Difficultés d'étudiants universitaires dans la conceptualisation des équations de droites et de plans dans l'espace

Céline NIHOUL – UMons – celine.nihoul@umons.ac.be

Mon travail de thèse trouve son origine dans mon expérience d'enseignante. J'interviens en effet dans un cours de mathématiques générales suivi par des étudiants en première année universitaire dans une filière mathématique. Plus précisément, je me concentre sur le chapitre qui traite des équations de droites et de plans dans l'espace. Ce choix est d'abord lié au fait qu'il s'agit d'un des rares chapitres de géométrie dans le cursus des étudiants en mathématique dans mon université. De plus, les questions en lien avec ce chapitre dans les évaluations sont mal réussies par de nombreux étudiants. Dans un premier temps, je me suis attachée à mieux comprendre les difficultés des étudiants en relation avec l'enseignement visé. L'objectif de cette communication est de montrer comment cette première analyse m'a permis de formuler ma problématique de recherche.

Dans le cours dont il est question ici, le chapitre sur les équations de droites et de plans dans l'espace vient après le chapitre des équations de droites dans le plan. Des difficultés récurrentes apparaissent déjà dans le plan. L'une d'elles concerne l'interprétation géométrique des objets à partir de leurs équations. Par exemple, face à l'équation cartésienne , de nombreux étudiants ne sont pas capables de reconnaitre spontanément l'objet géométrique décrit par cette équation. Leur démarche consiste à construire un repère orthonormé dans lequel ils placent quelques points satisfaisant la relation et en déduisent qu'il s'agit d'une droite parce que les points sont alignés.

Une autre difficulté rencontrée peut selon moi être liée aux objectifs du cours. Celui-ci s'inscrit dans le contexte de la transition secondaire-université. Un de ses objectifs est de reprendre avec les étudiants des notions vues au lycée tout en y intégrant des exigences plus spécifiques de l'activité mathématique à l'université telles que la rédaction des raisonnements, l'explicitation des démarches et une utilisation appropriée des connaissances en logique et en théorie des ensembles. Un travail sur l'interprétation géométrique d'ensembles de points satisfaisant une ou plusieurs conditions apparaît donc rapidement dans le cours. Or, en ce qui concerne les droites dans le plan, puis les droites et les plans dans l'espace, je remarque que cette conception ensembliste est absente chez la majorité des étudiants. Plus précisément, peu d'étudiants sont capables de dire que la droite d'équation est en fait l'ensemble des couples qui vérifient tous la relation . Mais cet aspect se complexifie quand on passe dans l'espace où par exemple l'équation n'est pas associée à un ensemble de triplets, et quand elle l'est, les étudiants considèrent souvent que ce sont des triplets de la forme qui sont solutions de l'équation. Nombreux sont aussi les étudiants qui considèrent l'absence de la variable comme provenant de l'annulation de la cote plutôt que du coefficient devant celle-ci. Cette difficulté a également été identifiée par Maurel (2001) qui l'interprète comme une confusion dans le statut des différentes lettres. Les étudiants ne parviennent pas à distinguer les variables et leurs coefficients. Du coup, la majorité des étudiants décrit l'équation dans l'espace comme étant une droite au lieu d'un plan. Cette conception erronée a déjà été repérée par Schneider &

Lebeau (2010). La difficulté d'interprétation des objets déjà repérée dans le plan émerge également dans l'espace.

Ces premières difficultés sont repérées à la fois dans le cours théorique et dans les exercices. Mais de nouvelles difficultés émergent dans les TD. C'est le cas de la notion d'orthogonalité. Par exemple, l'objet décrit par l'ensemble des vecteurs orthogonaux à un vecteur donné dans le plan est la droite d'équation alors que dans l'espace, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à un vecteur donné est le plan d'équation . Les objets décrits par des ensembles de points satisfaisant des conditions semblables (ici l'orthogonalité à un vecteur donné) sont donc différents selon que l'on se place dans le plan ou dans l'espace. Il est aussi frappant de constater que les étudiants s'appuient très rarement sur un dessin pour essayer de guider leur intuition géométrique. Ils sont beaucoup plus attachés aux calculs. Ils essaient donc d'utiliser les mêmes techniques de résolution dans le plan et dans l'espace, comme par exemple pour déterminer une équation cartésienne d'une droite (ou d'un plan) perpendiculaire à une autre droite (ou un autre plan) dont une équation cartésienne sera donnée. Ils n'adaptent donc pas leur méthode de résolution en fonction du contexte.

Cette première description des difficultés des étudiants montre aussi que dans le cours étudié ici, les notions enseignées sont sources de nombreuses ruptures avec les connaissances anciennes des étudiants dans le plan. Les droites et les plans dans l'espace apparaissent donc comme des extensions de notions précédentes avec accident au sens de Pariès & Robert (2009) et sont sources de conceptions aussi bien manquantes qu'erronées chez les étudiants.

En ce qui concerne les choix d'exercices dans le cours, je sais qu'un travail dans des registres d'écritures variés peut être producteur de sens chez les étudiants (Douady, 1987). Les exercices proposés aux étudiants requièrent donc une certaine flexibilité dans les représentations des notions étudiées pour passer d'un registre à un autre. Mais le manque de questionnement de nos étudiants sur l'interprétation géométrique des objets apparait comme un réel obstacle.

Ces difficultés récurrentes soulèvent la question de savoir comment ces notions qui sont dans les programmes du lycée sont enseignées, d'autant que de nouveaux programmes viennent d'entrer en vigueur en Belgique et préconisent « une articulation des différents registres de représentation sémiotique d'un objet ». Sur un plan plus transversal, ces nouveaux référentiels insistent aussi sur le fait que les connaissances en logique et en théorie des ensembles « prennent naturellement leur place au fil des unités » au fil du cours. La question suivante émerge donc :

Quels sont les leviers mis en place par les enseignants du lycée pour interpréter les objets géométriques et quel travail sur les registres d'écritures proposent-ils ?

Je fais de plus l'hypothèse que les mots choisis par les enseignants pour interpréter géométriquement des objets introduits par leurs équations ont un impact sur les apprentissages des étudiants. Se pose alors la question suivante :

Quels sont les éléments du langage utilisés par les enseignants pour amorcer le passage des équations cartésiennes à l'interprétation des objets géométriques et réciproquement ?

Cette problématique m'amène donc à m'intéresser aux moments d'exposition des connaissances. Des outils récents sont développés par Robert et Vandebrouck (2014) pour analyser ces fragments du discours de l'enseignant qui permettent d'amorcer des connections entre ce qu'il dit et une possible inscription dans la ZPD des étudiants. C'est ce que les auteurs appellent des proximités-en-acte. Dans la suite de mon travail, je compte me rendre dans des classes du lycée pour filmer les enseignants et étudier la présence ou non de ces proximités. Un des objectifs de mon travail de thèse vise aussi à répondre à la question suivante:

Est-il possible d'élaborer une séquence d'enseignement pour le lycée afin de travailler spécifiquement sur l'interprétation géométrique des objets et leurs possibles représentations dans le chapitre des équations de droites et de plans dans l'espace ?

Références :

DOUADY R. (1987) Jeux de cadres et dialectique outil/objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7/2, 5-31.

MAUREL M. (2001) Derrière la droite, l'hyperplan. *Repères-IREM*, 42, 83-114.

PARIES M., ROBERT A. (2009) Changement de cadres en géométrie dans l'espace. *Repères-IREM*, 75, 35-45.

ROBERT A., VANDEBROUCK F. (2014) Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes, *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz*, 10.

SCHNEIDER M., LEBEAU C. (2010) Equations incomplètes de plans et obstacles à la nécessité épistémologique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 30.1, 11-45.