Outils didactiques et méthodologie pour mieux comprendre les difficultés d'enseignement des droites et des plans dans l'espace

Céline Nihoul

Université de Mons
Département de Mathématique

UMONS Faculté des Sciences

13 avril 2016

La didactique des mathématiques

Définition (Robert, 2008)

La didactique des mathématiques est un champ de recherche qui traite des conditions de diffusion et de transmission des mathématiques. Elle étudie les liens entre ce qu'on enseigne et ce que les élèves apprennent.

La didactique des mathématiques

Définition (Robert, 2008)

La didactique des mathématiques est un champ de recherche qui traite des conditions de diffusion et de transmission des mathématiques. Elle étudie les liens entre ce qu'on enseigne et ce que les élèves apprennent.

- Notions choisies : droites et plans dans l'espace.

La didactique des mathématiques

Définition (Robert, 2008)

La didactique des mathématiques est un champ de recherche qui traite des conditions de diffusion et de transmission des mathématiques. Elle étudie les liens entre ce qu'on enseigne et ce que les élèves apprennent.

- Notions choisies : droites et plans dans l'espace.
- Premières questions :
  - Quelles sont les difficultés d'apprentissage ?
  - En quoi est-ce une matière difficile à enseigner ?

Plan

1 Difficultés d'enseignement

2 Étude didactique de l'enseignement des notions

3 Conclusion

Plan

1 Difficultés d'enseignement

2 Étude didactique de l'enseignement des notions

3 Conclusion

Séquence d'enseignement

En Mathématiques élémentaires :

- Chapitre qui suit l'étude des équations de droites dans le plan.

Séquence d'enseignement

En Mathématiques élémentaires :

- Chapitre qui suit l'étude des équations de droites dans le plan.

Introduction

On a établi que la droite d'équation $ax + by = c$ est l'ensemble des couples (x, y) du plan qui vérifient l'égalité $ax + by = c$. Quel est maintenant l'objet géométrique de l'espace décrit par cette équation ?

Séquence d'enseignement

En Mathématiques élémentaires :

- Chapitre qui suit l'étude des équations de droites dans le plan.

Introduction

On a établi que la droite d'équation $ax + by = c$ est l'ensemble des couples (x, y) du plan qui vérifient l'égalité $ax + by = c$. Quel est maintenant l'objet géométrique de l'espace décrit par cette équation ?

- Déroulement de la séquence :
  - équations incomplètes de plans.
  - équations générales de plan $ax + by + cz = d$ où (a, b, c) est un vecteur normal.
  - équations paramétriques d'une droite dans l'espace.
  - systèmes d'équations cartésiennes d'une droite dans l'espace.

Équation et ensemble de points dans l'espace

L'équation $2x + 3y = 6$ décrit un plan dans l'espace.

DIFFICULTÉS :

- Reconnaître qu'une équation de la forme $ax + by = d$ décrit un plan dans l'espace (Schneider & Lebeau, 2010).
  $\Rightarrow$ un ensemble de triplets (x, y, z) vérifiant l'équation $2x + 3y = 6$.

Équation et ensemble de points dans l'espace

L'équation $2x + 3y = 6$ décrit un plan dans l'espace.

DIFFICULTÉS :

- Reconnaître qu'une équation de la forme $ax + by = d$ décrit un plan dans l'espace (Schneider & Lebeau, 2010).
  $\Rightarrow$ un ensemble de triplets (x, y, z) vérifiant l'équation $2x + 3y = 6$.
- Interpréter un objet comme un ensemble de points.
  $\Rightarrow$ les ensembles $\{\left(x, \frac{6-2x}{3}, z\right) | x, z \in \mathbb{R}\}$ ou $\{\left(\frac{6-3y}{2}, y, z\right) | y, z \in \mathbb{R}\}$.

Équation et ensemble de points dans l'espace

L'équation $2x + 3y = 6$ décrit un plan dans l'espace.

DIFFICULTÉS :

- Reconnaître qu'une équation de la forme $ax + by = d$ décrit un plan dans l'espace (Schneider & Lebeau, 2010).
  $\Rightarrow$ un ensemble de triplets (x, y, z) vérifiant l'équation $2x + 3y = 6$.
- Interpréter un objet comme un ensemble de points.
  $\Rightarrow$ les ensembles $\{\left(x, \frac{6-2x}{3}, z\right) | x, z \in \mathbb{R}\}$ ou $\{\left(\frac{6-3y}{2}, y, z\right) | y, z \in \mathbb{R}\}$.

Points de vue (Rogalski, 1995)

Un point de vue sur un objet mathématique caractérise la manière de regarder, de faire fonctionner et éventuellement de définir cet objet.

Équation et ensemble de points dans l'espace

L'équation $2x + 3y = 6$ décrit un plan dans l'espace.

DIFFICULTÉS :

- Reconnaître qu'une équation de la forme $ax + by = d$ décrit un plan dans l'espace (Schneider & Lebeau, 2010).
  $\Rightarrow$ un ensemble de triplets (x, y, z) vérifiant l'équation $2x + 3y = 6$.
- Interpréter un objet comme un ensemble de points.
  $\Rightarrow$ les ensembles $\{\left(x, \frac{6-2x}{3}, z\right) | x, z \in \mathbb{R}\}$ ou $\{\left(\frac{6-3y}{2}, y, z\right) | y, z \in \mathbb{R}\}$.

Points de vue (Rogalski, 1995)

Un point de vue sur un objet mathématique caractérise la manière de regarder, de faire fonctionner et éventuellement de définir cet objet.

$\Rightarrow$ Articuler les points de vue cartésien et ensembliste.

Équation et ensemble de points dans l'espace

L'équation $2x + 3y = 6$ décrit un plan dans l'espace.

DIFFICULTÉS :

- Reconnaître qu'une équation de la forme $ax + by = d$ décrit un plan dans l'espace (Schneider & Lebeau, 2010).
  $\Rightarrow$ un ensemble de triplets (x, y, z) vérifiant l'équation $2x + 3y = 6$.
- Interpréter un objet comme un ensemble de points.
  $\Rightarrow$ les ensembles $\{\left(x, \frac{6-2x}{3}, z\right) | x, z \in \mathbb{R}\}$ ou $\{\left(\frac{6-3y}{2}, y, z\right) | y, z \in \mathbb{R}\}$.

Points de vue (Rogalski, 1995)

Un point de vue sur un objet mathématique caractérise la manière de regarder, de faire fonctionner et éventuellement de définir cet objet.

$\Rightarrow$ Articuler les points de vue cartésien et ensembliste.

- Confondre les différents statuts des lettres, notamment les variables et les coefficients (Maurel, 2001).
  $\Rightarrow$ seuls les triplets de la forme $(x, \frac{6-2x}{3}, 0)$ sont pris en compte.

Connaissances en théorie des ensembles (1/2)

Ensemble de points

Soit l'ensemble $B = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 | (x, y, 0)$ est un vecteur orthogonal au vecteur $(4, -1, -1)\}$. A-t-on $(1, 2, 2) \in B$? Décrivez géométriquement cet ensemble.

Difficultés :

- Manque de sens accordé au symbole d'appartenance (Dieudonné & al., 2011).
  $\Rightarrow$ traduire $(x, y, z) \in B$.

Connaissances en théorie des ensembles (1/2)

Ensemble de points

Soit l'ensemble $B = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 | (x, y, 0)$ est un vecteur orthogonal au vecteur $(4, -1, -1)\}$. A-t-on $(1, 2, 2) \in B$? Décrivez géométriquement cet ensemble.

Difficultés :

- Manque de sens accordé au symbole d'appartenance (Dieudonné & al., 2011).
  $\Rightarrow$ traduire $(x, y, z) \in B$.

Registres (Duval, 1993)

Un registre est un mode d'écriture et de représentation de la notion.

Connaissances en théorie des ensembles (1/2)

Ensemble de points

Soit l'ensemble $B = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 | (x, y, 0)$ est un vecteur orthogonal au vecteur $(4, -1, -1)\}$. A-t-on $(1, 2, 2) \in B$? Décrivez géométriquement cet ensemble.

Difficultés :

- Manque de sens accordé au symbole d'appartenance (Dieudonné & al., 2011).
  $\Rightarrow$ traduire $(x, y, z) \in B$.

Registres (Duval, 1993)

Un registre est un mode d'écriture et de représentation de la notion.

$\Rightarrow$ Conversions entre les registres symbolique, de la langue naturelle, algébrique.

Connaissances en théorie des ensembles (2/2)

Ensemble de points

Soit l'ensemble $B = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 | (x, y, 0)$ est un vecteur orthogonal au vecteur $(4, -1, -1)\}$. A-t-on $(1, 2, 2) \in B$? Décrivez géométriquement cet ensemble.

Difficultés :

- Concevoir les ensembles de points comme des objets mathématiques sur lesquels ils peuvent raisonner (Dieudonné & al., 2011).
  $\Rightarrow$ considérer l'ensemble de tous les triplets satisfaisant la même relation.

Connaissances en théorie des ensembles (2/2)

Ensemble de points

Soit l'ensemble $B = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 | (x, y, 0)$ est un vecteur orthogonal au vecteur $(4, -1, -1)\}$. A-t-on $(1, 2, 2) \in B$? Décrivez géométriquement cet ensemble.

Difficultés :

- Concevoir les ensembles de points comme des objets mathématiques sur lesquels ils peuvent raisonner (Dieudonné & al., 2011).
  $\Rightarrow$ considérer l'ensemble de tous les triplets satisfaisant la même relation.
- Reconnaître les objets décrits selon un point de vue ensembliste.
  $\Rightarrow$ identifier la droite décrite par l'ensemble B.

Connaissances en théorie des ensembles (2/2)

Ensemble de points

Soit l'ensemble $B = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 | (x, y, 0)$ est un vecteur orthogonal au vecteur $(4, -1, -1)\}$. A-t-on $(1, 2, 2) \in B$? Décrivez géométriquement cet ensemble.

DIFFICULTÉS :

- Concevoir les ensembles de points comme des objets mathématiques sur lesquels ils peuvent raisonner (Dieudonné & al., 2011).
  $\Rightarrow$ considérer l'ensemble de tous les triplets satisfaisant la même relation.
- Reconnaître les objets décrits selon un point de vue ensembliste.
  $\Rightarrow$ identifier la droite décrite par l'ensemble B.
- Reconnaître la droite décrite par un système de deux équations cartésiennes.
  $\Rightarrow$ identifier la droite comme étant l'intersection des plans $z = 0$ et $4x - y = 0$.

Du côté des exercices

Exemple

Donnez une équation cartésienne du plan α passant par $(0, -4, 1)$ et perpendiculaire à la droite d'intersection des plans d'équations $x + y + 2z = -1$ et $3x + 2y + 3z = 5$.

Difficultés :

- Tâches complexes nécéssitant de nombreuses adaptations (Robert, 2008).
  $\Rightarrow$ conversions de registres, changements de points de vue.

Du côté des exercices

Exemple

Donnez une équation cartésienne du plan α passant par $(0, -4, 1)$ et perpendiculaire à la droite d'intersection des plans d'équations $x + y + 2z = -1$ et $3x + 2y + 3z = 5$.

Difficultés :

- Tâches complexes nécéssitant de nombreuses adaptations (Robert, 2008).
  $\Rightarrow$ conversions de registres, changements de points de vue.
- Développer une certaine flexibilité entre les registres et les points de vue (Nihoul, 2016).

Passage du plan à l'espace

Difficultés :

- Rupture au niveau des objets décrits selon le point de vue cartésien.

Passage du plan à l'espace

Difficultés :

- Rupture au niveau des objets décrits selon le point de vue cartésien.

$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$
$ax + by = c$	$ax + by + cz = d$
(a, b) un vecteur normal	(a, b, c) un vecteur normal
Droite	**Plan**

Passage du plan à l'espace

Difficultés :

- Rupture au niveau des objets décrits selon le point de vue cartésien.
- Rupture au niveau des objets décrits selon le point de vue ensembliste.

Passage du plan à l'espace

Difficultés :

- Rupture au niveau des objets décrits selon le point de vue cartésien.
- Rupture au niveau des objets décrits selon le point de vue ensembliste.

$\{(x,y)\mid (x,y)$ est orthogonal à $(1,1)\}$	$\{(x,y,z)\mid (x,y,z)$ est orthogonal à $(1,1,1)\}$
Droite	**Plan**

Passage du plan à l'espace

Difficultés :

- Rupture au niveau des objets décrits selon le point de vue cartésien.
- Rupture au niveau des objets décrits selon le point de vue ensembliste.
- Variation du nombre d'équations cartésiennes et des outils nécessaires à la description d'une droite.

Passage du plan à l'espace

Difficultés :

- Rupture au niveau des objets décrits selon le point de vue cartésien.
- Rupture au niveau des objets décrits selon le point de vue ensembliste.
- Variation du nombre d'équations cartésiennes et des outils nécessaires à la description d'une droite.

Droite	**Droite**
$ax + by = c$	$\frac{x-x_A}{x_d} = \frac{y-y_A}{y_d} = \frac{z-z_A}{z_d}$
(a, b) un vecteur **normal**	(x_d, y_d, z_d) un vecteur **directeur**

Passage du plan à l'espace

Difficultés :

- Rupture au niveau des objets décrits selon le point de vue cartésien.
- Rupture au niveau des objets décrits selon le point de vue ensembliste.
- Variation du nombre d'équations cartésiennes et des outils nécessaires à la description d'une droite.
- Extension du point de vue paramétrique.

Passage du plan à l'espace

Difficultés :

- Rupture au niveau des objets décrits selon le point de vue cartésien.
- Rupture au niveau des objets décrits selon le point de vue ensembliste.
- Variation du nombre d'équations cartésiennes et des outils nécessaires à la description d'une droite.
- Extension du point de vue paramétrique.

Droite	**Droite**
$(x, y) = (x_A, y_A) + \lambda(x_d, y_d)$	$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + \lambda(x_d, y_d, z_d)$
(x_d, y_d) un vecteur directeur	(x_d, y_d, z_d) un vecteur directeur
$\lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda \in \mathbb{R}$

Spécificités des notions étudiées

- Présence de ruptures avec les connaissances anciennes des étudiants dans le plan selon les points de vue cartésien et ensembliste.

  $\Rightarrow$ Les droites et les plans dans l'espace sont des **extensions** de notions du plan **avec accident** (Pariès & Robert, 2014).

- Multiples représentations de ces notions en termes de registres et de points de vue.

  $\Rightarrow$ Un réel travail doit être effectué en phase d'apprentissage pour développer la flexibilité nécessaire (Artigue, Chartier & Dorier, 2000).

- Présence de nombreuses conceptions erronées ou manquantes (perception ensembliste, dimension).
- Manque de questionnement des étudiants au niveau de la reconnaissance des objets (équation, ensemble de points).

Élargissement du questionnement initial

Questions

- Comment sont travaillées ces notions en secondaire ?
- Quel est le travail proposé par les enseignants sur les registres d'écritures et les points de vue ?

Plan

1 Difficultés d'enseignement

2 Étude didactique de l'enseignement des notions

3 Conclusion

Niveau de conceptualisation (Robert, 2003)

Un niveau de conceptualisation en géométrie est un domaine important relativement auto-consistant, cohérent, enseigné (ou pouvant être enseigné) et est spécifié par :

- des fondements (axiomes),
- un arsenal (objets, définitions, théorèmes, propositions),
- des modes de raisonnement, des démarches et un niveau de rigueur
- un corps de problèmes que l'on peut résoudre en son sein.

Niveau de conceptualisation (Robert, 2003)

Un niveau de conceptualisation en géométrie est un domaine important relativement auto-consistant, cohérent, enseigné (ou pouvant être enseigné) et est spécifié par :

- des fondements (axiomes),
- un arsenal (objets, définitions, théorèmes, propositions),
- des modes de raisonnement, des démarches et un niveau de rigueur
- un corps de problèmes que l'on peut résoudre en son sein.

Dans l'enseignement secondaire, il y a deux niveaux de conceptualisation en géométrie qui sont travaillés :

- géométrie « à la Euclide » (géométrie synthétique),
- géométrie affine et affine-euclidienne (géométrie analytique).

Panorama général

Travail déjà réalisé :

- analyse des programmes de l'enseignement secondaire (actuels et futurs),
- analyse manuels belges,
- études épistémologique et historique de l'émergence des notions et de leurs développement.

L'enseignement secondaire

Hypothèses

- Le savoir géométrique est trop découpé dans l'enseignement actuel.
- Des difficultés peuvent apparaître lors du passage du niveau 1 de conceptualisation au niveau 2 (Bridoux & Nihoul, 2015).
- Le passage du niveau 1 de conceptualisation au niveau 2 n'est pas pris en compte dans l'enseignement.
- Le manque de questionnement sur l'objet « équations » est peut-être lié au fait que la tâche principale réalisée dans l'enseignement est la résolution de différents types d'équations (notion paramathématique, Chevallard, 1985).
- Le discours de l'enseignant est important pour rendre explicites les changements de registres et de points de vue.

Plan

1 Difficultés d'enseignement

2 Étude didactique de l'enseignement des notions

3 Conclusion

Proximités-en-acte

Définition (Robert & Vandebrouck, 2014)

Les proximitiés-en-acte traduisent une activité de l'enseignant (discursive ou autre) visant à provoquer et/ou exploiter une proximité avec les réflexions, les activités ou les connaissances des élèves.

Proximités-en-acte

Définition (Robert & Vandebrouck, 2014)

Les proximitiés-en-acte traduisent une activité de l'enseignant (discursive ou autre) visant à provoquer et/ou exploiter une proximité avec les réflexions, les activités ou les connaissances des élèves.

Problématique de recherche

Quelles sont les proximitiés mises en place par les enseignants pour amener les élèves à développer la flexibilité entre les registres et les points de vue et à interpréter géométriquement les objets ?

Proximités-en-acte

Définition (Robert & Vandebrouck, 2014)

Les proximitiés-en-acte traduisent une activité de l'enseignant (discursive ou autre) visant à provoquer et/ou exploiter une proximité avec les réflexions, les activités ou les connaissances des élèves.

Problématique de recherche

Quelles sont les proximitiés mises en place par les enseignants pour amener les élèves à développer la flexibilité entre les registres et les points de vue et à interpréter géométriquement les objets ?

Objectif général : élaborer une séquence d'enseignement pour travailler spécifiquement sur la reconnaissance des objets et leurs possibles représentations dans le chapitre des droites et des plans dans l'espace.