parallèles distinctes.	Un E dit que les vecteurs normaux sont proportionnels.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P parle de colinéarité et montre que les deux vecteurs sont colinéaires.	Les E donnent le facteur.
		P écrit au tableau que les droites sont parallèles car les vecteurs sont colinéaires.	Les E copient.
8'51"	Cours : rappels	P distribue les feuilles. P sollicite un E pour lire.	Un E lit. Les autres écoutent et suivent.
		P fait un dessin au tableau pour expliquer le parallélisme de deux droites.	Les E écoutent.
		P sollicite un E pour lire.	Un E lit. Les autres écoutent et suivent.
		P fait un dessin au tableau pour expliquer la perpendicularité de deux droites.	Les E écoutent.
14'45"	Tâche introductive 2 : correction collective S_1	P introduit l'espace et écrit le premier système au tableau.	Les E écoutent.
		P demande la démarche suivie dans $\mathbb{R}^2$.	Les E répondent correctement.
		P étend cette démarche à l'espace $\mathbb{R}^3$.	Les E écoutent.
		P demande ce qu'on peut faire avec la première équation du système.	Un E propose d'isoler x.
		P écrit au tableau.	Les E copient.
		P demande l'objet décrit par cette équation.	Un E répond une droite.
		P demande quels sont les éléments qui vérifient l'équation. P reformule et demande la forme des objets de $\mathbb{R}^3$.	Un E répond qu'on travaille avec des triplets.
		P valide et écrit au tableau qu'on cherche tous les triplets qui vérifient $x = 2$.	Les E copient.
		P traduit cela en un ensemble.	Les E copient et écoutent.
		P exprime cet ensemble comme $\{(2,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\}$.	Un E dit que y et z sont donc quelconques.
		P demande des points appartenant à cet ensemble.	Des E répondent correctement.
		P écrit au tableau les propositions.	Les E copient.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P trace un repère orthonormé et demande comment y placer les points.	Des E répondent correctement.
		P place les points.	Les E copient.
		P demande l'objet décrit.	Des E répondent un plan.
		P demande de justifier.	Un E répond que tous les points sont dans le plan $x = 2$.
		P valide et justifie que les trois points sont non alignés et déterminent donc un plan.	Les E écoutent.
		P écrit au tableau la position relative du plan.	Les E copient.
		P revient à l'ensemble et explique que la valeur de x est fixée à 2 mais que les valeurs de y et z sont quelconques.	Les E écoutent.
		P prend un repère dans la classe et explique pourquoi $x = 2$ est un plan parallèle à Oyz.	Les E écoutent.
		P demande l'objet décrit par la deuxième équation du système.	Des E répondent correctement.
		P écrit l'ensemble décrit.	Les E copient.
		P explique que x et y sont ici quelconques mais la valeur de z est fixée à 2.	Les E écoutent.
		P revient sur l'interprétation en utilisant le repère de la classe.	Les E écoutent.
		P demande la position relative du plan.	Les E répondent correctement.
		P valide et écrit au tableau.	Les E copient.
		P demande l'objet décrit par la troisième équation du système.	Des E répondent correctement.
		P écrit l'ensemble décrit.	Les E copient.
		P demande la position relative du plan.	Les E répondent correctement.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P revient sur l'interprétation en utilisant le repère de la classe.	Les E écoutent.
		P écrit au tableau.	Les E copient.
4'	Cours : équations cartésiennes de plans particuliers	P écrit au tableau le résultat général. Il généralise ce qui vient d'être fait et sollicite les E pour donner une forme générale des équations de plans.	Les E écoutent, répondent et copient.
1'25"	Tâche introductive 2 : correction collective S_1	P demande quel est l'intersection de trois plans sécants.	Les E répondent correctement.
		P demande de déterminer le point d'intersection des trois plans.	Les E répondent correctement.
		P écrit la solution au tableau.	Les E copient.
4'26"	Tâche introductive 2 : recherche individuelle S_2	P passe dans les bancs.	Les E travaillent.
Séance 4			
5'08"	Tâche introductive 2 : correction collective S_2	P demande l'objet décrit par la première équation.	Les E répondent correctement.
		P demande un point du plan.	Les E répondent correctement.
		P écrit au tableau.	Les E vérifient leur réponse et/ou copient.
		P demande la position relative du plan.	Les E répondent correctement.
		P écrit au tableau.	Les E vérifient leur réponse et/ou copient.
		P demande l'objet décrit par la deuxième équation.	Les E répondent correctement.
		P demande un point du plan.	Les E répondent correctement.
		P écrit au tableau.	Les E vérifient leur réponse et/ou copient.
		P demande la position relative du plan.	Les E répondent correctement.
		P écrit au tableau.	Les E vérifient leur réponse et/ou copient.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P place les deux plans dans le repère de la classe et demande l'intersection des deux plans.	Les E écoutent et disent qu'il s'agit d'une droite.
		P dit que deux plans sécants déterminent une droite et écrit au tableau.	Les E écoutent et copient.
		P écrit l'ensemble associé au système décrivant cette droite.	Les E copient.
		P explique comment arriver à l'ensemble $\{(2,-1,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.	Les E écoutent.
		P explique qu'on veut montrer que cet ensemble décrit bien une droite en trouvant une équation de celle-ci.	Les E proposent de déterminer deux points.
		P valide et demande deux points de l'ensemble.	Les E répondent correctement.
		P écrit les propositions données.	Les E copient.
		P fait un dessin où il trace une droite passant par deux points. Il demande un vecteur directeur de cette droite.	Les E répondent correctement.
		P montre comment obtenir un vecteur directeur de la droite à partir de l'ensemble.	Les E écoutent et copient.
		P place la droite dans un repère de l'espace et demande comment aller de l'origine du repère sur n'importe quel point de la droite.	Les E ne répondent pas.
		P explique que pour décrire tous les points P de la droite AB, on part de l'origine du repère, on va au point A et puis on se dirige vers P en utilisant des multiples du vecteur directeur de la droite.	Les E écoutent.
		P traduit ce chemin en termes vectoriels.	Les E écoutent et copient.
		P demande de calculer les composantes des vecteurs.	Les E répondent correctement.
		P écrit une équation paramétrique de la droite.	Les E copient.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P met en évidence qu'il faut un point et un vecteur directeur.	Les E écoutent.
22'06"	Cours : équations paramétriques de droites dans l'espace	P distribue les feuilles. Il lit et généralise l'exemple.	Les E écoutent et suivent.
		P revient sur l'exemple et particularise le résultat.	Les E écoutent.
		P explique qu'il y a un paramètre et un vecteur directeur. L'objet droite est de dimension 1.	Les E écoutent.
		P lit les deux remarques sur le rôle du paramètre et reformule.	Les E écoutent et suivent.
		P écrit au tableau les quatre exemples et explique les calculs.	Les E écoutent.
		P répond.	Un E demande si la valeur de λ est unique si le point appartient à la droite.
4'	Tâche introductive 2 : recherche individuelle S_3	P passe dans les bancs.	Les E travaillent.
2'37"	Tâche introductive 2 : correction collective S_3	P écrit l'ensemble associé à la première équation du système.	Les E copient.
		P s'appuie sur l'ensemble $\{(x,y,z) \mid x = 2\}$ déjà travaillé précédemment pour aborder cet ensemble-ci.	Les E écoutent.
		P écrit l'ensemble $\{(y,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\}$.	Les E copient. Un E demande si (x,x,z) fonctionne.
		P valide et demande l'objet géométrique décrit par cet ensemble.	Les E ne répondent pas.
		P demande des points appartenant à cet ensemble.	Les E proposent plusieurs points.
		P valide et écrit au tableau les propositions.	Les E copient.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
3'35"	Tâche introductive 2 : recherche individuelle S_3	P passe dans les bancs.	Les E placent les points sur un graphique et cherche l'objet géométrique.
6'16"	Tâche introductive 2 : correction collective S_3	P demande l'objet décrit.	Les E répondent correctement.
		P valide et justifie que trois points non alignés déterminent un plan.	Les E écoutent.
		P écrit au tableau.	Les E copient.
		P demande l'objet décrit par la deuxième équation du système.	Les E répondent correctement.
		P valide et fait le parallèle avec l'ensemble précédent.	Les E écoutent.
		P demande l'intersection des deux plans.	Les E répondent correctement.
		P valide, précise que les deux plans ne sont pas parallèles et écrit le résultat au tableau.	Les E écoutent et copient.
		P écrit l'ensemble associé au système. Il s'appuie sur le travail réalisé à la séance 3 avec $y = -1$ et $x = 2$.	Les E écoutent et copient. Un E décrit les triplets de cet ensemble.
		P valide et écrit au tableau.	Les E copient.
		P attire l'attention qu'il n'y a qu'une seule lettre, un seul vecteur directeur et donc l'objet est une droite.	Les E écoutent.
		P demande un vecteur directeur de la droite.	Un E propose de déterminer deux points de la droite.
		P valide et demande deux points appartenant à l'ensemble.	Les E répondent correctement.
		P écrit au tableau.	Les E copient.
		P demande les composantes d'un vecteur directeur de la droite.	Les E répondent correctement.
		P valide et écrit au tableau.	Les E copient.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P attire l'attention sur l'ensemble et montre comment déterminer un vecteur directeur de la droite directement.	Les E écoutent, complètent l'ensemble et copient.
15"	JCD	P demande de trouver une équation paramétrique de la droite.	Les E copient.
Séance 5			
2'20"	Tâche introductive 2 : correction collective S_3	P demande une équation paramétrique de la droite.	Un E propose $(0,0,0)+\lambda(1,1,1)$.
		P écrit au tableau et demande aux autres E s'ils sont d'accord.	Des E disent qu'il manque $(x,y,z)=$.
		P valide et revient sur la définition d'une équation.	Les E écoutent et copient.
3'35"	Tâche introductive 2 : recherche individuelle S_4	P passe dans les bancs.	Les E travaillent.
62'46"	Tâche introductive 2 : correction collective S_4	Voir tableau XII.15.	
Séance 6			
6'44"	Équations cartésiennes de droites	P demande où se trouvent le point et le vecteur directeur donnés dans le système.	Des E font des propositions incorrectes.
		P reformule sa question.	Un E répond correctement.
		P écrit le système en mettant en évidence les coordonnées du point et les composantes du vecteur directeur.	Les E recopient.
		P sollicite un E pour lire le résultat.	Un E lit. Les autre écoutent et suivent dans les feuilles.
		P écrit au tableau la forme générale et montre les liens avec le cas particulier.	Les E écoutent.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
15'05"	Équations cartésiennes de droites particulières	P dit qu'il faut étudier les cas où les composantes peuvent être nulles.	Les E écoutent.
		P revient sur la démarche suivie dans le cas général et l'applique dans le cas où $x_v = 0$.	Les E recopient.
		P élimine les paramètres au tableau.	Les E recopient.
		P dit qu'ils vont aborder ce cas maintenant mais que c'est le quatrième cas dans les feuilles.	Un E demande ce qu'il se passe lorsque toutes les composantes valent zéro.
		P valide et recopie au tableau.	L'E dit que dans ce cas il n'y aurait que le point A. Les autres écoutent et recopient.
		P revient sur le premier cas et demande la position de la droite dans l'espace.	Un E répond correctement.
		P valide et complète la réponse donnée.	Les E écoutent.
		P demande la position de la droite si $y_v = 0$ ou si $z_v = 0$.	Des E répondent correctement.
		P lit les feuilles pour ces deux cas.	Les E écoutent et suivent dans les feuilles.
		P écrit une équation paramétrique de la droite dans le cas où $x_v = y_v = 0$.	Les E recopient. Un E dit que la droite sera verticale.
		P dit que la position relative sera déterminée une fois que le système sera écrit et demande comment éliminer le paramètre.	Un E répond correctement.
		P valide et complète la réponse de l'E.	Les E écoutent.
		P revient sur le comportement d'une variable lorsqu'elle est absente de l'équation.	Un E demande pourquoi il n'y a pas de z.
		P explique qu'on regarde l'intersection de deux plans et que la droite est bien verticale.	Les E écoutent.
		P reprend l'explication avec des gestes.	Un E ne comprend pas la position de la droite dans l'espace.
		P explique une troisième fois à partir des équations.	Un autre E ne visualise pas.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P lit les feuilles pour tous les cas.	Les E écoutent et suivent dans les feuilles.
Séance 7			
5'43"	Tâche introductive 2 : correction collective S_5	P écrit le système au tableau et demande l'objet décrit par la première équation du système.	Des E répondent correctement et fournissent un point et un vecteur directeur de la droite.
		P valide et écrit au tableau.	Les E vérifient leur réponse et/ou copient.
		P écrit un système d'équations cartésiennes général et particularise à l'équation donnée.	Les E écoutent.
		P écrit l'ensemble associé à la deuxième équation du système et demande comment déterminer l'objet décrit.	Les E proposent de déterminer quelques points et de les représenter dans un repère.
		P demande des points appartenant à l'ensemble.	Des points sont donnés par les E.
		P les écrit au tableau.	Les E copient.
3'46"	Tâche introductive 2 : recherche individuelle S_5	P passe dans les bancs.	Les E travaillent.
23"	Tâche introductive 2 : correction collective S_5	P demande l'objet décrit par l'ensemble.	Les E répondent correctement.
		P écrit au tableau.	Les E copient.
10'54"	Cours : équations paramétriques de plans	P dessine un plan ABC dans un repère orthonormé.	Les E tracent.
		P explique que le chemin à suivre pour atteindre n'importe quel point P du plan à partir de l'origine du repère.	Les E écoutent.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P explique qu'un seul vecteur directeur suffit pour décrire une droite mais qu'il en faut deux pour décrire un plan. Il le justifie par le fait que deux droites sécantes déterminent un plan, chacune étant décrite par un vecteur directeur.	Les E écoutent.
		P traduit le chemin en termes vectoriels.	Les E écoutent et copient.
		P remplace les vecteurs par leurs composantes en explicitant les calculs.	Les E écoutent et copient.
		P explique qu'il y a deux vecteurs directeurs, deux paramètres et donc le plan est de dimension 2.	Les E écoutent.
		P distribue les feuilles et sollicite un E pour lire le rappel.	Un E lit. Les autres écoutent et suivent.
		P sollicite un E pour lire.	Un E lit. Les autres écoutent et suivent.
		P revient sur la détermination d'un plan par deux droites sécantes.	Les E écoutent.
		P explique le dessin.	Les E écoutent.
		P donne d'autres exemples de vecteurs directeurs non colinéaires à ceux donnés.	Les E écoutent.
		P sollicite un E pour lire.	Un E lit. Les autres écoutent et suivent.
		P fait un parallèle avec ce qui est fait dans l'exercice et encadre les éléments correspondants.	Les E écoutent.
3'	Tâche introductive 2 : recherche individuelle S_5	P demande d'écrire une EP du plan pour la deuxième équation du système.	Les E travaillent.
2'20"	Tâche introductive 2 : correction collective S_5	P écrit l'équation paramétrique générale d'un plan.	Les E recopient.
		P demande une équation paramétrique du plan.	Un E dicte.
		P écrit au tableau l'équation dictée.	Les E copient.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P demande si on peut choisir un autre point et quels sont les vecteurs directeurs choisis.	Les E répondent correctement.
		P demande s'ils sont bien non colinéaires.	Les E répondent correctement en justifiant.
		P valide et reformule.	Les E écoutent.
12'44"	Cours : articulation des points de vue pour les plans	P demande comment montrer que les deux équations données sont équivalentes.	Un E propose de supprimer les deux paramètres.
		P demande comment faire.	Un E dit qu'il faut utiliser les propriétés des vecteurs.
		P valide et écrit ce que les E disent.	Des E dictent. Les E copient.
		P demande comment éliminer les paramètres dans le système.	Les E proposent d'isoler μ dans la deuxième équation.
		P valide et écrit les différentes étapes au tableau sous la dictée des E.	Les E dictent.
		P dit qu'il faut simplifier l'équation.	Les E écoutent.
		P demande pourquoi ce n'est pas la même équation qu'au début.	Un E répond que les équations sont multiples.
		P valide, le justifie et écrit au tableau.	Les E écoutent et copient.
		P revient sur la démarche pour passer du point de vue paramétrique au cartésien.	Les E écoutent.
		P demande comment faire si on veut aller du point de vue cartésien au paramétrique.	Un E dit qu'on ajoute les paramètres.
		P valide et demande comment faire.	Les E font des propositions incorrectes.
		P explique la démarche en écrivant au tableau.	Les E écoutent et copient.
		P valide.	Un E donne la démarche générale pour s'assurer qu'il a compris.
		P demande comment passer du système écrit à une équation paramétrique.	Les E ne répondent pas.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P reformule et écrit une équation paramétrique générale. Il écrit le système sous la forme d'une égalite de deux vecteurs et explique les opérations vectorielles utilisées pour revenir à la forme générale.	Les E écoutent et copient.
10"	JDC	P demande de déterminer en préparation la position de la droite et du plan.	Les E copient.
Séance 8			
3'	Cours : vecteur normal à un plan	P demande ce qui a été fait lors de la séance 7.	Les E répondent.
		P lit la définition de vecteur normal.	Les E écoutent et suivent.
		P fait un dessin en même temps qu'il lit la définition. Il fait un parallèle avec un vecteur normal à une droite.	Les E écoutent.
		P explique qu'une droite incluse au plan est orthogonale à la droite perpendiculaire au plan. P demande ce qu'on peut dire sur les vecteurs directeurs de ces droites.	Un E répond qu'ils sont orthogonaux.
		P lit la définition d'un plan et écrit l'ensemble au fur et à mesure.	Les E écoutent et suivent.
		P fait un parallèle avec la définition d'une droite dans le plan.	Les E écoutent.
6'15"	Cours : équations cartésiennes de plans	P lit la forme générale d'une équation cartésienne de plan. Il écrit au tableau les données et fait un dessin.	Les E écoutent.
		P revient sur la définition d'un plan pour dire $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.	Les E écoutent.
		P calcule les composantes des vecteurs et traduit le produit scalaire.	Les E écoutent.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P revient sur $2x+3y+4z=5$ et demande un vecteur normal du plan.	Les E répondent correctement.
		P particularise la forme générale à cet exemple.	Les E copient.
		P insiste sur la non unicité du vecteur normal et en demande d'autres.	Les E répondent correctement.
		P valide.	Les E écoutent.
9'21"	Tâche introductive 2 : correction collective S_5	P demande les positions relatives possibles d'une droite et d'un plan dans l'espace.	Les E répondent correctement.
		P dessine au tableau les trois cas possibles.	Les E recopient.
		P demande comment déterminer la position relative.	Les E apportent des éléments de réponse.
		P valide et prend le point $(1,5,-2)$ de la droite.	Les E disent ce qu'il faut faire.
		P demande si c'est un point du plan.	Les E calculent et répondent que le troisième cas est impossible.
		P valide et écrit au tableau.	Les E copient.
		P demande comment déterminer s'il s'agit du premier cas ou du deuxième.	Un E propose de prendre un deuxième point de la droite.
		P place un deuxième point sur la droite qui n'appartient pas au plan pour montrer que ce n'est pas suffisant.	Les E écoutent.
		P prend le deuxième cas et trace une droite perpendiculaire au plan. Il demande comment sont les deux droites.	Un E répond qu'un vecteur normal du plan est orthogonal à un vecteur directeur de la droite parallèle au plan.
		P valide et explique.	Les E écoutent.
4'09"	Cours : positions relatives d'une droite et d'un plan	P distribue les feuilles et sollicite un E pour lire.	Un E lit. Les autres écoutent et suivent.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P fait le parallèle avec ce qui vient d'être fait et réexplique.	Les E écoutent.
		P demande ce qu'il se passe si le produit scalaire est non nul.	Les E répondent correctement.
		P revient sur les trois cas possibles. Il dit que si le produit scalaire est non nul alors on est dans le premier cas. Sinon soit c'est le deuxième cas, soit le troisième. Il demande comment distinguer les deux cas.	Les E écoutent et un E propose de prendre un point.
		P valide et explique.	Les E écoutent.
		P valide.	Un E demande si on a toujours besoin d'un point et d'un vecteur.
		P sollicite un E pour lire.	Un E lit. Les autres écoutent et suivent.
		P réexplique et fait un dessin au fur et à mesure qu'il lit la propriété.	Les E écoutent.
11'52"	Tâche introductive 2 : correction collective S_5	P demande de déterminer le cas pour ce système.	Les E disent qu'il faut calculer le produit scalaire entre un vecteur normal du plan et un vecteur directeur de la droite.
		P valide et écrit au tableau le calcul proposé.	Les E dictent et copient.
		P demande ce que cela signifie.	Les E disent que les vecteurs ne sont pas orthogonaux.
		P valide et demande ce qu'on peut dire des objets.	Les E répondent qu'ils sont sécants.
		P valide. Il écrit au tableau qu'il s'agit du premier cas.	Les E copient.
		P demande quelle est l'intersection entre la droite et le plan.	Les E proposent de résoudre un système.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P valide et précise qu'il est plus facile de résoudre un système composé d'une équation paramétrique de la droite et d'une équation cartésienne du plan.	Les E écoutent.
		P demande une équation paramétrique de la droite.	Les E répondent correctement.
		P écrit la résolution du système. Il demande quoi faire de la valeur trouvée pour λ.	Les E copient et répondent correctement.
		P demande de trouver l'ensemble des solutions.	Les E calculent.
		P écrit et valide l'ensemble déterminé.	Les E donnent les coordonnées du point d'intersection.
5'13"	Tâche introductive 2 : correction collective S_6	P écrit le système au tableau et demande l'objet décrit par la première équation.	Les E répondent correctement.
		P demande des précisions sur le plan.	Les E donnent un vecteur normal et un point du plan.
		P valide et écrit au tableau.	Les E copient.
		P demande l'objet décrit par la deuxième équation.	Les E répondent correctement avec précisions.
		P valide et écrit au tableau.	Les E copient.
		P valide.	Un E dit que la deuxième équation peut être divisée par 3.
		P demande une justification.	L'E dit que les vecteurs normaux sont colinéaires.
		P valide et écrit au tableau.	Les E copient.
		P demande ce qu'on peut dire des plans.	Un E répond qu'ils sont parallèles.
		P valide et demande s'ils sont distincts ou confondus.	Un E propose une démarche.
		P valide et écrit au tableau.	Les E copient.
		P demande la position des deux plans.	Les E calculent et déterminent qu'ils sont distincts.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P valide et écrit au tableau.	Les E copient.
		P demande l'ensemble des solutions du système.	Les E répondent correctement.
		P valide et écrit au tableau.	Les E copient.
1'18"	Cours : positions relatives de deux plans	P lit la position relative de deux plans.	Les E écoutent et suivent.
		P demande comment déterminer que deux plans sont perpendiculaires.	Les E répondent correctement.
		P valide et lit les feuilles.	Les E écoutent et suivent.
Séance 9			
7'30"	Exercices : recherche individuelle	P passe dans les bancs.	Les E travaillent.
2'56"	Correction collective de l'exercice 1	P demande une démarche pour obtenir une équation paramétrique.	Les E répondent correctement.
		P valide et demande un point et un vecteur directeur.	Les E répondent correctement.
		P valide et écrit sous la dictée une équation paramétrique de la droite.	Les E dictent.
		P demande à quoi sert le paramètre.	Les E répondent correctement.
		P demande comment faire le point 2.	Un E propose de remplacer les inconnues par les coordonnées du point.
		P valide et demande ce qu'il faut chercher.	Un E répond correctement.
		P demande ce qu'il faut déduire.	Les E répondent correctement.
		P explique qu'il faut déterminer y et z.	Un E dit qu'il ne comprend pas pourquoi les coordonnées du point sont à déterminer.
9'	Exercices : recherche individuelle	P passe dans les bancs.	Les E travaillent.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
1’09”	Correction collective de l’exercice 1	P demande si le point C appartient à la droite.	Les E répondent correctement.
		P demande les coordonnées du point.	Les E répondent correctement.
		P demande si tout le monde est d’accord et s’il est nécessaire de corriger.	Les E répondent qu’ils sont d’accord et qu’il n’est pas nécessaire de corriger.
		P demande si le point D appartient à la droite.	Les E répondent correctement.
		P demande une justification.	Les E répondent correctement.
		P valide et demande s’il est nécessaire de corriger.	Les E répondent qu’il n’est pas nécessaire de corriger.
6’50”	Exercices : recherche individuelle	P passe dans les bancs.	Les E travaillent.
2’28”	Correction collective de l’exercice 2	P demande un système d’équations cartésiennes de la droite.	Les E dictent un système.
		P écrit au tableau sous la dictée. Il demande si tout le monde est d’accord.	Un E répond qu’il n’a pas la même réponse.
		P demande pourquoi le système est particulier.	Les E répondent correctement.
		P valide et reformule. Il donne la formule générale donnée dans le cours et la particularise à l’exercice.	Les E écoutent.
		P corrige la proposition initalement donnée.	Les E se corrigent et copient.
2’39”	Correction collective de l’exercice 3.1	P demande où lire un point et un vecteur directeur de la droite.	Les E répondent correctement.
		P demande s’il est correct de dire que le vecteur $(1,2,5)$ est un vecteur directeur de la droite.	Des E répondent que non car il ne s’agit pas de la forme canonique.
		P valide et demande comment obtenir un vecteur directeur.	Des E répondent correctement.
		P valide et écrit ce qui a été proposé.	Les E copient.
		P invalide et corrige l’E.	Un E dit $\frac{y-1}{6}$.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P demande un point et un vecteur directeur de la droite.	Les E répondent correctement.
		P valide et écrit au tableau.	Les E copient.
7'18"	Exercices : recherche individuelle	P passe dans les bancs.	Les E travaillent.
1'24"	Correction collective de l'exercice 3.2	P demande un point et un vecteur directeur de la droite.	Un E propose un point et un vecteur directeur.
		P demande si tout le monde est d'accord.	Un E dit qu'il n'est pas d'accord.
		P demande comment revenir à la forme canonique et écrit au fur et à mesure le système.	Les E disent quoi faire et écrire.
		P demande un point et un vecteur directeur.	Les E répondent correctement.
		P écrit au tableau.	Les E copient et se corrigent.
Séance 10			
2'24"	Exercices : recherche individuelle	P passe dans les bancs.	Les E travaillent.
2'03"	Correction collective de l'exercice 3.3	P demande comment obtenir un point et un vecteur directeur de la droite.	Les E répondent correctement et qu'il s'agit d'une équation paramétrique.
		P valide et demande pourquoi c'est une équation paramétrique.	Les E répondent qu'il y a un paramètre.
		P valide et dit qu'ici le paramètre s'appelle k et non λ. P écrit au tableau la proposition des E.	Les E écoutent.
		P explique comment passer du système donné à une équation paramétrique.	Les E écoutent.
		P ajoute au système les termes manquants.	Un E demande pourquoi le vecteur donné est $(1,0,1)$.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
2'12"	Correction collective de l'exercice 3.4	P demande si le système décrit bien une droite.	Les E répondent que les valeurs de x et y sont fixes et que la valeur de z varie.
		P valide et explique qu'on regarde l'intersection de deux plans sécants.	Les E écoutent.
		P demande un point de la droite.	Un E répond correctement.
		P explique qu'ici il décrit l'ensemble associé au système mais ne fournit pas un point de la droite mais tous les points de celle-ci.	Un E demande si $(1,3,r)$ où r est un réel est correct.
		P écrit au tableau et demande un vecteur directeur de la droite.	Les E copient et/ou vérifient leur réponse. Les E donnent un vecteur directeur de la droite.
		P valide et écrit au tableau.	Les E vérifient leur réponse.
10'35"	Exercices : recherche individuelle	P passe dans les bancs.	Les E travaillent.
5'	Correction collective de l'exercice 4	P demande une démarche.	Les E répondent correctement.
		P écrit l'équation paramétrique donnée.	Les E copient et/ou vérifient.
		P demande si une permutation des noms des paramètres change quelque chose.	Les E répondent correctement.
		P demande s'ils ont fait attention à quelque chose.	Les E répondent non.
		P demande ce qu'il faut absolument vérifier pour écrire une équation paramétrique du plan.	Les E ne repondent pas.
		P demande combien de vecteurs directeurs sont nécessaires.	Les E répondent correctement.
		P dit qu'il fait deux directions et demande comment doivent être celles-ci.	Un E répond qu'elles doivent être orthogonales.
		P dit que ce n'est pas nécessaire.	Un E répond qu'elles doivent être non colinéaires.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P dit que les directions sont différentes et que les vecteurs directeurs doivent être non colinéaires.	Les E écoutent.
		P demande si c'est bien le cas.	Les E répondent et justifient correctement.
		P valide et reformule.	Les E écoutent.
		P écrit au tableau.	Les E copient.
		P demande comment déterminer si le point B appartient au plan.	Des E répondent correctement.
		P valide et demande ce qu'on cherche.	Les E répondent correctement.
		P valide et écrit le système à vérifier.	Les E copient.
		P demande comment déterminer les valeurs des paramètres.	Les E dictent.
		P écrit au tableau.	Les E copient et/ou vérifient leur réponse.
		P demande si le point B appartient au plan.	Les E répondent correctement.
		P écrit au tableau la conclusion.	Les E copient.
		P répond que ce n'est pas une obligation.	Un E demande si les valeurs des paramètres doivent toujours être égales.
6'58"	Exercices : recherche individuelle	P passe dans les bancs.	Les E travaillent.
5'38"	Correction collective de l'exercice 5	P demande la définition d'un vecteur normal à un plan.	Les E répondent correctement.
		P demande si le vecteur donné est un vecteur normal du plan.	Les E répondent correctement.
		P valide et reformule.	Les E écoutent.
		P demande un vecteur normal au plan.	Les E répondent correctement.
		P écrit au tableau le vecteur donné et la relation de colinéarité entre les deux vecteurs.	Les E vérifient leur réponse.
		P demande comment trouver la valeur k à prendre.	Les E répondent correctement.
		P écrit au tableau les systèmes sous la dictée.	Les E dictent.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P demande ce qu'on peut déduire du fait que la valeur de k est identique dans les trois équations du système.	Les E répondent correctement.
		P valide, reformule et précise.	Les E écoutent.
		P écrit la conclusion.	Les E copient.
8'04"	Exercices : recherche individuelle	P passe dans les bancs.	Les E travaillent.
13"	JDC	P demande de finir cet exercice.	Les E copient.
Séance 11			
22'15"	Correction collective de l'exercice 6	P demande ce que veut obtenir.	Les E répondent correctement.
		P demande quelles sont les données du problème.	Les E répondent correctement.
		P demande les données nécessaires pour atteindre l'objectif.	Les E répondent correctement.
		P demande la différence entre un vecteur directeur et un vecteur normal.	Les E répondent correctement.
		P valide et fait un dessin.	Les E écoutent.
		P demande une démarche.	Un E propose d'écrire d'abord une équation paramétrique.
		P écrit sous la dictée une équation paramétrique du plan.	Les E dictent.
		P demande comment changer de points de vue.	Les E répondent qu'il faut écrire un système et éliminer les paramètres.
		P valide et répète.	Les E écoutent.
		P demande ce qu'on aurait fait pour le changement de points de vue réciproque.	Les E répondent correctement.
		P valide et reformule.	Les E écoutent.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P écrit le système et les différentes étapes pour éliminer les paramètres au tableau avec la collaboration des E.	Les E participent et copient.
		P revient sur la démarche générale pour passer d'une équation paramétrique à une équation cartésienne.	Les E écoutent.
		P demande si une deuxième démarche a été envisagée.	Les E disent non.
		P explique qu'on peut déterminer un vecteur normal du plan. Il demande comment y parvenir.	Un E dit qu'un vecteur normal au plan est orthogonal aux vecteurs directeurs du plan.
		P valide et pose les composantes d'un vecteur normal au plan (a,b,c). Il demande comment traduire l'orthogonalité de ce vecteur avec les vecteurs directeurs du plan.	Les E répondent correctement.
		P valide et explique qu'il y a une conjonction à vérifier et donc un système doit être écrit.	Les E écoutent.
		P écrit au tableau le système de deux équations à trois inconnues.	Les E dictent le calcul et copient.
		P demande comment trouver les valeurs de a, b et c.	Les E proposent d'isoler a.
		P attire l'attention des E sur le fait qu'on élimine pas ces valeurs comme dans la première méthode mais qu'on cherche à les déterminer.	Les E écoutent.
		P écrit au tableau les différentes étapes pour isoler les valeurs a et b en fonction de c en collaboration avec les E.	Les E participent et copient.
		P écrit la forme générale d'un vecteur normal du plan et demande d'un choisir un.	Les E copient et choisissent $c = 1$.
		P valide et explique qu'on peut choisir toutes les valeurs de c sauf zéro car sinon on obtient le vecteur nul.	Les E écoutent.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P écrit le vecteur proposé.	Les E copient.
		P demande comment obtenir une équation cartésienne du plan.	Les E répondent correctement.
		P écrit une équation du plan.	Un E dicte. Les autres copient.
		P explique comment trouver le terme indépendant. Il écrit la formule générale vue au cours et la particularise à ce cas.	Les E écoutent.
		P fait remarquer que les équations obtenues avec les deux méthodes ne sont pas identiques.	Un E dit qu'elles sont équivalentes.
		P valide et montre qu'on a multiplié la première équation par trois.	Les E écoutent.
11'46"	Exercices : recherche individuelle	P passe dans les bancs.	Les E travaillent.
7'52"	Correction collective de l'exercice 7	P revient sur les éléments importants pour écrire une équation paramétrique d'un plan.	Les E répondent correctement.
		P écrit une équation vectorielle d'un plan en rappelant le chemin suivi dans la théorie.	Les E copient et écoutent.
		P revient sur le passage d'une équation vectorielle à une équation paramétrique.	Les E écoutent.
		P demande si on peut déterminer un point du plan.	Un E propose $(1,2,3)$. Un autre propose $(0,-2,1)$.
		P valide les deux propositions et en écrit une au tableau.	Les E copient.
		P demande deux vecteurs directeurs du plan.	Les E proposent $(2,-1,3)$ et $(4,2,-6)$.
		P dit qu'il n'est pas d'accord avec les propositions.	Un E dit que les deux vecteurs sont colinéaires.
		P valide, justifie la colinéarité et l'écrit au tableau.	Les E écoutent et copient.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P montre l'intérêt des dessins, en réalise un et demande comment faire pour obtenir deux vecteurs directeurs du plan non colinéaires.	Les E dessinent et font des propositions incorrectes.
		P invalide les propositions et explique pourquoi en faisant des gestes.	Les E écoutent.
		P valide et répète en complétant le dessin.	Un E propose de prendre un vecteur cité et de prendre le vecteur joignant les deux points.
10"	JDC	P demande de finir cet exercice.	Les E copient.
Séance 12			
12'22"	Correction collective de l'exercice 7	P rappelle ce qui a été fait à la séance précédente.	Les E écoutent.
		P demande une équation paramétrique du plan.	Les E dictent.
		P écrit l'équation proposée.	Les E vérifient.
		P demande d'où est issu le point et les deux vecteurs directeurs proposés.	Les E expliquent.
		P demande si les deux vecteurs donnés sont bien non colinéaires.	Les E répondent et justifient correctement.
		P écrit au tableau.	Les E complètent leurs notes.
		P demande comment changer de points de vue.	Les E répondent correctement.
		P écrit les différentes étapes au tableau pour avoir une équation cartésienne du plan.	Les E participent.
		P demande un vecteur normal du plan.	Les E répondent correctement.
10'31"	Correction collective de l'exercice 8	P valide.	Un E propose d'écrire une équation cartésienne et puis de passer à une équation paramétrique.
		P demande une équation cartésienne du plan.	Des E répondent correctement.
		P valide, particularise la formule générale et écrit au tableau.	Les E écoutent et copient.
		P explique comment trouver le terme indépendant.	Les E écoutent.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P propose d'écrire une équation équivalente car tous les facteurs sont divisibles par deux.	Les E acquiescent.
		P écrit au tableau.	Les E copient.
		P demande comment changer de points de vue.	Les E proposent d'insérer deux paramètres.
		P valide et demande comment insérer les paramètres.	Un E propose de remplacer une des inconnues par une lettre.
		P demande combien de lettres doivent être posées.	Les E répondent deux.
		P valide et écrit au tableau.	Les E copient.
		P demande comment obtenir la dernière équation.	Les E répondent correctement.
		P valide et écrit au tableau.	Les E copient.
		P demande comment passer du système d'équations paramétriques à une équation paramétrique sous forme générale.	Les E font des propositions incorrectes.
		P invalide et rappelle qu'ils ont déjà fait ça dans un autre exercice. P demande comment faire.	Les E écoutent. Un E propose de regarder les coefficients devant les paramètres.
		P valide et demande les coefficients devant le paramètre lambda dans chaque équation.	Les E répondent correctement.
		P écrit au tableau.	Les E copient.
		Idem avec le paramètre mu.	Les E répondent correctement.
		P écrit au tableau.	Les E copient.
		P demande comment trouver un point du plan.	Un E répond correctement.
		P écrit au tableau.	Les E copient.
		P valide.	Un E demande si on peut prendre le point de l'énoncé.
		P répète le passage du système à une équation paramétrique.	Les E écoutent.
10'10"	Exercices : recherche individuelle	P passe dans les bancs.	Les E travaillent.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
1'33"	Correction collective de l'exercice 9	P demande si les deux plans sont perpendiculaires.	Les E répondent correctement.
		P demande une justification.	Un E dit que leur produit scalaire vaut 0.
		P demande des précisions.	L'E précise sa réponse.
		P valide et demande un vecteur normal des deux plans.	Les E répondent correctement.
		P écrit au tableau.	Les E copient.
		P demande de calculer le produit scalaire et écrit sous la dictée.	Les E dictent.
5'30"	Correction collective de l'exercice 10	P demande une démarche.	Les E proposent de prendre un vecteur normal du plan α colinéaire à un vecteur normal au plan δ.
		P valide et demande un vecteur normal du plan δ.	Les E répondent correctement.
		P valide et écrit au tableau.	Les E copient.
		P demande un vecteur normal du plan α.	Les E proposent $(-4,0,2)$.
		P valide et fait remarquer qu'on peut prendre le vecteur déjà cité.	Les E écoutent.
		P écoute	Un E dit qu'alors les deux plans sont égaux.
		P demande ce qui différencie les deux plans.	Un E répond le point.
		P valide et demande une équation cartésienne du plan α.	Les E répondent correctement.
		P écrit au tableau et fait une conclusion.	Les E écoutent et copient.
2'	Exercices : recherche individuelle	P passe dans les bancs.	Les E travaillent.
Séance 13			
23'17"	Correction collective de l'exercice 11	Voir tableau XII.16.	

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
2’02”	Cours : distance entre deux points	P demande comment calculer la distance entre deux points dans le plan.	Les E ne répondent pas.
		P trace un repère et y place deux points A et B. Il demande comment calculer la distance entre les deux points.	Les E regardent et ne répondent pas.
		P dessine un triangle rectangle et indique la longueur des deux côtés de l’angle droit.	Les E écoutent.
		P explique comment trouver la distance entre les deux points avec Pythagore.	Les E écoutent.
40”	Cours : distance entre deux points dans l’espace	P étend la formule du plan à l’espace.	Les E écoutent.
8’07”	Cours : distance entre un point et une droite	P fait un dessin et demande comment trouver la distance entre un point et une droite dans l’espace.	Un E propose de prendre un point de la droite.
		P prend un point quelconque et demande si c’est un bon choix.	Les E répondent correctement.
		P demande une justification.	Un E répond que ce n’est pas le plus court chemin entre la droite et le point.
		P demande comment déterminer le plus court chemin.	Un E propose de tracer une droite perpendiculaire à celle connue passant par le point donné.
		P montre avec des gestes que cela fonctionne dans le plan mais pas dans l’espace.	Les E écoutent.
		P écoute.	Un E propose de faire une parallèle à cette deuxième droite mais perpendiculaire à la première.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P explique qu'alors on ne passe plus par le point.	Les E écoutent.
		P écoute.	Un E propose de trouver un plan perpendiculaire à la droite donnée et passant par le point donné.
		P valide, répète et complète en même temps le dessin.	Les E écoutent et copient.
		P demande comment trouver un tel plan.	Un E dit qu'un vecteur directeur de la droite est un vecteur normal au plan.
		P valide et écrit la première étape de la méthode.	Les E copient.
		P demande comment calculer la distance entre la droite et le point.	Un E propose de trouver une droite incluse au plan passant par le point donné.
		P montre sur le dessin que cela ne fonctionnne pas.	Les E écoutent.
		P demande comment faire.	Un E propose de déterminer le point de percée de la droite dans le plan.
		P valide, place le point de percée sur le dessin et complète la méthode.	Les E copient.
		P demande ce qu'il reste à faire.	Un E dit qu'il faut calculer la distance entre les deux points.
		P valide, écrit au tableau et complète la méthode.	Les E copient.
6'48"	Cours : distance entre un point et un plan	P dessine un point et un plan. Il demande comment calculer la distance entre le point et le plan.	Un E propose de trouver un plan perpendiculaire à celui connu passant par le point donné.
		P demande des précisions.	L'E dit qu'on cherche une droite incluse dans ce plan passant par le plan donné et qui coupe le plan connu.
		P dit que les deux plans sont sécants suivant une droite et que cela revient à calculer la distance entre le point et la droite avec la méthode précédente.	Les E écoutent.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P demande s'il n'y a pas une méthode plus rapide.	Un E propose de trouver un plan parallèle au premier et passant par le point donné.
		P demande des précisions.	L'E ne répond pas.
		P écoute.	Un E propose de trouver une droite perpendiculaire au plan passant par le point donné.
		P valide, complète le dessin et écrit au tableau la méthode.	Les E écoutent et copient.
		P demande comment calculer la distance entre le point et le plan.	Un E propose de chercher le point de percée de la droite dans le plan et de calculer la distance entre ce point et celui donné.
		P valide, complète la méthode et le dessin et écrit au tableau.	Les E copient.
		P lit la formule dans les feuilles. Il explique que la preuve reprend les trois étapes déterminées. Il attire l'attention sur les différentes lettres dans la formule.	Les E écoutent et suivent.
3'26"	Correction collective de l'exercice 24	P demande d'appliquer la formule.	Les E répondent correctement.
		P écrit sous la dictée.	Les E copient.
		P montre comment la formule a été particularisée et attire l'attention sur la position du terme indépendant dans une équation cartésienne de plan.	Les E écoutent.
		P demande de calculer.	Les E calculent et disent ce qu'il faut écrire.
		P écrit au tableau.	Les E copient.
Séance 14			
4'	Correction collective de l'exercice 12	Voir tableau XII.17.	

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
1’54”	Correction collective de l’exercice 16	P demande l’objet décrit par l’ensemble.	Un E répond et justifie correctement.
		P valide et écrit au tableau.	Les E copient et/ou vérifient leur réponse.
		P réexplique avec le repère de la classe.	Les E écoutent.
6’32”	Correction collective de l’exercice 15	Voir tableau XII.18.	
19’38”	Correction collective de l’exercice 26	P demande comment calculer la distance entre la droite et le point.	Un E dit qu’il faut chercher un plan.
		P demande comment doit être ce plan.	Les E ne répondent pas.
		P renvoie dans le cours.	Les E cherchent et disent que le plan doit être perpendiculaire à la droite.
		P demande comment trouver un tel plan.	Les E répondent correctement.
		P demande un vecteur directeur de la droite.	Les E répondent correctement.
		P demande ce qu’on fait de ce vecteur directeur.	Les E répondent correctement.
		P demande une équation cartésienne du plan.	Des E dictent.
		P écrit au tableau.	Les E copient.
		P demande quelle est la deuxième étape.	Les E répondent correctement.
		P demande la définition d’un point de percée.	Des E répondent correctement.
		P demande comment déterminer le point de percée de la droite dans le plan.	Les E répondent correctement.
		P écrit le système à résoudre et les différentes étapes de la résolution avec la collaboration des E.	Les E disent quoi écrire et faire pour résoudre le système. Les E copient.
		P écrit les coordonnées du point de percée.	Les E copient.
		P demande quelle est la troisième étape.	Les E répondent correctement.
		P écrit la formule générale et la particularise.	Les E copient.
		P valide les calculs et écrit au tableau.	Les E calculent et copient.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
9'32"	Correction collective de l'exercice 18	Voir tableau XII.19.	
15"	JDC	P demande de préparer l'exercice 20.	Les E copient.
		Séance 15	
9'48"	Correction collective de l'exercice 20	P demande ce qu'on peut dire du système.	Les E disent que les deux plans sont parallèles.
		P valide et écrit au tableau.	Les E copient.
		P demande un vecteur normal pour chaque plan.	Les E répondent correctement.
		P écrit au tableau.	Les E copient.
		P demande pourquoi les deux vecteurs sont colinéaires.	Les E répondent en utilisant la définition.
		P écrit au tableau sous la dictée.	Les E dictent et copient.
		P demande la valeur de k.	Les E répondent correctement.
		P écrit au tableau.	Les E copient.
		P demande si les plans sont confondus ou parallèles distincts.	Les E répondent correctement.
		P demande une justification.	Un E dit que les termes indépendants sont aussi proportionnels.
		P valide et écrit au tableau pourquoi les deux équations sont équivalentes.	Les E copient.
		P demande l'ensemble des solutions du système.	Un E dit que c'est une équation du plan.
		P écrit cet ensemble de solutions.	Les E copient.
		P demande comment vérifier la réponse.	Un E propose de résoudre le système.
		P valide et demande comment résoudre le système.	Les E disent qu'ils n'ont pas réussi à résoudre algébriquement le système.
		P explique et écrit chaque étape de la résolution.	Les E écoutent et copient.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P écrit l'ensemble des solutions du système et demande s'il décrit bien un plan.	Les E copient et confirment.
		P demande une justification.	Des E répondent correctement.
		P demande une équation paramétrique du plan.	Un E donne un point, un autre un vecteur directeur et un dernier le deuxième vecteur directeur.
		P écrit au tableau et revient sur les avantages de l'interprétation géométrique.	Les E copient et écoutent.
8'23"	Correction collective de l'exercice 22	P demande la définition d'un point de percée.	Les E répondent correctement.
		P lit l'énoncé et demande comment déterminer le point de percée de la droite dans le plan.	Un E propose de prolonger la droite et le plan.
		P explique qu'on peut effectivement tracer la droite EF puisqu'elle est déterminée par deux points.	Les E écoutent.
		P demande comment déterminer le point de percée de cette droite dans le plan.	Un E répond qu'il faut faire un dessin et prolonger la droite BC.
		P demande pourquoi prolonger cette droite en particulier.	L'E répond que la droite BC est dans le même plan que la droite EF.
		P valide et répète la démarche générale.	Les E écoutent.
		P écrit au tableau.	Les E copient.
		P demande pourquoi les droites BC et EF sont sécantes.	Un E dit qu'elles sont toutes les deux incluses au plan ABC.
		P valide et demande de déterminer le point de percée sur le dessin.	Les E travaillent.
		P cite les inconvénients et les avantages de la démarche en géométrie synthétique et en géométrie analytique.	Les E écoutent.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P lit l'énoncé du point b et demande ce que signifie le repère fixé.	Les E répondent correctement.
		P demande les coordonnées du point D.	Les E répondent correctement.
21'35"	Exercices : recherche individuelle	P demande de déterminer le point de percée.	Les E travaillent.
5'	Correction collective de l'exercice 22	P demande comment déterminer les coordonnées des points E et F.	Un E propose de calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
		P écrit au tableau les composantes de ce vecteur.	Les E vérifient leur réponse et/ou copient.
		P demande comment déterminer les coordonnées des deux points.	Les E répondent correctement.
		P écrit au tableau.	Les E vérifient leur réponse et/ou copient.
		P demande quel type d'équation écrire pour la droite EF.	Les E proposent d'écrire une équation paramétrique de la droite.
		P valide et demande une telle équation.	Les E dictent.
		P écrit au tableau et valide.	Les E vérifient leur réponse et/ou copient.
		P demande une équation de la droite BC.	Les E donnent une équation paramétrique.
		P écrit au tableau sous la dictée.	Les E vérifient leur réponse et/ou copient.
Séance 16			
5'04"	Correction collective de l'exercice 22	P écrit les équations trouvées à la séance précédente et demande un vecteur colinéaire à celui donné.	Les E en fournissent un.
		P écrit au tableau.	Les E copient.
		P dit qu'on cherche le point d'intersection entre les droites BC et EF. Pour ce faire, il explique qu'un système doit être résolu et écrit le système au tableau.	Les E écoutent et copient.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P explique comment résoudre un système où les deux équations sont paramétriques.	Les E écoutent.
		P écrit les différentes étapes de la résolution au tableau.	Les E écoutent et copient.
		P demande les coordonnées du point de percée.	Les E répondent correctement.
		P écrit au tableau.	Les E copient.
3'12"	Lecture de l'énoncé de l'exercice 23	P demande aux E de lire l'énoncé individuellement et d'essayer de comprendre le problème.	Les E travaillent.
8'20"	Correction collective de l'exercice 23	P demande ce qu'ils ont compris.	Un E dit qu'il ne sait pas ce qu'est une pondération.
		P explique en faisant un parallèle avec les points qu'ils ont à la période.	Les E écoutent.
		P sollicite un E pour lire l'énoncé phrase par phrase. Il demande à chaque phrase ce qu'il est important de retenir.	L'E lit. Les autres disent ce qui est important.
		P écrit au tableau les trois questionnaires et les pondérations associées.	Les E copient.
		P demande d'où vient le nombre 100.	Un E explicite le calcul.
		P valide et explique les pondérations.	Les E écoutent.
		P demande ce que représente (x, y, z).	Un E répond un candidat est associé à un point.
		P valide, répète et complète la proposition.	Les E écoutent.
		P demande quelles sont les possibilités de notes.	Un E répond qu'elles sont toutes comprises entre 0 et 20.
		P demande l'objet représenté par l'ensemble des triplets possibles.	Un E répond un cube.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P dessine le cube.	Les E copient.
		P prend des exemples de candidats et les place sur le cube.	Les E écoutent.
2'25"	Exercices : recherche individuelle	P passe dans les bancs.	Les E travaillent.
21'39"	Correction collective de l'exercice 23	P demande s'il est possible d'avoir 50/100.	Un E propose les notes 10/20, 10/20 et 10/20.
		P demande une justification.	L'E dit $2.10+10+2.10=50$.
		P valide et demande si c'est la seule possibilité.	Les E répondent non. Un E donne une deuxième possibilité.
		P demande une équation vérifiée par toutes les possibilités.	Un E donne une équation cartésienne correcte du plan.
		P valide et écrit au tableau.	Les E copient.
		P demande un point et un vecteur normal du plan.	Les E répondent correctement.
		P trace le plan pour réaliser la section du cube par le plan grâce à un logiciel.	Les E visualisent.
		P écoute	Un E demande pourquoi tous les points du cube ne sont pas aussi sur le plan.
		P donne un exemple de triplet appartenant au cube mais pas au plan et revient sur le principe d'une section de cube par un plan.	Les E écoutent.
		P demande ce qu'il se passe si le candidat a zéro en histoire.	Un E dit qu'on est dans le plan $x=0$.
		P valide et demande un exemple d'un tel candidat.	Un E propose $(0,10,20)$.
		P revient sur le cube et demande où se situe tous les candidats possibles.	Des E proposent l'arête AD. D'autres E proposent l'arête AB.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
		P explique qu'on a essayé de résoudre un système de deux équations à trois inconnues. Il écrit le système au tableau.	Les E écoutent et copient.
		P demande les objets décrits par ces équations.	Les E répondent correctement.
		P explique qu'on cherche alors l'intersection de deux plans.	Les E écoutent.
		P demande où se situe les deux plans sur le dessin proposé par le logiciel.	Les E répondent correctement.
		P demande alors quel est l'objet décrit par l'intersection de ces deux plans.	Les E répondent correctement.
		P écrit au tableau.	Les E visualisent et copient.
		P demande ce qu'il se passe si $y = 0$ et si $z = 0$.	Dans chaque cas, les E répondent correctement.
		P demande quelles équations doivent être vérifiées pour la troisième question.	Un E répond correctement.
		P écrit au tableau.	Les E copient.
		P demande s'il est possible de trouver un triplet qui vérifie l'équation et l'inéquation.	Un E propose $(0, 20, 20)$.
		P valide et demande s'il y a d'autres possibilités.	Les E répondent correctement.
		P demande où se situent tous ces points.	Les E identifient la zone.
		P écrit au tableau.	Les E copient.

Annexe K

Les questionnaires

▶▶ Les étudiants de BAB1

① Dites si l'objet de l'espace $\mathbb{R}^3$ décrit par une équation, un système d'équations ou un ensemble est une droite ou un plan. Pour certaines réponses, une justification vous est demandée.

$2x+y=3$	Droite ☐	Plan ☐	Je ne connais pas la réponse ☐
$x=1$	Droite ☐	Plan ☐	Je ne connais pas la réponse ☐
$\begin{cases} 2x+3y+4z=2 \\ x=1 \end{cases}$	Droite ☐	Plan ☐	Je ne connais pas la réponse ☐

Justification :

$\begin{cases} x = 1+4\lambda \\ y = 2+5\lambda \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3+6\lambda \end{cases}$ Droite ☐ Plan ☐ Je ne connais pas la réponse ☐

$\begin{cases} x = 1+4\lambda+7\mu \\ y = 2+5\lambda+8\mu \text{ où } \lambda,\mu \in \mathbb{R} \\ z = 3+6\lambda+9\mu \end{cases}$ Droite ☐ Plan ☐ Je ne connais pas la réponse ☐

$\begin{cases} 2x+3y+4z = 2 \\ 4x+6y+8z = 4 \end{cases}$ Droite ☐ Plan ☐ Je ne connais pas la réponse ☐

Justification :

$\left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (a,b,c) \text{ est simultanément orthogonal à } (1,-1,1) \text{ et } (1,2,1)\right\}$

Droite ☐ Plan ☐ Je ne connais pas la réponse ☐

Justification :

② Soit l'ensemble $E = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (a,b,c) \text{ est orthogonal à } (1,-1,1)\right\}$. Déterminez parmi les trois figures suivantes, quel est l'objet décrit par l'ensemble E. Justifiez ensuite votre réponse.

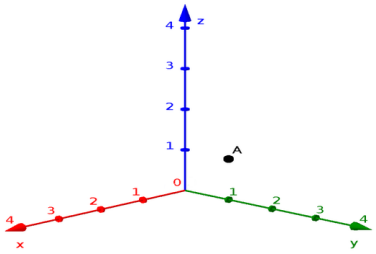


FIGURE K.1

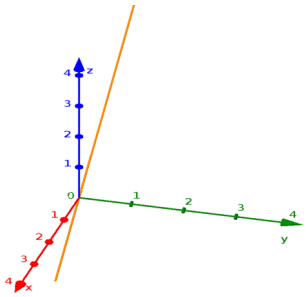


FIGURE K.2

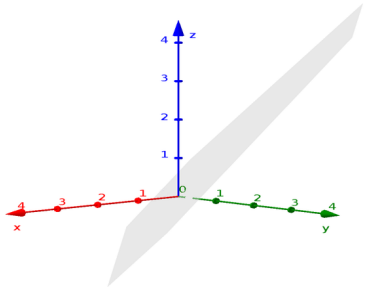


FIGURE K.3

L'ensemble E est décrit par la figure : ☐

Justification :

►► Les élèves

① Dites si l'objet de l'espace $\mathbb{R}^3$ décrit par une équation, un système d'équations ou un ensemble est une droite ou un plan. Pour certaines réponses, une justification vous est demandée.

$2x+y=3$	Droite ☐	Plan ☐	Je ne connais pas la réponse ☐
$x=1$	Droite ☐	Plan ☐	Je ne connais pas la réponse ☐
$\begin{cases} 2x+3y+4z=2 \\ x=1 \end{cases}$	Droite ☐	Plan ☐	Je ne connais pas la réponse ☐

Justification :

$\begin{cases} x=1+4\lambda \\ y=2+5\lambda \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \\ z=3+6\lambda \end{cases}$	Droite ☐	Plan ☐	Je ne connais pas la réponse ☐
$\begin{cases} x=1+4\lambda+7\mu \\ y=2+5\lambda+8\mu \text{ où } \lambda,\mu \in \mathbb{R} \\ z=3+6\lambda+9\mu \end{cases}$	Droite ☐	Plan ☐	Je ne connais pas la réponse ☐
$\begin{cases} 2x+3y+4z=2 \\ 4x+6y+8z=4 \end{cases}$	Droite ☐	Plan ☐	Je ne connais pas la réponse ☐

Justification :

$\left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (a,b,c) \text{ est simultanément orthogonal à } (1,-1,1) \text{ et } (1,2,1)\right\}$

Droite ☐ Plan ☐ Je ne connais pas la réponse ☐

Justification :

② Soit l'ensemble $E = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (a,b,c) \text{ est orthogonal à } (1,-1,1)\right\}$. Déterminez parmi les trois figures suivantes, quel est l'objet décrit par l'ensemble E. Justifiez ensuite votre réponse.

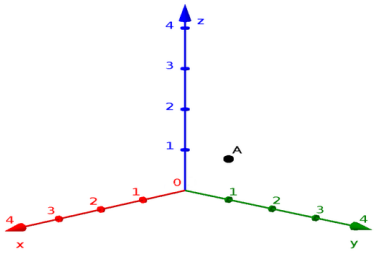


FIGURE K.4

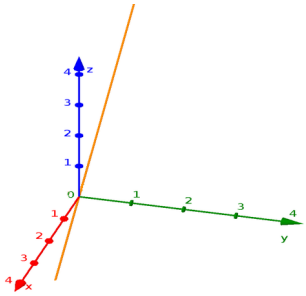


FIGURE K.5

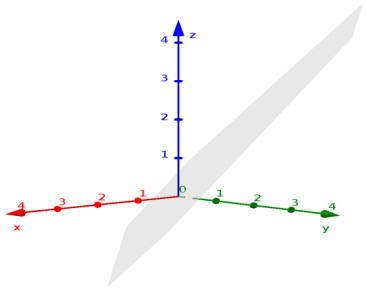


FIGURE K.6

L'ensemble E est décrit par la figure : ☐

Justification :

③ Donnez une équation paramétrique du plan α parallèle au plan $\beta \equiv 2x+3y+4z=8$ et comprenant le point $A(1,4,5)$.

④ Déterminez une équation cartésienne du plan α parallèle à la droite $d \equiv \frac{x+1}{2} = y = -2z+1$, perpendiculaire au plan $\beta \equiv x+y+2z=0$ et passant par le point $A(2,3,1)$.