Théorie des modèles 1

Françoise Point

2018-2019

Résumé

Ces notes reprennent la matière d'un premier cours de théorie des modèles. Dans le premier chapitre, nous introduisons la notion de $\mathcal{L}$-structure et de son groupe d'automorphismes, ainsi que diverses constructions : unions de chaînes, produit direct, produit réduit, ultraproduit.

Dans le second chapitre, on construit les $\mathcal{L}$-formules, et on les interprète dans les $\mathcal{L}$-structures. On définit la notion d'équivalence élémentaire entre deux $\mathcal{L}$-structures. Nous démontrons le théorème de Łos sur les ultraproduits et nous obtenons comme corollaire le théorème de compacité.

Dans le chapitre trois, on aborde la notion de preuves et on démontre le theorème de complétude qui établit une correspondance entre la notion de satisfaction (dans une structure) et celle de preuves (dans une théorie).

Les chapitres quatre et cinq sont consacrés aux corps algébriquement clos et réels clos.

Dans le chapitre six, on introduit la notion de sous-ensembles définissables et infiniment définissables dans une structure donnée. On définit ce que veut dire qu'une théorie a l'élimination des quantificateurs et on illustre cette propriété dans les corps algébriquement clos et réels-clos.

Les quatre derniers chapitres sont centrés sur les propriétés des classes de structures. Dans le chapitre sept, on démontre les théorème de Lowenheim-Skolem.

Dans le chapitre huit, on munit les espaces de $\mathcal{L}$-théories d'une topologie naturelle.

Dans le chapitre neuf, on démontre le théorème d'omission des types et le théorème de Ryll-Nardweski sur les théories $\aleph_0$-catégoriques.

Dans le dernier chapitre, on revient sur les théories modèles-complètes et on démontre le critère de Lindström.

Il y a trois annexes, l'une sur les algèbres de Boole, l'autre sur les ordinaux et cardinaux et la dernière sur quelques exercices résolus.

Remerciements

Je remercie Nathalie Regnault, qui a participé à une première rédaction de ces notes (et notamment à la rédaction de solutions d'exercices) durant l'année 2010-2011, Quentin Brouette et Quentin Lambotte pour leurs remarques judicieuses. J'ai aussi le plaisir d'associer à ces remerciements tous les étudiants de Bac 3 de la section mathématique de l'université de Mons.

Table des matières

Chapitre 1

Structures et groupes d'automorphismes

1.1 Definition d'une structure

Si E est un ensemble, on notera $|E|$ le cardinal de E.

Définition 1.1.1 Un **langage** $\mathcal{L}$ est un ensemble de symboles que l'on sépare en trois groupes : symboles de relations, de fonctions et de constantes ; aux symboles de relations et fonctions est associé un nombre naturel non nul, que l'on appelle *arité*. Le langage $\mathcal{L}$ sera donc composé de :

relations R_j d'arité $m_j \geq 1$, $j \in J$,

de fonctions F_i d'arité $n_i \geq 1, i \in I$, et de

constantes c_ℓ, $\ell \in L$.

Les ensembles I, J, L peuvent être éventuellement vides (et donc le langage $\mathcal{L}$). Si le langage $\mathcal{L}$ ne contient pas de symboles de fonctions, on dit qu'il est *relationnel.*

A ce langage $\mathcal{L}$ est associé une classe de $\mathcal{L}$-structures, où une **$\mathcal{L}$-structure** $\mathcal{A}$ consiste en :

1. un ensemble A non vide (que l'on appelle *domaine* de $\mathcal{A}$),
2. de fonctions $F_i^{\mathcal{A}}: A^{n_i} \to A$ (où n_i est l'arité de F_i) ; le domaine de $F_i^{\mathcal{A}}$ est égal à A^{n_i}, $i \in I$,
3. de relations $R_j^{\mathcal{A}} \subseteq A^{m_j}$ (où m_j est l'arité de R_j) $j \in J$,
4. d'éléments $c_\ell^{\mathcal{A}}$ de A, $\ell \in L$.

On notera cette $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{A} := (A, F_i^{\mathcal{A}}(i \in I), R_j^{\mathcal{A}}(j \in J), c_\ell^{\mathcal{A}}(\ell \in L))$. On dira que $F_i^{\mathcal{A}}$, $R_j^{\mathcal{A}}$, $c_\ell^{\mathcal{A}}$ sont l'interprétation des symboles du langage $\mathcal{L}$ dans la structure $\mathcal{A}$.

Soient $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ deux langages, $\mathcal{L}$ est une **expansion** de $\mathcal{L}'$ (ou que $\mathcal{L}'$ est un réduit de $\mathcal{L}$) si $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$.

Soit $\mathcal{L} = \mathcal{L}' \cup \mathcal{L}''$ avec $\mathcal{L}' \cap \mathcal{L}'' = \emptyset$. Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{L}$-structure, on peut voir $\mathcal{A}$ également comme une $\mathcal{L}'$-structure que l'on notera par $\mathcal{A} \restriction \mathcal{L}'$ (on dira que c'est un réduit de $\mathcal{A}$). Si $\mathcal{B}$ est une $\mathcal{L}'$-structure et si on se donne une interprétation des symboles de $\mathcal{L}''$ dans $\mathcal{B}$ on obtient une **expansion** de $\mathcal{B}$ que l'on notera $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$. Notez que ces opérations ne changent pas le domaine des structures, et qu'à langages donnés, une structure peut avoir plusieurs expansions mais un seul réduit.

Lorsque l'on impose des conditions sur l'expansion, la réponse n'est pas aussi immédiate. Par exemple, on peut se poser la question suivante : étant donné un groupe commutatif, quand est-il le groupe multiplicatif d'un corps ?

Exemple 1.1.2

1. *$\mathcal{L} := \{E\}$, où E est un symbole de relation binaire et*
   • *$\mathcal{N} := (\mathbb{N} \setminus \{0\}, E^{\mathcal{N}})$, où $E^{\mathcal{N}}(a, b) := \{(a, b) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) :\ a \text{ divise } b\}$,*
   • *$\mathcal{Q} := (\mathbb{Q}, E^{\mathcal{Q}})$ où $E^{\mathcal{Q}} := \{(a, b) :\ a < b\}$, où $<$ désigne l'ordre habituel sur les rationnels,*
   • *$\mathbb{Q}\overrightarrow{\times}\mathbb{Q} := (\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}, E^{\mathbb{Q}\overrightarrow{\times}\mathbb{Q}})$, où $E^{\mathbb{Q}\overrightarrow{\times}\mathbb{Q}} := \{((a, b), (c, d)) :\ a < c \text{ ou } (a = c \text{ et } b < d)\}$. On appelle $\mathbb{Q}\overrightarrow{\times}\mathbb{Q}$ le produit lexicographique de $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{Q}$.*
   • *$\mathcal{Z}_2 := (\mathbb{Z}, E^{\mathcal{Z}_2})$, où $E^{\mathcal{Z}_2} := \{(a, b) :\ a, b \in \mathbb{Z}, a.b \neq 0 \ \&\ v_p(a) \leq v_p(b)\}$, p est un nombre premier et $v_p(a)$ est la plus grande puissance de p qui divise a.*
2. *$\mathcal{L} := \{+, -, c\}$ où $+$ est un symbole de fonction binaire et $-$ est un symbole de fonction unaire et c un symbole de constante*
   • *$\mathcal{Z} := (\mathbb{Z}, +^{\mathcal{Z}}, -^{\mathcal{Z}}, c^{\mathcal{Z}})$ où $+^{\mathcal{Z}}$, $-^{\mathcal{Z}}$ sont les opérations habituelles $+$ et $-$ sur les entiers et $0 = c^{\mathcal{Z}}$,*
   • *$\mathcal{S}_n := (S_n, +^{\mathcal{S}_n}, -^{\mathcal{S}_n}, c^{\mathcal{S}_n})$, où S_n est l'ensemble des permutations sur n éléments, $+^{\mathcal{S}_n}$ est la composition des permutations (notée habituellement $\circ$) et si σ est une permutation, $-^{\mathcal{S}_n}(\sigma)$ est la permutation inverse (notée habituellement σ^{-1}), et $1 = c^{\mathcal{S}_n}$ où 1 désigne la permutation identité.*
3. *$\mathcal{L} := \{+, -, <, c_1, c_2\}$, où $+$ est un symbole de fonction binaire, $-$ est un symbole de fonction unaire, $<$ est un symbole de relation binaire et c_1, c_2 sont deux symboles de constantes*
   • *$\mathcal{Z}_o := (\mathbb{Z}, +^{\mathcal{Z}_o}, -^{\mathcal{Z}_o}, <^{\mathcal{Z}_o}, c_1^{\mathcal{Z}_o}, c_2^{\mathcal{Z}_o})$, où $+^{\mathcal{Z}_o}$, $-^{\mathcal{Z}_o}$ sont les opérations habituelles $+$ et $-$ sur les entiers et $<^{\mathcal{Z}_o}$ est l'ordre habituel sur les entiers, $0 = c_1^{\mathcal{Z}_o}$ et $1 = c_2^{\mathcal{Z}_o}$. Notez que la structure $\mathcal{Z}_o$ est une* **expansion** *de la structure $\mathcal{Z}$.*
4. *$\mathcal{L} := \{+, -, ., c_1, c_2\}$, où $+$ et $\cdot$ sont deux symboles de fonctions binaires, $-$ est un symbole de fonction unaire, c_1, c_2 sont deux symboles de constantes,*
   • *$\mathcal{Z}_1 := (\mathbb{Z}, +^{\mathcal{Z}_1}, -^{\mathcal{Z}_1}, .^{\mathcal{Z}_1}, c_1^{\mathcal{Z}_1}, c_2^{\mathcal{Z}_1})$, où $+^{\mathcal{Z}_1}$, $-^{\mathcal{Z}_1}$, $\cdot^{\mathcal{Z}_1}$ sont les opérations habituelles $+$, $-$ et $\cdot$ sur les entiers et $0 = c_1^{\mathcal{Z}_1}$ et $1 = c_2^{\mathcal{Z}_1}$,*
   • *$\mathcal{M} := (M_n(\mathbb{Z}), +^{\mathcal{M}}, -^{\mathcal{M}}, .^{\mathcal{M}}, c_1^{\mathcal{M}}, c_2^{\mathcal{M}})$, où $M_n(\mathbb{Z})$ désigne l'ensemble des matrices $n \times n$ à coéfficients dans $\mathbb{Z}$, $+^{\mathcal{M}}$, $-^{\mathcal{M}}$, $\cdot^{\mathcal{M}}$ désignent les opérations habituelles dans l'anneau des matrices $n \times n$ respectivement $+, -, \cdot$, $c_1^{\mathcal{M}}$ est égal à la matrice 0, et $c_2^{\mathcal{M}}$ à la matrice identité.*
5. *$\mathcal{L} := \{+, -, ., <, c_0, c_1\}$ et*
   • *$\mathcal{R} := (\mathbb{R}, +^{\mathcal{R}}, -^{\mathcal{R}}, .^{\mathcal{R}}, <^{\mathcal{R}}, c_0^{\mathcal{R}}, c_1^{\mathcal{R}})$, où les fonctions $+, -, .$ ont leur interprétation habituelle, $<$ est l'ordre habituel sur $\mathbb{R}$ et $c_0^{\mathcal{R}} = 0$, $c_1^{\mathcal{R}} = 1$,*
   • *$\mathcal{R}_1 := (\mathbb{R}[X], +^{\mathcal{R}_1}, -^{\mathcal{R}_1}, .^{\mathcal{R}_1}, c_0^{\mathcal{R}_1}, c_1^{\mathcal{R}_1}, <^{\mathcal{R}_1})$, où $\mathbb{R}[X] := \{\sum_{i=0}^{n} a_n.X^n :\ a_i \in \mathbb{R},\ 0 \leq i \leq n\}$, les fonctions $+, -, \cdot$ ont leur interprétation habituelle dans l'anneau des polynômes, $c_0^{\mathcal{R}_1} = 0$, $c_1^{\mathcal{R}_1} = 1$ et*
   $<^{\mathcal{R}_1} := \{(\sum_{i=0}^{n} a_i.X^i, \sum_{j=0}^{m} b_j.X^j) : a_i, b_j \in \mathbb{R}, 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m, a_n.b_m \neq 0,$
   $(n < m \text{ ou } (n = m \ \&\ a_n < b_m))\} \cup \{(0, p(X)) :\ p(X) \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}\}$.

6. $\mathcal{L} := \{+, -, ., exp, 0, 1\}$ *et*
• $\mathcal{R}_{exp} := (\mathbb{R}, +^{\mathcal{R}_{exp}}, -^{\mathcal{R}_{exp}}, .^{\mathcal{R}_{exp}}, exp^{\mathcal{R}_{exp}}, 0^{\mathcal{R}_{exp}}, 1^{\mathcal{R}_{exp}})$, *où* $+, -, \cdot, 0, 1$ *ont leur interprétation habituelle dans le corps des nombres réels et*
$exp^{\mathcal{R}_{exp}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
• $\mathfrak{C}_{exp} := (\mathbb{C}, +^{\mathfrak{C}_{exp}}, -^{\mathfrak{C}_{exp}}, .^{\mathfrak{C}_{exp}}, 0^{\mathfrak{C}_{exp}}, 1^{\mathfrak{C}_{exp}}, exp^{\mathfrak{C}_{exp}})$, *où* $+, -, \cdot, 0, 1$ *ont leur interprétation habituelle dans le corps des nombres complexes et*
$exp^{\mathfrak{C}_{exp}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.
La **restriction** *de* $\mathfrak{C}_{exp}$ *au langage* $\{+, -, \cdot, 0, 1\}$ *est la structure* $\mathfrak{C} := (\mathbb{C}, +^{\mathfrak{C}}, -^{\mathfrak{C}}, .^{\mathfrak{C}}, 0^{\mathfrak{C}}, 1^{\mathfrak{C}})$.

Exercice 1.1.3

1. *Soit* $\mathcal{L} := \{E\}$, *où* E *est un symbole de relation binaire. Montrer que l'on peut voir un graphe comme une* $\mathcal{L}$*-structure.*
2. *Soit* $\mathcal{L} := \{+, -, ., c_1, c_2\}$, *où* $+$ *et* $\cdot$ *sont deux symboles de fonctions binaires,* $-$ *est un symbole de fonction unaire,* c_1, c_2 *sont deux symboles de constantes. Montrer que l'on peut voir une algèbre de Boole comme une* $\mathcal{L}$*-structure.*

Cette façon d'écrire les choses peut paraître peu naturelle mais la théorie des modèles s'intéresse pour un langage donné $\mathcal{L}$, à la classe des $\mathcal{L}$-structures. Pour alléger les notations, quand le sens est clair, on s'autorisera à noter directement l'interprétation des symboles du langage $\mathcal{L}$ dans une $\mathcal{L}$-structure donnée $\mathcal{A}$, en omettant de mettre l'exposant $F^{\mathcal{A}}$, $R^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}}$. Par exemple si $\mathcal{L} := \{+, 0\}$ et si on veut considérer le groupe multiplicatif des rationnels non nuls comme $\mathcal{L}$-structure, on utilisera simplement la notation $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$.

Définition 1.1.4 Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ deux $\mathcal{L}$-structures. On dira que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont **isomorphes** s'il existe une bijection $f : A \to B$ telle que

1. pour chaque symbole de fonction F de $\mathcal{L}$ d'arité n, et pour tout $a_1, \cdots, a_n \in A$, $f(F^{\mathcal{A}}(a_1, \cdots, a_n)) = F^{\mathcal{B}}(f(a_1), \cdots, f(a_n))$,
2. pour chaque symbole de relation R de $\mathcal{L}$ d'arité m, et pour tout $a_1, \cdots, a_m \in A$, $R^{\mathcal{A}}(a_1, \cdots, a_m)$ si et seulement si $R^{\mathcal{B}}(f(a_1), \cdots, f(a_m))$,
3. pour chaque symbole de constante c de $\mathcal{L}$, $f(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$.

On appelle un isomorphisme de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$, un automorphisme et on note l'ensemble des automorphismes de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$, par $Aut(\mathcal{A})$. Si $E \subset A$, on note l'ensemble des automorphismes de $\mathcal{A}$ qui fixe E (c.a.d. $\sigma(e) = e$ pour tout e dans E) par $Aut_E(\mathcal{A})$ et par $Aut_{\{E\}}(\mathcal{A}) := \{\sigma \in Aut(A) : \sigma(E) = E\}$ (c.a.d. l'ensemble des automorphismes de $\mathcal{A}$ qui laisse E invariant).

Exercice 1.1.5

1. *Sur la classe des* $\mathcal{L}$*-structures, on met la relation suivante : soient* $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ *deux* $\mathcal{L}$*-structures, on note* $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ *s'il existe un isomorphisme de* $\mathcal{A}$ *vers* $\mathcal{B}$*. Montrer que c'est une relation d'équivalence.*
2. *Montrer que* $Aut(\mathcal{A})$ *est un groupe (pour la composition) et que* $Aut_E(\mathcal{A}), Aut_{\{E\}}(\mathcal{A})$ *sont des sous-groupes de* $Aut(\mathcal{A})$*. Montrer que* $Aut_E(\mathcal{A})$ *est un sous-groupe normal de* $Aut_{\{E\}}(\mathcal{A})$*.*

3. *Si* $a \in A$*, on note* $Orb_{Aut(\mathcal{A})}(a)$ *par le sous-ensemble de* A *:* $\{\sigma(a) : \sigma \in Aut(\mathcal{A})\}$*. Montrer que l'ensemble de ces orbites induit une partition de* A*.*
4. *Que pouvez-vous dire dans les exemples de* 1 *à* 6 *(voir Exemple 1.1.2), du groupe d'automorphismes des structures considérées.*
5. *Soit* $\mathcal{T} := (A, \tau)$ *un espace topologique c.a.d.* A *est un ensemble et* τ *est une topologie sur* A *c.a.d. l' ensemble des ouverts de* A*. Définissez un langage* $\mathcal{L}$ *tel que si deux espaces topologiques sont isomorphes (en tant que* $\mathcal{L}$*-structures), alors ils sont homéomorphes.*
6. *Soit* $\mathcal{L} = \{+, 0\}$*. Montrer que les deux* $\mathcal{L}$*-structures suivantes sont isomorphes :* $([0\ 1[, +_1, 0)$ *où* $[0\ 1[$ *est l'ensemble* $\{r \in \mathbb{R} : 0 \leq r < 1\}$ *et* $+_1$ *dénote l'addition modulo* 1 *et* $(S^1, \cdot, 1)$ *où* S^1 *dénote l'ensemble des nombres complexes de module* 1 *et* $\cdot$ *le produit dans le corps des nombres complexes.*

Définition 1.1.6 Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ deux $\mathcal{L}$-structures. On dit que $\mathcal{A}$ est **une sous-structure** de $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$) si

1. $A \subset B$ (le domaine de $\mathcal{A}$ est inclus dans le domaine de $\mathcal{B}$),
2. $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{B}}$ pour toute constante c de $\mathcal{L}$,
3. pour toute fonction F de $\mathcal{L}$ d'arité n et tout n-uple d'éléments $\bar{a} \in A^n$, $F^{\mathcal{A}}(\bar{a}) = F^{\mathcal{B}}(\bar{a})$ et
4. pour toute relation R de $\mathcal{L}$ d'arité m, on a $R^{\mathcal{A}} = R^{\mathcal{B}} \cap A^m$.

Définition 1.1.7 Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ deux $\mathcal{L}$-structures. On dira que $\mathcal{A}$ est **plongé** dans $\mathcal{B}$ s'il existe une sous-structure de $\mathcal{B}$ qui est isomorphe à $\mathcal{A}$.

Exercice 1.1.8

1. *Soit* $\mathcal{L} := \{<, c\}$*, et* $\mathcal{A}$ *la* $\mathcal{L}$*-structure* $(\mathbb{N}, <, 0)$ *et* $\mathcal{B}$ *la* $\mathcal{L}$*-structure* $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, <, 1)$*. Montrer que* $\mathcal{B}$ *n'est pas une sous-structure de* $\mathcal{A}$ *mais que* $\mathcal{B}$ *est isomorphe à* $\mathcal{A}$*.*
   Montrer que $(\mathbb{Z}, <, 0)$ *n'est pas une sous-structure de* $(\mathbb{R}[X], <, 0)$*, où* $<^{\mathbb{R}[X]}$ *a été défini comme au point 5 de l'exemple 1.1.2.*
2. *Soit* $\mathcal{L} := \{E\}$*, où* E *est un symbole de relation binaire. Est-ce que la* $\mathcal{L}$*-structure* $\mathcal{N}$ *est une sous-structure de la* $\mathcal{L}$*-structure* $\mathcal{Z}_2$ *telles que définies au point 1 (Exemple 1.1.2) ?*

1.2 Actions de groupes

Soit Ω un ensemble dénombrable et soit $Sym(\Omega)$ le groupe de toutes les permutations de Ω. (Si $\Omega = \{1, \cdots, n\}$, $Sym(\Omega)$ est noté S_n.) Soit G un sous-groupe de $Sym(\Omega)$. (Par exemple si $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{L}$-structure, $Aut(\mathcal{A})$ est un sous-groupe de $Sym(A)$ et si $\mathcal{L} = \emptyset$, $Aut(\mathcal{A}) = Sym(A)$).

Définition 1.2.1 On dira que G est *transitif* (sur Ω) si G a une seule orbite i.e. pour tout $a,\ b \in \Omega$, il existe $g \in G$ tel que $g(a) = b$.

Soit $n \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Notons $\Omega^{n<}$ l'ensemble des n-uples d'éléments **distincs** de Ω. Alors G est *n-transitif* si pour tout $(a_1, \cdots, a_n),\ (b_1, \cdots, b_n) \in \Omega^{n<}$, il existe $g \in G$ tel que $g(a_1) = b_1, \cdots, g(a_n) = b_n$.

Notons $\Omega^{[n]}$ l'ensemble des sous-ensembles de cardinalité n de Ω, alors G est *n-ensemble-transitif* si pour tout $\{a_1, \cdots, a_n\},\ \{b_1, \cdots, b_n\} \in \Omega^{[n]}$, il existe $g \in G$ tel que $\{g(a_1), \cdots, g(a_n)\} = \{b_1, \cdots, b_n\}$. On dira que G est fortement transitif (respectivement fortement ensemble-transitif s'il est n-transitif (respectivement n-ensemble-transitif ou encore n-homogène) pour chaque $n \geq 1$.

Enfin, on note $F_n(G)$ le nombre d'orbites de G dans $\Omega^{n<}$ et $f_n(G)$ le nombre d'orbites de G dans $\Omega^{[n]}$, $n \geq 1$.

Exercice 1.2.2

1. *Montrer que $Aut((\mathbb{Q}, \leq))$ n'est pas 2-transitif.*
2. *Montrer que le groupe G des permutations de $(\mathbb{Q}, \leq)$ qui soit préserve, soit renverse l'ordre, est 2-transitif mais pas 3-transitif.*
3. *Montrer que si $G = Aut((\mathbb{Q}, \leq))$, alors $f_n(G) = 1$ et $F_n(G) = n!$.*
4. *Montrer que $f_n(G) \leq F_n(G) \leq n! f_n(G)$.*
5. *Soit C la relation ternaire sur S^1 (Exercice 1.1.5) définie par $C(a, b, c)$, où $a, b, c \in S^1$, ssi b est entre a et c quand on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. Montrer que si $G = Aut((S^1, C))$, alors G est 2-transitif mais n'est pas 3-transitif.*

Définition 1.2.3 Un *ordre circulaire* (sur un ensemble E) est une relation ternaire $C \subset E^3$ telle que pour tout $x,\ y,\ z,\ u$ appartenant à E on a :

1. $C(x, y, z) \to C(y, z, x)$ (cyclique)
2. $C(x, y, z) \to \neg C(z, y, x)$ (asymétrique)
3. $(C(x, y, z)\ \wedge\ C(x, z, u)) \to C(x, y, u)$ (transitif)
4. si $x,\ ,y,\ z$ sont distincts, alors $(C(x, y, z)\ \vee\ C(z, y, x))$ (total)

Le théorème suivant illustre le fait que la propriété d'être fortement ensemble-transitif est une condition structurelle.

Théorème 1.2.4 P. Cameron [1] *Si $G \subset Sym(\Omega)$ est fortement ensemble-transitif (sur Ω) mais pas fortement transitif. Alors il existe un ordre $\leq$ sur Ω ou bien un ordre circulaire C tels que G préserve ou renverse soit cet ordre, soit cet ordre circulaire.*

1.2.1 Topologie

Nous allons munir $Sym(\Omega)$ d'une topologie. On définit un ouvert de base $S_{\bar{a},\bar{b}}$, où $\bar{a}, \bar{b} \in \Omega^n$ par : $\{g \in Sym(\Omega) :\ \bigwedge_{i=1}^{n} g(a_i) = b_i\}$. Un ouvert est une union d'ouverts de base.

Exercice 1.2.5 *Montrer que l'intersection de deux ouverts de base est encore un ouvert de base et que cet ensemble d'ouverts forme bien une topologie sur $Sym(\Omega)$. Cet espace topologique est Haudorff i.e. étant donné deux points distincts σ_1, σ_2 il existe deux ouverts disjoints O_1, O_2 tels que $\sigma_1 \in O_1$ et $\sigma_2 \in O_2$.*

Comme on a supposé Ω dénombrable, on peut aussi munir $Sym(\Omega)$ d'une métrique. Enumérons Ω par $\alpha_0, \cdots, \alpha_n, \cdots$ et soient $\sigma_1, \sigma_2 \in Sym(\Omega)$. On définit $d(\sigma_1, \sigma_2) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}.\epsilon_n$, où $\epsilon_n = 0$ si $\sigma_1(\alpha_n) = \sigma_2(\alpha_n)$ et 1 sinon.

Soit $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{L}$-structure, alors on munit $Aut(\mathcal{A})$ de la topologie induite par $Sym(A)$: un ouvert de $Aut(\mathcal{A})$ est l'intersection d'un ouvert de $Sym(A)$ avec $Aut(\mathcal{A})$.

On utilise la notation suivante : si $E \subset A$, alors $g \restriction E$ est la restriction de g à E.

Exercice 1.2.6

1. *Montrer que si $\mathcal{B}$ est une expansion de $\mathcal{A}$, alors $Aut(\mathcal{B})$ se plonge de façon continue dans $Aut(\mathcal{A})$. Donner un exemple où l'image de $Aut(\mathcal{B})$ est strictement incluse dans $Aut(\mathcal{A})$.*
2. *Montrer que l'inverse $^{-1} : Aut(\mathcal{A}) \to Aut(\mathcal{A})$ et le produit $\cdot : Aut(\mathcal{A}) \times Aut(\mathcal{A}) \to Aut(\mathcal{A}) : (g, h) \to g \circ h$ sont des fonctions continues.*
3. *Montrer qu'un sous-groupe H de $Aut(\mathcal{A})$ est ouvert ssi il contient un sous-ensemble de la forme $Aut_E(\mathcal{A})$, où E est un sous-ensemble fini de A.*
4. *Montrer qu'un sous-ensemble F de $Aut(\mathcal{A})$ est fermé ssi F a la propriété suivante : soit $g \in Aut(\mathcal{A})$ tel que pour tout sous-ensemble fini E de A, il existe $\sigma \in F$ tel que $\sigma \restriction E = g \restriction E$, alors $g \in F$.*
5. *Un sous-groupe H de $Aut(\mathcal{A})$ est dense (dans $Aut(\mathcal{A})$) ssi H et $Aut(\mathcal{A})$ ont les mêmes orbites dans $A^{n<}$, pour chaque $n \geq 1$.*

1.3 Unions de chaînes de $\mathcal{L}$-structures

Soit $(I, <)$ un ensemble totalement ordonné et supposons que pour tout $i < j$, $\mathcal{A}_i$ est une sous-structure de $\mathcal{A}_j$. On dira que $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ est une chaîne des $\mathcal{L}$-structures. On définit une $\mathcal{L}$-structure $\varinjlim_{i \in I} \mathcal{A}_i$, que l'on appelera **l'union** de la chaîne des $\mathcal{L}$-structures $\mathcal{A}_i$ de la façon suivante :

1. son domaine est $\bigcup_{i \in I} A_i$,
2. chaque fonction F de $\mathcal{L}$ (d'arité n) est interprétée de la façon suivante : son domaine est $(\bigcup_{i \in I} A_i)^n$, et si $(a_1, \cdots, a_n) \in (\bigcup_{i \in I} A_i)^n$ et $t \in I$ est tel que $a_1, \cdots, a_n \in A_t$, on définit $F^{\varinjlim_{i \in I} \mathcal{A}_i}(a_1, \cdots, a_n)$ par : $F^{\mathcal{A}_t}(a_1, \cdots, a_n)$,
3. chaque constante $c \in \mathcal{L}$ est interprétée par l'élément $c^{\mathcal{A}_{i_0}}$, où $i_0 \in I$,
4. chaque relation R de $\mathcal{L}$ est interprétée par le sous-ensemble : $\bigcup_{i \in I} R^{\mathcal{A}_i}$.

Exercice 1.3.1 *Montrez que la définition ci-dessus est bien posée et qu'au point 2., si $t' > t$, $F^{\mathcal{A}_t}(a_1, \cdots, a_n) = F^{\mathcal{A}_{t'}}(a_1, \cdots, a_n)$.*

1.4 Produits

Le **produit direct** des $\mathcal{L}$ structures $\mathcal{A}_i$ est la $\mathcal{L}$-structure notée $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$; son domaine est égal à $\prod_{i \in I} A_i$ et on interprète dans le produit $\prod_{i \in I} A_i$ les symboles du langage $\mathcal{L}$ comme suit :

• chaque fonction F de $\mathcal{L}$ d'arité n, par $(F^{\mathcal{A}_i}(a_{1i}, \cdots, a_{ni}))_{i \in I}$, où $a_{1i}, \cdots, a_{ni} \in A_i$, $i \in I$,

• chaque relation R de $\mathcal{L}$ d'arité m, par l'ensemble des m-uples $((b_{1i}), \cdots, (b_{mi}))_{i \in I}$ tels que pour tout $i \in I$, $R^{\mathcal{A}_i}(b_{1i}, \cdots, b_{mi})$, où $b_{1i}, \cdots, b_{mi} \in A_i$, $i \in I$.

• chaque constante c de $\mathcal{L}$ par l'élément $(c^{\mathcal{A}_i})_{i \in I}$.

Lorsque que $I := \{1, 2\}$, on note aussi $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$ par $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$.

Exercice 1.4.1 *Soit $\mathcal{L} := \{<\}$. Montrer que $\mathcal{L}$-structure $(\mathbb{Q} \overrightarrow{\times} \mathbb{Q}, <)$ (i.e. le produit lexicographique de $(\mathbb{Q}, <)$ par $(\mathbb{Q}, <)$) n'est pas isomorphe au produit direct $(\mathbb{Q}, <) \times (\mathbb{Q}, <)$* .

1.5 Ultraproduits

Définition 1.5.1 Soit I un ensemble non vide infini. On note $\mathcal{P}(I)$ l'ensemble des sous-ensembles de I. Un sous-ensemble D de $\mathcal{P}(I)$ est un **filtre** sur I si :

1. $I \in D$,
2. si $X,\ Y \in D$, alors $X \cap Y \in D$,
3. si $X \in D$ et $X \subseteq Z \subseteq I$, alors $Z \in D$.

Un filtre D sur I est dit propre s'il est différent de $\mathcal{P}(I)$.

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathcal{P}(I)$. L'intersection de tous les filtres D sur I tels que $E \subset D$ est un filtre sur I (on l'appelle le filtre engendré par E).
On dit que E a *la propriété de l'intersection finie* (PIF) si l'intersection d'un nombre fini d'éléments de E est non vide.

Exercice 1.5.2 *Soit F l'ensemble des parties cofinies de I. Montrer que F est un filtre propre sur I. On l'appelle filtre de Fréchet sur I.*

Proposition 1.5.3 *Soit E un sous-ensemble de $\mathcal{P}(I)$.*

1. *Le filtre engendré par E est l'ensemble des sous-ensembles X de I tels que soit $X = I$, soit il existe un nombre fini d'éléments $Y_j \in E$, $1 \leq j \leq n$ tels que $\cap_{j=1}^{n} Y_j \subseteq X$*
2. *le filtre engendré par E est propre ssi E a la PIF.*

Exercice 1.5.4 *Prouvez la proposition ci-dessus.*

Etant donné des $\mathcal{L}$-structures $\mathcal{A}_i$, $i \in I$ et un filtre D sur $\mathcal{P}(I)$, on construit le produit réduit de ces $\mathcal{L}$-structures $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i / D$, relativement à D.

On définit la relation $=_D$ sur $\prod_{i \in I} A_i$ comme suit :

$$(a_i) =_D (b_i) \quad \text{si} \quad \{i \in I : \ a_i = b_i\} \in D,$$

où $(a_i),\ (b_i) \in \prod_{i \in I} A_i$.

Exercice 1.5.5 *Vérifier que $=_D$ est bien une relation d'équivalence sur $\prod_{i \in I} A_i$.*

Le domaine du produit réduit de ces $\mathcal{L}$-structures $\mathcal{A}_i, i \in I$, relativement à D, sera l'ensemble de classes d'équivalence de la relation $=_D$ sur $\prod_{i\in I} A_i$. On notera un représentant de la classe d'équivalence qui contient $(a_i)_{i\in I}$ par $[a_i]_D$ et l'ensemble de ces classes d'équivalence par $\prod_{i\in I} A_i/D$.

Exercice 1.5.6

1. *Soit F un symbole de fonction de $\mathcal{L}$, d'arité n. Montrer que si $(a_{ji}) =_D (b_{ji})$ où $(a_{ji}),\ (b_{ji}) \in \prod_{i\in I} A_i$, pour $1 \leq j \leq n$, alors*

$$(F^{\mathcal{A}_i}(a_{1i}, \cdots, a_{ni})) =_D (F^{\mathcal{A}_i}(b_{1i}, \cdots, b_{ni})).$$

2. *Soit R un symbole de relation de $\mathcal{L}$ d'arité m. Montrer que si $(a_{ji}) =_D (b_{ji})$ où $(a_{ji}),\ (b_{ji}) \in \prod_{i\in I} A_i$, pour $1 \leq j \leq m$, alors*

$$\{i \in I : R^{\mathcal{A}_i}(a_{1i}, \cdots, a_{mi})\} \in D \text{ si et seulement si } \{i \in I : R^{\mathcal{A}_i}(b_{1i}, \cdots, b_{mi})\} \in D.$$

Définition 1.5.7 Le **produit réduit** des $\mathcal{L}$-structures $\mathcal{A}_i$, $i \in I$, relativement à D, est une $\mathcal{L}$-structure définie comme suit :

1. son domaine est : $\prod_{i\in I} A_i/D$,
2. chaque fonction F de $\mathcal{L}$ d'arité n est interprétée comme suit : $[F^{\mathcal{A}_i}(a_{1i}, \cdots, a_{ni})]_D$ où $[a_{1i}]_D, \cdots, [a_{ni}]_D \in \prod_{i\in I} A_i/D$,
3. chaque relation R de $\mathcal{L}$ d'arité m est interprétée par le sous-ensemble des m-uples $([a_{1i}]_D, \cdots, [a_{mi}]_D) \in (\prod_{i\in I} A_i/D)^m$ tels que $\{i \in I : R^{\mathcal{A}_i}(a_{1i}, \cdots, a_{mi})\} \in D$.
4. chaque constante $c \in \mathcal{L}$ est interprétée par l'élément $[c^{\mathcal{A}_i}]_D$.

On notera ce produit réduit $\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i/D$. Si toutes les $\mathcal{L}$-structures sont égales à une structure $\mathcal{A}$, on note ce produit par $\mathcal{A}^I/D$.

Proposition 1.5.8 *Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{L}$-structure. Alors $\mathcal{A}$ se plonge dans le produit réduit $\mathcal{A}^I/D$.*

Preuve : On définit l'application suivante : $f : \mathcal{A} \to \prod_{i\in I} \mathcal{A}/D :\ a \to [a]_D$. Montrons que $\mathcal{A}$ est isomorphe à son image dans $\prod_{i\in I} \mathcal{A}/D$.

Tout d'abord, l'application f est bien injective car si $a, b \in A$ et $a \neq b$, $\{i \in I : a \neq b\} = I \in D$. Ensuite,

1. pour chaque symbole de fonction F de $\mathcal{L}$, et pour tout $a_1, \cdots, a_n \in A$, $[F^{\mathcal{A}}(a_1, \cdots, a_n)]_D = F^{\prod_{i\in I} \mathcal{A}/D}([a_1]_D, \cdots, [a_n]_D)$,
2. pour chaque symbole de fonction R de $\mathcal{L}$, et pour tout $a_1, \cdots, a_m \in A$, $R^{\prod_{i\in I} \mathcal{A}/D}([a_1]_D, \cdots, [a_m]_D)$ ssi $\{i \in I : R^{\mathcal{A}}(a_1, \cdots, a_m)\} \in D$.
3. pour chaque symbole de fonction c_ℓ de $\mathcal{L}$, $[c_\ell^{\mathcal{A}}]_D = c_\ell^{\prod_{i\in I} \mathcal{A}/D}$. $\square$

Définition 1.5.9 Un **ultrafiltre** sur I est un filtre propre qui a la propriété suivante : pour tout $X \subset I$, $X \in D$ ou (exclusif) $I \setminus X \in D$.

Un exemple d'ultrafiltre sur I est le filtre engendré par $\{i\}$, où $i \in I$. Ces ultrafiltres (sur I) sont dit **principaux**. Le lemme suivant nous permettra de montrer, en utilisant le Lemme de Zorn, l'existence d'ultrafiltres non principaux.

Lemme 1.5.10 *Soit U un filtre propre sur I. Alors U est un ultrafiltre si et seulement si U est un filtre propre maximal.*

Preuve : ($\Rightarrow$) Soit U un ultrafiltre et soit $E \in \mathcal{P}(I) \setminus U$. Par hypothèse sur U, $(I \setminus E) \in U$. Si E appartenait à un filtre propre D contenant U, on obtiendrait une contradiction (en effet $E \cap (I \setminus E) \in D$).

($\Leftarrow$) Soit D un filtre propre maximal et soit $E \notin D$. Le filtre engendré par D et $\{E\}$ n'est pas un filtre propre par maximalité de D et donc il existe $E_1 \in D$ tel que $E_1 \cap E = \emptyset$. Comme $E_1 \subset (I \setminus E)$, on a $I \setminus E \in D$. $\square$

Définition 1.5.11 Si U est un **ultrafiltre** sur I, on dira que le produit réduit $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i/U$ est l'**ultraproduit** des $\mathcal{L}$-structures $\mathcal{A}_i$, $i \in I$, relativement à l'ultrafiltre U.

On montre que tout filtre propre D se plonge dans un ultrafiltre en utilisant le Lemme de Zorn. On vérifie donc que l'ensemble des filtres propres qui contiennent D est un inductif pour l'inclusion. Soit D_i, $i \in I$, où I est un ensemble totalement ordonné, une chaîne de filtres propres qui contiennent D. Soit $F := \bigcup_{i \in I} D_i$; c'est bien un filtre et s'il n'était pas propre, l'un des D_i ne serait pas propre.

Exercice 1.5.12

1. *Soit F le filtre de Fréchet sur I, étant donné un sous-ensemble infini E de I qui n'appartient pas à F, il existe un ultrafilte U tel que $F \subset U$ et $E \in U$.*
2. *Montrer qu'un ultrafiltre sur I est principal si et seulement si il est engendré par une partie finie de I.*
3. *Montrer que si un ultrafiltre sur I n'est pas principal, alors il contient le filtre de Fréchet sur I.*
4. *Montrer que si U est un ultrafiltre principal engendré par $\{j\}$ où $j \in I$, alors $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i/U \cong \mathcal{A}_j$.*
5. *Soit $\mathcal{P}^{fin}(I)$ l'ensemble des parties finies de I. Soit $e \in \mathcal{P}^{fin}(I)$ et soit I_e l'ensemble des parties finies de I qui contiennent e. Montrer que $\{I_e : e \in \mathcal{P}^{fin}(I)\}$ a la PIF.*

Chapitre 2

Langages du premier ordre et sémantique

Dans le premier chapitre, on a décrit ce qu'étaient les $\mathcal{L}$-structures pour un langage donné $\mathcal{L}$. On a aussi décrit diverses opérations (unions de chaînes, produits réduits) sur ces $\mathcal{L}$-sructures qui nous ont permis d'en construire d'autres. Pour les comparer, on a défini les notions d'isomorphismes et de plongement. On va introduire une autre notion, l'équivalence élémentaire entre deux $\mathcal{L}$-structures, qui ne va pas dépendre des cardinalités des structures considérées et qui, en gros, voudra dire que les deux $\mathcal{L}$-structures ont les mêmes *propriétés du premier ordre.* Ces propriétés seront écrites dans un certain langage formel et *premier ordre* signifie que l'on ne s'autorise qu'aux quantificateurs portant sur les éléments des structures. Ce langage formel utilisera outre les symboles de $\mathcal{L}$ les symboles logiques suivants :

1. deux parenthèses (,),
2. un nombre dénombrable de variables : $x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$, $n \in \mathbb{N}$.
3. les connecteurs : $\wedge$ (et), $\neg$ (non),
4. le quantificateur $\forall$ (pour tout),
5. et un symbole de relation binaire $=$ (l'égalité).

2.1 Termes

Les $\mathcal{L}$-termes sont obtenus en un nombre fini d'étapes en appliquant les opérations ci-dessous :

1. une constante de $\mathcal{L}$ est un $\mathcal{L}$-terme,
2. une variable est un $\mathcal{L}$-terme,
3. si F est une fonction de $\mathcal{L}$ d'arité n et $t_1, \cdots, t_n$ sont n $\mathcal{L}$-termes, alors $F(t_1, \cdots, t_n)$ est un $\mathcal{L}$-terme.

Parfois nous utiliserons la notation $t(x_1, \cdots, x_n)$ pour indiquer que les variables qui apparaissent dans le terme t sont parmi $x_1, \cdots, x_n$.

Pour les preuves qui vont suivre, c'est utile de définir la *complexité* d'un terme ou plus précisément quand est-ce qu'un terme est de complexité $\leq k$, $k \in \mathbb{N}$.

On dira qu'un terme est de complexité 0 si et seulement si c'est soit une variable, soit une constante. Si t est un terme de la forme $F(t_1, \cdots, t_n)$, où $t_1, \cdots, t_n$ sont des termes de complexité $\leq k$, alors on dira que t est de complexité $\leq k+1$.

Exercice 2.1.1 *Dans chacun des langages ci-dessous, donnez un exemple de $\mathcal{L}$-termes en indiquant leur complexité :*

1. *$\mathcal{L} := \{E\}$, où E est un symbole de relation binaire.*
2. *$\mathcal{L} := \{+, -, c\}$ où $+$ est un symbole de fonction binaire et $-$ est un symbole de fonction unaire et c un symbole de constante.*
3. *$\mathcal{L} := \{+, -, E, c\}$, où $+$ est un symbole de fonction binaire et $-$ est un symbole de fonction unaire et c un symbole de constante, E est un symbole de relation binaire.*
4. *$\mathcal{L} := \{+, -, \cdot, exp, 0, 1\}$ où $+$, $\cdot$ sont des symboles de fonctions binaires, $-$, exp sont des symboles de fonctions unaires et* 0, 1 *sont des symboles de constante.*

On notera $\mathcal{V}$ l'ensemble des variables et par $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ (ou simplement $\mathcal{T}$) l'ensemble des $\mathcal{L}$-termes.

2.2 Formules

Les $\mathcal{L}$-formules les plus simples seront appelées formules *atomiques*.

Définition 2.2.1 Une $\mathcal{L}$-formule atomique est une formule de la forme :

1. $t_1 = t_2$ où t_1, t_2 sont deux $\mathcal{L}$-termes
2. $R(t_1, \cdots, t_m)$, où R est une relation de $\mathcal{L}$ d'arité m et $t_1, \cdots, t_m$ sont m $\mathcal{L}$-termes.

Définition 2.2.2 Une $\mathcal{L}$-formule est obtenue en appliquant un nombre fini de fois les opérations suivantes :

- une $\mathcal{L}$-formule atomique est une $\mathcal{L}$-formule,
- si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux $\mathcal{L}$-formules, $\phi_1 \wedge \phi_2$ est une $\mathcal{L}$-formule, et si
- ϕ est une $\mathcal{L}$-formule, alors $\neg\phi$ est une $\mathcal{L}$-formule.
- si x est une variable et ϕ est une $\mathcal{L}$-formule, alors $\forall x\ \phi$ est une $\mathcal{L}$-formule.

On note l'ensemble des $\mathcal{L}$-formules par $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ (ou simplement $\mathcal{F}$).

De la même façon que pour les termes, pour les preuves qui vont suivre, c'est utile de définir la *complexité* d'une formule ou plus précisement quand est-ce qu'une formule est de complexité $\leq k$, $k \in \mathbb{N}$. Une formule est de complexité 0 si et seulement si c'est une formule atomique. Si ψ est de la forme $\phi_1 \wedge \phi_2$, $\neg\phi$, $\forall x\ \phi$, où ϕ_1, ϕ_2, ϕ sont de complexité $\leq k$, alors ψ est de complexité $\leq k+1$.

On utilisera les abbréviations suivantes : $\exists x\ \phi$ pour $\neg(\forall x(\neg\phi))$, $\phi \vee \psi$ pour $\neg((\neg\phi) \wedge (\neg\psi))$, $\phi \to \psi$ pour $\neg\phi \vee \psi$ et $\phi \leftrightarrow \psi$ pour $(\neg\phi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \phi)$.

Définition 2.2.3 Une variable x apparaissant dans une formule ϕ est dite *liée* si elle apparait dans le quantificateur $\forall x$ ou si le quantificateur $\forall x$ porte sur elle dans la formule ϕ, la variable x est *libre* dans ϕ si elle apparait au moins une fois dans ϕ sans que le quantificateur $\forall x$ ne porte sur elle. On parlera d'*occurrence* (libre ou liée) de x dans ϕ. Notez que dans une même formule une variable peut à la fois libre et liée. Un *énoncé* est une $\mathcal{L}$-formule dont toutes les variables sont liées.

On dira qu'une $\mathcal{L}$-formule est **sans quantificateurs** si elle est obtenue à partir de formules atomiques et des connecteurs $\wedge$ et $\neg$.

Convention : Quand on écrit $\phi(x_1, \cdots, x_n)$, cela signifie que les variables libres de ϕ se trouvent **parmi** $x_1, \cdots, x_n$. **Par contre**, on se donne le droit de simplement écrire ϕ sans spécifier quelles sont les variables qui apparaissent. Si on veut spécifier que ϕ n'a pas de variables libres, on précisera que ϕ est un énoncé. La première écriture est pratique lorsque l'on veut faire une substitution (voir plus bas) ou lorsque l'on veut quantifier sur les variables libres de ϕ.

Exemple 2.2.4 *Soit $t_1(x_1, x_2), t_2(x_1, x_2)$ deux $\mathcal{L}$-termes et soit $R(x_1)$ un symbole de relation 1-aire de $\mathcal{L}$.*

Dans la formule : $t_1(x_1, x_2) = t_2(x_1, x_2)$, les variables x_1 et x_2 sont libres.

Dans la formule $t_1(x_1, x_2) = t_2(x_1, x_2) \to \forall x_1 R(x_1)$ la variable x_1 apparait deux fois de façon libre et deux fois de façon liée.

Dans la formule $\forall x_1(t_1(x_1, x_2) = t_2(x_1, x_2) \to \forall x_1 R(x_1))$, x_2 apparait deux fois de façon libre et x_1 apparait toujours de façon liée.

Exercice 2.2.5 *Montrez que si $|\mathcal{L}| \leq \aleph_0$, alors le nombre de $\mathcal{L}$-formules est égale à $\aleph_0$. (Aide : Une conséquence du fait que $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$ $(\star)$ est que le cardinal d'une union dénombrable (ou finie) d'ensembles dénombrables est dénombrable. (On utilise l'existence d'une bijection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.)*

2.2.1 Sous-formules et substitution dans les termes et les formules

Si φ est une formule atomique alors φ n'a qu'une seule sous-formule elle-même.

Si φ est de la forme $\neg\psi$, ψ est une sous-formule de φ, ainsi que toute sous-formule de ψ.

Si $\varphi := \varphi_1 \wedge \varphi_2$, alors φ_1 et φ_2 sont des sous-formules de φ, ainsi que toute sous-formule de φ_1 et φ_2.

Si $\varphi := \forall x \psi$, alors ψ est une sous-formule de φ, ainsi que toute sous-formule de ψ.

Une **substitution** s est une fonction qui va des $\mathcal{L}$-termes vers les $\mathcal{L}$-termes et définie par induction comme suit. Soit $s : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$, alors s est une substitution si $s(c) = c$ pour toute constante $c \in \mathcal{L}$ et $s(F(t_1, \cdots, t_n)) := F(s(t_1), \cdots, s(t_n))$, où F est une fonction n-aire de $\mathcal{L}$. On voit donc que s est induit par sa restriction sur $\mathcal{V}$.

On étend cette fonction s sur les $\mathcal{L}$-formules. On commence par les formules atomiques $s(t_0 = t_1) := (s(t_0) = s(t_1))$ et $s(R(t_1, \cdots, t_m)) := R(s(t_1), \cdots, s(t_m))$, où R est une relation m-aire et $t_1, \cdots, t_m$ $\mathcal{L}$-termes. Ensuite, $s(\neg\phi) := \neg s(\phi)$, $s(\phi_1 \wedge \phi_2) := s(\phi_1) \wedge s(\phi_2)$ et $s(\forall x\ \phi(x, x_1, \cdots, x_m)) := \forall x\ s(\phi(x, x_1, \cdots, x_m))$ avec $s(x) = x$.

2.3 Satisfaction

Utilisant l'interprétation des symboles de $\mathcal{L}$ dans une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{A}$, on va interpréter les $\mathcal{L}$-termes dans $\mathcal{A}$ de la façon suivante.

Soit $t(x_1, \cdots, x_n)$ un $\mathcal{L}$-terme et soient $a_1, \cdots, a_m \in A$, $m \geq n$. On définit $t^{\mathcal{A}}[a_1, \cdots, a_m]$ par :

1. si $t(x_1, \cdots, x_n) := x_i$, $1 \leq i \leq n$, alors $t^{\mathcal{A}}[a_1, \cdots, a_m] = a_i$
2. si $t(x_1, \cdots, x_n) := c$, alors $t^{\mathcal{A}}[a_1, \cdots, a_m] = c^{\mathcal{A}}$
3. si $t(x_1, \cdots, x_n) := F(t_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, t_n(x_1, \cdots, x_n))$, alors

$$t^{\mathcal{A}}[a_1, \cdots, a_m] = F^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[a_1, \cdots, a_m], \cdots, t_n^{\mathcal{A}}[a_1, \cdots, a_m]).$$

Définition 2.3.1 Une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{A}$ est *finiment engendrée* s'il existe un nombre fini d'éléments $a_1, \cdots, a_k$ appartenant à A tel que tout élément a de A soit de la forme $t^{\mathcal{A}}[a_1, \cdots, a_k]$ où $t(x_1, \cdots, x_n)$ est un $\mathcal{L}$-terme.

Exercice 2.3.2

1. *Montrer que si $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{L}$-structure et $a \in A$, alors $\{t^{\mathcal{A}}[a] : t$ est un $\mathcal{L}$-terme $\}$ est le domaine d'une sous-structure de $\mathcal{A}$.*
2. *Montrer que si le langage $\mathcal{L}$ est relationnel et n'a qu'un nombre fini de constantes, alors toute $\mathcal{L}$-structure finiment engendrée est finie.*

Définition 2.3.3 Une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{A}$ est dite *homogène* si tout isomorphisme entre deux sous-structures finiment engendrées de $\mathcal{A}$ s'étend en un automorphisme de $\mathcal{A}$.

Exercice 2.3.4 *Montrer que la $\mathcal{L}$-structure $(\mathbb{Q}, <)$ est homogène.*

Définition 2.3.5 Soit $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ une $\mathcal{L}$ formule et $a_1, \cdots, a_m \in A$, $m \geq n$, on définit $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \cdots, a_m]$ par induction sur la complexité de φ.

1. Si $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ est une formule atomique de la forme :
   - $t_1(x_1, \cdots, x_n) = t_2(x_1, \cdots, x_n)$, où $t_1(x_1, \cdots, x_n), t_2(x_1, \cdots, x_n)$ sont deux $\mathcal{L}$-termes,

   $$\mathcal{A} \models (t_1 = t_2)[a_1, \cdots, a_m] \text{ ssi } t_1^{\mathcal{A}}[a_1, \cdots, a_m] = t_2^{\mathcal{A}}[a_1, \cdots, a_m],$$

   - $R(t_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, t_n(x_1, \cdots, x_n))$ où $t_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, t_n(x_1, \cdots, x_n)$ sont des $\mathcal{L}$-termes,

   $$\mathcal{A} \models R(t_1, \cdots, t_n)[a_1, \cdots, a_m] \text{ ssi } R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[a_1, \cdots, a_m], \cdots, t_n^{\mathcal{A}}[a_1, \cdots, a_m])$$

2. Si $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ est de la forme $\varphi_1(x_1, \cdots, x_n) \wedge \varphi_2(x_1, \cdots, x_n)$

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \cdots, a_m] \text{ ssi } \mathcal{A} \models \varphi_1[a_1, \cdots, a_m] \text{ et } \mathcal{A} \models \varphi_2[a_1, \cdots, a_m]$$

3. Si $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ est de la forme $\neg\psi(x_1, \cdots, x_n)$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \cdots, a_m] \text{ ssi } \mathcal{A} \not\models \psi[a_1, \cdots, a_m]$$

4. Si φ est de la forme $\forall x \psi(x, x_1, \cdots, x_n)$

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \cdots, a_m] \text{ ssi (pour tout } a \in A, \mathcal{A} \models \psi[a, a_1, \cdots, a_m]).$$

On dit que deux $\mathcal{L}$ formules $\varphi_1(x_1, \cdots, x_n)$, $\varphi_2(x_1, \cdots, x_n)$ sont équivalentes si pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{B}$,

$$\mathcal{B} \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \ (\varphi_1(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \varphi_2(x_1, \cdots, x_n)).$$

On dira que $\mathcal{A}$ satisfait ϕ en $(a_1, \cdots, a_m)$ ou que le uple $(a_1, \cdots, a_m)$ d'éléments de A satisfait ϕ dans $\mathcal{A}$, si $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \cdots, a_m]$. On dira qu'une formule $\phi(x_1, \cdots, x_m)$ est **satisfaisable** dans $\mathcal{A}$ s'il **existe** un uple d'éléments $(a_1, \cdots, a_m)$ de A satisfait ϕ.

Si ϕ est un énoncé, on notera $\mathcal{A} \models \phi$ si ϕ est vrai (ou satisfait, ici toutes les variables libres sont quantifiées) dans $\mathcal{A}$.

Par contre, on dira qu'une formule est **vraie** dans $\mathcal{A}$ si pour tout uple d'éléments $(a_1, \cdots, a_m)$ de A satisfait $\mathcal{A} \models \phi[a_1, \cdots, a_m]$, autrement dit $\mathcal{A}$ satisfait l'énoncé $\forall x_1 \cdots \forall x_n \phi(x_1, \cdots, x_n)$. (Pour un énoncé être vrai ou satisfaisable est la même notion car toutes les variables libres sont quantifiées.)

Notation 2.3.6 On notera l'ensemble des $\mathcal{L}$-formules $\phi(x_1, \cdots, x_m)$ satisfaites par $\bar{a} := (a_1, \cdots, a_m)$ dans $\mathcal{A}$ par $tp^{\mathcal{A}}(\bar{a})$. (On appelera aussi cet ensemble de formules *le type dans $\mathcal{A}$ de $\bar{a}$*.

Exercice 2.3.7

1. *Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ deux $\mathcal{L}$-structures isomorphes et soit $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un isomorphisme. Montrer que pour toute formule $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ et tout $(a_1, \cdots, a_n) \in A^n$, on a $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]$ ssi $\mathcal{B} \models \varphi[f(a_1), \cdots, f(a_n)]$. (Aide : commencer par montrer que si $t(x_1, \cdots, x_m)$ est un $\mathcal{L}$-terme, $f(t[a_1, \cdots, a_n]) = t[f(a_1), \cdots, f(a_n)]$ (par induction sur la complexité de t). Ensuite, procéder par induction sur la complexité des formules.)*
2. *Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{L}$-structure et soient $\bar{a} := (a_1, \cdots, a_n)$, $\bar{b} = (b_1, \cdots, b_n) \in A^{n<}$. Supposons que $\bar{a}$, $\bar{b}$ sont dans la même orbite de $Aut(\mathcal{A})$. Montrer que ces deux n-uples ont le même type dans $\mathcal{A}$. (Aide : procéder par induction sur la complexité des formules.)*

Définition 2.3.8 On dira qu'une classe $\mathcal{C}$ de $\mathcal{L}$-structures est **axiomatisée** par un ensemble d'énoncés T si $\mathcal{C}$ est exactement la classe des $\mathcal{L}$-structures qui satisfont T (c.a.d. où chaque élément de T est satisfait). On utilisera la notation $\mathcal{A} \models T$, où $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{L}$-structure, lorsque $\mathcal{A} \models \phi$, pour tout $\phi \in T$; et on dira que $\mathcal{A}$ est un **modèle de** T.

Une classe $\mathcal{C}$ de $\mathcal{L}$-structures est dite **élémentaire** s'il existe un ensemble d'énoncés T tel que $\mathcal{C}$ soit la classe des $\mathcal{L}$-structures qui satisfont T.

La classe $\mathcal{C}$ des modèles de T est **finiment axiomatisée** s'il existe un nombre fini d'énoncés T_0 tel que $\mathcal{C}$ est la classe des modèles de T_0.

On notera $T \models \phi$, où ϕ est un énoncé, lorsque que pour tout $\mathcal{A} \models T$, $\mathcal{A} \models \phi$.

Une $\mathcal{L}$-formule ϕ est *universellement vraie* , noté $\models \phi$ si pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ satisfait ϕ (si ϕ a des variables libres, on quantifie universellement sur ces variables.

Enfin on dit que deux $\mathcal{L}$ formules $\varphi_1(x_1, \cdots, x_n)$, $\varphi_2(x_1, \cdots, x_n)$ sont **équivalentes dans** T si pour tout modèle $\mathcal{B}$ de T, $\mathcal{B} \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \ (\varphi_1(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \varphi_2(x_1, \cdots, x_n))$.

Exemple 2.3.9 *Soit* $\mathcal{L} := \{+, -, 0\}$ *et soit* Σ_g *l'ensemble des* $\mathcal{L}$*-énoncés suivants :*

1. $\forall x \forall y \forall z\ (x + y + z = x + y + z)$
2. $\forall x\ (x + 0 = x\ \wedge\ 0 + x = x)$
3. $\forall x\ (x + (-x) = 0\ \wedge\ (-x) + x = 0)$

Soit $\Sigma_{ga} := \Sigma_g \cup \{\forall x \forall y\, (x + y = y + x)\}$. *Posons* $\sigma_n := \forall x\ (n.x = 0 \to x = 0)$ *et notons* $\Sigma_{st} := \Sigma_{ga} \cup \{\sigma_n :\ n \geq 2\}$.

Soit $p \in \mathcal{P}$ *un nombre premier et soit* $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, -, 0)$ *le groupe des entiers modulo p. On a que* $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, -, 0) \models \Sigma_{ga}$*, ainsi que* $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, -, 0) \models \sigma_n$ *pour chaque* $2 \leq n < p$ *et* $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, -, 0) \models \neg\sigma_p$. *Notons que* $\Sigma_{ga} \models \sigma_1$.

Proposition 2.3.10 *Soit* $\phi(x_1, \cdots, x_n)$ *une* $\mathcal{L}$*-formule et soient* $t_1(u_1, \cdots, u_n), \cdots, t_n(u_1, \cdots, u_n)$ *des* $\mathcal{L}$*-termes. Supposons qu'aucune des variables apparaissant dans ces termes n'apparait liée dans* ϕ. *Soient* $a_1, \cdots, a_n \in A$. *Soit* $\phi(t_1, \cdots, t_n)$ *la* $\mathcal{L}$*-formule obtenue en substituant* t_i *à* x_i, $1 \leq i \leq n$. *Alors,*

$$\mathcal{A} \models \phi(t_1, \cdots, t_n)[a_1, \cdots, a_n] \text{ ssi } \mathcal{A} \models \phi(t_1^{\mathcal{A}}[a_1, \cdots, a_n], \cdots, t_n^{\mathcal{A}}[a_1, \cdots, a_n]).$$

Preuve : Par induction sur la complexité de ϕ (exercice). $\square$

Exercice 2.3.11

1. *En choisissant judicieusement le langage* $\mathcal{L}$*, axiomatiser la classe des groupes, des groupes abéliens ordonnés, des anneaux, des corps commutatifs, des corps commutatifs ordonnés, des algèbres de Boole (voir Appendice A), des graphes, des graphes sans cycles, des espaces vectoriels sur* $\mathbb{R}$.
2. *Soit I un ensemble totalement ordonné et soient* $\mathcal{A}_i$*,* $i \in I$ *une chaîne de* $\mathcal{L}$*-structures. Montrer que si* τ *est un* $\mathcal{L}$*-énoncé de la forme* $\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y_1 \cdots \exists y_m \theta(\bar{x}, \bar{y})$*, où* θ *est une formule sans quantificateurs. Si chacun des* $\mathcal{A}_i$ *satisfait* τ*, alors* $\varinjlim_{i \in I} \mathcal{A}_i$ *satisfait* τ.

2.4 Equivalence élémentaire

Définition 2.4.1 Deux $\mathcal{L}$-structures $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont **élémentairement équivalentes** si pour tout $\mathcal{L}$-énoncé σ,

$$\mathcal{A} \models \sigma \text{ ssi } \mathcal{B} \models \sigma.$$

Si $\mathcal{A}$ est une sous-structure de $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$), on dira que $\mathcal{A}$ est **une sous-structure élémentaire** de $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$) si pour toute $\mathcal{L}$-formule $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ et tout uple d'élements $a_1, \cdots, a_n$ de A,

$$\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \cdots, a_n) \text{ ssi } \mathcal{B} \models \varphi(a_1, \cdots, a_n).$$

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux $\mathcal{L}$-structures. On dit que $\mathcal{A}$ se plonge élémentairement dans $\mathcal{B}$ s'il existe une sous-structure élémentaire de $\mathcal{B}$ qui est isomorphe à $\mathcal{A}$, ce qu'on notera par $\mathcal{A} \overset{\preceq}{\hookrightarrow} \mathcal{B}$.

Exercice 2.4.2 *Soient* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *deux* $\mathcal{L}$*-structures et supposons que* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.

1. *Supposons que $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$. Soit $\bar{a} := (a_1, \cdots, a_m) \in A^{m<}$. Montrez que $tp^{\mathcal{A}}(\bar{a})$ est égal à $tp^{\mathcal{B}}(\bar{a})$.*
2. *Supposons que pour tout $m \geq 1$ et pour tout $\bar{a} := (a_1, \cdots, a_m) \in A^{m<}$, $tp^{\mathcal{A}}(\bar{a})$ est égal à $tp^{\mathcal{B}}(\bar{a})$. Montrer que $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$.*

Exercice 2.4.3

1. *Montrez que $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$ est une sous-structure de $(\mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1)$ mais n'est pas une sous-structure élémentaire.*
2. *Montrer que le groupe des matrices 2×2 triangulaires supérieures à coéfficients dans $\mathbb{Q}$ de déterminant 1, n'est pas élémentairement équivalents au groupe des matrices inversibles 2×2 triangulaires supérieures à coéfficients dans $\mathbb{Q}$. (Aide : calculer le centre de ces deux groupes.)*
3. *Axiomatiser la classe des ordres totaux denses et la classe des ordres totaux discrets.*
4. *Montrer que le produit lexicographique $(\mathbb{Z}, +, 0, <)\overrightarrow{\times}(\mathbb{Q}, +, 0, <)$ est un groupe abélien totalement ordonné qui est dense et dénombrable.*
5. *Montrer que le produit lexicographique de $(\mathbb{Z}, +, 0, <)\overrightarrow{\times}(\mathbb{Z}, +, 0, <)$ est un groupe abélien totalement ordonné qui est discret et dénombrable, mais ce groupe ordonné n'est pas élémentairement équivalent à $(\mathbb{Z}, +, 0, <)$.*

Théorème 2.4.4 (Łos) *Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre non principal sur I et soient $\mathcal{A}_i$ des $\mathcal{L}$-structures et $[a_{1i}], \cdots, [a_{ni}]$ n éléments de $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i/U$ et soit $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ une $\mathcal{L}$-formule. Alors*

$$\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i/U \models \varphi([a_{1i}]_U, \cdots, [a_{ni}]_U) \text{ ssi } \{i \in I : \ \mathcal{A}_i \models \varphi(a_{1i}, \cdots, a_{ni})\} \in U.$$

Corollaire 2.4.5 *Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre non principal sur I et soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{L}$-structure. Alors $\mathcal{A}$ se plonge élémentairement dans $\mathcal{A}^I/\mathscr{U}$.*

Preuve : On prouve ce théorème par induction sur la complexité des formules. Nous commençons par prouver le lemme suivant.

Lemme 2.4.6 *Pour tout $\mathcal{L}$-terme $t(x_1, \cdots, x_n)$,*

$$t^{\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i/U}[[a_{1i}]_U, \cdots, [a_{1i}]_U] = [t^{\mathcal{A}_i}[a_{1i}, \cdots, a_{ni}]]_U.$$

Preuve : On procède par induction sur la complexité des termes. Si t est soit une variable ou soit une constante, on déduit cette égalité de la définition de l'égalité de deux éléments dans l'ultraproduit. Si t est de la forme $F(t_1, \cdots, t_n)$, où F est une fonction n-aire de $\mathcal{L}$ et $t_1, \cdots, t_n$ sont de complexité plus petite, cela suit de l'interprétation de F dans l'ultraproduit et de l'induction. $\square$

Preuve du théorème :

(1) On commence par les formules atomiques et on procède par induction sur leur complexité.

Supposons que la formule atomique soit de la forme $t_1 = t_2$, où $t_1, \ t_2$ sont deux $\mathcal{L}$-termes. On utilise le lemma précédent.

Supposons que la formule atomique soit de la forme $R(t_1, t_2, \cdots, t_m)$, où $t_1,\ t_2, \cdots, t_m$ sont des $\mathcal{L}$-termes. On a $R^{\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i/U}(t_1^{\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i/U}[[a_{1i}]_U, \cdots, [a_{ni}]_U], \cdots, t_n^{\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i/U}[[a_{1i}]_U, \cdots, [a_{ni}]_U])$ ssi $\{i \in I :\ R^{\mathcal{A}_i}(t_1^{\mathcal{A}_i}(a_{1i}, \cdots, a_{ni}), \cdots, t_n^{\mathcal{A}_i}(a_{1i}, \cdots, a_{ni})\} \in U$.
(2) Suppposons que l'on a prouvé cette équivalence pour des $\mathcal{L}$-formules φ_1, φ_2, et prouvons-la pour $\varphi_1 \wedge \varphi_2$.

($\Rightarrow$) Soient $[a_{1i}]_U, \cdots, [a_{ni}]_U$ n éléments de $\prod_{i\in I} A_i/U$ et supposons que $\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i/U \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)([a_{1i}]_U, \cdots, [a_{ni}]_U)$. Par la définition de la satisfaction dans une structure cela signifie que $\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i/U \models \varphi_1([a_{1i}]_U, \cdots, [a_{ni}]_U)$ et $\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i/U \models \varphi_2)([a_{1i}]_U, \cdots, [a_{ni}]_U)$. Par induction, cela signifie que $E_1 := \{i \in I :\ \mathcal{A}_i \models \varphi_1([a_{1i}], \cdots, [a_{ni}])\} \in U$ et $E_2 := \{i \in I :\ \mathcal{A}_i \models \varphi_2([a_{1i}]_U, \cdots, [a_{ni}]_U)\} \in U$. Un filtre étant fermé par intersection finie, cela implique que $E_1 \cap E_2 \in U$. Comme $E_1 \cap E_2 = \{i \in I :\ \mathcal{A}_i \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)([a_{1i}]_U, \cdots, [a_{ni}]_U)\}$ on a bien que $\{i \in I :\ \mathcal{A}_i \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)([a_{1i}]_U, \cdots, [a_{ni}]_U)\} \in U$.

($\Leftarrow$) Supposons que $E := \{i \in I :\ \mathcal{A}_i \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)([a_{1i}]_U, \cdots, [a_{ni}]_U)\} \in U$. Cet ensemble E est inclus à $\{i \in I :\ \mathcal{A}_i \models \varphi_1([a_{1i}]_U, \cdots, [a_{ni}]_U)\}$ et à $\{i \in I :\ \mathcal{A}_i \models \varphi_2([a_{1i}]_U, \cdots, [a_{ni}]_U)\}$. Comme si un sous-ensemble appartient à un filtre tout autre sous-ensemble qui le contient appartient aussi au filtre, on a que $\{i \in I :\ \mathcal{A}_i \models \varphi_1([a_{1i}]_U, \cdots, [a_{ni}]_U)\} \in U$ et $\{i \in I :\ \mathcal{A}_i \models \varphi_2([a_{1i}]_U, \cdots, [a_{ni}]_U)\} \in U$. Par induction cela signifie que $\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i/U \models \varphi_1([a_{1i}]_U, \cdots, [a_{ni}]_U)$ et $\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i/U \models \varphi_2)([a_{1i}]_U, \cdots, [a_{ni}]_U)$.
(3) Suppposons que l'on a prouvé cette équivalence pour des $\mathcal{L}$-formules φ, prouvons-la pour $\neg\varphi$.

($\Rightarrow$) Soient $[a_{1i}]_U, \cdots, [a_{ni}]_U$ n éléments de $\prod_{i\in I} A_i/U$ et supposons que $\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i/U \models \neg\varphi([a_{1i}]_U, \cdots, [a_{ni}]_U)$. Par définition de la satisfaction, cela signifie que $\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i/U \not\models \varphi([a_{1i}]_U, \cdots, [a_{ni}]_U)$. Par induction, cela signifie que $\{i \in I : \mathcal{A}_i \models \varphi(a_{1i}, \cdots, a_{ni})\} \notin U$. Comme U **est un ultrafiltre**, c'est équivalent à $I \setminus \{i \in I : \mathcal{A}_i \models \varphi(a_{1i}, \cdots, a_{ni})\} \in U$. Mais $I \setminus \{i \in I : \mathcal{A}_i \models \varphi(a_{1i}, \cdots, a_{ni})\} = \{i \in I : \mathcal{A}_i \not\models \varphi(a_{1i}, \cdots, a_{ni})\}$. Donc $\{i \in I : \mathcal{A}_i \models \neg\varphi(a_{1i}, \cdots, a_{ni})\} \in U$ (une structure satisfait une formule ou sa négation, par définition de la satisfaction).

($\Leftarrow$) Supposons que $\{i \in I : \mathcal{A}_i \models \neg\varphi(a_{1i}, \cdots, a_{ni})\} \in U$. Comme U est un filtre propre, $\{i \in I : \mathcal{A}_i \models \varphi(a_{1i}, \cdots, a_{ni})\} \notin U$. Par induction, $\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i/U \not\models \varphi([a_{1i}]_U, \cdots, [a_{ni}]_U)$ et donc $\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i/U \models \neg\varphi([a_{1i}]_U, \cdots, [a_{ni}]_U)$ (une structure satisfait une formule ou sa négation, par définition de la satisfaction).
(4) Supposons que l'on a prouvé cette équivalence pour des $\mathcal{L}$-formules φ et prouvons-la pour $\exists x\ \varphi$.
Montrons que $\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i/U \models \exists x\ \varphi(x, [a_{1i}]_U, \cdots, [a_{ni}]_U)$ ssi $\{i \in I :\ \mathcal{A}_i \models \exists x\ \varphi(x, a_{1i}, \cdots, a_{ni})\} \in U$.

($\Rightarrow$) Soit $[b_i]_U \in \prod_{i\in I}\mathcal{A}_i/U$ telle que $\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i/U \models \varphi([b_i]_U, [a_{1i}]_U, \cdots, [a_{ni}]_U)$. Par induction, c'est équivalent à : $\{i \in I :\ \mathcal{A}_i \models \exists x\ \varphi(b_i, a_{1i}, \cdots, a_{ni})\} \in U$. Et donc $\{i \in I : \mathcal{A}_i \models \exists x\ \varphi(x, a_{1i}, \cdots, a_{ni})\} \in U$.

($\Leftarrow$) Supposons que $E := \{i \in I :\ \mathcal{A}_i \models \exists x\ \varphi(x, a_{1i}, \cdots, a_{ni})\} \in U$. Si $i \in E$, choisissons un élément $d_i \in A_i$ tel que $\mathcal{A}_i \models \varphi(d_i, a_{1i}, \cdots, a_{ni})$ et pour $j \in I \setminus E$, on prend u_i un élément quelconque de A_i. Soit $(b_i)_{i\in I}$ la suite déléments de A_i défine par : $b_i = d_i$ si $i \in E$ et $b_i = u_i$ si $i \notin E$. On a que $\{i \in I :\ \mathcal{A}_i \models \varphi(b_i, a_{1i}, \cdots, a_{ni})\} \in U$. Par induction, cela signifie que $\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i/U \models \varphi([b_i]_U, [a_{1i}]_U, \cdots, [a_{ni}]_U)$. Par définition de la satisfaction, on a que $\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i/U \models \exists x\ \varphi(x, [a_{1i}]_U, \cdots, [a_{ni}]_U)$.

Remarque : on a aussi que $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i/U \models \forall x\ \varphi(x, [a_{1i}]_U, \cdots, [a_{ni}]_U)$ ssi $\{i \in I :\ \mathcal{A}_i \models \forall x\ \varphi(x, a_{1i}, \cdots, a_{ni})\} \in U$. $\square$

Preuve du Corollaire 2.4.5 : Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre non principal sur I et soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{L}$-structure. Nous avons déjà montré que $\mathcal{A}$ se plonge dans $\mathcal{A}^I/\mathscr{U}$ (Proposition 1.5.8).

On prouve le théorème par induction sur la complexité des formules. On doit montrer que pour tout n-uple d'éléments de A et pour toute $\mathcal{L}$-formule $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$, on a l'équivalence suivante : $\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \cdots, a_n)$ ssi $\mathcal{A}^I/\mathscr{U} \models \varphi([a_1]_U, \cdots, [a_n]_U)$.

Notons que si on prouve cette équivalence pour des $\mathcal{L}$-formules $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$, on la prouve pour $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ ainsi que pour $\neg\varphi$.

Par le Lemme 2.4.4, $\mathcal{A}^I/\mathscr{U} \models \varphi([a_1]_U, \cdots, [a_n]_U)$ ssi $\{i \in I : \mathcal{A} \models \varphi(a_1, \cdots, a_n)\} \in U$.

Si φ est une formule atomique de la forme $t_1 = t_2$ ou $R(t_1, \cdots, t_m)$.

Si φ est de la forme $\exists x \psi(x, x_1, \cdots, x_n)$ et si $\mathcal{A} \models \psi(b, a_1, \cdots, a_n)$, alors $\{i \in I : \mathcal{A} \models \varphi(b, a_1, \cdots, a_n)\} = I \in U$. L'élément cherché est $[b]_U$.

Si $\{i \in I : \mathcal{A} \models \exists x\ \varphi(x, [a_1]_U, \cdots, [a_n]_U)\} \in U$. Rappelons que $[a_i]_U$, $1 \leq i \leq n$, est la classe d'équivalence modulo U de la suite constante (a_i), $1 \leq i \leq n$. Puisque U est un filtre propre, cet ensemble est non vide et on peut supposer que l'indice i_0 dans cet ensemble est tel que les représentants des classes d'équivalence de ces suites sont égaux respectivement à $a_1, \cdots, a_n$. On a donc que $\mathcal{A} \models \exists x \varphi(x, a_1, \cdots, a_n)$. $\square$

Exercice 2.4.7

1. *Soit* $\mathcal{L} := \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ *et soit* $\mathcal{F}$ *le filtre de Fréchet sur* $\mathbb{N}$. *Montrer que* $\prod_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{Z}, +, -, \cdot, 0, 1)/\mathcal{F}$ *n'est pas élémentairement équivalent à* $(\mathbb{Z}, +, -, \cdot, 0, 1)$.
2. *Montrez que la classe* $\mathcal{C}$ *des corps finis n'est pas élémentaire.*

En utilisant le théorème de Łos et que tout filtre propre se prolonge en un ultrafiltre, nous allons montrer le théorème de compacité. Nous donnerons une autre preuve de ce théorème après avoir formalisé la notion de *preuves.*

Théorème 2.4.8 *(Compacité) Soit* T *un ensemble de* $\mathcal{L}$*-énoncés. Alors* T *a un modèle, autrement dit il existe une* $\mathcal{L}$*-structure qui satisfait* T *ssi toute partie finie de* T *a un modèle.*

Preuve : Nous allons construire un filtre sur l'ensemble des parties **finies non vides** de T ; noté $\mathcal{P}^{fin}(T)$. Soit $e \in \mathcal{P}^{fin}(T)$, par hypothèse il existe une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{A}_e$ qui satisfait la conjonction $\bigwedge e$ des énoncés qui sont dans e. Notons I_e est l'ensemble des parties finies de T qui contiennent e. Pour $e_1, e_2 \in \mathcal{P}^{fin}(T)$, on a $I_{e_1} \cap I_{e_2} \supseteq I_{e_1 \cup e_2}$ $(\star)$.

Soit D le filtre sur $\mathcal{P}^{fin}(T)$ engendré par $I_e \subset \mathcal{P}^{fin}(T)$. Ce filtre D a la PIF. (On utilise la propriété $(\star)$.) Soit U un ultrafiltre qui contient D.

En utilisant le théorème de Łos, montrons que $\prod_{e \in \mathcal{P}^{fin}} \mathcal{A}_e/U \models T$. Soit $\tau \in T$, alors si $e \in \mathcal{P}^{fin}(T)$ tel que $\tau \in e$, alors $\mathcal{A}_e \models \tau$ et donc $\{e \in \mathcal{P}^{fin}(T) :\ \mathcal{A}_e \models \tau\} \supseteq I_{\{\tau\}}$ et donc cet ensemble appartient à U. $\square$

Lemme 2.4.9 *La classe des groupes abéliens sans torsion n'est pas finiment axiomatisable.*

Preuve : Supposons au contraire qu'il y ait un énoncé τ tel qu'un groupe abélien satisfait τ ssi il est sans torsion. Soit U un ultrafiltre non principal sur $\mathcal{P}$. On considère l'ultraproduit

$\prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}/U$. Ce groupe satisfait $\neg\tau$ car chacun des $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ le satisfait. Par contre comme chaque $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour $p > n$ satisfait σ_n, où $\sigma_n := \forall x \ (n.x = 0 \rightarrow x = 0)$ (voir Exemple 2.3.9) $\prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}/U$ satisfait Σ_{st} par le théorème de Łos, on obient une contradiction. □

Exercice 2.4.10

1. *Montrez que la classe des graphes sans cycles est axiomatisable mais pas finiment axiomatisable.*
2. *Montrez que la classe des groupes finis n'est pas finiment axiomatisable.*
3. *Montrer que la classe des anneaux commutatifs locaux c.a.d. avec un unique idéal maximal est axiomatisable. (Donner aussi un exemple d'un tel anneau qui n'est un corps.)*
4. *Montrez que la classe des groupes abéliens, sans-torsion, divisibles est élémentaire, mais pas finiment axiomatisable.*
5. *Montrez qu'il y a $\aleph_0$ groupes abéliens, sans-torsion, divisibles, dénombrables non-isomorphes.*

Chapitre 3

Syntaxe et théorème de complétude

Dans le chapitre précédent, nous avons défini la notion de satisfaction d'une formule dans une $\mathcal{L}$-structure, disons $\mathcal{A}$. Nous avons noté $\mathcal{A} \models \Sigma$, où Σ est une $\mathcal{L}$-théorie, pour exprimer que pour tout $\sigma \in \Sigma$, $\mathcal{A} \models \sigma$ (ou encore σ est vrai dans $\mathcal{A}$) ; on dit que $\mathcal{A}$ *est un modèle de* Σ. Dans ce chapitre nous allons formaliser la notion de *preuve* d'un énoncé à partir d'un ensemble d'*axiomes* et relier cette notion à la notion de satisfaction.

Le résultat principal de ce chapitre est l'équivalence entre : pour un $\mathcal{L}$-énoncé ϕ, et une $\mathcal{L}$-théorie Σ,

il y a une preuve de ϕ *à partir de* Σ, ce qu'on notera par $\Sigma \vdash \phi$, et
ϕ *est vraie dans tous les modèles de* Σ, noté par $\Sigma \models \phi$.

Ce résultat est appelé théorème de complètude et sa preuve montrera que toute théorie Σ a un modèle dont la cardinalité est au plus $max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|\}$. Du théorème de complètude, nous déduirons une autre preuve du théorème de compacité.

3.1 Axiomes logiques et règles d'inférence

Soit T un ensemble de $\mathcal{L}$-énoncés. On appellera *preuve* de T une suite finie de $\mathcal{L}$-formules $\phi_1, \cdots, \phi_n$ tels que pour $1 \leq i \leq n$, soit $\phi_i \in T$, soit ϕ_i est un axiome logique (voir ci-dessous), soit ϕ_i est une conséquence de $\phi_1, \cdots, \phi_{i-1}$, $i > 1$ en appliquant les deux règles d'inférence Modus Ponens et généralisation décrites plus bas. Un théorème de T est une $\mathcal{L}$-formule ϕ telle qu'il existe une preuve $\phi_1, \cdots, \phi_n$ avec $\phi_n = \phi$.

Définition 3.1.1 Axiomes logiques

Soient ϕ, ψ, χ des $\mathcal{L}$-formules (avec éventuellement des variables libres).

1. Tautologies
   Une tautologie est une $\mathcal{L}$-formule ϕ qui est une combinaison booléenne de $\mathcal{L}$-formules ϕ_i, $1 \leq i \leq n$, (en utilisant les connecteurs $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$) et qui a la propriété suivante : quelle que soit la valeur de vérité 0 ou 1 que l'on assigne aux ϕ_i, $1 \leq i \leq n$, la formule ϕ a la valeur de vérité 1 (en utilisant les tables de vérité).

   Par exemple, les formules suivantes sont des tautologies :

   $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$
   $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$

$(\neg\psi \to \neg\phi) \to ((\neg\psi \to \phi) \to \psi)$
$(\phi \to \neg\phi) \to \neg\phi$
$\phi \to (\neg\phi \to \psi)$

2. Axiomes sur les quantificateurs
$\forall x\ \phi(x, \cdots) \to \phi(t)$, où $t(v_1, \cdots, v_n)$ est un $\mathcal{L}$-terme, *libre pour* x, c.a.d. aucune occurence libre de x n'apparait dans une sous-formule de ϕ dans laquelle v_i est quantifiée,$1 \leq i \leq n$; la formule $\phi(t)$ est la $\mathcal{L}$-formule obtenue à partir de ϕ en substituant t à toute occurrence libre de x dans ϕ.
$(\forall x_i(\phi \to \psi)) \to (\phi \to \forall x_i\psi)$ si x_i n'apparait pas de façon libre dans ϕ.
3. Axiomes de l'égalité
Soient x, y des variables et $t(u_0, \cdots, u_m)$ un $\mathcal{L}$-terme et $\varphi(u_0, \cdots, u_m)$ une $\mathcal{L}$-formule atomique. Alors les formules suivantes sont des axiomes logiques :
$\forall x\ x = x$, $\forall x\forall y\ (x = y \to y = x)$, $\forall x\forall y\forall z\ ((x = y \wedge y = z) \to x = z)$
$\forall x\forall y(x = y) \to (t(u_0, \cdots, u_{i-1}, x, u_{i+1}, u_m) = t(u_0, \cdots, u_{i-1}, y, u_{i+1}, u_m))$,
$\forall x\forall y\ ((x = y) \to (\varphi(u_0, \cdots, u_{i-1}, x, u_{i+1}, u_m) \to \varphi(u_0, \cdots, u_{i-1}, y, u_{i+1}, u_m)))$.

Définition 3.1.2 Règles d'inférence
Soient ϕ, ψ des $\mathcal{L}$-formules (avec éventuellement des variables libres).

1. (Modus Ponens) ψ est une conséquence de ϕ et $\phi \to \psi$
2. (règle de généralisation) $\forall x_i\phi$ est une conséquence de ϕ

Pourquoi les axiomes sur les quantificateurs sont-ils énoncés de cette façon ?
Prenons $\phi(x_1) := \neg(\forall x_2\psi(x_1, x_2))$ et considérons $\forall x_1\ \phi(x_1)$. Le terme $t := x_2$ n'est pas libre pour la variable x_1. En effet x_1 apparait de façon libre dans la sous-formule $\forall x_2\psi(x_1, x_2)$, où x_2 est quantifiée.
Si on pouvait substituer t dans $\phi(x_1)$ on obtiendrait : $(\forall x_1(\neg(\forall x_2\psi(x_1, x_2))) \to (\neg(\forall x_2\psi(x_2, x_2)))$. On peut trouver une interprétation de cette formule où elle est fausse. On prend $\psi(x_1, x_2) := (x_1 = x_2)$ et prenons une structure contenant au moins deux éléments. Dans cette structure on a bien $\forall x_1\ \exists x_2\ (x_1 \neq x_2$ mais la formule $\forall x_2\ (x_2 \neq x_2)$ est toujours fausse.

Soit $\chi(x_1)$ une formule où x_1 est libre et prenons pour ϕ et ψ la formule $\chi(x_1)$. (Et donc x_1 est libre dans ϕ.) Si on pouvait quantifier universellement sur x_1 on obtiendrait :
$\varphi(x_1) := (\forall x_1(\chi(x_1) \to \chi(x_1))) \to (\chi(x_1) \to (\forall x_1\chi(x_1)))$.
Encore ici, on peut trouver une structure où cette formule est fausse. On prend pour structure $(\mathbb{Z}, +, 0)$, pour $\chi(x_1)$ la formule qui exprime que x_1 est pair ; on a $(\mathbb{Z}, +, 0) \not\models \varphi(2)$.

3.2 Théories consistantes, théories complètes

Lemme 3.2.1 *1. Si ϕ est une tautologie alors $\models \phi$*

2. *les axiomes de l'égalité sont universellement vrais*
3. *les axiomes sur les quantificateurs sont universellement vrais*
4. *Si dans une $\mathcal{L}$-structure ϕ est vraie ainsi que $\phi \to \psi$, alors ψ est vraie dans cette structure.*
5. *la règle de généralisation est universellement vraie.*

Preuve : Par inspection. $\square$

Remarque 3.2.2 Soit T une $\mathcal{L}$-théorie consistante. Soient ϕ_1, ϕ_2 deux $\mathcal{L}$-formules. Supposons que $T \vdash \phi_1 \wedge \phi_2$. Alors $T \vdash \phi_i$, $1 \leq i \leq 2$. En effet, $\phi_1 \wedge \phi_2 \to \phi_i$, $1 \leq i \leq 2$, est une tautologie. On applique alors le Modus Ponens.

Soit T une $\mathcal{L}$-théorie. On dira que T est **inconsistante** s'il existe une $\mathcal{L}$-formule ϕ telle que ϕ et $\neg\phi$ sont deux théorèmes de T. On dira que T est **consistante** si on ne peut trouver de telle formule.

On dira que T est maximale consistante si toute extension propre de T est inconsistante. On dira que T est **complète** si T est consistante et si pour tout énoncé ϕ, on a que $T \vdash \phi$ ou $T \vdash \neg\phi$.

Lemme 3.2.3 *Soit T une $\mathcal{L}$-théorie, ϕ une $\mathcal{L}$-formule et σ un énoncé. Alors $T \cup \{\sigma\} \vdash \phi$ ssi $T \vdash (\sigma \to \phi)$.*

Preuve :

($\Leftarrow$) Si on a une preuve de $\sigma \to \phi$ à partir de T, on en a aussi une, à partir de $T \cup \{\sigma\}$.En appliquant le Modus Ponens dans $T \cup \{\sigma\}$, on a une preuve de ϕ.

($\Rightarrow$) Supposons qu'on ait une preuve $\phi_1, \cdots, \phi_n = \phi$ de ϕ dans la théorie $T \cup \{\sigma\}$. On montre par induction sur n que $T \vdash (\sigma \to \phi_i)$. Si ϕ_i est un axiome logique ou appartient à T, alors on utilise la tautologie $\phi_i \to (\sigma \to \phi_i)$ et le Modus Ponens pour en déduire que $T \vdash \sigma \to \phi_i$. Si $\phi_i = \sigma$, $T \vdash \sigma \to \phi_i$ car $\sigma \to \sigma$ est une tautologie. S'il existe $j, k \leq i$ tel que ϕ_k est $\phi_j \to \phi_i$, on applique l'hypothèse d'induction et on obtient :
$T \vdash \sigma \to \phi_j$ et
$T \vdash \sigma \to (\phi_j \to \phi_i)$.

On utilise la tautologie $\vdash (\sigma \to (\phi_j \to \phi_i)) \to ((\sigma \to \phi_j) \to (\sigma \to \phi_i))$ et on applique le Modus Ponens deux fois. On obtient : $T \vdash \sigma \to \phi_i$.
S'il existe $j < i$ tel que $\phi_i = \forall x\ \phi_j$. Par hypothèse d'induction, $T \vdash \sigma \to \phi_j$. Par l'axiome sur les quantificateurs (σ est un énoncé), $T \vdash (\forall x\ (\sigma \to \phi_j)) \to (\sigma \to \forall \phi_j)$. Comme $T \vdash \sigma \to \phi_j$, par la règle de généralisation, on a $T \vdash \forall x(\sigma \to \phi_j)$. En apppliquant le Modus Ponens, $T \vdash \sigma \to \forall x \phi_j$. Autrement dit, $T \vdash \sigma \to \phi_i$. $\square$

Lemme 3.2.4 *Soit T une $\mathcal{L}$-théorie.*

1. *Si T est inconsistante, alors il existe $T_0 \subset T$ fini telle que T_0 est inconsistante.*
2. *Si T est inconsistante, alors toute $\mathcal{L}$-formule est un théorème de T.*
3. *Soit σ un $\mathcal{L}$-énoncé. Si $T \cup \{\sigma\}$ est inconsistante, alors $T \vdash \neg\sigma$.*
4. *Toute théorie maximale consistante est complète.*
5. *Toute théorie consistante est contenue dans une théorie complète.*

Preuve :

1. Le premier point suit des définitions comme une preuve est une suite finite de formules. Cela implique que T **est consistante ssi toute partie finie de T est consistante.**

2. Soit T une théorie inconsistante et soit σ une $\mathcal{L}$-formule. Comme T est inconsistante, il existe donc une formule ψ telle que $T \vdash \psi$ et $T \vdash \neg\psi$. La formule $\psi \to (\neg\psi \to \sigma)$ est une tautologie. Par Modus Ponens, $T \vdash (\neg\psi \to \sigma)$. A nouveau par Modus Ponens, $T \vdash \sigma$.

3. Supposons $T \cup \{\sigma\}$ est inconsistante. Par le point précédent, $T \cup \{\sigma\} \vdash \neg\sigma$. Donc, $T \vdash \sigma \to \neg\sigma$. Mais la formule $(\sigma \to \neg\sigma) \to \neg\sigma$ est une tautologie et donc par Modus Ponens, $T \vdash \neg\sigma$.

4. Soit T une théorie maximale consistante et soit $\sigma \notin T$. Par hypothèse on a donc que $T \cup \{\sigma\}$ est inconsistante. Par le point précédent, $T \vdash \neg\sigma$.

5. On applique le Lemme de Zorn. On doit donc vérifier que l'ensemble des $\mathcal{L}-$théories consistantes est un inductif avec la relation d'inclusion. Cela suit du fait que l'on peut détecter l'inconsistance d'une théorie dans une de ses parties finies. $\square$

Remarque 3.2.5 Soient ϕ_1, ϕ_2 deux $\mathcal{L}$-formules. Montrons que $\{\phi_1, \phi_2\} \vdash \phi_1 \wedge \phi_2$. On montre que $\{\phi_1, \phi_2, \neg(\phi_1 \wedge \phi_2)\} \vdash \neg\phi_2$ $(\star)$ et comme $\{\phi_1, \phi_2, \neg(\phi_1 \wedge \phi_2)\} \vdash \phi_2$, en utilisant le point 3 du lemme ci-dessus, on obtient que $\{\phi_1, \phi_2\} \vdash \phi_1 \wedge \phi_2$. Pour montrer $(\star)$, on ré-écrit $\neg(\phi_1 \wedge \phi_2)$ comme $\phi_1 \to \neg\phi_2$ et on applique le Modus Ponens.

Proposition 3.2.6 *Soit T une $\mathcal{L}$-théorie et ϕ une $\mathcal{L}$-formule. Si $T \vdash \phi$, alors $T \models \phi$. En particulier, si T a un modèle, alors T est consistante.*

Preuve : Le premier point se prouve par induction sur la longueur des preuves et le Lemme 3.2.1.

Soit $\mathcal{A}$ un modèle de T. Par le Lemme ci-dessus, si T était inconsistante, T prouverait l'énoncé $\exists x\, x \neq x$ qui est faux dans toutes les structures. $\square$

3.3 Théorème de complètude

Définition 3.3.1 Soit T une $\mathcal{L}$-théorie consistante et soit C un sous-ensemble de constantes de $\mathcal{L}$. On dit que C est un ensemble de témoins pour T si pour toute $\mathcal{L}$-formule $\phi(x)$ avec au plus une variable libre x, il existe $c \in C$ telle que $T \vdash \exists x\, \phi(x) \to \phi(c)$.

Notons que si T' est une $\mathcal{L}$-théorie contenant T et si C est un ensemble de témoins pour T, alors étant donné une $\mathcal{L}$-formule $\phi(x)$ avec au plus une variable libre x, comme $T \vdash \exists x\, \phi(x) \to \phi(c)$, on a que $T' \vdash \exists x\, \phi(x) \to \phi(c)$.

Proposition 3.3.2 *Soit T une $\mathcal{L}$-théorie consistante et soit $\phi(x)$ une $\mathcal{L}$-formule dont la seule variable libre soit x. Soit c une constante qui n'appartient pas à $\mathcal{L}$, si $T \vdash \phi(c)$ (comme $\mathcal{L} \cup \{c\}$-théorie), alors $T \vdash \forall x \phi(x)$ (comme $\mathcal{L}$-théorie).*

Preuve : Soit $\psi_1, \cdots, \psi_m = \phi(c)$ une $\mathcal{L} \cup \{c\}$-preuve de $\phi(c)$. On choisit une variable v qui n'apparait dans aucune des ψ_i et pour chaque $1 \leq i \leq m$ on pose θ_i la $\mathcal{L}$-formule obtenue en remplaçant dans ψ_i les occurrences de c par v. En particulier, $\theta_m = \phi(v)$.

Si ψ_i est un axiome logique, alors θ_i également.

Si $\psi_i \in T$, comme T est une $\mathcal{L}$-théorie, alors $\theta_i = \psi_i$.

Si ψ_i est obtenue par Modus Ponens à partir de ψ_j et ψ_k, alors θ_i est obtenue par Modus Ponens à partir de θ_j et θ_k (qui apparaissent avant dans la suite).

Si ψ_i est obtenue par généralisation à partir de ψ_j, alors θ_i est obtenue par généralisation à partir de θ_j (qui est apparue avant dans la liste).

Ainsi $\theta_1, \cdots, \theta_m = \phi(v)$ est une preuve de $\phi(v)$. Par la règle de généralisation $T \vdash \forall v\, \phi(v)$.

$\square$

Corollaire 3.3.3 *Si T est une $\mathcal{L}$-théorie consistante, et si C est un ensemble de constantes n'apparaissant pas dans $\mathcal{L}$, alors T est aussi consistante en tant que $\mathcal{L} \cup \{C\}$-théorie.* $\square$

Preuve : Si T n'était pas consistante en tant que $\mathcal{L} \cup C$-théorie, il existe un sous-ensemble fini C_0 de C tel que T n'était pas consistante en tant que $\mathcal{L} \cup C_0$-théorie. On procède par induction sur la cardinalité de C_0 en utilisant la Proposition 3.3.2. $\square$

Proposition 3.3.4 *Soit T une $\mathcal{L}$-théorie consistante. Alors il existe C un ensemble de constantes n'appartenant pas à $\mathcal{L}$ et une $\mathcal{L} \cup C$-théorie $\bar{T}$ consistante contenant T qui admet C comme ensemble de témoins.*

Preuve : On suppose que $|\mathcal{L}|$ est dénombrable (les calculs sur les cardinaux infinis seront faits au deuxième trimestre). Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération d'un ensemble infini dénombrable C de constantes distinctes n'appartenant pas à $\mathcal{L}$.

On considère l'ensemble de toutes les $\mathcal{L} \cup C$-formules (ϕ_n) avec au plus une variable libre. En faisant des substitutions on peut supposer que la variable libre de ϕ_n, s'il y a, est la variable x_n.

On construit la théorie $\bar{T}$ par induction comme une union dénombrable de théories $T := T_0 \subset T_n \subset T_{n+1}$. Notons que T est aussi consistante comme $\mathcal{L} \cup C$-théorie.

On suppose que l'on a construit T_n, avec T_n une $\mathcal{L} \cup C$-théorie consistante et $T_n \setminus T$ fini. On construit T_{n+1} comme suit.

Soit c_m la première constante de C qui n'apparait pas dans T_n. On pose $T_{n+1} := T_n \cup \{\exists x_n \phi_n(x_n) \to \phi_n(c_m)\}$. Notons que T_{n+1} est la théorie T_n à laquelle on a ajouté un seul énoncé.

Si T_{n+1} est consistante il n'y a rien a faire. Sinon, $T_n \vdash \neg(\exists x \phi_n(x) \to \phi_n(c_m))$ (vue comme $\mathcal{L} \cup C$-théorie), par le Lemme 3.2.4. On a que $T_n \vdash \exists x \phi_n(x) \wedge \neg\phi_n(c_m)$. En appliquant la remarque 3.2.2, $T_n \vdash \exists x_n \phi_n(x_n)$ et $T_n \vdash \neg\phi_n(c_m)$. Comme c_m n'apparait pas dans T_n, on peut appliquer la Proposition 3.3.2 et donc $T_n \vdash \forall y \neg\phi_n(y)$, une contradiction avec la consistance de T_n.

On pose $\bar{T} := \bigcup_{n\geq 0} T_n$. C'est une $\mathcal{L} \cup C$-théorie consistante (Lemme 3.2.4) qui contient T et qui a C comme ensemble de témoins. $\square$

Théorème 3.3.5 *Soit T une $\mathcal{L}$-théorie consistante. Alors T a un modèle.*

Preuve : Soit C un ensemble de constantes n'appartenant pas à $\mathcal{L}$. Posons $\bar{\mathcal{L}} := \mathcal{L} \cup C$. On utilise la proposition précédente et on plonge T dans une $\bar{\mathcal{L}}$-théorie consistante $\tilde{T}$ qui admet C comme ensemble de témoins. Ensuite on utilise le Lemme de Zorn pour plonger $\tilde{T}$ dans une $\bar{\mathcal{L}}$-théorie maximale consistante $\bar{T}$. Cette $\bar{\mathcal{L}}$-théorie $\bar{T}$ admet aussi C comme ensemble de témoins.

On va mettre sur C une relation d'équivalence et l'ensemble des classes d'équivalence sera le modèle de T cherché.

Soient $c_1, c_2 \in C$ et posons $c_1 \sim c_2$ si $(c_1 = c_2) \in \bar{T}$. Si $(c_1 = c_2) \notin \bar{T}$, alors par maximalité de $\bar{T}$, $c_1 \neq c_2) \in \bar{T}$. C'est bien une relation d'équivalence sur C et par les axiomes de l'égalité, $\sim$ est compatible avec les relations et les fonctions de $\mathcal{L}$ (une telle relation d'équivalence est appelée *congruence*). On notera $c_\sim$ la classe d'équivalence de c.

Sur $C/\sim$ on définit une $\mathcal{L}$-structure de la façon suivante :

1. si F est une fonction n-aire, on pose $F(c_{1\sim}, \cdots, c_{n\sim}) = F(c_1, \cdots, c_n)_\sim$.
2. Si R est une relation m-aire, on dira que $R(c_{1\sim}, \cdots, c_{m\sim})$ ssi $R(c_1, \cdots, c_m) \in \bar{T}$.
3. Si e est une constante de $\bar{\mathcal{L}}$, alors soit $e \in C$ et on interprète e par sa classe d'équivalence et si $e \in \mathcal{L} \setminus C$, on montre que $\bar{T} \vdash \exists v\ (v = e)$ $(\star)$. Comme C est un ensemble de témoins, on a que pour un $c \in C$, $\bar{T} \vdash (c = e)$. On interprétera e par $c_\sim$.
   Montrons $(\star)$: $T \vdash e = e$ et par le premier axiome sur les quantificateurs,
   $T \vdash (e = e) \to \exists x\ (x = e)$ (on considère la formule $\phi(x) := x = e$). On applique ensuite le Modus Ponens.

Comme $\sim$ est une congruence, c'est bien défini (à vérifier).

Il reste à montrer que $\mathcal{A}$ est un modèle de T ; en fait on montre que $\mathcal{A} \models \bar{T}$. On montre par induction sur la longueur des $\mathcal{L}$-énoncés ϕ (vus comme une suite de symboles) que

$$\mathcal{A} \models \phi \text{ si et seulement si } \phi \in \bar{T} \quad (\star).$$

On vérifie $(\star)$ pour les formules atomiques de la forme $t_1 = t_2$, où $t_1,\ t_2$ sont deux $\bar{\mathcal{L}}$-termes et $R(t_1, \cdots, t_m)$, où R est une $\mathcal{L}$-relation m-aire et $t_1, \cdots, t_m$ sont des $\bar{\mathcal{L}}$-termes. On utilise l'interprétation ci-dessus et on travaille par induction sur la complexité des termes.

Ensuite on vérifie facilement que si $(\star)$ est vrai pour ϕ, $(\star)$ est vrai pour $\neg\phi$ et que si $(\star)$ est vrai pour $\phi_1,\ \phi_2$, alors $(\star)$ est vrai pour $\phi_1 \wedge \phi_2$.

Supposons que $\phi = \exists x\ \psi$.

$(\Rightarrow)$ Supposons tout d'abord que $\mathcal{A} \models \exists x\ \psi(x)$. Il existe donc $c_\sim$ tel que $\mathcal{A} \models \psi[c_\sim]$. Donc $\mathcal{A}$ satisfait le $\bar{\mathcal{L}}$-énoncé $\psi(c)$ (on substitue c à toute occurrence libre de x dans $\psi(x)$). Par hypothèse d'induction $\psi(c) \in \bar{T}$. Par le premier axiome sur les quantificateurs (en prenant la contraposée et en remarquant que le terme c est bien libre pour x)), on a que $\bar{T} \vdash \psi(c) \to \exists x\, \psi(x)$ alors $\phi \in \bar{T}$.

$(\Leftarrow)$ Il reste à montrer que si $\phi \in \bar{T}$, alors $\mathcal{A} \models \phi$. Comme C est un ensemble de témoins pour $\bar{T}$, il existe $c \in C$ tel que $\bar{T} \vdash (\exists x\ \psi(x) \to \psi(c))$. Par Modus Ponens, $\psi(c) \in \bar{T}$. Par hypothèse d'induction $\mathcal{A} \models \psi[c_\sim]$ et donc $\mathcal{A} \models \phi$. □

Corollaire 3.3.6 (Théoreme de complètude de Gödel) *Soit T une $\mathcal{L}$-théorie et ϕ un $\mathcal{L}$-énoncé. Alors*

$$T \models \phi \Leftrightarrow T \vdash \phi.$$

Preuve :

$(\Leftarrow)$ Proposition 3.2.6.

$(\Rightarrow)$ Si $T \not\vdash \phi$, alors $T \cup \{\neg\phi\}$ est une théorie consistante, par le lemme 3.2.4. Ce qui implique par le théorème ci-dessus que T a un modèle $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{A} \models \neg\phi$, ce qui est une contradiction (avec l'hypothèse que $T \models \phi$). □

Donnons une deuxème preuve du théorème de compacité.

Corollaire 3.3.7 *Si T est une $\mathcal{L}$-théorie et si toute partie finie de T a un modèle, alors T a un modèle.*

Preuve : Supposons que T n'ait pas de modèle. Par le théorème de complètude, T est inconsistante. Par le Lemme 3.2.4, il existe $T_0 \subset T$ une $\mathcal{L}$-théorie finie qui est inconsistante. Par hypothèse T_0 a un modèle, ce qui est une contradiction. $\square$

Exercice 3.3.8

1. *Montrer de deux façons différentes que si une $\mathcal{L}$-théorie T a des modèles finis de cardinalité finie mais arbitrairement grande, alors T a des modèles infinis.*
2. *Montrer qu'il existe des corps commutatifs, ordonnés, non archimédiens qui sont élentairement équivalents au corps des réels (dans le langage $\mathcal{L} := \{+, -, ., <, 0, 1\}$). (Rappel : un corps K est archimédien si pour tout $0 < x < y$ appartenant à K, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x < y < n.x$.*
3. *Soit $(E, \leq)$ un ensemble infini totalement ordonné. On dit que l'ordre $<$ est un bon ordre sur E si tout sous-ensemble non vide de E a plus plus petit élément. Montrer qu'il existe $(E', \leq)$ élémentairement équivalent à E tel que $\leq$ ne soit pas un bon ordre sur E'.*
4. *Soit T une $\mathcal{L}$-théorie consistante. Montrez que T est complète ssi tous ses modèles sont élémentairement équivalents.*
5. *Soit $E(.,.)$ une relation binaire, soit $\mathcal{L} := \{E\}$ et soit $\mathcal{C}_E$ la classe des $\mathcal{L}$-structures où E est une relation d'équivalence qui a, pour chaque $n \in \omega - \{0\}$, une seule classe d'équivalence qui contient exactement n éléments. Montrer que $\mathcal{C}_E$ est élémentaire. Soit T_E une axiomatisation de $\mathcal{C}_E$; montrer que T_E est consistante.*
6. *Soit $\mathcal{L} := \{+, -, 0\}$. Soit $\mathcal{Z} := (\mathbb{Z}, +, -, 0)$ le groupe des entiers et soit $\mathcal{Z} \oplus \mathcal{Z}$ la $\mathcal{L}$-structure qui est produit direct de deux copies $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$. Montrer que $\mathcal{Z} \oplus \mathcal{Z}$ n'est pas élémentairement équivalent à $(\mathbb{Z}, +, 0)$.*
7. *Soient T_1 et T_2 deux $\mathcal{L}$-théories consistantes telles que $T_1 \cup T_2$ n'a pas de modèles. Montrer qu'il existe un enoncé θ tel que $T_1 \vdash \theta$ et $T_2 \vdash \neg\theta$.*
8. *Soient T_1 et T_2 deux $\mathcal{L}$-théories telles que pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models T_1$ ssi $\mathcal{A} \not\models T_2$. Montrez que T_1 et T_2 sont finiment axiomatisables.*

Chapitre 4

Corps algébriquement clos.

Ce chapitre et le suivant sont plus algébriques ; ils sont consacrés aux corps algébriquement clos et réels-clos.

4.1 Clôture algébrique

Soit $\mathcal{K} := (K, +, -, ., 0, 1)$ un corps commutatif. Soit $K[X]$ l'anneau des polynômes à une variable sur K. C'est un anneau Euclidien i.e. il a la propriété suivante de division Euclidienne. Pour tout $p_1(X), p_2(X) \in K[X]$ avec $deg(p_1(X)) \geq deg(p_2(X))$, il existe $q(X)$ et $r(X)$ avec soit $r(X) \neq 0$ et $deg(r(X)) < deg(p_2(X))$, soit $r(X) = 0$, tels que

$$p_1(X) = p_2(X).q(X) + r(X).$$

Utilisant cette propriété, on montre que tout idéal $I \neq \{0\}$ de $K[X]$ est principal (i.e. engendré par un élément). En effet, on choisit dans I un élément $q(X) \neq 0$ de degré minimal et on montre que I est engendré par cet élément ($q(X)$ divise tout autre élément non nul de I). On appelle ce type d'anneau *principal*.

Définition 4.1.1 Soit $\mathcal{K}$ un corps commutatif. Le corps K est *algébriquement clos* si tout polynôme $q(X) \in K[X]$ a un zéro dans K.

Notation 4.1.2 On notera ACF l'ensemble des $\mathcal{L}_{an}$-énoncés suivants :

1. les axiomes de corps commutatifs,
2. pour chaque naturel $n \in \mathbb{N}$, l'axiome

$$\forall a_0 \forall a_1 \cdots \forall a_n \exists x \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + x^{n+1} = 0.$$

Soit $ACF_0 = ACF \cup \{\underbrace{1 + \cdots + 1}_{p} \neq 0 : p \in \mathcal{P}\}$, où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers et $ACF_p := ACF \cup \{\underbrace{1 + \cdots + 1}_{p} = 0\}$, $p \in \mathcal{P}$.

ACF_0 est une théorie consistante : $\mathbb{C} \models ACF_0$ (voir par exemple le cours d'analyse complexe). Une autre façon de procéder est d'utiliser le théorème de compacité (voir Théorème 2.4.8) et de montrer que cette théorie est finiment consistante. Mais on montrera directement qu'un corps (commutatif) a, ce qu'on appelle, une *clôture algébrique* (Proposition 4.1.4).

On verra que ACF_p est également une théorie consistante (voir Corollaire 4.1.7). Notons que sachant que les théories ACF_p, $p \in \mathcal{P}$, sont consistantes on peut facilement en déduire que ACF_0 est consistante en utilisant le théorème de Łos (Théorème 2.4.4).

Soit L un corps commutatif étendant K. Un élément u de L est algébrique sur K s'il existe un polynôme $p(X) \neq 0$ à coéfficients dans K tel que $p(u) = 0$. On choisit un tel polynôme monique et de degré minimal. Il est alors unique pour la propriété d'annuler u et on l'appelle polynôme *minimal* de u. Si u est algébrique sur K, son polynôme minimal $p(X)$ sur K est irréductible. Soit $u \in L - K$ et soit $p(X) = \sum_{i=0}^{d} X^i.a^i$ avec $a_d = 1$ et $a_0 \neq 0$, son polynôme minimal sur K. Alors le sous-anneau $K[u]$ de L engendré par K et u (qui est aussi le K-sous-espace vectoriel engendré par $\{u^n : n \in \omega\}$) est de dimension d (comme K espace vectoriel). Par ailleurs, u^{-1} appartient au K-espace vectoriel engendré par $1, u, \cdots, u^{d-1}$. On écrit : $u.(u^{d-1} + \sum_{i=1}^{d-1} u^i.a_i) = -a_0$. Donc $u^{-1} = -a_0^{-1}.(u^{d-1} + \sum_{i=1}^{d-1} u^i.a_i)$. On montre ainsi que le sous-anneau $K[u]$ de L est égal au sous-corps $K(u)$ de L engendré par K et u.

Si la dimension de L sur K, en tant que K-espace vectoriel, est finie, disons $d \in \mathbb{N}$, alors tout élément $v \in L - \{0\}$ est algébrique sur K et le degré du polynôme minimal de v sur K est borné par la dimension de L sur K. On dira que L est une extension algébrique finie de K. (On considère l'ensemble $\{v^n : n \in \omega\}$, il engendre un sous-espace vectoriel sur K de dimension $\leq d$).

Si tout élément de $L - \{0\}$ est algébrique sur K, on dit que L est une *extension algébrique* de K.

Exercice : Soit $\mathbb{F}_2$ le corps à deux éléments. Soit $p(X) := X^2 + X + 1$; ce polynôme n'a pas de zéro dans $\mathbb{F}_2$ et est irréductible. Notons I l'idéal engendré par $p(X)$ et soit $\alpha := X + I \in \mathbb{F}_2[X]/I$. On vérifie que $\mathbb{F}_2(\alpha)$ est un corps contenant $\mathbb{F}_2$ et de cardinalité 4.

Soit $q(X) := X^3 + X + 1$; montrer que $q(X)$ est irréductible. Notons M l'idéal engendré par $q(X)$ et soit $\beta := X + M \in \mathbb{F}_2[X]/M$. On vérifie que $\mathbb{F}_2(\beta)$ est un corps contenant $\mathbb{F}_2$ et de cardinalité 8. Montrez que $\mathbb{F}_2(\alpha)$ n'est pas inclus dans $\mathbb{F}_2(\beta)$.

Définition 4.1.3 Soit $\tilde{K}$ un corps commutatif étendant K, on dit que $\tilde{K}$ est une clôture algébrique de K si $\tilde{K}$ est une extension algébrique de K et si $\tilde{K}$ est algébriquement clos.

Proposition 4.1.4 *Tout corps commutatif K a une clôture algébrique.*

Preuve : On applique le lemme de Zorn à l'inductif formé par l'ensemble des extensions algébriques de K avec comme ordre partiel la relation d'inclusion. L'inclusion est bien une relation d'ordre (partiel) et cet ensemble est fermé par union de chaînes. On peut donc appliquer le lemme de Zorn et donc il existe une extension algébrique maximale de K. Pour montrer que cet élément maximal $\tilde{K}$ est un corps algébriquement clos, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 4.1.5 *Soit $K \subset L \subset F$ avec F algébrique sur L et L algébrique sur K. Alors F algébrique sur K.*

Preuve : Montrons que tout élément de $F - L$ est algébrique sur K.
Soit $a \in F$ et $p(x) \in L[x]$ son polynôme minimal sur L. Soient $b_1, \cdots, b_n$ les coéfficients de ce polynôme. Ils sont chacun algébriques sur K et donc $K[b_i]$ est un espace vectoriel de dimension finie sur K ; b_i étant algébrique sur K, $K[b_i] = K(b_i)$ est un corps. On considère la chaîne de K-espaces vectoriels, $K \subset K[b_1] = K(b_1) \subset K[b_1][b_2] = K(b_1)(b_2) = K(b_1, b_2) \subset \cdots \subset K[b_1][b_2]\cdots[b_n] = K(b_1, \cdots, b_n) \subset K(b_1, \cdots, b_n)[a]$. Et donc le K-espace vectoriel $K[a] \subset K(b_1, \cdots, b_n)[a]$ est de dimension finie sur K. Ainsi a est algébrique sur K. □

Soit $p(X)$ un polynôme à coéfficients dans $\tilde{K}$. Supposons qu'il soit irréductible dans $\tilde{K}$, sinon on considère un de ses facteurs irréductibles. On considère alors l'anneau $\tilde{K}[X]/(p(X))$, où $(p(X))$ est l'idéal engendré par $p(X)$. Soit $q(X)+(p(X)) \in \tilde{K}[X]/(p(X))$ avec $deg(q(X)) < deg(p(X))$. Considérons l'idéal engendré par $(q(X), p(X))$ dans $\tilde{K}[X]$. Il est engendré par disons $r(X)$ qui divise $q(X)$ et $p(X)$. Comme $p(X)$ est irréductible, $r(X)$ est inversible et donc $1 \in (q(X), p(X))$. Il existe donc $r_1(X), r_2(X) \in \tilde{K}[X]$ tels que $1 = r_1(X).q(X)+r_2(X).p(X)$ i.e. $q(X) + (p(X))$ est inversible. Et donc $K[X]/(p(X))$ est un corps commutatif dans lequel $\tilde{K}$ se plonge : $a \to a + (p(X))$ et où $p(X)$ a un zéro : $X + (p(X))$. C'est une extension algébrique finie de $\tilde{K}$ et par le Lemme, une extension algébrique de K et donc par maximalité de $\tilde{K}$, égale à $\tilde{K}$.

Cette extension $\tilde{K}$ est donc un corps algébriquement clos et donc c'est une clôture algébrique de K. □

Nous ne montrerons pas l'unicité à isomorphisme près de cette clôture, qui découle du théorème de Steinitz suivant (voir cours de Volkov).

Théorème 4.1.6 *(Steinitz) Soit $\tilde{K}$ une clôture algébrique de K. Soit $K \subseteq L_0 \subseteq L$ des extensions algébriques de K. Soit σ_0 un K-isomorphisme de L_0 dans $\tilde{K}$. Alors il existe un K-isomorphisme σ de L dans $\tilde{K}$ qui prolonge σ_0.* □

Dorénavant, on parlera de *la* clôture algébrique d'un corps K, contrairement à ce que font la plupart des algébristes qui distinguent les clôtures algébriques de K dans différents sur-corps.

Corollaire 4.1.7 *La théorie ACF_p, $p \in \mathcal{P} \cup \{0\}$, est consistante.*

Preuve : Soit $\mathbb{F}_p$ le corps premier à p éléments. Notons $\tilde{\mathbb{F}}_p$ *sa* clôture algébrique. C'est bien un corps algébriquement clos de caractéristique p. Soit $\mathbb{Q}$ le corps des nombres rationnels et $\tilde{\mathbb{Q}}$ *sa* clôture algébrique. □

Notation 4.1.8 Soit K un corps de caractéristique p, $p \in \mathcal{P}$. L'application F qui envoie x sur x^p est appelée le *Frobenius.* On notera F^n la composée de F n fois avec elle-même et par $Fix_K(F^n)$ l'ensemble des éléments de K fixés par F^n, $n \in \mathbb{N}$. Par convention, F^0 est l'application identité.

Lemme 4.1.9 *Soit K un corps de caractéristique p. L'application Frobenius est un endomorphisme injectif de K. Pour chaque $n \in \omega$, $Fix_K(F^n)$ est un sous-corps de K et $Fix_K(F)$ est isomorphe à $\mathbb{F}_p$.*

Preuve : La seule vérification qui n'est pas tout-à-fait immédiate est la suivante : $(x+y)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^{p-k}.y^k$ et comme p divise $\binom{p}{k}$, lorsque $1 \leq k < p$, on a que dans K, $(x+y)^p = x^p + y^p$.

Tout endomorphisme de corps est injectif et donc en particulier F. Faisons le raisonnement pour F : soit $a \neq 0$, comme a est inversible, on a que $1 = F(1) = F(a.a^{-1}) = F(a).F(a^{-1})$ et donc $F(a) \neq 0$.

On vérifie facilement que l'ensemble des éléments de K fixés par un endomorphisme est un sous-corps et la composée de deux endomorphismes est encore un endomorphisme. $\square$

Proposition 4.1.10 *Le corps $\tilde{\mathbb{F}}_p$ est une union de corps finis, laissés invariant par le Frobenius.*

Preuve : Par le Lemme précédent, on sait que l'application Frobenius est un endomorphisme injectif de $\tilde{\mathbb{F}}_p$.

Montrons que $\tilde{\mathbb{F}}_p = \bigcup_{n \in \omega^*} Fix_{\tilde{\mathbb{F}}_p}(F^n)$.

Soit $a \in \tilde{\mathbb{F}}_p$ et considérons $\{F^n(a) : n \in \omega\}$. Par définition d'une clôture algébrique, il existe un polynôme $q(X) \in \mathbb{F}_p[X] - \{0\}$ de degré $d \geq 1$, tel $q(a) = 0$. On a que $F(q(a)) = q(F(a)) = 0$ et donc il existe $0 \leq i < j \leq d$ tel que $F^i(a) = F^j(a)$ ou encore $F^{j-i}(a) = a$ (F est injectif), ainsi $a \in Fix_{\tilde{\mathbb{F}}_p}(F^{j-i})$.

Par le Lemme précédent, chaque $Fix_{\tilde{\mathbb{F}}_p}(F^n)$ est un sous-corps de $\tilde{\mathbb{F}}_p$. Chacun de ces sous-corps est fini car c'est aussi l'ensemble des éléments de $\tilde{\mathbb{F}}_p$ qui satisfont à l'équation $x^{p^n} - x = 0$ qui a au plus p^n solutions dans un corps. $\square$

Remarque 4.1.11 Par le théorème de Łos (Théorème 2.4.4), pour tout ultrafiltre $\mathscr{U}$ non-principal sur $\mathcal{P}$, on a que $\prod_{\mathcal{P}} \tilde{\mathbb{F}}_p/\mathscr{U}$ est un modèle de ACF_0. On peut montrer que la cardinalité de $\prod_{\mathcal{P}} \tilde{\mathbb{F}}_p/\mathscr{U}$ est égale à $2^{\aleph_0}$, qui est aussi la cardinalité du corps des complexes. Utilisant ce fait et le théorème de Steinitz, on peut montrer que ces deux corps sont isomorphes.

Nous montrerons dans le chapitre 6.3 que la théorie ACF_0 est complète (voir Theoreme 6.5.1) et donc elle axiomatise la théorie du corps des complexes.

4.2 Applications polynomiales et un théorème de J. Ax.

Définition 4.2.1 Une application *polynomiale* de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ est une application qui envoie $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ vers $(f_1(\bar{x}), \cdots, f_n(\bar{x}))$, où $f_i(X_1, \cdots, X_n) \in \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$, $1 \leq i \leq n$. On dira qu'elle est de degré $\leq d$ si pour chaque f_i, $1 \leq i \leq n$, la somme des degrés des X_j est plus petit ou égal d.

Théorème 4.2.2 *Toute application polynomiale de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ injective est surjective.*

Preuve : Les étapes principales de la preuve sont les suivantes.

1. La propriété énoncée dans le théorème pour toutes les applications polynomiales de degré $\leq d$ s'exprime dans le langage des anneaux $\{+, -, ., 0, 1\}$ par un énoncé $\forall\exists$. Notons un tel énoncé $\chi = \forall x_1 \cdots x_m \exists y_1 \cdots \exists y_k\, \theta(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_k)$, où $\theta(\bar{x}, \bar{y})$ est une formule sans quantificateurs.

2. Toute application d'un ensemble fini E dans lui-même qui est injective est surjective.
3. Par la Proposition 4.1.10, $\tilde{\mathbb{F}}_p$ est une union de corps finis $Fix_{\tilde{\mathbb{F}}_p}(F^n)$ qui sont laissés invariants par F, le Frobenius. (Notons que cette application F est injective et donc par le point précédent, surjective dans chacun de ces sous-corps $Fix(F^n)$, $n \in \omega$).
4. Dans chaque $Fix_{\tilde{\mathbb{F}}_p}(F^n)$, χ est vraie. Montrons que χ est vraie dans $\bigcup_{n\in\omega^*} Fix_{\tilde{\mathbb{F}}_p}(F^n)$. Soient $a_1, \cdots, a_m \in \bigcup_{n\in\omega^*} Fix_{\tilde{\mathbb{F}}_p}(F^n)$, il existe donc n tel que $a_1, \cdots, a_m \in Fix_{\tilde{\mathbb{F}}_p}(F^n)$. Comme χ est vraie dans $Fix_{\tilde{\mathbb{F}}_p}(F^n)$, il existe $b_1, \cdots, b_k$ tels que $\theta(\bar{a}, \bar{b})$ est vraie dans $Fix_{\tilde{\mathbb{F}}_p}(F^n)$. Comme θ est une formule sans quantificateurs, elle reste vraie dans $\bigcup_{n\in\omega^*} Fix_{\tilde{\mathbb{F}}_p}(F^n)$. Et donc χ est vraie dans $\tilde{\mathbb{F}}_p$.
5. Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre non principal sur $\mathcal{P}$, l'ensemble des nombres premiers. Comme chaque $\tilde{\mathbb{F}}_p \models \chi$, par le théorème de Łos, $\prod_{\mathcal{P}}^{\mathscr{U}} \tilde{\mathbb{F}}_p \models \chi$.
6. Par le Remarque 4.1.11, la $\mathcal{L}$-structure $\prod_{\mathcal{P}}^{\mathscr{U}} \tilde{\mathbb{F}}_p$ est un corps algébriquement clos, de caractéristique zéro et de cardinalité $2^{\aleph_0}$. Or, il y a un seul (à isomorphisme près) corps algébriquement clos de cardinalité $2^{\aleph_0}$ et de caractéristique fixée. (Pour montrer cette dernière propriété, on utilise le fait que dans un tel corps les ensembles d'éléments algébriquement indépendants maximaux sont de cardinalité $2^{\aleph_0}$).
   Comme χ est vraie dans $\prod_{\mathcal{P}}^{\mathscr{U}} \tilde{\mathbb{F}}_p$, elle est vraie dans $\mathbb{C}$.

□

Soit $V \subset \mathbb{C}^n$ un fermé de Zariski c.a.d. un sous-ensemble de la forme

$$\{\bar{a} : \mathbb{C} \models \bigwedge_{i=1}^{m} p_i(\bar{a}) = 0\},$$

où $p_i[X_1, \cdots, X_n] \in \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$.

Corollaire 4.2.3 *Toute application polynomiale d'un fermé de Zariski V de $\mathbb{C}^n$ dans elle-même qui est injective est surjective.*

Preuve : Exercice. □

Chapitre 5

Corps réels-clos

5.1 Structures ordonnées-groupes et corps.

Utilisant l'existence d'une clôture algébrique, nous montrerons dans ce chapitre comment axiomatiser le corps des nombres réels $\mathbb{R}$, c.a.d. que nous écrirons dans un certain langage $\mathcal{L}$ dans la logique du premier ordre, une liste de propriétés vraies dans $\mathbb{R}$ telles que si une autre $\mathcal{L}$-structure satisfait ces propriétés, alors elle est élémentairement équivalente à $\mathbb{R}$.

Citons pêle-mêle quelques propriétés de $\mathbb{R}$: c'est un corps commutatif totalement ordonné ; toute suite de Cauchy converge ; le théorème des valeurs intermédiaires est vrai dans $\mathbb{R}$; tout sous-ensemble borné a un supremum ; $\mathbb{R}$ est un corps archimédien ; tout nombre positif est un carré etc.

Ces propriétés s'expriment-elles dans notre formalisme ? Suffisent-elles pour caractériser $\mathbb{R}$ à équivalence élémentaire près ? (Nous savons déjà qu'on ne peut caratériser de cette manière $\mathbb{R}$ à isomorphisme près : par le théorème de Łos, une ultrapuissance non principale de $\mathbb{R}$ a les mêmes propriétes que $\mathbb{R}$ exprimable dans la logique du premier ordre).

On utilisera sur les références [5], [6]. Nous allons tout d'abord revoir les notions d'ordre (total), de groupes totalement ordonnés et de corps totalement ordonnés (voir chapitres 1 et 2).

Soit $\mathcal{L}_< := \{<, ...\}$ un langage du premier ordre qui contient le symbole de relation binaire $<$. C'est une relation d'ordre si elle est anti-reflexive, anti-symmétrique et transitive. On notera la $\mathcal{L}_<$-théorie $T_<$ suivante des ordres totaux :

$\forall x \neg(x < x)$,
$\forall x \forall y \ (x < y \rightarrow \neg(y < x)$,
$\forall x \forall y \forall z \ (((x < y) \ \& \ (y < z)) \rightarrow (x < z))$.

$\forall x \forall y \ (x \neq y \rightarrow (x < y \text{ ou } (y < x))$.

Des exemples de modèles de $T_<$: $(\mathbb{Q}, <)$, $(\mathbb{Z}, <)$, $(\mathbb{N}, <)$.

On note $T_{<,dense}$ la $\mathcal{L}_<$-théorie des ordres totaux denses c.a.d.
$T_< \cup \{\forall x \forall y \ (x < y \rightarrow (\exists z \ x < z < y))\}$.

Dans nos formules, on utilisera l'abréviation $x \leq y$ pour $(x < y$ ou $x = y)$.
On note $T_{<,discret}$ la $\mathcal{L}_<$-théorie des ordres totaux discrets c.a.d.
$T_< \cup \{\forall x \forall y \ (x < y \rightarrow (\exists z \ (x < z \leq y \ \& \ (\forall u \ (x < u \rightarrow z \leq u)))))\}$.

Définition 5.1.1 Soient $\mathcal{A} := (A, <)$, $\mathcal{B} := (B, <)$ deux modèles de $T_<$.

Le produit *lexicographique* $\mathcal{A}\overrightarrow{\times}\mathcal{B}$ est la $\mathcal{L}_<$-structure dont le domaine est le produit cartésien : $A \times B$ et la relation d'ordre est interpretée de la façon suivante :
$(a, c) < (b, d)$ si $(a < b$ ou $(a = b$ et $c < d))$, où $a, b \in A$, $c, d \in B$.

Exercice : Montrer que $\mathcal{A}\overrightarrow{\times}\mathcal{B} \models T_<$. Est-ce que le produit direct de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est un modèle de $T_<$?

Exercice : Montrer que $(\mathbb{Q}, <) \not\equiv (\mathbb{Z}, <)$, $(\mathbb{Z}, <) \not\equiv (\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{Z}, <) \not\equiv (\mathbb{N}, <)$ et que $(\mathbb{Q}, <)\overrightarrow{\times}(\mathbb{Z}, <) \not\equiv (\mathbb{Z}, <)\overrightarrow{\times}(\mathbb{Q}, <)$.

Question : Comment axiomatiser les théories de ces structures ?

Définition 5.1.2 Soit $\mathcal{M} :=< M, <, ... >$ un modèle de $T_<$. On appelle *intervalle* de M un sous-ensemble (définissable avec paramètres) de M de la forme $[ab]$ (intervalle fermé), $]ab[$ (intervalle ouvert), $[ab[$, $]ab]$ (semi-ouvert), où $a,\ b \in M \cup \{\pm\infty\}$, $a \leq b$ (en définissant $-\infty < M < +\infty$).

Soient $A,\ B$ deux sous-ensembles non-vides de M, supposons $A < B$ (c.a.d. tout élément de A est plus petit que tout élément de B) et $M = A \cup B$. On appelle *coupure* $C_{A,B}$ de $\mathcal{M}$, l' ensemble de toutes les formules de la forme $a < x$ ou $x < b$ avec $a \in A$, $b \in B$. On dit que cette coupure est réalisée dans une extension $\mathcal{N} := (N, <)$ de $\mathcal{M}$ s'il existe un élément c de N tel que dans $\mathcal{N}$, on ait $A < c < B$. Une coupure $C_{A,B}$ est dite *rationnelle* si soit A a un plus grand élément, soit B a un plus petit élément.

Exercice : Montrer que toute coupure de $\mathcal{M}$ est réalisée dans une extension élémentaire de $\mathcal{M}$.

Exercice :

1. Montrer que $(\mathbb{Z}, <)$ n'a pas de coupures.
2. Donner un exemple de coupure de $(\mathbb{Q}, <)$ qui n'est pas réalisée dans $(\mathbb{R}, <)$.
3. Est-ce que toute coupure de $(\mathbb{Q}, <)$ est réalisée dans une ultrapuissance non-principale de $(\mathbb{R}, <)$?
4. Quelles sont les coupures de $(\mathbb{R}, <)$ qui sont réalisées dans une extension élémentaire de $(\mathbb{R}, <)$?

Soit $\mathcal{L}_g := \{., \,^{-1}, 1\}$ le langage des groupes et soit T_g (respectivement $T_{g,a}$) un ensemble d'axiomes qui axiomatisent la théorie des groupes (respectivement des groupes abéliens). Soit $\mathcal{L}_{g,<} := \mathcal{L}_g \cup \{<\}$.

Définition 5.1.3 Un groupe ordonné (respectivement abélien ordonné) est une $\mathcal{L}_{g,<}$-structure qui satisfait à $T_< \cup T_g$ (respectivement $T_< \cup T_{g,a}$) et à l'axiome suivant :

$\forall a, b, c \ \ (a < b \rightarrow (a.c < b.c \ \&\ c.a < c.b))$. On notera la théorie correspondante $T_{g,<}$ (respectivement $T_{g,a,<}$).

Exemples de groupe abélien ordonné : $(\mathbb{Z}, +, -, 0, <)$, $(\mathbb{Q}, +, -, 0, <)$.

Exercice : Montrer qu'un groupe abélien divisible ordonné satisfait à $T_{<,dense}$.

Proposition 5.1.4 *Tout groupe abélien sans torsion est ordonnable.*

Preuve : Supposons que l'on ait cette condition, on applique le lemme de Zorn et on obtient un ensemble P tel que G soit l'union disjointe de P,$\{1\}$ et P^{-1}.

Maintenant si on suppose G abélien et si G est sans torsion, 0 n'appartient pas au sous-semi-groupe engendré par un element. Etant donné une partie A de G qui satisfait à cette condition ($\star$), on montre que l'on peut toujours ajouter un élément. Notons $\langle A\rangle$ le semi-groupe engendré par A (dans G). Prenons $A := \{g_1, \cdots, g_n\}$ et supposons que $0 \in \langle h, A\rangle$ et $0 \in \langle -h, A\rangle$ bien que $0 \notin \langle A\rangle$. On a, pour $m, m', n_i, n'_i \geq 0$, $m, m' \neq 0$. $m.h + \sum_i n_i.g_i = 0 = -m'.h + \sum_i n'_i.g_i$.

D'où $m'.\sum_i n_i.g_i + m.\sum_i n_i.g_i = 0$, une contradiction. $\square$

Soit $\mathcal{L}_{an} := \{+, -, ., 0, 1\}$ le langage des anneaux et soit T_f un ensemble d'axiomes qui axiomatisent la théorie des corps commutatifs. Soit $\mathcal{L}_{an,<} := \mathcal{L}_{an} \cup \{<\}$.

Définition 5.1.5 On dira qu'un corps (commutatif) est ordonné si c'est une $\mathcal{L}_{an,<}$-structure qui satisfait à $T_f \cup T_<$ et aux axiomes supplémentaires suivants :
$\forall a, b, c \ \ (a < b \rightarrow a + c < b + c)$ et
$\forall a, b, c \ \ (c > 0 \ \& \ a < b) \ \rightarrow (a.c < b.c)$.

Exercice : Montrer que dans un corps ordonné on a les propriétés suivantes :

1. $\forall a \ (0 \leq a^2)$
2. $\forall a \forall b \ \ (0 < a < b \rightarrow 0 < b^{-1} < a^{-1})$
3. $\forall a \forall b \ \ (0 < a.b \leftrightarrow 0 < a.b^{-1})$
4. $-n < 0 < n$, pour tout nombre naturel non nul n.

Exemples de corps commutatifs ordonnés : $(\mathbb{Q}, +, -, ., <, 0, 1)$, $(\mathbb{R}, +, -, ., 0, 1, <)$.

Question : Est-ce que le sous-groupes additif (respectivement multiplicatif) d'un corps ordonné sont des groupes ordonnés ?

Notation 5.1.6 Soit K un corps commutatif. Soit $A \subset K$, on note $A^* := A - \{0\}$.

Un corps ordonné $(K, +, -, ., <, 0, 1)$ est *archimédien* si pour tout $0 < x < y$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x < y < n.x$.

Exercice : Montrer que cette propriété n'est pas exprimable par un énoncé.

Proposition 5.1.7 *Tout corps ordonné archimédien se plonge comme $\mathcal{L}_{an,<}$-structure dans* $(\mathbb{R}, +, ., -, <, 0, 1)$.

Preuve : On montre tout d'abord que $\mathbb{Q}$ est dense dans tout corps ordonné archimédien K. Ensuite on définit le plongement de $K - \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ en envoyant un élément a de K vers le réel qui réalise la même coupure que a dans $\mathbb{Q}$. $\square$

Définition 5.1.8 Dans un corps ordonné $(K, +, -, ., <, 0, 1)$, on introduit la relation d'équivalence suivante

$$r \sim s \text{ ssi } \exists n \in \mathbb{N} \ \ n.|r| \geq |s| \ \& \ n.|s| \geq |r|.$$

Exercice : Etant donné $r \in K$ on note la classe d'équivalence qui contient r par $r_\sim$. Montrez que si $r_1 \sim r_2$ et $s_1 \sim s_2$, alors $r_1.s_1 \sim r_2.s_2$ et que si $0 < r < u < s$ et $r \sim s$, alors $u \sim r$. Soit $G := \{r_\sim : \ r \in K - \{0\}\}$. Montrer que G peut être muni d'une loi de groupe et d'une relation d'ordre tel que ce soit un groupe abélien totalement ordonné.

Définition 5.1.9 Soit $(A, +, -, ., 0, 1)$ un anneau commutatif. Une partie P de A est appelée cône si $P + P \subset P$, $P.P \subset P$, $A^2 \subset P$, $-1 \notin P$.

Remarque : si $P \cap -P \neq \emptyset$, alors il existe $p_1, p_2 \in P$ tel que $p_1 = -p_2$ et donc $0 \in P$.
Exercice : Si $A = -P \cup P$, alors $P \cap -P$ est un idéal de A.

Définition 5.1.10 Soit $(A, +, -, ., 0, 1)$ un anneau commutatif et $P \subset A$. Si en outre $A = -P \cup P$ et si $P \cap -P$ est un idéal premier de A, on dira que P est un *cône positif* de A.

Remarque : si A est un corps, et P un cône, alors $P \cap -P = \{0\}$ et c'est donc un idéal premier.
Exercice : Soit $(K, +, -, ., <, 0, 1)$ un corps commutatif ordonné. Montrer que l'ensemble de ses éléments positifs forme un cône positif.
Remarque : Si -1 est une somme de carrés, et si K est un corps commutatif de caractéristique différente de 2, alors tout élément de K est une somme de carrés. (On écrit $a := \frac{(1+a)^2}{2} - \frac{(1-a)^2}{2}$).

Lemme 5.1.11 *Soit $(K, +, -, ., 0, 1)$ un corps commutatif et soit P un cône positif de K. On note $a <_P b$ si $b - a \in P$ & $b \neq a$. La relation $<_P$ est une relation d'ordre total.* □

Définition 5.1.12 On dira que le corps commutatif K est *ordonnable* s'il existe $P \subset K$ un cône positif.

Remarque : un corps peut avoir plusieurs cônes positifs différents.

Soit $\mathbb{Q}[t]$ l'anneau des polynômes à coéfficients dans $\mathbb{Q}$. Soit $P := \{q.(\sum_{i=0}^{d-1} t^i.q_i + t^d); q \in \mathbb{Q}_{>0},\ d \geq 0\}$.
Soit $\mathbb{Q}(t)$ le corps des fractions rationnelles ; on ordonne $\mathbb{Q}(t)$ de la façon suivante. On pose $Q := \{\frac{p_1(t)}{p_2(t)^2} : p_1(t), p_2(t) \in \mathbb{Q}[t]\ p_2(t) \neq 0\ \&\ p_1(t) \in P\}$.
Exercice : Montrer que P est un cône positif de $\mathbb{Q}[t]$. Montrer que Q est un cône positif de $\mathbb{Q}(t)$. Remarquer que dans l'ordre induit, on a $\mathbb{Q} <_P t$. Y-a-t-il d'autres cônes positifs ?

Soit $\mathbb{Q}((t))$ le corps des séries de Laurent. Soit $a := \sum_{i \geq i_0} t^i.a_i \in \mathbb{Q}((t))$, où $a_i \in \mathbb{Q}, a_{i_0} \neq 0$, $i \in \mathbb{Z}$. On peut écrire cet élément de la façon suivante : $a = a_{i_0}.t^{i_0}.(1 + \sum_{i > i_0} t^{i-i_0}.a_i.a_{i_0}^{-1})$. Posons $R := \{a_{i_0}.t^{i_0}.(1 + \sum_{i > i_0} t^{i-i_0}.a_i.a_{i_0}^{-1}) :\ a_{i_0} \in \mathbb{Q}_{>0}\}$.
Exercice : Montrer que R est un cône positif de $\mathbb{Q}((t))$.

Définition 5.1.13 Soit $\sum K^2 := \{\sum_{i=0}^n a_i^2 : i \in \mathbb{N},\ a_i \in K\}$. Un corps commutatif K est formellement réel si $-1 \notin \sum K^2$.

Exercice : Si K est formellement réel, alors K est de caractéristique 0.

Lemme 5.1.14 *Tout corps ordonnable est formellement réel.*

Preuve : Soit P un cône positif de K. On a donc $\sum K^2 \subset P$ et supposons que $-1 \in \sum K^2$. Donc $-1 \in P \cap -P$ car $1 = 1^2 \in P$ (et donc $-1 \in -P$).
(On aurait pu aussi utiliser le fait que tout élément est une somme de carrés (K étant de caratéristique 0) et donc la relation $<_P$ ne serait pas anti-symmétrique.) □

Remarques : Ceci montre en particulier que $\mathbb{C}$ n'est pas ordonnable (ainsi que tout corps algébriquement clos).

Aucun des corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques n'est ordonnable.

Dans un corps PAC de caractéristique $\neq 2$, tout élément est une somme de deux carrés.

Proposition 5.1.15 *Un corps formellement réel est ordonnable.*

Lemme 5.1.16 *Si P_0 est un sous-groupe du groupe multiplicatif $(K^*, ., 1)$ de K et si P_0 est clos par $+$ et contient $(K^2)^*$, alors s'il existe $a \neq 0$, $-a \notin P_0$, alors $P_1 := P_0 + a.P_0$ est un sous-groupe de $(K^*, ., 1)$ clos par $+$, où $P_0 + a.P_0 := P_0 \cup a.P_0 \cup \{b + a.c : \, b, c \in P_0\}$.*

Preuve : Comme P_0 est clos par $+$, P_1 est clos par $+$; P_1 est clos par . car P_0 l'est, $a^2 \in P_0$ et $(b + a.c).(b_1 + a.c_1) = (b.b_1 + a^2.c.c_1) + a.(c.b_1 + b.c_1)$. Si $0 \in P_1$ alors $-a = c.b^{-1}$, mais cela impliquerait que $-a \in P_0$. Calculons l'inverse de $(b+a.c)^{-1} = (b+a.c).(b+a.c)^{-2}$. $\square$

Preuve de la Proposition : Soit K un corps formellement réel. Montrons que K a un cône positif.

On utilise le Lemme de Zorn sur l'inductif suivant $(\mathcal{S}, \subseteq)$ où $\mathcal{S}$ est l'ensemble des sous-groupes de $(K^*, ., 1)$ stables par $+$ et qui contiennent $(K^2)^*$. Cet ensemble de parties est non vide car K est formellement réel et donc $\left(\sum K^2\right)^*$ est dans cet ensemble de parties (en effet $\left(\sum K^2\right)^*$ est fermé par ., $^{-1}$ et $+$: si une somme de carrés non nuls était égale à 0, alors -1 serait une somme de carrés) et $\mathcal{S}$ est fermé par unions de chaines.

Soit S_{max} un élément maximal de $\mathcal{S}$. Par le Lemme, pour tout élément a non nul de K soit appartient à S_{max}, soit $-a \in S_{max}$. Sinon, comme $S_{max} + a.S_{max} \in \mathcal{S}$, cela contredirait la maximalité de S_{max}. Finalement $S_{max} \cup \{0\}$ est un cône positif de K. $\square$

Définition 5.1.17 Un élément a d'un corps K est *totalement positif* si $a > 0$ pour tout ordre $<$ de K. (Si K n'a d'ordre, alors tout élément est totalement positif).

5.2 Clôture réelle et axiomatisation.

Lemme 5.2.1 *Soit K un corps de caractéristique différente de 2, alors tout élément a non nul de K est totalement positif ssi a est une somme de carrés.*

Preuve : Si a est une somme de carrés, il est positif pour tout ordre sur K.

Supposons maintenant que a n'est pas une somme de carrés et montrons qu'il existe un ordre $<$ sur K tel que $a < 0$.

Soit $\tilde{K}$ une clôture algébrique de K et on considère les sous-corps de $\tilde{K}$ contenant K où a n'est pas une somme de carrés. Par le lemme de Zorn, il y a un tel corps maximal, disons R. Ce corps est nécessairement formellement réel (sinon tout élément serait une somme de carrés) et donc est ordonnable, notons un ordre sur R : $<_R$. On va montrer que dans R, $-a$ est un carré et donc $a <_R 0$. Par restriction sur K, on aura trouvé un ordre où a est négatif.

Si $-a$ n'est pas un carré dans R, le polynôme $X^2 + a$ est irréductible et l'extension $R[X]/(X^2 + a)$ est un corps contenant strictement R et par unicité de la clôture algébrique plongé dans $\tilde{K}$. Notons ce corps : $R(\sqrt{-a})$; par maximalité de R, a est une somme de carrés dans $R(\sqrt{-a})$: $a = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i.\sqrt{-a})^2 = \sum_{i=1}^{n}(a_i^2 - a.b_i^2) + \sqrt{-a}.\sum_{i=1}^{n} 2.a_i.b_i$, et donc

$a.(1+\sum_{i=1}^{n} b_i^2) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$ et $\sum_{i=1}^{n} 2.a_i.b_i = 0$. Ainsi, a est une somme de carrés dans R : $a = \sum_{i=1}^{n} a_i^2.(1+\sum_{i=1}^{n} b_i^2).(1+\sum_{i=1}^{n} b_i^2)^{-2}$, une contradiction. $\square$

Définition 5.2.2 Un corps commutatif K totalement ordonné est réel-clos si tout élément positif est un carré et si tout polynôme de degré impair a une racine.

Notation 5.2.3 On notera RCF l'ensemble des axiomes suivants (qui axiomatise la théorie des corps réels-clos dans le langage $\mathcal{L}_{an,<}$).

1. les axiomes de corps commutatifs ordonnés,
2. $\forall x\ (x > 0 \to \exists y\ x = y^2)$
3. pour chaque naturel $n \in \mathbb{N}$, l'axiome

$$\forall a_0 \forall a_1 \cdots \forall a_{2n} \exists x \ \sum_{i=0}^{2n} a_i x^i + x^{2n+1} = 0.$$

Remarque :

Dans un corps réel-clos, il y a un seul ordre et la relation d'ordre $a < b$ est définissable par la formule $\exists y\ y^2 = b - a \ \&\ a \neq b$. On s'autorisera donc de parler de *corps réels clos* sans nécessairement mentionner la relation d'ordre.

Proposition 5.2.4 *Un modèle de RCF est la structure :* $(\mathbb{R}, +, -, ., 0, 1, <)$.

Preuve : Soit $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Considérons la fonction polynômiale $x \to x^2 - a$. En 0 elle est négative et en $a+1$ elle est positive. Cette fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui envoie x sur $x^2 - a$ est une fonction continue qui change de signe entre 0 et $a+1$ et donc a un zéro entre ces deux bornes.

Soit $p(x)$ un polynôme de degré impair. La fonction polynomiale correspondante change de signe entre $-\infty$ et $+\infty$ et donc a au moins un zéro dans $\mathbb{R}$, par le théorème des valeurs intermédiaires. $\square$

Théorème 5.2.5 *Si K est réel-clos, alors $K(i)$, où $i^2 = -1$, est algébriquement clos.*

Preuve : (Esquisse.)

La preuve est similaire à celle qui montre que $\mathbb{R}(i)$ est un corps a.c.

Tout d'abord i ne peut appartenir à un corps formellement réel. On a donc un auto σ non trivial de $K(i)$ qui envoie $a + b.i$ sur $a - b.i$ tel que $Fix(\sigma) = K$. Si $f(x) \in K(i)[x]$, alors $f.f^\sigma \in K[x]$ et donc si $f.f^\sigma$ a une racine, f a une racine.

Donc il suffit de montrer qu'un polynôme à coéfficients dans K a une racine dans $K(i)$. On utilise le fait suivant.

Tout élément de $K(i)$ a une racine carrée dans $K(i)$.

Ensuite on utilise la théorie de Galois. On utilise un des théorèmes de Sylow qui dit qu'un groupe d'ordre $2^s.m$, où $(2, m) = 1$, a un sous-groupe d'ordre 2^s. De plus, un groupe d'ordre 2^s est nilpotent (et donc résoluble). $\square$

Proposition 5.2.6 *Soit* $(K, +, -, ., 0, 1, <)$ *un corps commutatif totalement ordonné.*

$K \models RCF$ ssi tout polynôme (à coéfficients dans K) qui change de signes a un zéro dans K.

Preuve : $(\rightarrow)$ Soient $a, b \in K$. Notons $a - bi := \overline{a + b.i}$, c'est un automorphisme de $K(i)$ (à vérifier) et si $q(x) = \sum_{j=0}^{d} x^j.c_j \in K(i)[x]$, notons $\bar{q}(x) := \sum_{j=0}^{d} x^j.\overline{c_j}$.

Soit $p(x) \in K[x]$ et supposons que $p(x)$ change de signes. Sans perte de généralité, on peut supposer que $p(x)$ est monique (pourquoi). Par le théorème ci-dessus, $K(i)$ est algébriquement clos et donc $p(x)$ se factorise en facteurs linéaires (i.e. de degré 1) et donc de la forme $(x - \alpha)$, où $\alpha = a + b.i$, $a, b \in K$. Si $p(\alpha) = 0$, alors $\overline{p(\alpha)} = 0$. Or, $\overline{p(\alpha)} = \bar{p}(\bar{\alpha})$ et comme $p(x) \in K[x]$, $\bar{p}(x) = p(x)$. Donc si α est un zéro de $p(x)$, alors $\bar{\alpha}$ est un zéro de $p(x)$ et si $\alpha \notin K$, $\bar{\alpha} \neq \alpha$.

Donc, si $(x-\alpha)$ est un facteur de $p(x)$ et si $\alpha \notin K$ (et donc $b \neq 0$), alors $p(x)$ a aussi un facteur du type $(x - \bar{\alpha})$. Donc $p(x)$ a un facteur du type $x^2 - 2a + a^2 + b^2 = (x - a)^2 + b^2$ qui ne prend que des valeurs strictement positives puisque l'on a supposé que $b \neq 0$. Donc si $p(x)$ change de signes, il a nécessairement un facteur de la forme $(x - a)$, où $a \in K$.
$(\leftarrow)$ Pour les polynômes de degré impair c'est immédiat. Si $a > 0$, on considère le polynôme $x^2 - a$; ou bien $a > 1$ et donc $a^2 > a$ et donc ce polynôme est negatif en 0 et positif en a, ou bien $0 < a < 1$, et donc $a^2 < a$ et donc le polynôme est positif en 1 et négatif en a. $\square$

Théorème 5.2.7 *Un corps commutatif* $(K, +, -, ., 0, 1)$ *est réel-clos ssi K est formellement réel et s'il n'a aucune extension algébrique propre qui soit formellement réelle.*

La preuve s'appuie sur le lemme suivant.

Lemme 5.2.8 *Si F est un corps formellement réel, alors $F(r)$ est formellement réel dans les deux cas suivants : soit $r^2 = a$ où $a > 0$, $a \in F$, soit r est algébrique sur F et son polynôme minimal est de degré impair.*

Preuve : On procède par l'absurde et dans le deuxième cas par induction sur le degré du polynôme minimal.

Soit $r^2 = a$ avec $a > 0$ et supposons que $F(r)$ ne soit pas formellement réel et donc $r \notin F$. Alors il existe $a_i, b_i \in F$, $1 \leq i \leq n$, tels que $-1 = \sum_{i=1}^{n}(a_i + r.b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + b_i^2.a + r.(\sum_{i=1}^{n} 2.a_i.b_i)$. Comme $r \notin F$, $\sum_i 2.a_i.b_i = 0$ et $-1 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + b_i^2.a > 0$, une contradiction.

Soit $f(x)$ un polynôme minimal de r de degré impair et supposons que $F(r)$ ne soit pas formellement réel. On a donc $-1 = \sum_{i=1}^{n} g_i(r)^2$, où $g_i(x) \in F[x]$ est un polynôme de degré strictement plus petit que le degré de $f(x)$. On a donc que $f(x)$ divise $1 + \sum_{i=1}^{n} g_i(x)^2$. Il existe donc $h(x)$ tels que $h(x).f(x) = 1 + \sum_{i=1}^{n} g_i(x)^2$. Comme le degré de $1 + \sum_{i=1}^{n} g_i(x)^2$ est de la forme $2.m$, où $m < deg(f)$, le degre de h est impair et strictement plus petit que celui de f. Si $h(x)$ a un facteur irréductible $h_1(x)$ dans $F[x]$ de degré impair. Soit s un zéro de $h_1(x)$, par hypothèse d'induction on a que $F(s)$ est formellement réel mais dans $F(s)$, on a $-1 = \sum_{i=1}^{n} g_i(s)^2$, une contradiction. $\square$

Preuve du théorème :
$(\rightarrow)$ Si K est réel-clos, alors $K(i)$ est algébriquement clos et donc toute extension algébrique de K se plonge dans $K(i)$. Si K avait une extension algébrique propre, alors cette extension serait égale à $K(i)$ qui n'est pas formellement réel car $i^2 = -1$.
$(\leftarrow)$ Cela découle du lemme.

Définition 5.2.9 Soit $(K, +, -, ., 0, 1, <)$ un corps totalement ordonné, le corps totalement ordonné $(K^r, +, -, ., 0, 1, <)$ est une clôture réelle de K si

$(K, +, ., <, 0, 1)$ est une sous-structure de $(K^r, <, +, ., 0, 1)$,
K^r est une extension algébrique de K et
K^r est réel-clos.

Existence et unicité de la clôture réelle.

On utilise le théorème de Sturm qui détermine de façon algorithmique le nombre de zéros d'un polynôme $p(x) \in K[x]$. On associe à $p(x) := x^n + \sum_{i=1}^n a_i.x^{n-i}$ une suite de polynômes construite de la façon suivante : $p_0(x) = p(x)$, $p_1 = p'(x)$ (la dérivée de $p(x)$ par rapport à x), $p_{i-1}[x] = q_i[x].p_i[x] - p_{i+1}[x]$ avec $deg(p_{i+1}) < deg(p_i)$, soit s tel que $p_{s-1}(x) = q_s(x).p_s(x)$ et $p_{s+1} = 0$.

Remarque : Soit $p(x) \in K[x]$, $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i.x^i$, $a_n \neq 0$. Soit a tel que $p(a) = 0$. Alors, $|a| \leq max\{1, \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|a_i|}{|a_n|}\}$.

Proposition 5.2.10 Théorème de Sturm ([5] Theorem 5.4 page 312). *Soit K un corps réel-clos, et soit $p(x) \in K[x]$, $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i.x^i$, $a_n \neq 0$. Alors le nombre de racines distinctes de $p(x)$ dans K est égal à $V_{-M} - V_M$, où V_c est le nombre de variations de signes dans la suite $(p_0(c), p_1(c), \cdots, p_s(c))$ et $M = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|a_i|}{|a_n|}$.*

Corollaire 5.2.11 *Soient $\mathcal{K}_1 := (K_1, +, ., 0, 1, <)$ et $\mathcal{K}_2 := (K_2, +, ., 0, 1, <)$ deux corps ordonnés, inclus respectivement dans R_1 et R_2 deux corps réels-clos. Soit σ un isomorphisme de $\mathcal{K}_1$ dans $\mathcal{K}_2$. Soit $p(x)$ un polynôme monique dans $K_1[x]$ et $p^\sigma(x)$ son image dans $K_2[x]$. Alors le nombre de racines (distinctes) de $p(x)$ dans R_1 et le nombre de racines (distinctes) de $p^\sigma(x)$ dans R_2 est le même.*

Théorème 5.2.12 ([6] Theorem 11.4, page 656.) *Tout corps ordonné K a une clôture réelle K^r. Si K_1 et K_2 sont deux corps ordonnés avec comme clôture réelle R_1 et R_2 respectivement, alors tout isomorphisme entre les $\mathcal{L}_{an,<}$: $(K_1, +, -, ., 0, 1)$ et $(K_2, +, -, ., 0, 1)$ a une unique extension à un isomorphisme de $(R_1, +, -, ., 0, 1)$ sur $(R_2, +, -, ., 0, 1)$.*

Preuve : Par le théorème de Steinitz 4.1.6, K a une clôture algébrique $\tilde{K}$, unique à isomorphisme près. Soit K' le sous-corps de $\tilde{K}$ contenant K et maximal pour la propriété d'être formellement réel. Pour montrer que ce corps est réel-clos, on utilise le théorème 5.2.7.

L'unicité se montre en utilisant le corollaire ci-dessus. Supposons que l'on ait déjà construit un isomorphisme σ de corps ordonnés entre F_1 et F_2 où $K_1 \subset F_1 \subset R_1$ et $K_2 \subset F_2 \subset K_2$ et soit $a \in R_1 - F_1$. On considére son polynôme minimal $p(x)$ sur F_1 et le polynôme p^σ sur F_2. Par le théorème de Sturm et le fait que σ soit un isomorphisme de corps ordonnés, ces deux polynômes ont le même nombre de racines (distinctes) dans R_1 et R_2. Supposons que a soit la k^{ieme} racine de $p(x)$ dans R_1. On prolonge σ à $F_1(a)$ en envoyant a sur la k^{ieme} racine de $p^\sigma(x)$ dans F_2. Il reste à montrer que cette application est bien un morphisme et qu'elle est unique. □

Remarque : Soient $K_1 := \mathbb{Q}(\sqrt{t})$ et $K_2 := \mathbb{Q}(\sqrt{-t})$, où t est trancendant sur $\mathbb{Q}$, deux extensions ordonnées de $\mathbb{Q}$, l'une où $t >_{K_1} 0$ et l'autre où $t <_{K_2} 0$. Soient F_1, respectivement F_2 les clôtures réelles de K_1, respectivement K_2. La proposition précedente devient fausse si on omet l'hypothèse : tout iso entre K_1 et K_2 *qui respecte l'ordre*. En effet, les clôtures rélles de $\mathbb{Q}(\sqrt{t})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{-t})$, où t est trancendant sur $\mathbb{Q}$, ne sont pas isomorphes, puisque dans l'une $t > 0$ et dans l'autre $t < 0$.

Chapitre 6

Elimination des quantificateurs

6.1 Ensembles définissables

Définition 6.1.1 Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{L}$-structure.

Un sous-ensemble S d'un produit cartésien A^n de A (pour un certain $n \in \mathbb{N} - \{0\}$) est *définissable avec paramètres dans un sous-ensemble* $B \subseteq A$ s'il existe une $\mathcal{L}$-formule $\psi(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$ et un uple d'éléments $\bar{d}$ de B telle que $S = \{(a_1, \cdots, a_n) \in A^n : \mathcal{A} \models \psi(a_1, \cdots, a_n, d_1, \cdots, d_m)\}$. (On utilisera la notation $S = \psi(A, \bar{d})$, bien que $S \subset A^n$). On notera l'ensemble de ces sous-ensembles par $Def_B^n(\mathcal{A})$ et par $Def_B(\mathcal{A}) := \bigcup_{n \geq 0} Def_B^n(\mathcal{A})$.

On dira que $S \subset A^n$ est définissable sans paramètres (dans $\mathcal{A}$) (ou $\emptyset$-définissable) s'il existe une $\mathcal{L}$-formule $\varphi(\bar{x})$ telle que $S = \varphi(A)$. On notera l'ensemble de ces sous-ensembles par $Def^n(\mathcal{A})$ et par $Def(\mathcal{A}) := \bigcup_{n \geq 0} Def^n(\mathcal{A})$.

On dira une *fonction* est définissable si son graphe l'est.

Exercice 6.1.2
1. *Montrer que si $S \in Def(\mathcal{A})$, alors S est invariant par tout élément de $Aut(\mathcal{A})$.*
2. *Montrer que pour chaque $n \geq 0$, $(Def^n(A), \cap, \cup, {}^c, 0, 1)$ est une algèbre de Boole (une sous-algèbre de Boole de l'ensemble des parties de A^n).*

Exercice 6.1.3 *Soit $\mathcal{L}_{an} := \{+, -, ., 0, 1\}$.*

Montrer que dans la structure $(\mathbb{C}, +, -, ., 0, 1)$,

- *les fonctions polynomiales sont $\mathcal{L}_{an}$-définissables.*
- *la fonction exponentielle $z \to e^z = \sum_{n=0} \frac{z^n}{n!}$ n'est pas $\mathcal{L}_{an}$-définissable, ce qui veut dire que son graphe (qui est un sous-ensemble de $\mathbb{C}^2$) n'est pas définissable.*

Aide : considérons l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : e^z = 1\} = \{i.2.\pi.\mathbb{Z}\}.$; il est infini ainsi que son complémentaire. Or si cet ensemble était $\mathcal{L}$-définissable il serait soit fini soit cofini (là on utilise le fait que le corps des complexes a l'élimination des quantificateurs dans le langage $\mathcal{L}$, (voir Théorème 6.5.1).

Une autre façon de procéder est de remarquer que la $\mathcal{L}$-théorie du corps des complexes est décidable car complète et récursivement axiomatisable (voir Lemme 6.5.2).

Soit $\mathcal{L}_{an} \cup \{exp\}$. Dans ce nouveau langage, on définit les entiers par la formule $\forall z \, \forall w \, ((z^2 = -1 \,\&\, e^{w.z} = 1) \to e^{x.w.z} = 1)$ (voir [8]) et la théorie de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, ., 0, 1)$ est indéci-

dable. Donc, si la fonction e^z était définissable dans $\mathcal{L}_{an}$, cette formule définirait $\mathbb{Z}$ dans $\mathcal{L}_{an}$, ce qui contredirait la décidabilité de la $\mathcal{L}$-théorie de $\mathbb{C}$ (voir Corollaire 6.5.3).

6.2 Formes prenexes et élimination des quantificateurs

Dans certains cas, les sous-ensembles définissables d'une $\mathcal{L}$-structure (ou des modèles d'une $\mathcal{L}$-théorie T) peuvent être décrits de façon simple. Dans les corps algébriquement clos, les ensembles algébriques jouent un rôle particulier ; dans les corps réels-clos, ce sont les sous-ensembles semi-algébriques. Généralisons ces notions et définissons pour une théorie T ce que signifie T *a l'élimination des quantificateurs.*

Définition 6.2.1 Une $\mathcal{L}$-théorie consistante T a l'élimination des quantificateurs (e.q.) dans $\mathcal{L}$ si pour toute $\mathcal{L}$-formule $\phi(x_1, \cdots, x_n)$, il existe une $\mathcal{L}$-formule $\theta(x_1, \cdots, x_m)$ sans quantificateurs, où $n \leq m$, telle que

$$T \models \forall x_1 \cdots \forall x_m(\phi(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \theta(x_1, \cdots, x_m)).$$

On dira qu'une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{A}$ a l'élimination des quantificateurs si toute $\mathcal{L}$-formule $\phi(x_1, \cdots, x_n)$ est équivalente dans $\mathcal{A}$ à une formule sans quantificateurs $\theta(x_1, \cdots, x_m)$, $m \geq n$, autrement dit $\mathcal{A} \models \forall x_1 \cdots \forall x_m(\phi(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \theta(x_1, \cdots, x_n))$.

On permet que dans la définition ci-dessus, la formule sans quantificateurs θ n'ait pas le même nombre de variables libres que ϕ car le langage $\mathcal{L}$ n'a pas nécessairement de constantes et donc dans une $\mathcal{L}$-théorie, il n'y a pas d'énoncé sans quantificateurs. Par exemple, si on avait demandé qu'il y ait le même nombre de variables libres dans les deux formules, l'énoncé $\forall x \;\; x = x$ ne pourrait être équivalent à un énoncé sans quantificateurs.

Par contre, dans le cas où $\mathcal{L}$ contient au moins une constante (ce qui est souvent le cas dans les exemples algébriques), alors on peut formuler la définition ci-dessus de façon équivalente en supposant que les deux formules ϕ et θ aient le même nombre de variables libres. Il y a malgré tout des théories dont le langage ne contient pas nécessairement de constantes comme celles des relations déquivalence.

Cette propriété d'avoir l'élimination des quantificateurs est pratique pour décrire les ensembles définissables dans les modèles ; elle est aussi pratique pour déterminer si une théorie est complète ou pas (il suffit de tester les formules sans quantificateurs).

Parfois quand une $\mathcal{L}$-théorie n'a pas l'eq, on peut enrichir le langage $\mathcal{L}$ en un langage $\mathcal{L}'$, ajoutant de nouveaux symboles soit de fonctions, constantes ou relations (définissables dans l'ancien langage) tels que la $\mathcal{L}'$-theorie ait l'eq.

Définition 6.2.2 Soit $\phi(x_1, \cdots, x_n)$ une $\mathcal{L}$-formule. On dira que ϕ est sous forme prenexe si elle est de la forme $Q_1 y_1 \cdots Q_m y_m \; \theta(y_1, \cdots, y_m, x_1, \cdots, x_n)$, où $\theta(\bar{y}, \bar{x})$ est une formule sans quantificateurs c.a.d. combinaison booléenne de formules atomiques et Q_i est soit le quantificateur $\forall$ soit le quantificateur $\exists$.

Proposition 6.2.3 *Etant donné une formule ϕ, l existe un procédé effectif pour transformer une $\mathcal{L}$-formule ϕ en une $\mathcal{L}$-formule sous forme prenexe χ telle que $\vdash \phi \leftrightarrow \chi$.*

Preuve : Tout d'abord, si ϕ est une formule sans quantificateurs, il n'y a rien à faire. Ensuite, on procède par induction sur le nombre $k(\phi)$ de quantificateurs et de connecteurs $\wedge$, $\neg$ qui apparaissent dans ϕ.

Supposons que le lemme est prouvé pour toutes les formules ψ telles que $k(\psi) < \ell$ et considérons une formule ϕ telle que $k(\phi) = \ell$.

Si ϕ est de la forme$\neg\psi$. En particulier $k(\psi) = \ell - 1$. On a donc que $\vdash \psi \leftrightarrow \tilde{\psi}$, où $\tilde{\psi}$ est sous forme prenexe : $Q_1 y_1 \cdots Q_m y_m \, \theta(y_1, \cdots, y_m, x_1, \cdots, x_n)$, où θ est une formule sans quantificateurs.

on a aussi que $\vdash \neg\phi \leftrightarrow \neg\tilde{\psi}$. Par induction sur m, on montre que $\neg\tilde{\psi}$ est équivalente à $\bar{Q}_1 y_1 \cdots \bar{Q}_m y_m \, \neg\theta(y_1, \cdots, y_m, x_1, \cdots, x_n)$, en posant $\bar{\forall} = \exists$ et $\bar{\exists} = \forall$.

Si ϕ est de la forme $\forall x \psi(x, x_1, \cdots, x_n)$ avec $k(\psi) = \ell - 1$ et si $\psi(x, x_1, \cdots, x_n)$ est équivalente à $\forall Q_1 y_1 \cdots Q_m y_m \, \theta(y_1, \cdots, y_m, x, x_1, \cdots, x_n)$, alors ϕ est équivalente à $\forall Q_1 y_1 \cdots Q_m y_m \; \theta(y_1, \cdots, y_m, x, x_1, \cdots, x_n)$. Le cas ϕ de la forme $\exists x \, \psi(x, x_1, \cdots, x_n)$ se traite de façon similaire.

Si ϕ est de la forme $\phi_1 \wedge \phi_2$, on a que $k(\phi_1), k(\phi_2) < k(\phi)$. Par hypothèse d'induction, ϕ_1 est équivalente à $\phi_1' = Q_1 y_1 \cdots Q_m y_m \; \theta_1(y_1, \cdots, y_m, x_1, \cdots, x_n)$ et ϕ_2 à $\phi_2' = Q_1' z_1 \cdots Q_t' z_t \; \theta_2(z_1, \cdots, z_t, x_1, \cdots, x_n)$. Donc $\vdash \phi \leftrightarrow \phi_1' \wedge \phi_2'$. En remplaçant ϕ_1' et ϕ_2' par des formules équivalentes, on s'assure que les variables quantifiées dans chacune de ces formules $\bar{y}$ et $\bar{z}$ sont disjointes. Ensuite on déplace les quantificateurs un par un devant la formule sans quantificateurs $\theta_1 \wedge \theta_2$ et on obtient

$$Q_1 y_1 \cdots Q_m y_m \, Q_1' z_1 \cdots Q_t' z_t \;\; (\theta_1(y_1, \cdots, y_m, x_1, \cdots, x_n) \wedge \theta_2(z_1, \cdots, z_t, x_1, \cdots, x_n)).$$

On procède de la façon suivante. Considérons le cas : $(\exists x \chi_1(x, \bar{u})) \vee \chi_2$ et supposons que x n'est pas une variable libre de χ_2. On montre que $\vdash (\exists x \chi_1(x, \bar{u})) \vee \chi_2 \leftrightarrow \exists x(\chi_1(x, \bar{u}) \vee \chi_2)$.

On montre successivement les deux implications. Commençons par montrer que $\vdash (\exists x \chi_1(x, \bar{u})) \vee \chi_2 \rightarrow \exists x(\chi_1(x, \bar{u}) \vee \chi_2)$.

On montre que $\{(\exists x \chi_1(x, \bar{u})) \vee \chi_2 \;, \; \neg(\exists x(\chi_1(x, \bar{u}) \vee \chi_2))\} \vdash \chi_2 \wedge \neg\chi_2$ $(\star)$ et donc par le Lemme 3.2.4, on aura $\exists x \chi_1(x, \bar{u})) \vee \chi_2 \vdash \exists x(\chi_1(x, \bar{u}) \vee \chi_2)$. Ce qui entraine par le Lemme 3.2.3 que $\vdash (\exists x \chi_1(x, \bar{u})) \vee \chi_2 \rightarrow \exists x(\chi_1(x, \bar{u}) \vee \chi_2)$.

La formule $\exists x(\chi_1(x, \bar{u}) \vee \chi_2)$ est équivalente à $\neg\forall x(\neg\chi_1(x, \bar{u}) \wedge \neg\chi_2)$ et donc la formule $\neg(\exists x(\chi_1(x, \bar{u}) \vee \chi_2))$ est équivalente à $\forall x(\neg\chi_1(x, \bar{u}) \wedge \neg\chi_2)$. Par la règle sur les quantificateurs, on en déduit $(\neg\chi_1(x, \bar{u}) \wedge \neg\chi_2)$. Par la règle sur les conjonctions (Remarque 3.2.2), on a que $\neg\chi_1(x, \bar{u})$. Par la règle de généralisation, on a $\forall x \neg\chi_1(x, \bar{u})$. En ré-écrivant la formule $\exists x \chi_1(x, \bar{u})) \vee \chi_2$ comme $\forall x \neg\chi_1(x, \bar{u})) \rightarrow \chi_2$ et en appliquant le Modus Ponens, on en déduit χ_2. En ré-appliquant la règle sur les conjonctions (Remarque 3.2.2), on obtient $\neg\chi_2$. Et donc en appliquant la remarque 3.2.5, on a bien $(\star)$.

La preuve de : $\vdash \exists x(\chi_1(x, \bar{u}) \vee \chi_2) \rightarrow (\exists x \chi_1(x, \bar{u})) \vee \chi_2$ est similaire (et est faite dans [9, Lemma 2.29]).

Sous les mêmes hypothèses sur χ_2, montrons que $\vdash \exists x \chi_1(x, \bar{u}) \wedge \chi_2 \leftrightarrow \exists x(\chi_1(x, \bar{u}) \wedge \chi_2)$. ((Pour appliquer la règle sur les quantificateurs, on met la formule $\exists x \chi_1(x, \bar{u}) \wedge \chi_2)$ sous la forme $\neg(\forall x \neg\chi_1(x) \vee \neg\chi_2))$ ou encore sous la forme $\neg(\chi_2 \rightarrow \forall x \neg\chi_1(x, \bar{u}))$; cette formule implique $\neg(\forall x(\chi_2 \rightarrow \neg\chi_1))$ ou encore $\exists x(\chi_2 \wedge \chi_1)$. Pour l'autre direction considérons $\exists x(\chi_2 \wedge \chi_1)$ ou encore $\neg(\forall x(\neg\chi_2 \vee \neg\chi_1))$ ou encore $\neg(\forall x(\chi_2 \rightarrow \neg\chi_1))$. Par la règle sur les quantificateurs, cette formule implique $\neg(\chi_2 \rightarrow \forall x \neg\chi_1)$, qui est équivalente à $\chi_2 \wedge \exists x \; \chi_1$.)

Pour traiter du cas du quantificateur universel, on utilise les deux cas traités ci-dessus et de l'équivalence $\vdash (\neg\neg\chi) \leftrightarrow \chi$. $\square$

Lemme 6.2.4 *Soit T une $\mathcal{L}$-théorie consistante. Alors, T a l'e.q. ssi pour toute $\mathcal{L}$-formule $\phi(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ sans quantificateurs, il existe une $\mathcal{L}$-formule $\theta(x_1, \cdots, x_m)$ sans quantificateurs, $n \leq m$, telle que*

$$T \models \forall x_1 \cdots \forall x_m (\exists x_0 \phi(x_0, x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \theta(x_1, \cdots, x_m)).$$

Preuve : L'implication $(\Rightarrow)$ est immédiate car il s'agit du cas particulier des formules existentielles. Prouvons l'implication $(\Leftarrow)$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que les formules sont mises sous forme prénexe c.a.d. sous la forme $Q_1 y_1 \cdots Q_k y_k\ \rho(y_1, \cdots, y_k, x_1, \cdots, x_n)$, où Q_i est soit $\forall$ soit $\exists$ et $\rho(y_1, \cdots, y_k, x_1, \cdots, x_n)$ une $\mathcal{L}$-formule sans quantificateurs. On dira qu'une telle formule est de complexité $\leq k$ et on procède par induction sur k.

Le cas où $k = 0$ correspond au cas des formules sans quantificateurs.

Supposons l'implication montrée pour les formules de complexité $\leq \ell$, où $\ell \geq 0$ et montrons-la pour les formules de complexité $\leq \ell + 1$.

Soit ϕ est une formule de complexité $\leq \ell + 1$, mise sous la forme :

$$Q_1 y_1 \cdots Q_{\ell+1} y_{\ell+1}\ \psi(y_1, \cdots, y_{\ell+1}, x_1, \cdots, x_n),$$

où Q_i est soit $\forall$ soit $\exists$ et $\psi(x_1, \cdots, x_n)$ une $\mathcal{L}$-formule sans quantificateurs.

Par hypothèse d'induction, il existe une $\mathcal{L}$-formule sans quantificateurs $\theta(y_1, x_1, \cdots, x_k)$, $k \geq n$, telle que

$$T \models \forall y_1 \forall x_1 \cdots \forall x_k\ (Q_2 y_2 \cdots Q_{\ell+1} y_{\ell+1}\ \psi(y_1, y_2, \cdots, y_{\ell+1}, x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \theta(y_1, x_1, \cdots, x_k)).$$

Il reste à montrer que $Q_1 y_1 \theta(y_1, x_1, \cdots, x_k)$ est équivalente dans T à une formule sans quantificateurs.

Si Q_1 est le quantificateur $\exists$, par hypothèse, il existe une formule sans quantificateurs $\xi(x_1, \cdots, x_m)$, $m \geq k \geq n$, telle que

$$T \models \forall x_1 \cdots \forall x_m\ (\exists y_1 \theta(y_1, x_1, \cdots, x_k) \leftrightarrow \xi(x_1, \cdots, x_m)).$$

Si Q_1 est le quantificateur $\forall$, on ré-écrit la formule $\forall y_1 \theta(y_1, x_1, \cdots, x_k)$ sous la forme $\neg(\exists \neg\theta(y_1, x_1, \cdots, x_k))$. On applique l'hypothèse à la formule $\exists \neg\theta(y_1, x_1, \cdots, x_k)$. Il existe donc une formule sans quantificateurs $\xi'(x_1, \cdots, x_{m'})$, $m' \geq k \geq n$, telle que

$$T \models \forall x_1 \cdots \forall x_m\ (\exists y_1 \neg\theta(y_1, x_1, \cdots, x_k) \leftrightarrow \xi'(x_1, \cdots, x_{m'})).$$

La négation d'une formule sans quantificateurs est toujours une formule sans quantificateurs, cela termine donc la preuve, car on a l'équivalence :

$$T \models \forall x_1 \cdots \forall x_m\ (\forall y_1 \theta(y_1, x_1, \cdots, x_k) \leftrightarrow \neg\exists y_1 \neg\theta(y_1, x_1, \cdots, x_k) \leftrightarrow \neg\xi'(x_1, \cdots, x_{m'})).$$

□

Exercice 6.2.5

1. *En admettant que la $\mathcal{L}_{an}$-théorie ACF a l'eq, déterminer toutes ses complétions.*
2. *Décrire les sous-ensembles de $(\mathbb{C}, +, -, ., 0, 1)$ définissables par une $\mathcal{L}_{an}$-formule sans quantificateurs et sans paramètres et ensuite avec paramètres dans $\mathbb{C}$.*

Exemple 6.2.6 *Posons* $\mathcal{L}_{an,<} := \mathcal{L}_{an} \cup \{<\}$. *On peut montrer que le corps des réels a l'élimination des quantificateurs dans le langage* $\mathcal{L}_{an} \cup \{<\}$. *Dans le corps des réels la relation d'ordre est définissable dans* $\mathcal{L}_{ann}$ *par :* $x > 0 \leftrightarrow \exists y\, y^2 = x$ (et $x \leq 0 \leftrightarrow (x = 0) \vee (-x > 0)$).

Exercice 6.2.7

1. *Etant donné une fonction polynomiale* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *Montrer que le graphe de* f *est* $\mathcal{L}_{an}$*-définissable dans la structure* $(\mathbb{R}, +, -, ., 0, 1)$.
2. *Montrer que le corps des réels n'a pas l'élimination des quantificateurs dans le langage* $\mathcal{L}_{an}$.
3. *En utilisant le résultat cité ci-dessus que le corps des réels a l'eq dans le langage étendu* $\mathcal{L}_{an,<}$, *montrer que dans le corps des réels toute* $\mathcal{L}_{an}$*-formule est équivalente à une* $\mathcal{L}_{an}$*-formule existentielle c.a.d. une formule équivalente à une formule de la forme* $\exists x_1 \cdots \exists x_n\, \theta(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$, *où* θ *est une formule sans quantificateurs.*

Proposition 6.2.8 *Soit* $\mathcal{L} := \{<\}$ *La* $\mathcal{L}$*-structure* $(\mathbb{Q}, <)$ *a l'eq.*

Preuve : Etant donné n éléments distincts $q_1, \cdots, q_n$ dans $(\mathbb{Q}, <)$ on décrit par une formule sans quantificateurs $\theta(q_1, \cdots, q_n)$ la sous-structure $\{q_1, \cdots, q_n\}$: on spécifie la relation d'ordre entre chaque paire d'éléments distincts. Il y a un nombre fini de sous-structures possibles de cardinalité n et soit $\theta_i(x_1, \cdots, x_n)$, $i \in I$ (I fini), toutes les formules qui les décrivent (elles s'écrivent comme des conjonctions de formules atomiques).

On partitionne $\mathbb{Q}^n$ en les orbites de $Aut((\mathbb{Q}, <))$; il y a un nombre fini d'orbites O_j, $j \in J$ (J fini) (voir Exercice 1.2.2, 3) et deux uples appartiennent à la même orbite si et seulement si ils satisfont à une même formule θ_i. On re-indexe θ_i par θ_{i_j} si elle est vraie dans O_j.

Soit $\phi(x_1, \cdots, x_n)$ une $\mathcal{L}$-formule et supposons que ϕ ait au moins une variable libre. En remplaçant ϕ par la formule $\bigvee_{E \subset \{1, \cdots, n\}} (\bigwedge_{i \neq j \in E} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{i \neq j \in E} x_i = x_j \wedge \phi)$ on peut se ramener au cas si $\phi(q_1, \cdots, q_n)$, alors $q_1, \cdots, q_n$ sont distincts.

Dans chaque orbite O_j, on teste ϕ c.a.d. on choisit un uple $(a_1, \cdots, a_n) \in Q^n$ et on vérifie si $(\mathbb{Q}, <) \models \phi(a_1, \cdots, a_n)$. Comme si deux uples appartiennent à la même orbite, alors ils satisfont les mêmes formules (i.e. ils ont le même type) (voir Exercice 2.3.7, 2) ($\star$), si ϕ est satisfaite en un élément d'une orbite, elle est satisfaite par chaque élément de cette orbite. Soit $J_0 \subset J$ l'ensemble des orbites contenant un uple satisfaisant ϕ.

On a que $(\mathbb{Q}, <) \models \forall x_1 \cdots \forall x_n\, (\phi(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \bigvee_{j \in J_0} \theta_{i_j}(x_1, \cdots, x_n))$. L'équivalence des deux formules découle du choix de J_0 et de la propriété ($\star$).

Pour terminer la preuve il reste à considèrer le cas où ϕ est un énoncé. S'il est satisfait dans $(\mathbb{Q}, <)$ on le remplace par la formule $x = x$ et s'il est faux par la formule $x \neq x$. □

Exercice 6.2.9 *Dans cet exercice, on suppose le résultat cité plus haut que* $(\mathbb{R}, +, -, ., <, 0, 1)$ *a l'élimination des quantificateurs dans le langage* $\mathcal{L}_{an} \cup \{<\}$.

Montrer que les sous-ensembles définissables de $(\mathbb{R}, +, -, ., <, 0, 1)$ *à paramètres dans* $\mathbb{R}$ *et inclus à* $\mathbb{R}$, *sont des unions finies d'intervalles (un intervalle est un sous-ensemble de la forme* $(a\ b)$, *où* a, $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *et les parenthèses signifient que l'on prend ou pas les extrémités).*

Aide :
1. Montrer que l'on peut mettre tout sous-ensemble définissable de $(\mathbb{R}, +, -, ., <, 0, 1)$ *sous la forme :*

$$\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{R} \models \bigvee_{k \in K} (\bigwedge_{j \in J} p_{jk}(x, \bar{y}) = 0 \ \wedge \ \bigwedge_{\ell \in L} q_{\ell k}(x, \bar{y}) > 0)\},$$

où p_{jk}, $q_{\ell k}$ *sont des polynômes à coéfficients dans* $\mathbb{R}$ *et* K, J, L *sont des ensembles finis.*
2.Montrer qu' il suffit alors de montrer que $\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{R} \models \bigwedge_{j \in J} p_j(x, \bar{a}) = 0 \wedge \bigwedge_{\ell \in L} q_\ell(x, \bar{a}) > 0\}$ *est une union finie d'intervalles.*
3. Distinguer les cas suivants : ou bien $J \neq \emptyset$ *et pour un indice* $j \in J$, $p_j(X, \bar{a}) \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ *ou bien soit* $J = \emptyset$, *soit pour tout* $j \in J$, $p_j(X, \bar{a}) = 0$.
4. Considérer les intervalles ayant pour extrémités les zéros des polynômes $q_\ell(x, \bar{a})$, $\ell \in L$.

Exercice 6.2.10 *Soit* U *un ultrafiltre non principal sur* $\mathbb{N}$, *on note*

$$\mu := \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathscr{U} : \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathscr{U} \models -1/n < a < 1/n\}.$$

Montrer que μ *n'est pas* $\mathcal{L}_{an,<}$*-définissable (sans paramètres) dans* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathscr{U}$. *Montrer que* μ *est un sous-groupe de* $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathscr{U}, +, 0)$ *mais que ce n'est pas une intersection de sous-groupes* $\mathcal{L}_{an,<}$*-définissables (à paramètres dans* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathscr{U}$*).*

6.3 Critères d'élimination des quantificateurs.

Définition 6.3.1 Diagramme (élémentaire) d'une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{A}$.

Soit $\mathcal{L}_A := \mathcal{L} \cup \{c_a : \ a \in A\}$, où c_a est un symbole de constante n'apparaissant pas dans $\mathcal{L}$.

On note $Diag(\mathcal{A})$ le diagramme (sans quantificateurs) de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{L}_A$ c.a.d. l'ensemble de tous les $\mathcal{L}_A$-énoncés *sans quantificateurs* vrais dans $\mathcal{A}$.

On note $Diag_{el}(\mathcal{A})$ le diagramme élémentaire de $\mathcal{A}$ c.a.d. l'ensemble de tous les $\mathcal{L}_A$-énoncés vrais dans $\mathcal{A}$.

Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ deux $\mathcal{L}$-structures. On dira que f est une application élémentaire de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ si pour toute formule $\phi(\bar{x})$, pour tout $\bar{a} \subset A$, on a l'équivalence suivante :

$$\mathcal{A} \models \phi(\bar{a}) \leftrightarrow \mathcal{B} \models \phi(f(\bar{a})).$$

Exercice 6.3.2 *Montrer que si* $\mathcal{B}$ *est une* $\mathcal{L}_A$*-structure satisfaisant* $Diag(\mathcal{A})$, *alors l'application* $A \to B : \ a \to c_a^{\mathcal{B}}$ *est un plongement de* $\mathcal{A}$ *dans* $\mathcal{B}$ *(c.a.d. que* $\mathcal{A}$ *est isomorphe à une sous-structure de* $\mathcal{B}$*) et que si* $\mathcal{B} \models Diag_{el}(\mathcal{A})$, *ce plongement est un plongement élémentaire.*

Théorème 6.3.3 (Critère d' e.q. formule par formule) *Soit* $\mathcal{L}$ *un langage contenant au moins un symbole de constante. Soit* T *une* $\mathcal{L}$*-théorie consistante et soit* $\phi(x_1, \cdots, x_n)$ *une* $\mathcal{L}$*-formule où* $n \geq 0$. *Alors sont équivalentes :*

1. *il y a une* $\mathcal{L}$*-formule sans quantificateurs* $\psi(x_1, \cdots, x_n)$ *telle que*

$$T \models \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x})).$$

2. *pour toute paire de modèles $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ de T et toute sous-structure $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$, on a pour tout $\bar{a} \subset C$, l'équivalence suivante $\mathcal{A} \models \phi(\bar{a})$ ssi $\mathcal{B} \models \phi(\bar{a})$.*

Preuve :

(1) implique (2) (exercice).

(2) implique (1). Soit $\Gamma(\bar{x})$ l'ensemble des formules sans quantificateurs impliquées dans les modèles de T par $\phi(\bar{x})$ c.a.d.
$\Gamma(\bar{x}) := \{\gamma(\bar{x}) : T \models \forall \bar{x}\, (\phi(\bar{x}) \rightarrow \gamma(\bar{x}))$, où $\gamma(\bar{x})$ est sans quantificateurs$\}$.

Soit $\bar{d} := (d_1, \cdots, d_n)$ des symboles pour n nouvelles constantes.

• Supposons qu'il existe une $\mathcal{L}_{\bar{d}} := \mathcal{L} \cup \{d_1, \cdots, d_n\}$-structure $\mathcal{A}$ modèle de $T \cup \Gamma(\bar{d})$ où $\neg\phi(\bar{d})$ est vraie (1).

Soit $\mathcal{C}$ la sous-structure de $\mathcal{A}$ engendrée par $\bar{d}$ (si $n = 0$, on considére la sous-structure de $\mathcal{A}$ engendrée par les constantes de $\mathcal{L}$.) On notera $Diag_{\bar{d}}(\mathcal{C})$ le diagramme sans quantificateurs de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{L}_{\bar{d}}$.

• Montrons que la $\mathcal{L}_{\bar{d}}$-théorie $T(\bar{d}) := T \cup Diag_{\bar{d}}(\mathcal{C}) \cup \{\phi(\bar{d})\}$ est inconsistante

Sinon, il y aurait un modèle $\mathcal{B}$ de T contenant $\mathcal{C}$ où $\phi(\bar{d})$ est vraie. Par ailleurs, $\mathcal{A}$ contient $\mathcal{C}$ et satisfait $\neg\phi(\bar{d})$ ce qui contredit l'hypothèse sur ϕ.

• Comme $T(\bar{d})$ est inconsistante, on a que $T \cup Diag_{\bar{d}}(\mathcal{C}) \models \neg\phi(\bar{d})$ et donc par le théorème de compacité, il existe $\psi_1(\bar{d}), \cdots, \psi_m(\bar{d})$ appartenant à $Diag_{\bar{d}}(\mathcal{C})$ (2) telles que $T \models (\bigwedge_{i=1}^m \psi_i(\bar{d})) \rightarrow \neg\phi(\bar{d})$. Ainsi, $T \models \forall \bar{x}\, (\bigwedge_{i=1}^m \psi_i(\bar{x}) \rightarrow \neg\phi(\bar{x}))$. En prenant la contraposée, on obtient $T \models \forall \bar{x}\, (\phi(\bar{x}) \rightarrow (\bigvee_{i=1}^m \neg\psi_i(\bar{x})))$. Donc, $\bigvee_{i=1}^m \neg\psi_i(\bar{d}) \in \Gamma(\bar{d})$. Mais $\mathcal{A} \models T \cup \Gamma(\bar{d})$ et donc $\mathcal{A} \models \bigvee_{i=1}^m \neg\psi_i(\bar{d})$. Or $\mathcal{C}$ est une sous-structure de $\mathcal{A}$, $\mathcal{C} \models \bigvee_{i=1}^m \neg\psi(\bar{d})$, une contradiction avec (2).

• Et donc la situation (1) n'apparait jamais. Autrement dit, $T \cup \Gamma(\bar{d}) \models \phi(\bar{d})$. Par le théorème de compacité, il existe un nombre fini de formules (sans quantificateurs) $\gamma_1(\bar{x}), \cdots, \gamma_k(\bar{x})$ appartenant à $\Gamma(\bar{x})$ telles que

$$T \cup \{\gamma_1(\bar{d}), \cdots, \gamma_k(\bar{d})\} \models \phi(\bar{d}).$$

Comme $\bar{d}$ sont des constantes n'appartenant pas à $\mathcal{L}$, cela implique que

$$T \models \forall x\, (\bigwedge_{j=1}^{k} \gamma_j(\bar{x}) \rightarrow \phi(\bar{x})).$$

Par choix de $\Gamma(\bar{x})$, on obtient :

$$T \models \forall x\, (\bigwedge_{j=1}^{k} \gamma_j(\bar{x}) \leftrightarrow \phi(\bar{x})).$$

□

6.4 Ensembles infiniment définissables.

Nous allons (rapidement) voir ici la notion d'ensembles infiniment définissables et de types que nous reverrons de façon plus abstraite dans les sections 8.2, 8.3.

Définition 6.4.1 Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{L}$-structure et C un sous-ensemble de A. Un sous-ensemble de A^n est *infiniment* définissable (à paramètres dans C) si c'est une intersection infinie d'ensembles définissables (à paramètres dans C).

Un n-type $p(\bar{x})$ est un sous-ensemble de $\mathcal{L}$-formules à n-variables libres consistant ; il est complet s'il est maximal pour cette propriété. Soit T une théorie consistante, on note $S_n(T)$ l'ensemble des n-types complets contenant T.

A un n-type $p(\bar{x})$ consistant avec une $\mathcal{L}$-théorie T et à $\mathcal{M}$ un modèle de T, on fait correspondre une intersection infinie d'ensembles définissables (ou encore un ensemble *infiniment définissable*). Bien entendu dans ce modèle donné $\mathcal{M}$, cette intersection peut être vide, bien que toute sous-intersection finie soit non-vide.

Par exemple l'ensemble infiniment définissable : $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}] - 1/n \;\; 1/n[-\{0\}$ est vide dans $\mathbb{R}$, non vide dans $\mathbb{R}^\omega/\mathscr{U}$. On notera

$$\mu := \{a \in \mathbb{R}^\omega/\mathscr{U} : \bigwedge_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{R}^\omega/\mathscr{U} \models -1/n < a < 1/n\}.$$

Exercice : En déduire que μ n'est pas définissable (sans paramètres) dans $\mathbb{R}^\omega/\mathscr{U}$. Montrer que μ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^\omega/\mathscr{U}, +, 0)$ mais que ce n'est pas une intersection de sous-groupes définissables.

6.5 Ensembles définissables dans les corps algébriquement clos et réels-clos

Théorème 6.5.1 *(Tarski) ACF admet l'élimination des quantificateurs dans $\mathcal{L}_{an}$.*

Preuve : On applique le critère précédent aux formules existentielles $\exists x\phi(x, \bar{a})$, où $\phi(x, \bar{y})$ est une formule sans quantificateurs, et on termine la preuve en utilisant le Lemme 6.2.4.

Soient $\mathcal{K}_1 := (K_1, +, -, ., 0, 1)$ et $\mathcal{K}_2 := (K_2, +, -, ., 0, 1)$ deux $\mathcal{L}_{an}$-structures modèles de ACF contenant $\bar{a}$ et soit F le sous-corps de K_1 et K_2, engendré par $\bar{a}$. Remarquons que K_1 et K_2 sont infinis.

Supposons qu'il existe $b \in K_1$ tel que $\mathcal{K}_1 \models \phi(b, \bar{a})$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\phi(x, \bar{y})$ est de la forme $\bigwedge_{i\in I} p_i(x, \bar{y}) = 0 \;\&\; q(x, \bar{y}) \neq 0$. Soit $\tilde{F}$ la clôture algébrique de F que l'on plonge dans K_1 et dans K_2.

Si I est non vide et s'il existe $i \in I$ tel que $p_i(x, \bar{a}) \in \mathbb{Q}(\bar{a})[x] - \{0\}$, b est algébrique sur F et on peut supposer qu'il appartient à $\tilde{F} \subset K_2$ et donc à K_2.

Si I est vide, comme $K_1 \models \phi(b, \bar{a})$, le polynôme $q(x, \bar{a})$ est non-trivial et donc n'a qu'un nombre fini de zéros dans K_2 et donc il suffit de prendre $c \in K_2$ différent de ces zéros et on aura $K_2 \models \phi(c, \bar{a})$. $\square$

Lemme 6.5.2 *Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable et soit T une $\mathcal{L}$-théorie complète et récursive. Alors T est décidable.*

Preuve : Par hypothèse T est un ensemble récursif d'énoncés et comme cette théorie est complète, l'ensemble des conséquences de T est récursif (autrement dit, T est décidable).

Soit σ un énoncé. Comme T est complète, on sait que soit σ soit $\neg\sigma$ est une conséquence de T. On énumère toutes les démonstrations de T et on vérifie si σ ou $\neg\sigma$ apparaissent dans la conclusion de ces démonstrations. On concluut en utilisant le fait que si un ensemble est récursivement énumérable (r.e.) ainsi que son complémentaire, alors il est récursif. $\square$

Corollaire 6.5.3 *Les théories ACF_0 et pour chaque nombre premier p, ACF_p sont des théories complètes. La théorie ACF_0 axiomatise la théorie du corps des nombres complexes. La théorie ACF_p axiomatise la théorie de la clôture algébrique du corps $\mathbb{F}_p$. Ces théories ACF_0 et ACF_p, $p \in \mathcal{P}$, sont décidables.*

Preuve : Pour la première affirmation, il suffit de montrer que tout énoncé sans quantificateurs peut être mis sous la forme $1 + \cdots + 1 = 0$.

La seconde découle du fait que $\mathbb{C}$ (respectivement $\mathbb{F}_p$) est un modèle de ACF_0 (respectivement ACF_p).

La décidabilité de ces théories découle du Lemme 6.5.2. $\square$

Définition 6.5.4 Soit T une théorie consistante. On dira que $\mathcal{A}$ est un modèle premier de T s'il se plonge de façon élémentaire dans tout modèle de $\mathcal{M}$ de T.

Soit $\mathcal{M} \models T$ et soit $B \subset M$. On dira que $\mathcal{M}_0 \models T$ est premier au-dessus de B si $\mathcal{M}_0$ se plonge de façon élémentaire dans tout modèle $\mathcal{N}$ de T dans lequel B se plonge.

Corollaire 6.5.5 *La clôture algébrique $\tilde{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ est un modèle premier de ACF_0. La clôture algébrique $\tilde{\mathbb{F}}_p$ de $\mathbb{F}_p$ est un modèle premier de ACF_p.*

Preuve : Tout corps K de caractéristique 0 contient $\mathbb{Q}$ et donc si K est un modèle de ACF, par l'unicité à isomorphisme près de la clôture algébrique, il contient $\tilde{\mathbb{Q}}$. Il reste à montrer que $\tilde{Q} \prec K$. Soit $\phi(\bar{x})$ une $\mathcal{L}_{an}$-formule et soit $\bar{a}$ un uple d'éléments de $\tilde{Q}$. Par le théorème 6.5.1, on peut supposer que $\phi(\bar{x})$ est une formule sans quantificateurs et donc comme $\tilde{\mathbb{Q}}$ est un sous-corps de K, on a que $K \models \phi(\bar{a})$ sis $\tilde{\mathbb{Q}} \models \phi(\bar{a})$.

La preuve est similaire, il suffit de remarquer que tout corps K de caractéristique p contient $\mathbb{F}_p$. $\square$

Théorème 6.5.6 *(Tarski) RCF admet l'élimination des quantificateurs dans $\mathcal{L}_{an,<}$.*

Preuve : On peut faire une preuve algorithmique de ce résultat (voir par exemple la preuve de Muchnik, vue dans le cours de Michaux).

Ici, on applique le critère précédent aux formules existentielles $\exists x \phi(x, \bar{a})$, où $\phi(x, \bar{y})$ est une formule sans quantificateurs, et on termine la preuve en utilisant le Lemme 6.2.4.

Soient $\mathcal{K}_1 := (K_1, +, -, ., <, 0, 1)$ et $\mathcal{K}_2 := (K_2, +, -, ., <, 0, 1)$ deux $\mathcal{L}_{an,<}$-structures modèles de RCF contenant $\bar{a}$ et soit F le sous-corps de K_1 et K_2, engendré par $\bar{a}$.

Supposons qu'il existe $b \in K_1$ tel que $\mathcal{K}_1 \models \phi(b, \bar{a})$. Sans perte de généralité on peut supposer que $\phi(x, \bar{y})$ est de la forme $\bigwedge_{i \in I} p_i(x, \bar{y}) = 0$ & $\bigwedge_{j \in J} q_j(x, \bar{y}) > 0$. Soit $\tilde{F}$ la clôture réelle de F que l'on plonge dans K_1 et dans K_2.

Si I est non vide et s'il existe $i \in I$ tel que $p_i(x, \bar{a}) \in \mathbb{Q}(\bar{a})[x] - \{0\}$, b est algébrique sur F et on peut supposer qu'il appartient à $\tilde{F} \subset K_2$ et donc à K_2.

Sinon, $\phi(x, \bar{a})$ est équivalente à $\bigwedge_{j \in J} q_j(x, \bar{a}) > 0$. Chaque polynôme $q_j(x, \bar{a})$, $j \in J$, n'a qu'un nombre fini de racines dans $\tilde{F}$. Soient $a_1 < \cdots < a_n$ (avec $n \leq \sum_j deg_x q_j(x, \bar{y})$), les zéros dans $\tilde{F}$ de cet ensemble fini de polynômes. Sur chaque intervalle ouvert de la forme : (a_i, a_{i+1}) ou $(-\infty, a_1)$ ou $(a_n, +\infty)$, chacun de ces polynômes a un signe constant. Comme

$\mathcal{K}_1 \models \bigwedge_{j\in J} q_j(b,\bar{a}) > 0$, il existe un de ces intervalles où tous les $q_j(x,\bar{a})$ sont strictement positifs. et donc il suffit de choisir un élément $c \in \tilde{F}$ dans un de ces intervalles où tous les $q_j(x,\bar{a})$ sont positifs. (On prendra c, selon les cas, égal à $\frac{a_i+a_{i+1}}{2}$, a_1-1, a_n+1.) $\square$

Remarque : RCF admet l'e.q. dans $\mathcal{L}_{an,<}$ mais pas dans $\mathcal{L}_{an}$. En effet l'ensemble des éléments positifs x est définissable par la formule $\exists y\ y^2 = x$, c'est un ensemble infini qui n'est pas cofini. Ce qui contredirait le fait que la $\mathcal{L}_{an}$-formule $\exists y\ y^2 = x$ soit équivalente à une $\mathcal{L}_{an}$-formule sans quantificateurs.

Définition 6.5.7 Soit T une $\mathcal{L}$-théorie consistante. On dit que T est *modèle-complète* si pour tout $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ avec $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$, on a $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.

Exercice : Soit T une $\mathcal{L}$-théorie consistante, montrer que si T a l'e.q., alors T est modèle-complète.

Exercice : Montrer que RCF est modèle-complète dans $\mathcal{L}_{an}$. (Pour axiomatiser RCF dans $\mathcal{L}_{an}$, on remplace tout élément positif est un carré par $\forall x\ \forall y\ \exists z\ \ x^2 + y^2 = z^2$ et on ajoute que $K^2 \cap -(K^2) = \{0\}$ et $K = K^2 \cup -(K^2)$.)

Pour faire l'exercice, on montre que dans RCF, la relation d'ordre $x < y$ est définissable par : $\exists z\ z^2 = y - x\ \&\ x \neq y$ et la négation $\neg(x < y)$ par $\exists z\ z^2 = x - y$ et donc toute formule dans RCF est équivalente à une formule existentielle.

Corollaire 6.5.8 *RCF est une théorie complète et décidable. La théorie du corps des réels est axiomatisée par RCF.*

Preuve : RCF est une théorie complète car tout énoncé est équivalent à une combinaison booléenne d'énoncés sans quantificateurs de la forme $m < n$, $n,\ m \in \mathbb{Z}$.

Comme RCF est un ensemble récursif, par le Lemme 6.5.2, elle est décidable.

Le corps $\mathbb{R}$ est un modèle de RCF et comme RCF est une théorie complète, elle est égale à $Th(\mathbb{R})$. $\square$

6.6 Théories o-minimales

Définition 6.6.1 Soit $\mathcal{L}_< = \{<, \cdots\}$, soit T est une $\mathcal{L}_<$-théorie consistante. Elle est *o-minimale* si pour tout modèle $\mathcal{M}$ de T, $Def_1(M)$ consiste en des sous-ensembles de M qui sont des unions finies d'intervalles.

Nous montrerons dans la Proposition 6.6.2 que RCF est une théorie o-minimale.

Remarque : Plus généralement, on peut définir des $\mathcal{L}$-théories T $\mathcal{L}_0$-minimales où $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$ lorsque pour tout modèle $\mathcal{M}$ de T, $Def_1(M)$ consiste en des sous-ensembles de M qui sont des combinaisons booléennes de sous-ensembles de M définis par des $\mathcal{L}_0$-formules atomiques.

Lorsque $\mathcal{L}_0 = \emptyset$, on dira que T est *fortement minimale.*

Exemple : ACF est fortement minimale (ça se montre utilisant que ACF a l'e.q. dans $\mathcal{L}_{an}$, ce qui peut se montrer suivant le même schéma que pour montrer que RCF a l'eq.)

Proposition 6.6.2 *RCF est une théorie o-minimale.*

Preuve : Soit $\mathcal{K} \models RCF$. Montrons que tout sous-ensemble définissable inclus à K (avec paramètres dans K) est une union finie d'intervalles.

Supposons que l'ensemble définissable soit de la forme $\phi(K, \bar{a})$. Par le Théorème 6.5.6, on peut supposer que $\phi(x, \bar{y})$ est une formule sans quantificateurs : $\phi(x, \bar{y}) := \bigvee_k \bigwedge_j p_{jk}(x, \bar{y}) = 0 \ \& \ \bigwedge_\ell q_{\ell k}(x, \bar{y}) > 0$.

Il suffit de montrer que $\bigwedge_{j \in J} p_j(x, \bar{a}) = 0 \ \& \ \bigwedge_{\ell \in L} q_\ell(x, \bar{a}) > 0$ est une union finie d'intervalles. Ou bien $J \neq \emptyset$ et pour un indice $j \in J$, $p_j(x, \bar{a}) \in K[x] - \{0\}$ et donc $\phi(K, \bar{a})$ est un ensemble fini (et donc une union finie d'intervalles), ou bien soit pour tout $j \in J$, $p_j(x, \bar{a}) = 0$ ou $J = \emptyset$.

Dans ce cas, on énumère les zéros des polynômes $q_\ell(x, \bar{a})$, $\ell \in L$; disons $c_0 < \cdots < c_m$. Dans chacun des intervalles ouverts $I_0 := (-\infty, c_0), \ \cdots, I_{r+1} := (c_r \ c_{r+1}), 0 \leq r \leq m-1$, $I_{m+1} := (c_m = \infty)$, les fonctions polynomiales $q_\ell(x, \bar{a})$ ne change pas de signe (sinon elles auraient un zéro). Notons ces intervalles I_r, $0 \leq r \leq m$. On construit un sous-ensemble V de $\{0, \cdots, m+1\}$. Et donc soit sur l'intervalle I_r $q_\ell(x, \bar{a}) > 0$ et donc on met $r \in V$, soit $q_\ell(x, \bar{a}) < 0$ et on ne met pas $r \in V$. On a alors que dans ce cas, $\phi(K, \bar{a}) = \cup_{r \in V} I_r$. $\square$

Remarque : la théorie de $(\mathbb{R}, +, -, ., <, 0, 1, exp)$ est o-minimale (Wilkie, 1996). On montre que cette théorie est décidable, sous l'hypothèse de Schanuel.

Proposition 6.6.3 *Si $\mathcal{M}$ est une structure o-minimale, alors toute coupure de M s'étend en un unique* 1*-type sur M.*

Preuve :

Soit $C_{A,B}$ une coupure (voir Definition 5.1.2) et soit $\phi(x, \bar{m})$ une formule à paramètres dans M consistante avec RCF. Par o-minimalité, $\phi(M, \bar{m})$ est une union finie d'intervalles à extrémités dans M, disons $\phi(M, \bar{m}) = \cup_{i \in I}(a_i \ b_i)$, où I est fini, $a_i \leq b_i$ et $a_i, b_i \in M \cup \{+\infty, -\infty\}$, $i \in I$. On adopte la convention suivante : si $a_i = b_i$, alors $(a_i \ b_i) = \{a_i\}$ et si $a_i < b_i$, alors $(a_i \ b_i)$ est l'intervalle ouvert $]a_i \ b_i[$. Sans perte de généralité, on peut supposer que ces intervalles sont disjoints et on dira que $(a_i \ b_i)$ est un intervalle de $\phi(x, \bar{m})$.

(Notons que si $\mathcal{N}$ est une extension élémentaire de $\mathcal{M}$, alors $\phi(N, \bar{m}) = \cup_{i \in I}(a_i \ b_i)$, où I est fini, $a_i \leq b_i$ et $a_i, b_i \in M \cup \{+\infty, -\infty\}$ mais où $(a_i \ b_i)$ est maintenant un intervalle de N.)

Pour que $\phi(x, \bar{m})$ soit consistante avec $C_{A,B}$, il suffit que pour un indice $i \in I$, $a_i < a$ et $b_i > b$ pour certains $a \in A$, $b \in B$.

Supposons que $\phi(x, \bar{m})$ ne soit pas consistante avec $C_{A,B}$ et montrons que $\neg\phi(x, \bar{m})$ est consistante avec $C_{A,B}$.

Pour chaque $i \in I$, on a soit $a < a_i$ pour un certain $a \in A$, soit $b_i < b$ pour un certain $b \in B$. Dans le premier cas, comme $C_{A,B}$ n'est pas réalisé dans $\mathcal{M}$, il existe $b' \in B$ tel que $a < b' < a_i \leq b_i$-on dira que l'intervalle $(a_i \ b_i)$ est à droite de la coupure-. Soit $i_0 \in I$ l'indice de I tel que tout autre intervalle $(a_i \ b_i)$ de $\phi(x, \bar{m})$ à droite de la coupure est plus grand que $(a_{i_0} \ b_{i_0})$ c.a.d. $(a_{i_0} \ b_{i_0}) < (a_i \ b_i)$.

Dans le deuxième cas où $b_i < b$, il existe $a' \in A$ tel que $a_i \leq b_i < a' < b$-on dira que l'intervalle $(a_i \ b_i)$ est à gauche de la coupure-. Soit $i_1 \in I$ tel que tout autre intervalle $(a_i \ b_i)$ de $\phi(x, \bar{m})$ à gauche de la coupure est plus petit que $(a_{i_1} \ b_{i_1})$ c.a.d. $(a_i \ b_i) < (a_{i_1} \ b_{i_1})$.

Ou bien on a à la fois un intervalle de $\phi(x, \bar{m})$ à gauche et à droite de la coupure $C_{A,B}$ et donc $(b_{i_1} \ a_{i_0})$ est inclus à $\neg\phi(x, \bar{m})$, ou bien il n'y a qu'un intervalle de $\phi(x, \bar{m})$ à droite de la coupure et donc $(-\infty a_{i_0}) \subset \neg\phi(x,\bar{m})$, ou bien il n'y a qu'un intervalle de $\phi(x,\bar{m})$ à gauche de la coupure et donc $(b_{i_1}\ +\infty) \subset \neg\phi(x,\bar{m})$. Dans chacun de ces trois cas, $\neg\phi(x,\bar{m})$ est consistante avec $C_{A,B}$. $\square$

Notation 6.6.4
On utilise l'abréviation : $\exists^{=1}x\ \phi(x,\bar{y})$ pour $\exists x\ (\phi(x,\bar{y})\ \&\ \forall z\phi(z,\bar{y}) \rightarrow x = z)$.

Exercice : Soit $\mathcal{M} \models RCF$ et soit $\phi(x,\bar{y})$ une $\mathcal{L}$-formule. Soit $\bar{m} \subset M$. Montrer qu'il existe une $\mathcal{L}$-formule $\psi(x)$ tel que :
$\mathcal{M} \models \forall x\ (\psi(x) \rightarrow \phi(x,\bar{m}))$ et $\mathcal{M} \models (\exists x\phi(x,\bar{m})) \rightarrow (\exists^{=1}x\ \psi(x))$.

Le théorème suivant résoud le dix-septième problème d'Hilbert (1900), posé pour le corps des nombres réels.

Théorème 6.6.5 (Artin, 1927) *Si une fonction rationnelle $f(x_1,\cdots,x_n)$ à coéfficients dans un corps réel-clos K ne prend que des valeurs positives (lorsqu'elle est définie), elle peut s'écrire comme somme de carrés de fonctions rationnelles (à coéfficients dans K).*

Preuve : On utilise la notion d'éléments totalement positifs. Supposons que f n'est pas une somme de carrés dans $K(x_1,\cdots,x_n)$.

Alors par le Lemme 5.2.1, il existe un ordre sur $K(x_1,\cdots,x_n)$ tel que $f < 0$. On écrit $f = \frac{g}{h} = \frac{g.h}{h^2}$, où $g,h \in K[x_1,\cdots,x_n]$. Donc, $g.h < 0$. Soit R la clôture réelle de $K(x_1,\cdots,x_n)$. On a $\mathcal{R} \models \exists x_1 \cdots \exists x_n\ g(\bar{x})h(\bar{x}) < 0$ (ici on a considéré $g(\bar{x})$ (respectivement $h(\bar{x})$) comme un terme de $\mathcal{L}_{an}$ à paramètres dans K et donc le fait que l'élément $\frac{g}{h} \in R$ est négatif se traduit par cet $\mathcal{L}_K$-énoncé).

La théorie RCF a l'e.q. (dans $\mathcal{L}_{an,<}$) et donc $\mathcal{K} \subset \mathcal{R}$ implique que $\mathcal{K} \prec \mathcal{R}$. Donc $K \models \exists\bar{x}\ g(\bar{x}).h(\bar{x}) < 0$, on a donc trouvé un uple d'éléments de K où f est définie et négative, ce qui contredit l'hypothèse sur f. $\square$

Remarque : Si $f(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]$ et $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}^n$, alors $f \in \sum \mathbb{R}(x_1,\cdots,x_n)^2$ ou encore il existe $g, f_1,\cdots,f_r \in \mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]$ tel que $g^2.f = f_1^2 + \cdots + f_r^2$.

Chapitre 7

Théorèmes de Lowenheim-Skolem.

Dans cette troisième partie du cours, nous allons étudier les propriétés abstraites de la classe des modèles d'une $\mathcal{L}$-théorie.

Les deux résultats principaux de ce chapitre sont les théorèmes de Lowenheim-Skolem. (Dans l'annexe B, on revoit quelques notions sur les ordinaux et les cardinaux).

Etant donné une $\mathcal{L}$-théorie consistante T qui a des modèles infinis, on montrera que pour chaque cardinal infini $\kappa \geq |\mathcal{L}| + \aleph_0$, on a un modèle de T de cardinalité κ.

Lorsque $T = RCF$, on a déjà vu quelques modèles de cardinalité différente : $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}^{rc}$, la clôture réelle de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, et en appliquant le théorème de Łos, n'importe quelle ultrapuissance non principale de $\mathbb{R}$.

7.1 Fonctions de Skolem.

Dans certaines constructions, il est parfois utile d'enrichir le langage de notre théorie en ajoutant de nouvelles fonctions au langage (les fonctions de *Skolem*) et d'enrichir ainsi la théorie en fabriquant sa *skolémisation*, tout en gardant la même classe de modèles.

Un procédé analogue qui consiste à ajouter de nouveaux symboles de relations, ce qui ne change pas la notion de sous-strucures contrairement à la skolémisation (puisque l'on ajoute de nouveaux symboles de fonctions), est appelé la *Morleysation*.

On obtient ainsi des théories qui ont l'élimination des quantificateurs dans ce langage enrichi. (C'est pourquoi il est important de préciser dans les résultats sur l'élimination des quantificateurs quel est le langage considéré.)

Définition 7.1.1 Une $\mathcal{L}$-théorie T a des *fontions de Skolem intrinsèques* si pour toute formule $\phi(v, \bar{w})$, il existe un symbole de fonction $f \in \mathcal{L}$ tel que

$$T \models \forall w \ (\exists v \ \phi(v, \bar{w}) \to \phi(f(\bar{w}), \bar{w})).$$

T a des *fonctions de Skolem* si pour toute formule $\phi(\bar{x}, y)$, où $\bar{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, il existe un $\mathcal{L}$-terme $t(\bar{x})$ tel que

$$T \models \forall x_1 \cdots \forall x_n (\exists y \phi(\bar{x}, y) \to \phi(\bar{x}, t(\bar{x}))).$$

Une *skolémisation* de T est une théorie T^+ dans un langage $\mathcal{L}^+$ étendant $\mathcal{L}$ tel que tout modèle de T peut être étendu en un modèle de T^+ et pour toute $\mathcal{L}^+$-formule $\phi(\bar{x}, y)$, où

$\bar{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, il existe un $\mathcal{L}^+$-terme $t(\bar{x})$ tel que

$$T^+ \models \forall x_1 \cdots \forall x_n (\exists y \phi(\bar{x}, y) \rightarrow \phi(\bar{x}, t(\bar{x}))).$$

Remarque : ici on a enrichi le langage $\mathcal{L}$ en un langage $\mathcal{L}^+$ et on a étendu une $\mathcal{L}$-structure modèle de T en une $\mathcal{L}^+$-structure modèle de T^+.

Inversement, étant donné un langage $\mathcal{L}^{'} \subseteq \mathcal{L}$, on peut considérer une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ en tant que $\mathcal{L}^{'}$-structure, que l'on notera : $\mathcal{M}_{\restriction \mathcal{L}'}$.

Une conséquence du théorème suivant sera que l'on peut toujours enrichir le langage d'une théorie pour que celle-ci ait l'élimination des quantificateurs dans ce nouveau langage.

Théorème 7.1.2 *Une théorie T a toujours une expansion qui a des fonctions de Skolem intrinsèques.*

Commençons par donner une idée de la preuve.

1) Etant donné une $\mathcal{L}$-théorie T, on va tout d'abord rajouter un nombre infini dénombrable de symboles de fonctions à $\mathcal{L}$; ceux-ci seront utilisés pour construire les fonctions de Skolem. En fait, quand on a un énoncé du type $\Psi := \forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y \Phi(x_1, \ldots, x_n, y)$, on voudrait pouvoir exprimer le fait que la variable y dépend, en quelque sorte, des variables $x_1, \ldots, x_n$, afin de pouvoir construire ensuite des témoins, dans un modèle donné de T, de la satisfaisabilité de l'énoncé.
Pour cela, on aura besoin d'un nouveau symbole de fonction f_Φ n'existant pas dans $\mathcal{L}$. Pour $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, si on a $\exists y\ \Phi(\overline{x}, y)$, on voudrait avoir aussi $\Phi(\overline{x}, f_\Phi(\overline{x}))$; ce qu'on peut résumer en la condition : $\forall \overline{x}\ ((\exists y\ \Phi(\overline{x}, y)) \ \rightarrow\ \Phi(\overline{x}, f_\Phi(\overline{x})))$.

2) On va ensuite étendre T en une théorie T^+, pas à pas, en rajoutant à chaque étape, pour chaque formule $\Phi(\overline{x}, y)$ du langage de la théorie précédemment construite l'énoncé : $\theta_\Phi := \forall \overline{x}\ ((\exists y\ \Phi(\overline{x}, y)) \ \rightarrow\ \Phi(\overline{x}, f_\Phi(\overline{x})))$.

3) La dernière étape consiste à étendre un modèle $\mathcal{M}$ de T en un modèle $\mathcal{M}^+$ de T^+, en contruisant des interprétations pour les symboles de fonctions qui ont été rajoutés à $\mathcal{L}$.
Formellement, tout cela donne :
Preuve :
1) On pose $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$, et $\mathcal{L}_{i+1} = \mathcal{L}_i \cup \{f_\Phi : \Phi \text{ est une } \mathcal{L}_i\text{-formule}\}$
(on ajoute un nouveau symbole de fonction par formule)
Remarque : Si $\mathcal{L}_i$ est dénombrable, l'ensemble des $\mathcal{L}_i$-formules est dénombrable, et donc $\mathcal{L}_{i+1}$ aussi.

2) Pour $\Phi(\overline{x}, y)$ une $\mathcal{L}_i$-formule, on pose : $\theta_\Phi := \forall \overline{x}((\exists y\ \Phi(\overline{x}, y)) \rightarrow \Phi(\overline{x}, f_\Phi(\overline{x})))$;
$T_0 = T$; $T_{i+1} = T_i \cup \{\theta_\Phi : \Phi \text{ est une } \mathcal{L}_i\text{-formule}\}$.

3) Soit $\mathcal{M}$ un modèle de T et posons $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$. Nous allons supposer que nous avons pu interpréter dans $\mathcal{M}$ les nouveaux symboles de fonctions de $\mathcal{L}_i$, appelons cette $\mathcal{L}_i$-structure $\mathcal{M}_i$ (qui est de même domaine que $\mathcal{M}$), de telle façon que $\mathcal{M}_i \models T_i$. Nous allons montrer

que l'on peut interpréter les symboles de fonction de $\mathcal{L}_{i+1} \setminus \mathcal{L}_i$ dans $\mathcal{M}_i$ de telle façon que cette $\mathcal{L}_{i+1}$-structure $\mathcal{M}_{i+1}$ sera un modèle de T_{i+1}.

Comme on l'a noté le domaine restera le même au cours de la construction par induction ($M_{i+1} = M_i = M_0 = M$). Soit $c \in M$ (le choix n'est pas important). Pour chaque formule Φ associée à un symbole de fonction f_Φ d'arité n de $\mathcal{L}_{i+1} \setminus \mathcal{L}_i$, on construit une fonction

$$g : M^n \to M$$
$$\overline{a} \mapsto g(\overline{a}) = \begin{cases} b_0 \in \{b \in M : M_i \models \Phi(\overline{a}, b)\} = X_{\overline{a}} & si \quad X_{\overline{a}} \neq \emptyset \\ c & si \quad X_{\overline{a}} = \emptyset \end{cases}$$

Donc, pour tout $\overline{a} \in M^n$, on a : si $\mathcal{M}_{i+1} \models \exists y\ \Phi(\overline{a}, y)$, alors $\mathcal{M}_{i+1} \models \Phi(\overline{a}, g(\overline{a}))$; en posant $f_\Phi^{\mathcal{M}} = g$, on a donc $\mathcal{M}_{i+1} \models \theta_\Phi$, et donc $\mathcal{M}_{i+1} \models T_{i+1}$.

Pour terminer, on pose $\mathcal{L}^+ = \bigcup \mathcal{L}_i$; $T^+ = \bigcup T_i$. Si $\Phi(\overline{x}, y)$ est une $\mathcal{L}^+$-formule, $\Phi \in \mathcal{L}_i$ pour un certain i et $\theta_\Phi \in T_{i+1} \subseteq T^+$; donc T^+ a des fonctions de Skolem intrinsèques.
En réitérant un raisonnement précédent, on voit que dans tout modèle $\mathcal{M}$ satisfaisant T on peut interpréter les symboles de $\mathcal{L}^+ \setminus \mathcal{L}$ afin d'avoir $\mathcal{M}$ satisfaisant T^+. $\square$

Définition 7.1.3 T a des fonctions de Skolem *définissables* si pour toute formule $\phi(\bar{x}, y)$, où $\bar{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, il existe une $\mathcal{L}$-formule $\psi(\bar{x}, y)$ tel que
$T \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \forall y\ (\psi(\bar{x}, y) \to \phi(\bar{x}, y))$, et
$T \models \forall x_1 \cdots \forall x_n (\exists y \phi(\bar{x}, y) \to \exists_{=1} y \psi(\bar{x}, y))$.
On peut définir alors une fonction F de la façon suivante :
$\forall \bar{x} \forall y (F(\bar{x}) = y \leftrightarrow (\exists z \phi(\bar{x}, z) \wedge \psi(\bar{x}, y)) \vee (\neg \exists z \phi(\bar{x}, z) \wedge y = x_1)))$.

7.2 Exercices.

1. Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$. Montrer que la structure $(\mathbb{R}, +, ., 0, 1)$ est une sous-structure élémentaire de $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{R}/\mathscr{U}$.
2. Trouver un sous-ensemble de $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{R}/U$ inclus dans l'intervalle $[-1\ 1]$ qui n'a pas de borne supérieure. Montrez que cet ensemble n'est jamais définissable à paramètres dans $\mathbb{R}$.
3. Soit s la fonction successeur dans $\mathbb{N}$ et dans $\mathbb{Z}$. Montrez que $(\mathbb{N}, s)$ est une sous-structure de $(\mathbb{Z}, s)$, mais pas une sous-structure élémentaire.
4. Donnez un exemple de deux $\mathcal{L}$-structures $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ telles que $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ mais $\mathcal{A}$ n'est pas une sous-structure élémentaire de $\mathcal{B}$.
5. Soit K un corps commutatif et soit $\mathcal{L} := \{+, -, ., 0, 1\}$. Montrer que tout sous-ensemble de K définissable par une formule sans quantificateurs dans $(K, +, -, ., 0, 1)$ est soit fini soit cofini.
6. Soient $\mathcal{L} := \{+, -, ., 0, 1\}$ le langage des anneaux et $\mathcal{L}_< := \mathcal{L} \cup \{<\}$ celui des anneaux totalement-ordonnés. Soit T la $\mathcal{L}_<$-théorie des corps réels-clos.
   Ecrivez une axiomatisation de T.
   Montrez que T n'a pas l'élimination des quantificateurs dans le langage $\mathcal{L}$.
   Montrez que T a des fonctions de Skolem définissables.

7. Montrez que l'anneau des entiers $< \mathbb{Z}, +, -, ., 0, 1 >$ a des fonctions de Skolem définissables.
   (Aide : tout entier positif est somme de 4 carrés.)
8. Soit $(\mathbb{N}^*, \leq)$ l'ensemble des nombres naturels non nuls muni de la relation d'ordre partiel suivante : $n \leq m$ si n divise m, pour $n, m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les sous-ensembles suivants sont définisables sans paramètres : $\{1\}$, l'ensemble des nombres premiers, les nombres naturels qui ne sont pas divisibles par le carré d'un nombre premier.
9. Pour tout langage $\mathcal{L}$, montrez que deux structures sont élémentairement équivalentes ssi elles le sont pour tout sous-langage fini.
   Montrez que si $\mathcal{L}$ est dénombrable, si T est une $\mathcal{L}$-théorie sans modèles finis et si deux modèles dénombrables sont élémentairement équivalents, alors T est complète.
10. Soit $(R, +, -, ., 0, 1)$ un anneau unitaire (pas nécessairement commutatif). Soit $\mathcal{L}_R := \{+, -, 0, \cdot r; r \in R\}$ le langage des R-modules. Un R-module à droite $\mathcal{M}$ est un modèle du schéma d'axiomes suivants :
    $(M, +, 0)$ est un groupe abélien,
    $\forall m\; m \cdot (r.s) = (m \cdot r) \cdot s$,
    $\forall m\; m \cdot (r + s) = m \cdot r + m \cdot s$,
    $\forall m\; m \cdot 1 = m$,
    $\forall m_1 \forall m_2\; (m_1 + m_2) \cdot r = m_1 \cdot r + m_2 \cdot r$.
    Soit (K, σ) un corps commutatif avec un automorphisme σ. Soit $R := K[t; \sigma]$ l'anneau des polynômes gauches c.a.d. c'est l'ensemble des sommes formelles de la forme $\sum_{i=1}^{n} t^i.a_i$, où $a_i \in K$, $n \in \mathcal{N}$, la somme est définie par
    $\sum_{i=1}^{n} t^i.a_i + \sum_{i=1}^{n} t^i.b_i := \sum_{i=1}^{n} t^i.(a_i + b_i)$ et la multiplication est définie par la règle $a.t = t.\sigma(a)$ pour $a \in K$, de la façon suivante :
    $\sum_{i=1}^{n} t^i.a_i \cdot \sum_{j=1}^{m} t^j.b_j := \sum_{k=1}^{n+m} t^k.(\sum_{i+j=k} \sigma^j(a_i).b_j)$. Montrez que K est un $K[t; \sigma]$ module à gauche (on définit l'action de t sur K par $k.t = \sigma(k)$).
11. On garde les notations de l'exercice précédent.
    Une formule *positive primitive* (p.p.) est une formule existentielle positive de la forme $\phi(y_1, \cdots, y_n) := \exists x_1 \cdots \exists x_n \bigwedge_{k \in N} \sum_{i=1}^{m} x_i.r_{ik} = \sum_{j=1}^{n} y_j.s_{jk}$ où N est un sous-ensemble fini de nombres naturels, $r_{ik}, s_{jk} \in R$.
    Soit $(a_1, \cdots, a_{n-1}) \in M_1^{n-1}$, montrez que $\{y \in M_1 : \mathcal{M}_1 \models \phi(a_1, \cdots, a_{n-1}, y)\}$ est la classe latérale d'un sous-groupe de M_1.
    Soient $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2$ deux R-modules à droite, on dit M_1 est *pur* dans M_2 si toute formula p.p. à paramètres dans M_1 satisfaite dans $\mathcal{M}_2$ est satisfaite dans $\mathcal{M}_1$. Montrez que $\mathcal{M}_1$ est pur dans $\mathcal{M}_2$ ssi pour toute formule p.p. $\phi(x)$ à **une variable libre** on a pour tout $a \in M_1$: $\mathcal{M}_1 \models \phi(a)$ ssi $\mathcal{M}_2 \models \phi(a)$.

7.3 Sous-structures élémentaires et test de Tarski-Vaught.

Dans le chapitre 2, nous avons vu la notion de sous-structures élémentaires (voir Définition 2.4.1). Une première remarque immédiate : si T est une $\mathcal{L}$-théorie qui a l'e.q. et si $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sont deux modèles de T et $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, alors $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$.

Définition 7.3.1 Soit $(I, <)$ un ensemble totalement ordonné et soit $(\mathcal{M}_i : i \in I)$ une chaîne de $\mathcal{L}$-structures, c.a.d. pour tout $i < j$, $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{M}_j$ (voir chapitre 1, section 1.3). On dit que $(\mathcal{M}_i : i \in I)$ est une *chaîne élémentaire* de $\mathcal{L}$-structures si, de plus, pour tout $i < j$, $\mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}_j$.

Lemme 7.3.2 *Soit $(\mathcal{M}_i : i \in I)$ une chaîne élémentaire de $\mathcal{L}$-structures. Alors pour tout $j \in I$, $\mathcal{M}_j \prec \bigcup_{i \in I} \mathcal{M}_i$.*

Preuve : On procède par induction sur la complexité des $\mathcal{L}$-formules. $\square$

Proposition 7.3.3 *Si T est une théorie modèle-complète, alors T est fermée par unions de chaînes.*

Preuve : On applique la définition (voir Definition 6.5.7) et le lemme précédent sur les chaînes élémentaires. $\square$

Exercice : Trouver des exemples de chaînes (respectivement chaînes élémentaires) de structures.

Théorème 7.3.4 *Soient $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures telles que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$.*
Alors $\mathcal{M}$ est une sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$ ssi pour toute $\mathcal{L}$-formule $\phi(x, x_1, \cdots, x_n)$, pour tout $a_1, \cdots, a_n \in M$, si $\mathcal{N} \models \exists x\ \phi(x, a_1, \cdots, a_n)$ alors il existe $b \in M$ tel que $\mathcal{N} \models \phi(b, a_1, \cdots, a_n)$.

Preuve : : $(\Rightarrow)$: Exercice.
$(\Leftarrow)$ Par induction sur la complexité des formules. $\square$

Exercice : Montrer que si l'on remplace dans l'énoncé de ce théorème, $\mathcal{M}$ par un sous-ensemble X et si l'on suppose que pour tout $a_1, \cdots, a_n \in X$, si $\mathcal{N} \models \exists x\ \phi(x, a_1, \cdots, a_n)$ alors il existe $b \in X$ tel que $\mathcal{N} \models \phi(b, a_1, \cdots, a_n)$,
alors la sous-structure de $\mathcal{N}$ engendrée par X est égale à X et X est une sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$. $\square$

Exercice : Trouver un exemple de deux structures (infinies) telles que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, et $Def_n(\mathcal{A}) = Def_{nA}(\mathcal{B}) \cap A^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ mais telles que $\mathcal{A}$ n'est pas sous-structure élémentaire de $\mathcal{B}$.

7.4 Construction de sous-structures et extensions élémentaires

Théorème 7.4.1 (Löwenheim Skolem descendant). *Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{L}$-structure infinie et E un sous-ensemble de A. Alors il existe une sous-structure élémentaire $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, contenant E et de cardinalité inférieure ou égale à $|E| + |\mathcal{L}| + \aleph_0$.*

Preuve : Notons $\kappa := |E| + |\mathcal{L}| + \aleph_0$. Posons $E_0 := E$. Par induction sur $n \in \mathbb{N}$, on construit $E_n \subset A$. Soit $\mathcal{L}_{E_n} := \mathcal{L} \cup \{c_u : u \in E_n\}$. Soit $\mathcal{F}_{E_n}$ l'ensemble des $\mathcal{L}_{E_n}$-énoncés de la forme $\exists x\ \psi(x)$ où $\psi(x)$ est une $\mathcal{L}_{E_n}$-formule. On énumère ces énoncés σ_μ, où $\mu < \kappa$ c.a.d. $\mathcal{F}_{E_n} := \{\sigma_\mu : \mu < \kappa\}$.

Supposons que nous avons construit E_n et construisons E_{n+1}. Pour chaque $\sigma_\mu \in \mathcal{F}_{E_n}$, on vérifie si $\mathcal{A} \models \sigma_\mu$, si c'est le cas, on choisit dans A un élément que l'on note a_{σ_μ} et on pose $E_{n,\sigma_\mu} := E_n \cup \{a_{\sigma_\mu}\}$. Sinon, c.a.d. si $\mathcal{A} \not\models \sigma_\mu$, on pose $E_{n,\sigma_\mu} := E_n$.

On définit $E_{n+1} := \cup_{\sigma_\mu \in \mathcal{F}_{E_n}} E_{n,\sigma_\mu}$.

Posons $B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et montrons que B est le domaine d'une sous-structure élémentaire de $\mathcal{A}$.

• Le domaine de B est bien le domaine d'une sous-structure de $\mathcal{A}$. Montrons que si c est une constante de $\mathcal{L}$, alors $c^{\mathcal{A}} \in E_1$. Il suffit de considérer l'énoncé : $\exists x\ x = c$ $(c \in \mathcal{L}_{E_0})$. Montrons que B est fermé par les fonctions de $\mathcal{L}$. Soient $F(x_1, \cdots, x_m)$ une fonction m-aire de $\mathcal{L}$ et $\bar{b} := (b_1, \cdots, b_m) \subset B$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\bar{b} \subset E_n$. Soit $\bar{c_{\bar{b}}} := (c_{b_1}, \cdots, c_{b_m}) \subset \mathcal{L}_{E_n}$ et considérons l'enoncé $\exists x\ x = F(\bar{c_{\bar{b}}})$.

• On applique le test de Tarski-Vaught pour montrer que B est bien le domaine d'une sous-structure élémentaire. Soit $\phi(x, \bar{y})$ une $\mathcal{L}$-formule et $\bar{b} \subset B$. Comme précédemment il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\bar{b} \subset E_n$. Supposons que $\mathcal{A} \models \exists x\ \phi(x, \bar{b})$. Soit $\bar{c_{\bar{b}}} := (c_{b_1}, \cdots, c_{b_m}) \subset \mathcal{L}_{E_n}$ et considérons l'enoncé $\exists x\ \phi(x, \bar{c_{\bar{b}}})$. Il appartient à $\mathcal{F}_{E_n}$ et donc il existe $\mu \in On$ tel qu'il est égal à σ_μ. Par hypothèse, il existe $a \in A$ tel que $\mathcal{A} \models \phi(a, \bar{b})$. Par construction de E_{n+1}, on a mis dans E_{n+1}, un élément a_{σ_μ} tel que $\mathcal{A} \models \phi(a_{\sigma_\mu}, \bar{b})$.

• La cardinalité de $\mathcal{B}$ est inférieure ou égale à celle de $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}_{E_n}$ qui est inférieure ou égale à κ.) $\square$

Théorème 7.4.2 (Löwenheim Skolem montant). *Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{L}$-structure infinie et κ un cardinal infini avec $\kappa \geq |A| + |\mathcal{L}|$. Alors, il existe une sur-structure élémentaire $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, de cardinalité κ.*

Preuve : On construit tout d'abord en appliquant le théorème de compacité une sur-structure $\mathcal{C}$ élémentaire de cardinalité supérieure ou égale à κ. Ensuite on applique le théorème précédent pour obtenir une sur-structure de $\mathcal{A}$ qui soit une sous-structure élémentaire de $\mathcal{C}$ de cardinalité κ.

Soit $\mathcal{L}_{A,\kappa} := \mathcal{L}_A \cup \{c_\alpha :\ \alpha < \kappa\}$. Soit $T_\kappa := Diag_{el}(\mathcal{A}) \cup \{c_\alpha \neq c_\beta : \alpha < \beta < \kappa\}$. La théorie T_κ est consistante car elle est finiment consistante (un modèle étant $\mathcal{A}$). Soit $\mathcal{C}$ un modèle de T_κ. On applique alors le théorème précédent en prenant pour structure, la structure $\mathcal{C}$ et comme sous-ensemble $\{c_a^{\mathcal{C}} : a \in A\}$. On obtient ainsi une $\mathcal{L}_{A,\kappa}$-sous-structure élémentaire $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}$, de cardinalité κ, contenant A et comme $\mathcal{B} \models Diag_{el}(A)$, $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$. (La structure $\mathcal{B}$ est de cardinalité $\geq \kappa$ car c'est un modèle de T_κ et elle est de cardinalité $\leq \kappa$ par le théorème précédent. $\square$

Corollaire 7.4.3 *Soit $\mathcal{L}$ un cardinal dénombrable, $\mathcal{A}$ une $\mathcal{L}$-structure infinie et κ un cardinal infini. Alors il existe une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{B}$ élémentairement équivalente à $\mathcal{A}$ et de cardinalité κ.*

Preuve : Si $\mathcal{A}$ est de cardinalité $< \kappa$. On applique le Théorème 7.4.2 et donc il existe une extension élémentaire $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ de cardinalité κ. Si $\mathcal{A}$ est de cardinalité $\geq \kappa$. On applique le Théorème 7.4.1 en prenant un sous-ensemble E de A de cardinalité κ et on trouve une sous-structure élémentaire $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ de cardinalité κ. $\square$

Remarque : Etant donné une $\mathcal{L}$-théorie consistante T qui a des modèles infinis, où $\mathcal{L}$ est dénombrable, ces théorèmes nous montrent que pour chaque cardinal infini κ, on a un modèle de T de cardinalité κ. C'est pour cela que l'on parle de la *classe* des modèles de T (et non de l'ensemble des modèles de T).

Définition 7.4.4 Soit κ un cardinal infini. Une théorie T est κ-catégorique si elle est consistante et si tous ses modèles de cardinalité κ sont isomorphes.

Exemples :
- La théorie des espaces vectoriels sur un corps fini $\mathbb{F}_p$ est $\aleph_0$-catégorique.
- La théorie des espaces vectoriels sur $\mathbb{Q}$ est $\aleph_1$-catégorique, mais pas $\aleph_0$-catégorique.

Théorème 7.4.5 *Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable. Toute $\mathcal{L}$-théorie T qui n'a que des modèles infinis et qui est κ-catégorique pour un certain cardinal κ infini, est complète.*

Preuve : Montrons que tous les modèles de T sont élémentairement équivalents. Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ deux modèles de T. Comme ils sont nécéssairement infinis, on peut appliquer le Corollaire 7.4.3. Il existe donc $\mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}$, de cardinalité κ et $\mathcal{B}_1 \equiv \mathcal{B}$ de cardinalité κ. Par hypothèse, $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{B}_1$ et donc $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. $\Box$
Autre preuve Supposons que T ne soit pas complète. Il y a donc un $\mathcal{L}$-énoncé ϕ tel que $T \not\models \phi$ et $T \not\models \neg\phi$. Puisque $T \not\models \phi$ (resp. $T \not\models \neg\phi$), il existe des modèles $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1$ de T tel que $\mathcal{M}_0 \not\models \phi$ et $\mathcal{M}_1 \not\models \neg\phi$. Comme T n'a pas de modèle fini, $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_1$ sont tous les deux infinis. Par le Corollaire 7.4.3, on peut trouver $\mathcal{N}_0$ et $\mathcal{N}_1$ de cardinalité κ et tels que $\mathcal{N}_i \equiv \mathcal{M}_i$, pour $i = 0, 1$. Et donc ces deux modèles de T : $\mathcal{N}_0$, $\mathcal{N}_1$ ne sont pas isomorphes, ce qui contredit la κ-catégoricité de T. $\Box$

Remarque : Il faut faire attention à l'hypothèse : T *n'a que des modèles infinis.* Soit $\mathcal{L} := \{., 1\}$, alors la $\mathcal{L}$-théorie des groupes d'exposant 2 c.a.d. les groupes satisfaisant à l'énoncé : $\forall x\, x^2 = 1$ n'est pas complète, bien que tous les modèles de cardinalité $\aleph_0$ soient isomorphes.

Soit $\mathcal{L} := \{<\}$ et $T_{<,dense}$ la $\mathcal{L}$-théorie des ordres denses (voir chapitre 5). Soit T_C la $\mathcal{L}$-théorie $T_{<,dense} \cup \{\forall x \exists y \exists z\; y < x < z\}$.

Théorème 7.4.6 *(Cantor) La $\mathcal{L}$-théorie T_C des ordres denses sans premier ni dernier élément est $\aleph_0$-catégorique.*

Preuve : Soient $(\mathcal{A}, <)$ et $(\mathcal{B}, <)$ deux modèles dénombrables de T. Notons que ces modèles sont infinis (sinon ils auraient un maximum ou l'ordre ne serait pas dense). Soient $(a_n)_{n\in\omega}$ (respectivement $(b_n)_{n\in\omega}$) une énumération de A (respectivement de B). On construit une suite de bijections $f_i : A_i \to B_i$, où $A_i \subseteq A$ et $B_i \subseteq B$ sont finis. On veut que la suite (f_i) vérifie : $f_0 \subseteq f_1 \subseteq \ldots$, et que si $x, y \in A_i$, alors ($x < y$ ssi $f_i(x) < f_i(y)$). On appelle f_i un *plongement partiel.* La construction sera effectuée de telle sorte que $A = \bigcup_{i\in\omega} A_i$ et $B = \bigcup_{i\in\omega} B_i$: dans ce cas, on aura $f := \bigcup_{i\in\omega} f_i$ isomorphisme de $(A, <)$ dans $(B, <)$.

Aux étapes impaires de la construction, on va étendre le domaine A_i (et donc aussi f_i et B_i) de façon à avoir $A = \bigcup_{i\in\omega} A_i$. Aux étapes paires, c'est l'image B_i qui va être étendue de façon à obtenir ensuite $B = \bigcup_{i\in\omega} B_i$.

Le fait de construire un isomomorphisme ainsi en alternant deux types d'étapes (l'une construisant le domaine, l'autre l'image) donne son nom à la méthode de construction *de va-et-vient.*

étape 0 : On pose $A_0 = B_0 = f_0 = \emptyset$.

étape $n+1 = 2m+1$: On veut s'assurer que $a_m \in A_{n+1}$. Si $a_m \in A_n$, on pose $A_{n+1} := A_n$; $B_{n+1} := B_n$; $f_{n+1} := f_n$. Si $a_m \notin A_n$, on doit trouver $b \in B \setminus B_n$ tel que pour tout élément $a \in A_n$, $a < a_m$ ssi $f_n(a) < b$. Il y a trois possibilités :
i) a_m est plus grand que tous les éléments de A_n
ii) a_m est plus petit que tous les éléments de A_n
iii) il y a $\alpha, \beta \in A_n$ tels que $\alpha < \beta$ et $\alpha < a_m < \beta$ et tels que chaque élément de A_n est soit plus grand que β soit plus petit que α (cela est possible puisque A_n est fini).
Dans le cas i) (resp. ii)), comme B_n est fini et que $\mathcal{B}$ est un modèle de T, on peut trouver $b \in B$ plus grand (resp. petit) que tous les éléments de B_n. Dans le cas iii), par hypothèse d'induction f_n vérifie $f_n(\alpha) < f_n(\beta)$. Il existe donc $b \in B \setminus B_n$ tel que $f_n(\alpha) < b < f_n(\beta)$ (l'ordre est dense). Notons que l'on a alors : pour tout élément $a \in A_n$, $a < a_m$ ssi $f_n(a) < b$.
Dans les trois cas, on peut donc poser : $A_{n+1} := A_n \cup \{a_m\}$, $B_{n+1} := B_n \cup \{b\}$, et

$$\begin{array}{llll} f_{n+1}: & A_{n+1} & \to & B_{n+1} \\ & \alpha & \mapsto & f_n(\alpha) \text{ si } \alpha \in \mathrm{A_n} \\ & a_m & \mapsto & b \end{array}$$

étape $n+1 = 2m+2$: On veut cette fois s'assurer que $b_m \in B_{n+1}$. La preuve est similaire à celle de l'étape impaire.

On a construit une bijection $f : A \to B$ qui respecte l'ordre, c'est donc bien un $\mathcal{L}$-isomorphisme. □

Corollaire 7.4.7 *La théorie des ordres denses sans premier ni dernier élément est complète.*

Preuve : On montre tout d'abord que tout ordre sans premier ni dernier élément est infini. Ensuite on applique les théorèmes 7.4.5 et 7.4.6. □

7.5 Exercices.

1. Montrez que la classe des groupes abéliens où tout élément est d'ordre 2 est $\aleph_0$-catégorique.
2. Est-ce que la classe des groupes abéliens infinis où tout élément est d'ordre 4 est complète ?
3. Montrez qu'une théorie T qui a un modèle fini et qui est complète, a un seul modèle.
4. Soit T la théorie des ordres denses dans le langage $\{<\}$. Montrez que tout modèle de T est infini. Est-ce que T est complète ?
5. Soit $\mathcal{L}_0 := \{s\}$, où s est un symbole de fonction unaire. Soit T l'ensemble des $\mathcal{L}_0$ énoncés qui expriment que s est une bijection sans cycles c.a.d. pour chaque $n \in \omega$, on a $\forall x\ s^n(x) \neq x$.
   Montrer que T est $\aleph_1$-catégorique mais pas $\aleph_0$-catégorique.

Chapitre 8

Dualité de Stone.

Rappelons la définition de théorie complète.

Définition 8.0.1 Une théorie est *complète* si elle est consistante et maximale pour cette propriété *(dans le sens $\models$ et non ensembliste)* c.a.d. pour tout $\mathcal{L}$-énoncé σ, $T \models \sigma$ ou $T \models \neg\sigma$.

Deux $\mathcal{L}$-théories T_1 et T_2 sont dites *équivalentes* si elles ont les mêmes modèles.

Une façon concrète d'obtenir des théories complètes est la suivante.

Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{L}$-structure, *la théorie de* $\mathcal{A}$ est l'ensemble, noté $Th(\mathcal{A})$, de tous les énoncés vrais dans $\mathcal{A}$. Cette théorie consistante est aussi complète (en effet dans $\mathcal{A}$ tout $\mathcal{L}$ énoncé σ est soit satisfait, soit sa négation $\neg\sigma$ est satisfaite).

Exercice : Montrer que si T est une théorie complète, alors T est équivalente à une théorie de la forme $Th(\mathcal{A})$, où $\mathcal{A}$ est un modèle de T (voir 2.4 Exercice (1)).

Notation 8.0.2 Soit $\mathcal{K}$ une classe de $\mathcal{L}$-structures, la théorie de $\mathcal{K}$ est l'ensemble noté $Th(\mathcal{K})$ de tous les $\mathcal{L}$-énoncés σ vrais dans les éléments de $\mathcal{K}$ c.a.d. tels que pour tout $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$, $\mathcal{A} \models \sigma$.

Soit T est une théorie, on notera $\bar{T}$ l'ensemble des conséquences de T c.a.d. l'ensemble des énoncés σ tels que $T \models \sigma$). Ces deux théories T et $\bar{T}$ sont équivalentes. On a aussi que $\bar{T} = Th(Mod(T))$.

8.1 Classes élémentaires.

Définition 8.1.1 On dira qu'une classe $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$-structures est *élémentaire* s'il existe un ensemble de $\mathcal{L}$-énoncés Σ tel que $\mathcal{K}$ soit la classe de tous les modèles de Σ, ce que l'on notera par $\mathcal{K} = Mod(\Sigma)$.

Exercice : Pour toute classe $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$-structures, on a que $\mathcal{K} \subseteq Mod(Th(\mathcal{K}))$. Montrez que $\mathcal{K}$ est une classe élémentaire ssi $\mathcal{K} = Mod(Th(\mathcal{K}))$.

Proposition 8.1.2 *Soit $\mathcal{K}$ une classe de $\mathcal{L}$-structures. $\mathcal{K}$ est élémentaire ssi $\mathcal{K}$ est fermée par ultraproduits et équivalence élémentaire.*

Preuve : ($\rightarrow$) Supposons $\mathcal{K} = Mod(\Sigma)$ où Σ est un ensemble de $\mathcal{L}$-énoncés. Soient $\mathcal{A}_i \in \mathcal{K}$, $i \in I$, soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre non principal sur I. Montrons que $\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i/\mathscr{U}$ appartient à $\mathcal{K}$. De façon équivalente, $\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i/\mathscr{U} \models \Sigma$, ce qui découle du théorème de Łos car chaque $\mathcal{A}_i \models \Sigma$.

Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ et soit $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$, alors $\mathcal{B} \models \Sigma$ et donc $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$.

($\leftarrow$) Soit $\Sigma := Th(\mathcal{K})$, il faut montrer $Mod(\Sigma) = \mathcal{K}$. Par définition, on a que $\mathcal{K} \subset Mod(\Sigma)$. Soit $\mathcal{B} \in Mod(\Sigma)$, si on montre que $\mathcal{B}$ est élémentairement équivalente à un ultraproduits d'éléments de $\mathcal{K}$, alors on a terminé. Pour chaque $\tau \in Th(\mathcal{B})$, il existe $\mathcal{M}_\tau \in \mathcal{K}$ tel que $\mathcal{M}_\tau \models \tau$ (sinon $\neg\tau \in \Sigma$). Soit $J_\sigma := \{\tau \in Th(\mathcal{B}) : \ \mathcal{M}_\tau \models \sigma\}$. Notons que $J_\sigma \neq \emptyset$. De plus, $\{J_\sigma : \ \sigma \in Th(\mathcal{B})\}$ a la Propriété de l'Intersection Finie. En effet, $J_{\sigma_1} \cap J_{\sigma_2} \cap \cdots \cap J_{\sigma_n} = J_{\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n}$. Donc il existe un ultrafiltre qui contient cet ensemble de parties de $Th(\mathcal{B})$. Posons $I = Th(\mathcal{B})$.

Claim : *$\prod_I \mathcal{M}_\tau/\mathscr{U} \models Th(\mathcal{B})$ et donc $\mathcal{B} \equiv \prod_I \mathcal{M}_\tau/\mathscr{U}$.*
Preuve : Soit $\sigma \in Th(\mathcal{B})$, par le théorème de Łos, $\prod_I \mathcal{M}_\tau/\mathscr{U} \models \sigma$ est équivalent à $\{\tau \in I : \ \mathcal{M}_\tau \models \sigma\} \in \mathscr{U}$. Ce dernier ensemble est exactement J_σ qui est dans $\mathscr{U}$ par construction.

Par hypothèse sur $\mathcal{K}$, $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$: ce qu'il fallait montrer. $\square$

Cette proposition nous permet à partir d'une classe $\mathcal{K}$ de construire la plus petite classe élémentaire qui contient $\mathcal{K}$. Il suffit de fermer $\mathcal{K}$ par ultraproduits et équivalence élémentaire. En utilisant le fait qu'un ultraproduit d'ultraproduits d'éléments de $\mathcal{K}$ est encore un ultraproduit d'éléments de $\mathcal{K}$ et la proposition 8.1.2, on peut montrer que la plus petite classe élémentaire qui contient $\mathcal{K}$ est égale à la classe des structures qui sont élémentairement équivalentes à un ultraproduit d'éléments de $\mathcal{K}$.

Par le théorème de Frayne suivant et ($\star$), cette classe est égale à la classe des structures qui se plonge élémentairement dans un ultraproduit d'éléments de $\mathcal{K}$.

Théorème 8.1.3 *Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ deux $\mathcal{L}$-structures et supposons que $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Alors il existe un ensemble I et un ultrafiltre $\mathscr{U}$ sur I tel que $\mathcal{A}$ se plonge élémentairement dans $\prod_I \mathcal{B}/\mathscr{U}$.*

Preuve : En utilisant l'axiome du choix, on énumère le domaine de A : $(a_\alpha)_{\alpha<\lambda}$, où α, $\lambda \in On$. On pose $\mathcal{L}_A := \mathcal{L} \cup \{c_\alpha : \ \alpha < \lambda\}$ et on considère $\mathcal{A}$ comme une $\mathcal{L}_A$-structure en interpretant c_α par a_α. On note $\mathcal{A}^*$ cette nouvelle structure.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les $\mathcal{L}$-formules. A une $\mathcal{L}$-formule $\phi(x_1, \cdots, x_n)$, on associe un ensemble de $\mathcal{L}_A$-énoncés : $\phi(c_{\alpha_1}, \cdots, c_{\alpha_n})$, lorque $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \lambda$. Soit $\mathcal{F}_A$ l'ensemble de tous les $\mathcal{L}_A$-énoncés.

Posons $I := \{\sigma \in \mathcal{F}_A : \ \mathcal{A}^* \models \sigma\}$. Pour $\sigma \in I$ de la forme $\phi(c_{\alpha_1}, \cdots, c_{\alpha_n})$, où $\phi(x_1, \cdots, x_n)$ une $\mathcal{L}$-formule, on a que $\mathcal{A}^* \models \sigma$ ssi $\mathcal{A} \models \phi(a_{\alpha_1}, \cdots, a_{\alpha_n})$.

Supposons que $\mathcal{A}^* \models \sigma$, donc $\mathcal{A} \models \exists x_1 \cdots \exists x_n \ \phi(x_1, \cdots, x_n)$. Comme $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, on a que $\mathcal{B} \models \exists x_1 \cdots \exists x_n \ \phi(x_1, \cdots, x_n)$. Posons $b_\sigma := (b_{\sigma,\alpha_1}, \cdots, b_{\sigma,\alpha_n})$ un n-uple d'éléments de B tel que $\mathcal{B} \models \phi(b_\sigma)$.

A chaque $\chi \in I$, on associe ainsi un uple d'éléments b_χ et on emploiera la notation $\mathcal{B} \models \phi(b_\chi)$ en sous-entendant que b_χ a la bonne longueur.

Pour tout $\sigma \in I$, on pose $J_\sigma := \{\chi \in I : \ \mathcal{B} \models \phi(b_\chi)\}$.

Affirmation : L'ensemble $\{J_\chi : \chi \in I\}$ a la propriété de l'intersection finie.

Preuve : Montrons que $\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n \in J_{\sigma_1} \cap \cdots \cap J_{\sigma_n}$. Par définition, $J_{\sigma_1} \cap \cdots \cap J_{\sigma_n} := \{\chi \in I : \mathcal{B} \models \phi_1(b_\chi) \wedge \phi_2(b_\chi) \wedge \cdots \wedge \phi_n(b_\chi)\} = \{\chi \in I : \mathcal{B} \models (\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_n)(b_\chi)\}$. Mais par définition, $\mathcal{B} \models (\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_n)(b_{\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_n})$, i.e. $\bigwedge_{i=1}^n \phi_i \in I$.

Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre contenant cet ensemble de parties.

On envoie a_α sur la classe, modulo $\mathscr{U}$, de la suite $(b_{\sigma,\alpha})_{\sigma \in I}$. Montrons que cette application de $\mathcal{A}$ dans $\prod_I \mathcal{B}/\mathscr{U}$ est élémentaire.

Soit $\phi(x_1, \cdots, x_n)$ une $\mathcal{L}$-formule et supposons que $\mathcal{A} \models \phi(a_{\alpha_1}, \cdots, \alpha_n)$, donc en posant $\sigma := \phi(c_{\alpha_1}, \cdots, c_{\alpha_n})$, on a que $J_\sigma \in \mathscr{U}$, i.e. $\{\chi \in I : \mathcal{B} \models \phi(b_{\chi,\alpha_1}, \cdots, b_{\chi,\alpha_n})\} \in \mathscr{U}$, ainsi $\prod_I \mathcal{B}/\mathscr{U} \models \phi([b_{\chi,\alpha_1}], \cdots, [b_{\chi,\alpha_n}])$. $\square$

Définition 8.1.4 On dira que Σ_1 axiomatise Σ si la classe des modèles de Σ_1 est égale à celle de Σ, ou de façon équivalente si ces deux théories sont équivalentes. On dira que Σ est finiment axiomatisable s'il existe un ensemble fini Σ_1 qui axiomatise Σ.

On dira que Σ_1 axiomatise la classe $\mathcal{K}$ si $\mathcal{K} = Mod(\Sigma_1)$ ou encore si $\mathcal{K}$ est élémentaire et si Σ_1 est équivalente à $Th(\mathcal{K})$. La classe $\mathcal{K}$ est finiment axiomatisable si $\mathcal{K}$ est élémentaire et si $Th(\mathcal{K})$ est finiment axiomatisable.

Exemple : Soit $\mathcal{K}$ la classe de tous les corps finis. La plus petite classe élémentaire qui contient $\mathcal{K}$ est la classe des structures élémentairement équivalents à un ultraproduit de corps finis.

J. Ax a identifié la théorie de la classe de tous les corps finis dans le langage des anneaux $\{+, -, ., 0, 1\}$ (voir *Ax, James, The elementary theory of finite fields. Ann. of Math. (2) 88, 1968, 239-271*). Un modèle infini de cette théorie est appelé un corps *pseudofini*. Et donc tout corps pseudofini est élémentairement équivalent à un ultraproduit non-principal de corps finis.

Définition 8.1.5 Un corps est parfait s'il vérifie les propriétés suivantes pour chaque $p \in \mathcal{P}$:

$$p = 0 \to \forall x \exists y \; (x = y^p).$$

Proposition 8.1.6 *Tout corps pseudo-fini est parfait.*

Preuve : Il suffit de montrer que tout ultraproduit de corps finis de caractéristique p satisfait à la propriété : $\forall x \exists y \; (x = y^p)$ ou encore que l'application Frobenius est surjective. Par le théorème de Łos, il suffit de vérifier cette propriété dans chaque corps fini de caractéristique p. Mais dans une structure finie, toute application injective est surjective. $\square$

J. Ax a montré qu'un corps K est pseudofini si et seulement s'il vérifie les propriétés suivantes (que l'on peut exprimer par un schéma d'axiomes) :

1. K est parfait,
2. pour chaque $n \in \omega^*$, K a une seule extension algébrique de degré n,
3. toute variété absolument ireéductible définie sur K a un point dans K.

Exercice : Soit K un corps pseudofini. Montrer que l'énoncé χ qui exprime que toute application polynomiale de degré $\leq d$ de K^n dans K^n, qui est injective est surjective est vrai dans K (voir chapitre 4.2).

8.2 Espaces de Stone.

Dans ce chapitre, nous allons, à un langage $\mathcal{L}$ donné, considérer l'espace de toutes les $\mathcal{L}$-théories complètes, sur lequel nous allons mettre une toplogie, pour laquelle cet espace sera Hausdorff et compact.

Définition 8.2.1 Soit T une $\mathcal{L}$-théorie consistante. Par commodité, on supposera que $\mathcal{L}$ contient au moins un symbole de constante.

Soit $S_0(T)$ l'ensemble des $\mathcal{L}$-théories complètes T' qui contiennent T et telles que $\bar{T}' = T'$. Un point de $S_0(T)$ est donc l'ensemble de toutes les conséquences d'une théorie complète qui contient T, ou encore est de la forme $Th(\mathcal{A})$, où $\mathcal{A} \models T$.

On munit $S_0(T)$ d'une topologie de la façon suivante.

On définit $[\tau] := \{p \in S_0(T) : \tau \in p\}$, où τ parcourt les $\mathcal{L}$-énoncés. Notons que, pour τ_1, τ_2 deux $\mathcal{L}$-énoncés, on a :

$[\tau_1] \cap [\tau_2] := [\tau_1 \wedge \tau_2]$.

$[\tau_1] \cup [\tau_2] := [\tau_1 \vee \tau_2]$.

$[\neg\tau] = S_0(T) - [\tau]$ (noté $[\tau]^c$).

$S_0(T) = [c = c]$ et $\emptyset = [c \neq c]$.

On prend comme *base d'ouverts* : $\{[\tau] :\ \tau$ est un $\mathcal{L}$-énoncé $\}$. On notera l'espace topologique correspondant $\mathcal{S}_0(T)$. Notons que $[\tau] = [\neg\tau]^c$ (et donc c'est aussi un fermé).

Remarque : Une $\mathcal{L}$-théorie complète p est finiment axiomatisable s'il existe un $\mathcal{L}$-énoncé τ tel que $\{p\} = [\tau]$.

Rappelons qu'un espace topologique est *compact* si de tout recouvrement d'ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini. Il est *Hausdorff* (ou séparé) si pour toute une paire de points $\{p_1, p_2\}$ on peut trouver deux ouverts disjoints O_1, O_2 tels que $p_1 \in O_1$ et $p_2 \in O_2$.

Proposition 8.2.2 *L'espace $\mathcal{S}_0(T)$ est séparé et compact.*

Preuve : Montrons que $\mathcal{S}_0(T)$ est Hausdorff (de façon équivalente séparé). Soient $p_1 \neq p_2 \in S_0(T)$. Il existe donc $\sigma \in p_1 - p_2$ (et donc $\neg\sigma \in p_2$). On a donc $p_1 \in [\sigma]$ et $p_2 \in [\neg\sigma]$ et $[\sigma] \cap [\neg\sigma] = \emptyset$.

Soit $S_0(T) = \cup_{i\in I}[\tau_i]$. Donc $\emptyset = \cap_{i\in I}[\neg\tau_i]$. Autrement dit, $T \cup \{\neg\tau_i : i \in I\}$ est inconsistante. Par le théorème de compacité, une partie finie E de cette théorie est inconsistante (et on peut supposer que toute partie propre de E est consistante). Comme T est consistante, cette partie finie E n'est pas incluse dans T. Soient $\neg\tau_{i_1}, \cdots, \neg\tau_{i_n} \in E - T$. Donc toute théorie complète qui contient T et $\bigwedge_{1\leq j\leq n-1} \neg\tau_{i_j}$ contient τ_{i_n}. Autrement dit $S_0(T) = \bigcup_{1\leq j\leq n}[\tau_{i_j}]$ (et ce recouvrement est minimal). $\square$

Corollaire 8.2.3 *Tout ouvert-fermé (i.e. tout ouvert qui est aussi un fermé) de $\mathcal{S}_0(T)$ est de la forme $[\sigma]$, pour un certain $\mathcal{L}$-énoncé σ.*

Preuve : Un ouvert est de la forme $\bigcup_{i\in I}[\tau_i]$, s'il est fermé son complémentaire dans $S_0(T)$ est de la même forme i.e. $\bigcup_{j\in J}[\sigma_j]$ et donc $S_0(T) = \bigcup_{i\in I}[\tau_i] \cup \bigcup_{j\in J}[\sigma_j]$. Par la Proposition 8.2.2, il existe un sous-recouvrement fini c.a.d. il existe $I_1 \subset I$ et $J_1 \subset J$ finis tels que

$S_0(T) = \bigcup_{i\in I_1}[\tau_i] \cup \bigcup_{j\in J_1}[\sigma_j]$. Comme $\bigcup_{i\in I_1}[\tau_i]$ est inclus à $\bigcup_{i\in I}[\tau_i]$, $\bigcup_{j\in J_1}[\sigma_j] \subset \bigcup_{j\in J}[\sigma_j]$ et que ces deux ensembles sont disjoints, l'ouvert-fermé de départ est égal à $\bigcup_{i\in I}[\tau_i] = [\bigvee_{i\in I_1} \tau_i]$. $\square$

Soit Σ une $\mathcal{L}$-théorie, on associe à Σ un fermé F_Σ de l'espace $\mathcal{S}_0$: $F_\Sigma := \bigcap_{\sigma\in\Sigma}[\sigma]$.

Exercice : Montrez que si $F_\Sigma \neq \emptyset$ ssi Σ est consistante. Montrez que pour Σ_1 une $\mathcal{L}$-théorie, Σ et Σ_1 sont équivalentes ssi $F_\Sigma = F_{\Sigma_1}$ et que Σ est finiment axiomatizable ssi il existe un énoncé τ tel que $F_\Sigma = [\tau]$.

Proposition 8.2.4 *Une classe $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$-structures est finiment axiomatizable ssi $\mathcal{K}$ et son complémentaire $\mathcal{K}^c$ dans la classe de toutes les $\mathcal{L}$-structures sont élémentaires.*

Preuve : $(\rightarrow)$ C'est immédiat car par définition il existe Σ_1 fini tel que $\mathcal{K} = Mod(\Sigma_1)$ et donc en posant $\tau := \bigwedge_{\sigma\in\Sigma_1} \sigma$, $\mathcal{K} = Mod(\tau)$. Ainsi, on a $\mathcal{K}^c = Mod(\neg\tau)$.

$(\leftarrow)$ Puisque $\mathcal{K}$ est élémentaire, il existe une $\mathcal{L}$-théorie Σ (respectivement Σ') telle que $\mathcal{K} = Mod(\Sigma)$ (respectivement $\mathcal{K}^c = Mod(\Sigma')$). Soit F_Σ (respectivement $F_{\Sigma'}$) le fermé correspondant de $\mathcal{S}_0(T)$. Comme ces deux fermés sont disjoints et complémentaires (en effet supposons qu'il existe $p \in F_\Sigma \cap F_{\Sigma'}$, et soit $\mathcal{A} \models p$, alors $\mathcal{A} \in \mathcal{K} \cap \mathcal{K}^c$; s'il existe $p \in \mathcal{S}_0 - (F_\Sigma \cup F_{\Sigma'})$ et si $\mathcal{B} \models p$, alors $\mathcal{B} \notin \mathcal{K}$ and $\mathcal{B} \notin \mathcal{K}^c$, une contradiction). Par le Corollaire 8.2.3, l'ouvert-fermé F_Σ est de la forme $[\tau]$, et donc $\mathcal{K}$ est axiomatisable par τ.

On peut aussi faire une preuve directe de $(\leftarrow)$.

Supposons qu'au contraire que pour tout $\sigma \in Th(\mathcal{K})$, il existe $\mathcal{M}_\sigma \in \mathcal{K}^c$ et $\mathcal{M}_\sigma \models \sigma$. Posons $J_\sigma = \{\tau \in Th(\mathcal{K}) :\ \mathcal{M}_\tau \models \sigma\} \neq \emptyset$. Cet ensemble de sous-ensembles de $Th(\mathcal{K})$ a la P.I.F. Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre contenant cet ensemble de parties. On a $\prod_{\sigma\in Th(\mathcal{K})} \mathcal{M}_\sigma/U \models Th(\mathcal{K})$. En effet pour tout $\tau \in Th(\mathcal{K})$, $J_\tau \in U$ et donc $\prod_{Th(\mathcal{K})} \mathcal{M}_\sigma/\mathscr{U} \in \mathcal{K} \cap \mathcal{K}^c$. (En effet, $\mathcal{K}$ est élémentaire et donc $\mathcal{K} = Mod(Th(\mathcal{K}))$ et $\mathcal{K}^c$ est fermée par ultraproduits.)
$\square$

Remarque : Si $\mathcal{K}_\sigma$ est une classe de $\mathcal{L}$-structures axiomatisée par un $\mathcal{L}$-énoncé σ, et si $\mathcal{K}$ est une classe élémentaire de $\mathcal{L}$-structures telle que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_\sigma$, alors : $\mathcal{K}$ est finiment axiomatisable ssi $\mathcal{K}_\sigma \setminus \mathcal{K}$ est élémentaire.
La preuve est similaire à celle de la proposition 8.2.4, en voici une idée :

$(\rightarrow)$ Soit τ un $\mathcal{L}$-énoncé axiomatisant $\mathcal{K}$. La classe $\mathcal{K}_\sigma \setminus \mathcal{K}$ est axiomatisée par σ & $\neg\tau$.

$(\leftarrow)$ (preuve topologique) $F := \bigcap_{\mathcal{K}\models\tau} [\tau]$ est un fermé. Soit $[\sigma]$ l'ouvert-fermé correspondant à $\mathcal{K}_\sigma$. Par hypothèse $F_1 := [\sigma] \setminus F$ est fermé ; $[\sigma] = F \sqcup F_1$; donc F est un ouvert-fermé (avec $\sqcup$ dénotant l'union disjointe) et donc de la forme $[\tau]$, pour un certain $\mathcal{L}$-énoncé τ.

$(\leftarrow)$ (preuve par ultraproduits) Comme $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_\sigma$, si $\tau \in Th(\mathcal{K})$, alors τ & $\sigma \in Th(\mathcal{K})$. Si $\mathcal{K}$ n'était pas finiment axiomatisable, pour tout $\tau \in Th(\mathcal{K})$, il existerait $\mathcal{M}_\tau \notin \mathcal{K}$ tel que $\mathcal{M}_\tau \models \tau$ & σ (et donc $\mathcal{M}_\tau \in \mathcal{K}_\sigma$). Posons $J_\tau = \{\chi \in Th(\mathcal{K}) :\ \mathcal{M}_\chi \models \tau\&\ \sigma\} \supset \{\tau\}$. Cet ensemble de sous-ensembles non-vides de $Th(\mathcal{K})$ a la P.I.F. Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre contenant cet ensemble de parties. On a $\prod_{\chi\in Th(\mathcal{K})} \mathcal{M}_\chi/\mathscr{U} \models Th(\mathcal{K})$. Or comme $\mathcal{K}_\sigma \setminus \mathcal{K}$ est fermée par ultraproduits, cet ultraproduit appartient $\mathcal{K}_\sigma \setminus \mathcal{K}$. Mais par construction $\prod_{\mathscr{U}} \mathcal{M}_\chi \models Th(\mathcal{K})$ et donc comme $\mathcal{K}$ est élémentaire, $\prod_{\mathscr{U}} \mathcal{M}_\chi \in \mathcal{K}$, une contradiction. $\square$

8.3 Espaces de types et saturation.

Soit T une $\mathcal{L}$-théorie consistante. Nous avons défini l'espace topologique $\mathcal{S}_0(T)$ des $\mathcal{L}$-théories complètes T' qui contiennent T et telles que $\bar{T}' = T'$.

Lorsque T est une théorie complète, $\mathcal{S}_0(T)$ est un singleton. Et donc, nous allons associer à T une suite d'espaces topologiques que l'on obtient en enrichissant le langage $\mathcal{L}$ par un ensemble de constantes qui n'apparaissent pas déjà dans $\mathcal{L}$.

Dans le chapitre suivant, nous donnerons une caractérisation des théories complètes T, pour lesquelles tous les espaces $\mathcal{S}_n(T)$ sont finis, $n \in \mathbb{N}$.

Définition 8.3.1 L'ensemble $S_1(T)$, respectivement $S_n(T)$, est l'ensemble des $\mathcal{L} \cup \{c_1\}$-théories complètes T_1 qui contiennent T et telles que $\bar{T}_1 = T_1$ (c.a.d. maximales comme ensembles d'énoncés), respectivement l'ensemble des $\mathcal{L}_{\bar{c}} := \mathcal{L} \cup \{c_1, \cdots, c_n\}$-théories complètes T_n qui contiennent T et telles que $\bar{T}_n = T_n$ (où $\{c_i : i \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble de nouveaux symboles de constantes (c.a.d. qui n'apparaissent pas déjà dans $\mathcal{L}$).

Dans $S_n(T)$, on prend comme base d'ouverts $[\phi(\bar{c})]$, où $\phi(\bar{x})$ parcourt les $\mathcal{L}$-formules à n variables libres.

Les espaces topologiques $\mathcal{S}_n(T)$ correspondants sont séparés et compacts (voir Proposition 8.2.2).

A un point de $S_n(T)$, on associe l'ensemble des $\mathcal{L}$-formules à n-variables libres obtenu en remplaçant $c_1, \cdots, c_n$ par $x_1, \cdots, x_n$ et cet ensemble de $\mathcal{L}$-formules est appelé *un n-type complet* (voir chapitre 6.1). *On fera l'abus de langage et notation suivant. On dira que ce n-type complet appartient à $S_n(T)$.*

Un ensemble de $\mathcal{L}$-formules à n variables libres est un n-type s'il peut être complété en un n-type complet.

Soit $\mathcal{M} \models T$, à $p \in S_n(T)$, on associe le sous-ensemble de M^n (infiniment définissable) suivant : $\bigcap_{\phi \in p} \phi(M)$.

Soit $\mathcal{M} \models T$ et soit $A \subset M$; notons $Th_A(\mathcal{M})$, la théorie de $\mathcal{M}$ dans le langage $\mathcal{L}_A := \mathcal{L} \cup \{c_a : a \in A\}$, où c_a est un symbole de constante qui n'appartient pas à $\mathcal{L}$.

On note $\mathcal{S}_n^{\mathcal{M}}(A)$, l'espace $\mathcal{S}_n(Th_A(\mathcal{M}))$. Soit $\bar{m} \in M^n$, on note $tp_A^{\mathcal{M}}(\bar{m})$, ou $p_A^{\mathcal{M}}(\bar{m})$, l'ensemble des $\mathcal{L}_A$-formules $\phi(v_1, \cdots, v_n)$ telles que $\mathcal{M} \models \phi(\bar{m})$.

Exercice : Pour tout n-type complet $p(\bar{x}) \in S_n(T)$, il existe $\mathcal{M} \models T$ et $\bar{a} \subseteq M^n$ tels que $tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})$ soit égal à $p(\bar{x})$.

Définition 8.3.2 Soit κ un cardinal infini et $\mathcal{L}$ un langage dénombrable. Un modèle $\mathcal{M}$ est κ-saturé si pour tout $A \subset M$ de cardinalité *strictement* plus petite que κ, tout élément p de $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ est réalisé dans $\mathcal{M}$ c.a.d. qu'il existe un uple $\bar{c} \subset M$ tel que pour toute $\mathcal{L}_A$-formule $\phi(x_1, \cdots, x_n) \in p$, $\mathcal{M} \models \phi(\bar{c})$.

Théorème 8.3.3 *Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable, $\mathscr{U}$ un ultrafiltre non principal sur ω et $\mathcal{A}_n$, $n \in \omega$, des $\mathcal{L}$-structures. Alors $\mathcal{M} := \prod_\omega \mathcal{M}_n/\mathscr{U}$ est $\aleph_1$-saturé.*

Preuve : Soit A un sous-ensemble dénombrable de M et soit $p(\bar{x}) \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$. Comme $\mathcal{L}_A$ est dénombrable, $p(\bar{x})$ contient un nombre dénombrable de formules. Posons $p(\bar{x}) := \{\phi_n(\bar{x}) : n \in \omega\}$, où $\phi_n(\bar{x})$ est une $\mathcal{L}_A$-formule.

Comme $\mathscr{U}$ est non-principal, $\mathscr{U}$ contient le filtre des parties cofinies. Soit $J_k := \{m \in \omega : m \geq k \; \& \; \mathcal{M}_m \models \exists \bar{x}(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k)(\bar{x})$, par hypothèse $J_k \in \mathscr{U}$. Pour chaque m, il existe un plus grand k tel que $m \in J_k$. Notons un tel k, $k(m)$ et choisissons un uple $\bar{a}_m \subset \mathcal{M}_m$ tel que $\mathcal{M}_m \models (\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_{k(m)})(\bar{a}_m)$.

Pour tout k, on a que

$$\{m \in \omega : \mathcal{M}_m \models \phi_k(\bar{a}_m)\} \supset \{m \in \omega : \; k \leq k(m)\} \supset J_k.$$

Ainsi la classe, modulo $\mathscr{U}$, de la suite $(\bar{a}_m)_{m\in\omega}$ satisfait chaque ϕ_k dans $\mathcal{M}$. □

Lemme 8.3.4 *Un espace topologique X compact et infini admet un point non isolé.*

Preuve : En effet, supposons que tout point de X est isolé, ie : $\forall x \in X, \{x\}$ est ouvert. Alors $\bigcup_{x\in X}\{x\}$ est un recouvrement de X, qui est compact. On peut donc en extraire un sous-recouvrement fini : $\bigcup_{x\in X'}\{x\}$. Or X est infini et $X^{'}$ est fini : contradiction. □

8.4 Exercices.

1. Soit T une $\mathcal{L}$-théorie consistante. Montrez que T est complète ssi tous ses modèles sont élémentairement équivalents.
2. Montrez que la classe de tous les groupes est une classe élémentaire.
3. Montrez que la classe $\mathcal{C}$ des corps finis n'est pas élémentaire.
4. Soit L le langage des anneaux $\{+, ., -, 0, 1\}$. Soient F et K deux corps.
   Montrez que F est un sous-corps de K ssi F est une sous-structure de K.
5. Donner une axiomatisation de la théorie des corps algébriquement clos. Montrer que cette théorie n'est pas complète.
6. Soit $E(.,.)$ une relation binaire, soit $\mathcal{L} := \{E\}$ and soit T_E un ensemble de $\mathcal{L}$-énoncés qui exprime que E est une relation d'équivalence qui a, pour chaque $n \in \omega - \{0\}$, une seule classe d'équivalence qui contient exactement n éléments. Montrer que T_E est consistante, que T_E a l'e.q., que T_E est complète et que T_E a un modèle où il y a un nombre infini de classes d'équivalence infinies.
7. Donnez une axiomatisation de la classe des groupes abéliens totalement ordonnés.
8. Donnez une axiomatisation de la classe des corps commutatifs totalement ordonnés.
9. Montrer que la classe des anneaux commutatifs locaux c.a.d. avec un unique idéal maximal est finiment axiomatisable. (Donner aussi un exemple d'un tel anneau.)
10. Montrez que la classe des groupes abéliens, sans-torsion, divisibles est élémentaire, mais pas finiment axiomatisable.
11. Montrez qu'il y a $\aleph_0$ groupes abéliens, sans-torsion, divisibles dénombrables non-isomorphes.
12. Montrez que la classe des groupes abéliens de torsion n'est pas élémentaire.
13. Soit $(G, +, <, 0)$ un groupe abélien totalement ordonné ; G est archimédien si pour tout x, y dans G, tels que $0 < x < y$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $y < m.x$. Montrez que la classe des groupes archimédiens n'est pas élémentaire.

14. Montrer que $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, +, 0)$ n'est pas élémentairement équivalent à $(\mathbb{Z}, +, 0)$.
15. Montrez que la classe des groupes linéaires de degré n est élémentaire.
    (Rappel : un groupe est dit linéaire de degré n si c'est un sous-groupe d'un groupe de matrices $n \times n$ sur un corps commutatif.)
16. En choisissant le langage, montrer que les classes suivantes sont élémentaires : (voir [4] pages 37, 38).
    (i) la classe des ordres totaux denses sans extrémités
    (ii) la classe des ordres partiels
    (iii) la classe des arbres binaires
17. Trouver deux ordres totaux denses sans extrémités non-isomorphes mais de même cardinalité.
18. Soient T_1 et T_2 deux $\mathcal{L}$-théories consistantes telles que $T_1 \cup T_2$ n'a pas de modèles. Alors il existe un enoncé θ tel que $T_1 \models \theta$ et $T_2 \models \neg\theta$.
19. Soient T_1 et T_2 deux $\mathcal{L}$-théories telles que pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models T_1$ ssi $\mathcal{A} \not\models T_2$. Montrez que T_1 et T_2 sont finiment axiomatisables.

Chapitre 9

Théories $\aleph_0$-catégoriques

9.1 Théorème d'omission des types

Soit T une $\mathcal{L}$-théorie complète, soit $\bar{c}$ un n-uple de contantes n'apparaissant pas dans $\mathcal{L}$, et soit $p(\bar{c}) \in S_n(T)$ un point isolé isolé c.a.d. qu'il existe $\phi(\bar{c})$ telle que $\{p(\bar{c})\} = [\phi(\bar{c})]$ (Définition 8.3.1). Explicitons ce que veut dire $\{p(\bar{c})\} = [\phi(\bar{c})]$ $(\star)$. On a que $T \models \forall \bar{x}\ (\phi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x}))$ pour tout $\psi(\bar{c}) \in p(\bar{c})$. (Sinon pour une certaine formule $\psi(\bar{c}) \in p(\bar{c})$, on aurait que $T \cup \{\phi(\bar{c}),\ \neg\psi(\bar{c})\}$ est consistante, ce qui contredit $(\star)$.)

Lemme 9.1.1 *Soit $p(\bar{c}) \in S_n(T)$ un point isolé par la formule $\phi(\bar{c})$. Alors p est réalisé dans tout modèle de T.*

Preuve : Soit $\mathcal{N} \models T$ qui réalise $p(\bar{x})$ c.a.d. un modèle de T où on peut trouver un n-uple $\bar{a}$ tel que pour toute formule $\psi(\bar{x})$ appartenant à $p(\bar{x})$, on a $\mathcal{N} \models \psi(\bar{a})$ et en particulier $\mathcal{N} \models \phi(\bar{a})$. Donc $\mathcal{N} \models \exists \bar{x}\phi(\bar{x})$. Comme T est complète on a que dans tout modèle $\mathcal{M}$ de T, $\mathcal{M} \models \exists \bar{x}\phi(\bar{x})$. Soit $\bar{b} \subset M$ tel que $\mathcal{M} \models \phi(\bar{b})$. Comme $T \models \forall \bar{x}\ (\phi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x}))$ pour tout $\psi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$, on a que $\mathcal{M} \models \psi(\bar{b})$ et donc $\bar{b}$ réalise $p(\bar{x})$ dans $\mathcal{M}$.

Définition 9.1.2 Soit T une $\mathcal{L}$-théorie consistante, et $\mathcal{M}$ un modèle de T. On dira qu'un n-type $p(\bar{x})$ consistant avec T est omis dans $\mathcal{M}$ s'il n'est pas réalisé dans $\mathcal{M}$ c.a.d. où aucun n-uples de M ne réalise $p(\bar{x})$.
On dira qu'un n-type complet $p(\bar{c}) \in S_n(T)$ est un point non isolé (de $\mathcal{S}_n(T)$) si pour toute $\mathcal{L}$-formule $\phi(\bar{x})$ à n variables libres, $[\phi(\bar{c})] \neq \{p(\bar{c})\}$. Si $p(\bar{c}) \in [\phi(\bar{c})]$ et $p(\bar{c})$ non isolé, alors il existe $\theta(\bar{x}) \in p(\bar{x}), T \cup \{\phi(\bar{c})\} \not\models \theta(\bar{c})$ (voir section 8.3).

Exercice :
• Soit $T := ACF$ et soit $p(x) := \{q(X) \neq 0 :\ q(X) \in \mathbb{Z}[X] - \{0\}\}$. Montrer que $q(x)$ n'est pas réalisé dans $\tilde{\mathbb{Q}}$. Déterminer les points isolés de $\mathcal{S}_1(T)$.
•• Soit $T = RCF$, déterminer les points isolés de $\mathcal{S}_1(T)$.

Théorème 9.1.3 (Théorème d'omission des types.) *Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable et T une $\mathcal{L}$-théorie consistante. Soit $p(\bar{c}) \in \mathcal{S}_n(T)$ un point non isolé. Alors il existe un modèle dénombrable $\mathcal{M}$ de T où ce type p est omis.*

Preuve : On étend itérativement T en une $\mathcal{L}^*$-théorie T^* complète (où $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}^*$) telle que si $\mathcal{M} \models T^*$, on aura une sous-$\mathcal{L}$-structure dénombrable $\mathcal{M}_0$ qui sera un modèle dénombrable de T, omettant p. Chaque "étape itérative" sera divisée en trois sous-étapes, afin d'assurer complétude, test de Tarski-Vaught, omission de p.

On enrichit $\mathcal{L}$ en y ajoutant un ensemble infini dénombrable C de nouveaux symboles de constante : $\mathcal{L}^* := \mathcal{L} \cup C$.
On énumère les $\mathcal{L}^*$-énoncés : $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$; ainsi que les n-uples de constantes de C : $\bar{d}_0, \bar{d}_1, \ldots$
On peut maintenant construire T^* en ajoutant à T des énoncés $\theta_n, n \in \omega$ de la façon suivante :
étape 0 : on pose $\theta_0 := \forall x(x = x)$

On suppose maintenant que θ_s, pour un certain s appartenant à ω, a été construit, que $T \cup \{\theta_s\}$ est une $\mathcal{L}^*$-théorie consistante, et telle que pour chaque $n < s$ on ait $T \cup \{\theta_s\} \models \theta_n$.
étape $s+1$:
cas où $s + 1 = 3i + 1$ (ie s est un multiple de 3) :
Si $T \cup \{\theta_s, \varphi_i\}$ est consistante, on pose $\theta_{s+1} = \theta_s \& \varphi_i$; sinon on pose $\theta_{s+1} = \theta_s \& \neg\varphi_i$. Dans les deux cas $T \cup \{\theta_{s+1}\}$ est consistante, et $T \cup \{\theta_{s+1}\} \models \theta_s$ (et donc satisfait aussi θ_n,pour $n < s$).
Notons que cela nous servira plus tard dans la preuve pour obtenir une théorie T^* complète.
$s + 1 = 3i + 2$:
(Remarque : par rapport à la sous-étape précédente, cette "sous-étape-ci" permet d'itérer sur s sans itérer sur i)
-Si φ_i est de la forme $\exists v\, \psi(v)$ pour une certaine formule $\psi(v)$ (de complexité quelconque), et que $T \models \theta_s \rightarrow \varphi_i$, on prend une constante c dans C qui n'apparait pas dans $T \cup \{\theta_s\}$, afin de construire un témoin de la satisfaisabilité de ψ. On pose $\theta_{s+1} = \theta_s \& \psi(c)$. Puis, étant donné que dans un modèle $\mathcal{N}$ de $T \cup \{\theta_s\}$, il existe $a \in N$ tel que $\mathcal{N} \models \psi(a)$, on pose $c^{\mathcal{N}} = a$, on a alors $\mathcal{N} \models T \cup \{\theta_{s+1}\}$. On a donc que $T \cup \{\theta_{s+1}\}$ est consistante.
-Sinon on pose $\theta_{s+1} = \theta_s$.
$s + 1 = 3i + 3$:
On construit une $\mathcal{L}$-formule $\varphi(\bar{v})$ à partir de θ_s et de $\bar{d}_i$ de la façon suivante : on remplace $\bar{d}_i$ par un n-uple de variables $\bar{v}$ dans θ_s, et on remplace chaque autre symbole de constante $c \in C \setminus \bar{d}_i$ qui apparait dans θ_s par une variable v_c. Puis on quantifie existentiellement les variables v_c. (les variables de $\bar{v}$ sont donc libres dans la nouvelle formule, tandis que les variables v_c sont liées)
Comme p n'est pas isolé, $[\varphi(\bar{v})] \neq \{p\}$; il y a donc une formule $\sigma(\bar{v}) \in p$ telle que $T \not\models \forall\bar{v}(\varphi(\bar{v}) \rightarrow \sigma(\bar{v}))$ (*) (voir la discussion avant la Définition 9.1.2). On pose $\theta_{s+1} = \theta_s \;\&\; \neg\sigma(\bar{d}_i)$, afin que $\bar{d}_i$ ne satisfasse pas p dans le modèle que l'on veut construire (i.e. $T \cup \{\varphi(\bar{d}_i)\} \not\models p$).
$T \cup \{\theta_{s+1}\}$ est consistante car d'après (*), il existe $\mathcal{N}$ modèle de T et $\bar{a} \subseteq N$ tel que $\varphi(\bar{a})$ et $\neg\sigma(\bar{a})$. En posant $\bar{d}_i^{\mathcal{N}} = \bar{a}$, et en interprétant les constantes $c \in C \setminus \bar{d}_i$ comme les témoins de l'existence des v_c, $\mathcal{N}$ est un modèle de $T \cup \{\theta_{s+1}\}$.
Donc $T \cup \{\theta_{s+1}\}$ est consistante et satisfait θ_s.

Posons maintenant $T^* = T \cup \{\theta_n : n \in \omega\}$. T^* est consistante car finiment consistante, et elle est complète car aux étapes $3i+1$ on a ajouté soit φ_i, soit $\neg\varphi_i$. Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}^*$-structure satisfaisant T^*. On pose $M_0 = \{c^{\mathcal{M}} : c \in C\}$. M_0 est dénombrable car C l'est. M_0 est le domaine d'une $\mathcal{L}$-sous-structure $\mathcal{M}_0$ de $\mathcal{M}_{\restriction \mathcal{L}}$, et c'est une sous-structure élémentaire (étapes $3i+2$, complétude de T^* et Test de Tarski-Vaught (voir chapitre 7) :
Soit $\phi(x, \bar{y})$ une $\mathcal{L}$-formule et $\bar{a} \subseteq M_0$. Supposons que $\mathcal{M}_{\restriction \mathcal{L}} \models \exists x \phi(x, \bar{a})$. Comme $\bar{a} = \bar{d}^{\mathcal{M}}$ pour un $\bar{d} \subseteq C$, en posant $\varphi := \exists x \phi(x, \bar{d})$: φ est un $\mathcal{L}^*$-énoncé et donc de la forme φ_i pour un certain $i \in \omega$. Comme $\mathcal{M} \models \varphi_i$ et que $\mathcal{M}$ est un modèle de T^* qui est complète, on a : $T^* \models \varphi_i$. Il existe donc s tel que $T \models \theta_s \rightarrow \varphi_i$; et donc par construction (étapes 3i+2), il existe une constante $c \in C$ qui n'apparait pas dans $T \cup \{\theta_s\}$ telle que $\theta_{s+1} = \theta_s \,\&\, \phi(c, \bar{d})$ avec $\theta_{s+1} \in T^*$. Comme $\mathcal{M} \models T^*$, $\mathcal{M} \models \phi(c^{\mathcal{M}}, \bar{a})$, or $c^{\mathcal{M}} \in M_0$ et donc par le test de Tarski-Vaught, $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}$.

$\mathcal{M}_0$ ne réalise pas p : soit $\bar{a} \in M_0^n$, alors il existe $\bar{d}_i$ tel que $\bar{d_i}^{\mathcal{M}_0} = \bar{a}$. A l'étape $3i+3$, on a posé $\theta_{s+1} = \theta_s \,\&\, \neg\sigma(\bar{d}_i)$, où $\sigma \in p$.

□

9.2 Modèles atomiques et va-et-vient

Définition 9.2.1 Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable, T une $\mathcal{L}$-théorie (complète) et supposons que T n'a que des modèles infinis. Un modèle $\mathcal{M}$ de T est *atomique* si pour tout $n \in \omega$ le type d'un n-uple d'éléments de $\mathcal{M}$ est isolé, ie : pour tout n-uple $\bar{a}$ d'éléments de M, $tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})$ est un point isolé dans $\mathcal{S}_n(Th(\mathcal{M}))$.

Notons que si T est une $\mathcal{L}$ théorie complète, toute paire de modèles atomiques $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ de T réalisent les mêmes types. Soit $p \in \mathcal{S}_n(T)$ et supposons que $\mathcal{M}$ réalise p. Il existe donc un n-uple $\bar{a}$ d'éléments de M tel que $tp^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = p$. Par hypothèse, $tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})$ est isolé et donc il existe une formule $\phi(\bar{x})$ telle que $[\phi(\bar{x})] = \{p\}$. Comme T est complète, $\exists \bar{x}\ \phi(\bar{x})$ est une conséquence de T et donc $\mathcal{N} \models \exists \bar{x}\ \phi(\bar{x})$. Soit $\bar{b} \subset N$ tel que $\mathcal{N} \models \phi(\bar{b})$. Par hypothèse sur ϕ, $tp^{\mathcal{N}}(\bar{b}) = p$.

Lemme 9.2.2 *Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable, T une $\mathcal{L}$-théorie (complète) et supposons que T n'a que des modèles infinis. Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{B}$ sont deux modèles dénombrables atomiques de T qui réalisent les mêmes éléments de $\bigcup_{n\in\omega} S_n(T)$, alors $\mathcal{M}$ et $\mathcal{B}$ sont isomorphes.*

Preuve : Cette preuve est basée sur la technique de "va et vient" entre deux structures, comme la preuve du Théorème de Cantor 7.4.6. On énumère les éléments de M et B en les indexant par $n \in \omega$: $M = \{m_n : n \in \omega\}$ $B = \{b_n : n \in \omega\}$.
Soit donc m_0 le premier élément de M, $tp^{\mathcal{M}}(m_0) \in S_1(T)$ est isolé par hypothèse donc $tp^{\mathcal{M}}(m_0) = [\psi_0(x_0)]$, où ψ_0 est un $\mathcal{L} \cup \{x_0\}$-énoncé. $\mathcal{B}$ réalisant les mêmes types que $\mathcal{M}$, on peut choisir parmi les éléments de B réalisant $tp^{\mathcal{M}}(m_0)$, un élément b_i avec i minimum. On renomme cet élément b_0' ; et on pose $m_0' := m_0$.
Soit maintenant $b_j \in B \setminus \{b_0'\}$ tel que j soit minimum ; on le renomme b_1' et on considère $tp^{\mathcal{B}}(b_0', b_1') \in S_2(T)$.
Soit $\psi_1(x_0, x_1)$ la formule isolant $tp^{\mathcal{B}}(b_0', b'_1)$.

$$\mathcal{B} \models \psi_0(b_0') \rightarrow \exists x_1 \psi_1(b_0', x_1)$$

Donc la formule "$\psi_0(x_0) \to \exists x_1 \psi_1(x_0, x_1)$" est dans $tp^{\mathcal{B}}(b_0^{'}) = tp^{\mathcal{M}}(m_0^{'})$ Il existe donc $m_k \in M \setminus \{m_0^{'}\}$ tel que $\psi_1(m_0^{'}, m_k)$. On peut choisir k minimum, comme fait précdemment. Remarque : dans $\mathcal{B}$, $b_1^{'} \neq b_0^{'}$, donc ces deux éléments vérifient la formule "$x_0 \neq x_1$". c'est pour cela que, par complétude de $tp^{\mathcal{B}}(b_0^{'}, b_1^{'})$, on peut prendre aussi deux éléments différents dans $\mathcal{M}$ (En fait on a : $\psi_1(x_0, x_1) \to x_0 \neq x_1$).
On pose $m_1^{'} := m_k$.
On prend ensuite le premier élément de $M \setminus \{m_0^{'}, m_1^{'}\}$, etc...
On obtient alors deux séquences infinies dénombrables $m_0^{'}, m_1^{'}, \dots$ et $b_0^{'}, b_1^{'}, \dots$ telles que :

$$M = \{m_0^{'}, m_1^{'}, \dots\} \quad B = \{b_0^{'}, b_1^{'}, \dots\}$$

(notons qu'en prenant les indices minimaux, on n'oublie aucun élément ; ie on a considéré tous les éléments de $\mathcal{M}$ et tous ceux de $\mathcal{B}$).
Soit $f : m_n^{'} \mapsto b_n^{'}$. Par construction, pour chaque n les n-uples $(m_0^{'}, \dots, m_{n-1}^{'})$ et $(b_0^{'}, \dots, b_{n-1}^{'})$ satisfont les mêmes types, f définit donc un isomorphisme de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{B}$.

(Remarque : deux uples quelconques $(m_{i_1}, \dots, m_{i_k})$ et $(b_{i_1}, \dots, b_{i_k})$ satisfont eux aussi les mêmes types : en effet il existe l, $(m_{i_1}, \dots, m_{i_k}) \subseteq (m_0^{'}, \dots, m_l^{'})$, avec $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, l\}$ tels que $m_{i_1} = m_{j_1}^{'}, \dots, m_{i_k} = m_{j_k}^{'}$. Remarquons que $tp^{\mathcal{M}}(m_0^{'}, \dots, m_k^{'}) \supseteq tp^{\mathcal{M}}(m_0^{'}), \dots, tp^{\mathcal{M}}(m_{i_1}, \dots, m_{i_k})$. Par définition de f, on a

$$(f(m_{i_1}), \dots, f(m_{i_k})) \subseteq (b_0^{'}, \dots, b_l^{'})$$

donc $tp^{\mathcal{B}}(f(m_{i_1}), \dots, f(m_{i_k})) \subseteq tp^{\mathcal{B}}(b_0^{'}, \dots, b_l^{'}) = tp^{\mathcal{M}}(m_0^{'}, \dots, m_k^{'})$.) □

9.3 Théorème de Ryll-Nardweski

Théorème 9.3.1 (Théorème de Ryll-Nardewski). *Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable, T une $\mathcal{L}$-théorie complète et supposons que T n'a que des modèles infinis.*

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) T est $\aleph_0$-catégorique ;

(ii) pour tout n, $S_n(T)$ est fini ;

(iii) pour tout n, il existe un nombre fini de formules à n variables libres telles que toute formule à n variables libres soit équivalente à l'une d'entre elles, dans tout modèle de T.

Preuve : (i) $\to$ (ii) :
Supposons que T est $\aleph_0$-catégorique et qu'il existe n tel que $S_n(T)$ soit infini. L'espace $\mathcal{S}_n(T)$ est compact donc il admet alors un point non isolé p. Par le théorème d'omission des types, il existe un modèle dénombrable $\mathcal{M}$ de T où p n'est pas réalisé.
Soit $\mathcal{N} \models T$ tel que $\mathcal{N}$ réalise p (p est consistant avec T), ie : $\exists a_1, \cdots, a_n \in N, p = tp^{\mathcal{N}}(\bar{a})(= \{\phi(v_1, \cdots, v_n)$ $\mathcal{L}$-formules : $\mathcal{N} \models \phi(\bar{a})\})$.
Par le théorème de Löwenheim-Skolem, il existe une sous-structure élémentaire $\mathcal{N}_0$ de $\mathcal{N}$ qui contient $\bar{a}$ et qui est infinie dénombrable. On a donc $|\mathcal{N}_0| = |\mathcal{M}| = \aleph_0$, tandis que $\mathcal{M} \ncong \mathcal{N}_0$, ce qui contredit la catégoricité de T.

(ii) $\to$ (iii) On va montrer un résultat un peu plus fort : pour n fixé, $S_n(T)$ est fini implique qu'il existe un nombre fini de formules à n variables libres telles que toute autre formule à n variables libres soit équivalente à l'une d'entre elles, i.e. il existe

$$\psi_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \psi_m(x_1, \cdots, x_n)$$

telles que, pour $\phi(x_1, \cdots, x_n)$, il existe $i \in \{1, \ldots, m\}, T \models \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi_i(\bar{x}))$.
$S_n(T)$ est fini par hypothèse : soient donc $\theta_1, \cdots, \theta_k$ des formules à n variables libres telles que $[\theta_i] = \{p_i\}, i = 1, \ldots, k$, et $\{p_1, \cdots, p_k\} = S_n(T)$. Tout ouvert dans $\mathcal{S}_n(T)$ est une union finie d'ouverts de base $\{[\theta_i], i = 1, \ldots, k\}$.

Pour $J \subseteq \{1, \ldots, k\}$, on pose

$$\psi_J = \bigvee_{i \in J} \theta_i$$

Soit $\phi(\bar{x})$ une $\mathcal{L}$-formule, on considère $[\phi(\bar{x})]$ dans $\mathcal{S}_n(T)$: il existe $J^{'} \subseteq \{1, \ldots, k\}$,

$$[\phi(\bar{x})] = \bigcup \{p_j : j \in J^{'}\} = \bigcup_{j \in J'} [\theta_j] = [\bigvee_{j \in J'} \theta_j(\bar{x})] = [\psi_{J'}(\bar{x})]$$

On a alors : $T \models \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi_{J'}(\bar{x}))$; car sinon il existerait $\mathcal{A}$ satisfaisant T et $\bar{a} \subseteq A$ tels que $\mathcal{A} \models \phi(\bar{a})$ & $\neg\psi_{J'}(\bar{a})$ (ou $\mathcal{A} \models \neg\phi(\bar{a})$ & $\psi_{J'}(\bar{a})$). Alors, en posant $q = tp^{\mathcal{A}}(\bar{a})$, on aurait $q \in [\phi] \setminus [\psi_{J'}]$ (ou $q \in [\psi_{J'}] \setminus [\phi]$).

(iii) $\to$ (i)
(Notons que le cas $n = 0$ implique que T est complète). Grâce au lemme 9.2.2, il suffit de montrer que si T satisfait (iii) et si $\mathcal{M} \models T$, alors $\mathcal{M}$ est atomique. (En effet si deux modèles de T sont atomiques, ils réalisent les mêmes types (voir remarque précédant le Lemme) et donc s'ils sont tous les deux infinis dénombrables, ils sont isomorphes par le Lemme 9.2.2.)

Soit $\bar{a} \in M^n$. Par hypothèse, il existe $\psi_1, \cdots, \psi_m$ telles que toute formule $\phi(\bar{x})$ soit équivalente dans les modèles de T à l'une d'entre elles. Soit $J \subseteq \{1, \ldots, m\}$ tel que $\mathcal{M} \models \psi_j(\bar{a})$ ssi $j \in J$.

Affirmation : $\{tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})\} = [\bigwedge_{j \in J} \psi_j]$ (*) ce qui signifie que $tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})$ est isolé.
Montrons (*) :
$\subseteq$: $\mathcal{M} \models \bigwedge_{j \in J} \psi_j(\bar{a})$, donc $\bigwedge_{j \in J} \psi_j \in \{\phi(\bar{v}) : \mathcal{M} \models \phi(\bar{a})\} = tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})$, ie $tp^{\mathcal{M}}(\bar{a}) \in [\bigwedge_{j \in J} \psi_j]$.
$\supseteq$: Montrons que l'intersection est un singleton. Soit $p \neq tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})$ tel que $p \in \bigcap_{j \in J} [\psi_j]$. Il existe donc ϕ telle que $\phi \in p$ & $\phi \notin tp^{\mathcal{M}}(\bar{a})$. Or $\phi \notin tp^{\mathcal{M}}(\bar{a}) \leftrightarrow \neg\phi(\bar{a})$. Par hypothèse, $T \models \neg\phi \leftrightarrow \psi_j$ pour un certain j. Mais alors $\mathcal{M} \models \psi_j(\bar{a})$ et donc $j \in J$; or $p \in [\psi_j]$: contradiction. $\square$

Chapitre 10

Théorèmes de préservation.

10.1 Théories modèles-complètes

Rappelons qu'une $\mathcal{L}$-théorie T est modèle-complète si pour toute paire de modèles $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ de T, on a $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$. (Voir Définition 6.5.7).

Définition 10.1.1 Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ deux $\mathcal{L}$-structures avec $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. On dira que $\mathcal{A}$ est existentiellement close dans $\mathcal{B}$ (noté $\mathcal{A} \subset_{ec} \mathcal{B}$) si pour toute formule existentielle $\phi(\bar{x})$ et tout uple d'élements $\bar{a}$ de A, si $\mathcal{B} \models \phi(\bar{a})$, alors $\mathcal{A} \models \phi(\bar{a})$.

Théorème 10.1.2 *Soit T une $\mathcal{L}$-théorie consistante. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *T est modèle-complète,*
2. *pour tous modèles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de T tels que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, on a $\mathcal{A} \subset_{ec} \mathcal{B}$,*
3. *toute $\mathcal{L}$-formule est équivalente dans T à une formule universelle,*
4. *toute $\mathcal{L}$-formule est équivalente dans T à une formule existentielle.*

Preuve : Montrons (2)→ (3). Les autres implications sont laissées en exercice.

Tout d'abord on remarque qu'il suffit de montrer que toute formule existentielle est équivalente à une formule universelle.

Soit $\phi(\bar{x})$ une formule existentielle et soit $\Gamma(\bar{x})$ l'ensemble des formules universelles impliquées dans les modèles de T par $\phi(\bar{x})$ c.a.d.

$\Gamma(\bar{x}) := \{\gamma(\bar{x}) :\ T \models \forall \bar{x}\, (\phi(\bar{x}) \to \gamma(\bar{x})$, où $\gamma(\bar{x})$ est universelle$\}$.

Soit $\bar{d} := (d_1, \cdots, d_n)$ des symboles pour n nouvelles constantes et $\mathcal{L}_{\bar{d}} := \mathcal{L} \cup \{d_1, \cdots, d_n\}$.

Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{L}_{\bar{d}}$-structure, modèle de $T \cup \Gamma(\bar{d})$. Soit $Diag(\mathcal{A})$ le diagramme (sans quantificateurs) de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{L}_A := \{c_a :\ a \in A\}$.

(i) Montrons tout d'abord que la $\mathcal{L}_A$-théorie $T_A := T \cup Diag(\mathcal{A}) \cup \{\phi(\bar{d})\}$ est consistante.

Cela impliquera que $T \cup \Gamma(\bar{d}) \models \phi(\bar{d})$. En effet, soit $\mathcal{A} \models T \cup \Gamma(\bar{d})$. Par le point précédent, T_A est consistante et donc il existe un modèle $\mathcal{B}$ de T_A contenant $\mathcal{A}$ où $\phi(\bar{d})$ est vraie. Par hypothèse $\mathcal{A} \subset_{ec} \mathcal{B}$ et donc $\mathcal{A} \models \phi(\bar{d})$.

(ii) Montrons que T_A est consistante. Par le théorème de compacité, il suffit de prendre un nombre fini $\psi_1(\bar{a}, \bar{d}), \cdots, \psi_m(\bar{a}, \bar{d})$ appartenant à $Diag(\mathcal{A})$. Donc $\mathcal{A} \models \exists \bar{x}\ \bigwedge_i \psi_i(\bar{x}, \bar{d})$ et donc comme $\mathcal{A} \models T$, $\forall x \neg \bigwedge_i \psi_i(\bar{x}, \bar{d})$ n'est pas une conséquence de T et donc pas une conséquence de $T \cup \{\phi(\bar{d})\}$ et donc il existe un modèle de $T \cup \{\phi(\bar{d})\} \cup \{\exists \bar{x}\ \bigwedge_i \psi_i(\bar{x}, \bar{d})\}$.

(iii) Donc $T \cup \Gamma(\bar{d}) \models \phi(\bar{d})$. Par le théorème de compacité, il existe un nombre fini de formules (universelles) $\gamma_1(\bar{x}), \cdots, \gamma_k(\bar{x})$ appartenant à $\Gamma(\bar{x})$ telles que

$$T \cup \{\gamma_1(\bar{d}), \cdots, \gamma_k(\bar{d})\} \models \phi(\bar{d}).$$

Comme $\bar{d}$ sont des constantes n'appartenant pas à $\mathcal{L}$, cela implique que

$$T \models \forall x \, (\bigwedge_{j=1}^{k} \gamma_j(\bar{x}) \rightarrow \phi(\bar{x})).$$

Par choix de $\Gamma(\bar{x})$, on obtient :

$$T \models \forall x \, (\bigwedge_{j=1}^{k} \gamma_j(\bar{x}) \leftrightarrow \phi(\bar{x})).$$

□

Lemme 10.1.3 *([2] chapitre 4, Corollaire 4.3.8) Si $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{L}$-structure infinie, alors $\mathcal{A}$ a des ultrapuissances de cardinalité arbitrairement grandes.* □

Preuve : (Idée) Un ultrafiltre $\mathscr{U}$ sur I est dit κ-régulier s'il existe un sous-ensemble $E \subset \mathscr{U}$ de cardinalité κ tel que tout $i \in I$ n'appartient qu'à un nombre fini d'éléments de E. On montre que si I est un ensemble de cardinalité κ, alors il existe un ultrafiltre *κ-régulier sur* I. Ensuite que si $\mathscr{U}$ est un tel ultrafiltre $|\prod_I^{\mathscr{U}} \mathcal{A}| = |A|^{\kappa}$. □

Remarque : tout ultrafiltre non principal sur ω est ω-régulier. On peut prendre pour $E := \{[n \; +\infty[: \; n \in \omega\}$.

Lemme 10.1.4 *Soit T une $\mathcal{L}$-théorie consistante et soit κ un cardinal infini plus grand que la cardinalité de $\mathcal{L}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *pour tous modèles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de T tels que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, on a $\mathcal{A} \subset_{ec} \mathcal{B}$,*
2. *pour tous modèles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de T de cardinalité κ tels que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, on a $\mathcal{A} \subset_{ec} \mathcal{B}$.*

Preuve : Supposons que (2) est vrai et soient $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ deux modèles de T. Soit $\phi(\bar{x})$ une $\mathcal{L}$-formule existentielle, $\bar{a}$ un uple d'éléments de A et supposons que $\mathcal{B} \models \phi(\bar{a})$. Montrons que $\mathcal{A} \models \phi(\bar{a})$.

Si la cardinalité de $\mathcal{A}$ est plus grande ou égale à κ, par le theorème de Lowenheim-Skolem (descendant), il existe une sous-structure élémentaire $\mathcal{A}_0$ de $\mathcal{A}$ contenant $\bar{a}$ de cardinalité κ. Réappliquant le même théorème, on peut trouver une sous-structure élémentaire $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{B}$ contenant $\mathcal{A}_0$ de cardinalité κ. Comme $\mathcal{B}_0 \prec \mathcal{B}$, $\mathcal{B}_0 \models \phi(\bar{a})$ et donc comme $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{B}_0$ sont de cardinalité κ, par hypothèse $\mathcal{A}_0 \models \phi(\bar{a})$. Donc $\mathcal{A} \models \phi(\bar{a})$.

Si la cardinalité de $\mathcal{A}$ est strictement plus petite que κ, on construit une ultrapuissance de $\mathcal{A}$ de cardinalité plus grande ou égale à κ, disons $\prod_I^{\mathscr{U}} \mathcal{A}$, pour un certain I et ultrafiltre $\mathscr{U}$ sur I et on se ramène au cas précédent. □

Définition 10.1.5 On dit qu'une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{C}$ est existentiellement close dans une classe $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$-structures si toute formule existentielle à paramètres dans $\mathcal{C}$ satisfaite dans une extension de $\mathcal{C}$ appartenant à $\mathcal{K}$ est déjà satisfaite dans $\mathcal{C}$.

Remarque. Utilisant cette définition et paraphrasant le théorème précédent, une classe élémentaire $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$-structures est la classe des modèles d'une $\mathcal{L}$-théorie modèle-complète ssi ses éléments sont existentiellement clos dans $\mathcal{K}$ ssi ses éléments sont existentiellement clos dans la sous-classe de $\mathcal{K}$ des structures de cardinalité κ, où κ est un cardinal infini plus grand que la cardinalité de $\mathcal{L}$.

Théorème 10.1.6 (Critère de Lindström) *Soit T une théorie qui n'a pas de modèles finis. Supposons T fermée par unions de chaines et κ-catégorique (où κ est un cardinal infini plus grand que la cardinalité de $\mathcal{L}$), alors T est modèle-complète.*

Preuve : Soit $\mathcal{A}$ un modèle de T de cardinalité κ. Nous allons montrer que $\mathcal{A}$ se plonge dans un modèle existentiellement clos de cardinalité κ. Or T est κ-catégorique et donc $\mathcal{A} \cong \tilde{\mathcal{A}}$. Par le Lemme et le Théorème précédents, cela implique que T est modèle-complète.

Construisons $\tilde{\mathcal{A}}$. On construit une chaine infinie dénombrable de modèles $\mathcal{B}_n$ de T de cardinalité κ, où $\mathcal{B}_0 := \mathcal{A}$, $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{n+1}$ et toute formule existentielle à paramètres dans $\mathcal{B}_n$ vraie dans un modèle de T étendant $\mathcal{B}_n$ sera vraie dans $\mathcal{B}_{n+1}$. On posera $\tilde{\mathcal{A}} = \bigcup_n \mathcal{B}_n$, $\tilde{\mathcal{A}}$ sera un modèle de T car T est clos par union de chaines et sera existentiellement close car tout uple d'éléments se trouvera dans un des B_n.

Montrons comment construire $\mathcal{B}_1$. Ce sera également l'union d'une chaine de modèles de T mais indexé par l'ensemble des formules existentielles à paramètres dans A. Enumérons ces formules par un ordinal λ qui sera nécéssairement de cardinalité κ et considérons $\phi_0(\bar{a}) := \exists \bar{x}\, \theta(\bar{x}, \bar{a})$, où $\theta(\bar{x}, \bar{y})$ est une formule sans quantificateurs.

Soit dans une extension $\mathcal{C} \models T$ de $\mathcal{A}$ il existe $\bar{c}$ tel que $\mathcal{C} \models \theta(\bar{c}, \bar{a})$ et donc soit $\mathcal{A}_1$ une sous-structure élémentaire de $\mathcal{C}$ contenant $A \cup \{\bar{c}\}$ de cardinalité κ. Donc $\mathcal{A}_1 \models T$ et satisfait $\phi_0(\bar{a})$. Par hypothèse d'induction, on suppose que $\mathcal{A}_\alpha$ est un modèle de T contenant $\mathcal{A}$, de cardinalité κ et satisfait toutes les formules ϕ_β, pour $\beta < \alpha$, dès qu'elles sont satisfaites dans une extension (de $\mathcal{A}_\alpha$). On construit $\mathcal{A}_{\alpha+1}$ comme ci-dessus. Pour γ un ordinal limite, on pose $\mathcal{A}_\gamma := \bigcup_{\beta<\gamma} \mathcal{A}_\beta$. $\square$

Applications : Ce critère donne une autre preuve que ACF_0 est modèle-complète, utilisant le fait que ACF_0 est $2^{\aleph_0}$-catégorique et que le schéma d'axiomes donné pour ACF_0 est $\forall\exists$.

La théorie des ordres denses sans premiers ni derniers éléments est modèle-complète. On utlise le fait que cette théorie est $\aleph_0$-catégorique (voir Théorème 7.4.6) et qu'elle a une axiomatisation $\forall\exists$.

10.2 Amalgamation

Théorème 10.2.1 *(Amalgamation élémentaire) Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux $\mathcal{L}$-structures et supposons qu'il y ait un plongement f de la $\mathcal{L}$-sous-structure $< \bar{a} >_{\mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}$ engendrée par $\bar{a}$ dans $\mathcal{C}$, où $\bar{a}$ est un uple éventuellement infini. Supposons en outre que $(\mathcal{B}, \bar{a}) \equiv (\mathcal{C}, f(\bar{a}))$.*

Alors il existe une extension élémentaire $\mathcal{D}$ de $\mathcal{B}$ et un plongement élémentaire $g : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tel que $g \circ f(\bar{a}) = \bar{a}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \overset{\preceq}{\to} & \mathcal{D} \\ \uparrow\subseteq & & \uparrow g \\ < \bar{a} >_{\mathcal{B}} & \overset{f}{\to} & \mathcal{C} \end{array}$$

Preuve : On montre que $Diag_{el}(\mathcal{B}) \cup Diag_{el}(\mathcal{C})$ est une théorie consistante, en supposant que $B \cap C =< \bar{a} >$ et en identifiant $\bar{a}$ et $f(\bar{a})$. Sinon en utilisant le théorème de compacité, cela impliquerait qu'il existe une formule $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ et un uple $\bar{d} \subset C- < \bar{a} >$ tel que $Diag_{el}(\mathcal{B}) \models \neg\phi(\bar{a}, \bar{d})$. Donc, $Diag_{el}(\mathcal{B}) \models \forall \bar{x}\ \neg\phi(\bar{a}, \bar{x})$. Ce qui est équivalent à $(\mathcal{B}, \bar{a}) \models \forall \bar{x}\ \neg\phi(\bar{a}, \bar{x})$. Par hypothèse cela implique que $(\mathcal{C}, \bar{a}) \models \forall \bar{x}\ \neg\phi(\bar{a}, \bar{x})$, une contradiction.

Soit $\mathcal{D}$ un modèle de $Diag_{el}(\mathcal{B}) \cup Diag_{el}(\mathcal{C})$. Donc, le réduit de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{L}$ est une extension élémentaire de $\mathcal{B}$. On définit pour tout $d \in C- < \bar{a} >$, $g(d) = d^{\mathcal{D}}$ et $g(a) = a$. Ce plongement est élémentaire. $\square$

Définition 10.2.2 Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux $\mathcal{L}$-structures. On note $\mathcal{A} \Rrightarrow_1 \mathcal{B}$ si tout $\mathcal{L}$-énoncé *existentiel* vrai dans $\mathcal{A}$ est vrai dans $\mathcal{B}$.

Théorème 10.2.3 (amalgamation existentielle) *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux $\mathcal{L}$-structures et supposons qu'il y ait un plongement f de la $\mathcal{L}$-sous-structure $< \bar{a} >_{\mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}$ engendrée par $\bar{a}$ dans $\mathcal{C}$, où $\bar{a}$ est un uple éventuellement infini. Supposons en outre que $(\mathcal{B}, \bar{a}) \Rrightarrow_1 (\mathcal{C}, f(\bar{a}))$.*

Alors il existe une extension élémentaire $\mathcal{D}$ de $\mathcal{B}$ et un plongement $g : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tel que $g \circ f(\bar{a}) = \bar{a}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \overset{\preceq}{\to} & \mathcal{D} \\ \uparrow\subseteq & & \uparrow g \\ < \bar{a} >_{\mathcal{B}} & \overset{f}{\to} & \mathcal{C} \end{array}$$

Preuve : La preuve est similaire à celle du Théorème 10.2.1 mais ici on considère la théorie $Diag_{el}(\mathcal{B}) \cup Diag(\mathcal{C})$

Corollaire 10.2.4 *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux $\mathcal{L}$-structures et supposons que $\mathcal{B} \Rrightarrow_1 \mathcal{C}$. Alors $\mathcal{C}$ se plonge dans une extension élémentaire de $\mathcal{B}$.* $\square$

Notation 10.2.5 $T_\forall$ est l'ensemble des conséquences universelles de T, autrement dit $T_\forall := \{\sigma : \sigma$ est un $\mathcal{L}$-énoncé universel tel que $T \models \sigma\}$.

Corollaire 10.2.6 *Les modèles de $T_\forall$ sont exactement les sous-structures des modèles de T.*

Preuve : Soit $\mathcal{C} \models T_\forall$. Par le corollaire précédent il suffit de trouver un modèle $\mathcal{B}$ de T tel que $\mathcal{B} \Rrightarrow_1 \mathcal{C}$. On considère la théorie $T \cup \{$ énoncés existentiels vrais dans $\mathcal{C}\}$. On montre que cette théorie est consistante. $\square$

Définition 10.2.7 Une théorie T a la propriété *d'amalgamation* si pour tous modèles $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ de T tels que il y a des *plongements* $e : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et $f : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, alors il y a un modèle $\mathcal{D}$ de T et des *plongements* $g : \mathcal{B} \to \mathcal{D}$, $h : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tel que $g \circ e = h \circ f$.

Théorème 10.2.8 *Une théorie T a l'élimination des quantificateurs ssi T est modèle-complète et $T_\forall$ a la propriété d'amalgamation.*

Preuve : Voir [4] Theorem 8.4.1, page 382.

10.3 Exercices.

1. Soit $\mathcal{C}$ une classe de $\mathcal{L}$-structures qui est inductive c.a.d. fermée par unions de chaines. Soit $\mathcal{C}^{ec}$ la classe des structures de $\mathcal{C}$ qui sont existentiellement closes dans $\mathcal{C}$. Montrez que $\mathcal{C}^{ec}$ est non vide et que cette classe est fermée par unions de chaines.

2. Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre et T une théorie qui a une axiomatisation $\forall\exists$. Soit $\mathcal{A} \subset_{ec} \mathcal{B}$ deux $\mathcal{L}$-structures avec $\mathcal{B}$ un modèle de T. Montrez que $\mathcal{A}$ est un modèle de T et que si $\mathcal{B}$ est existentiellement clos dans la classe des modèles de T, alors $\mathcal{A}$ l'est également.

3. Soit T la théorie des groupes abéliens divisibles sans torsion dans le langage $\{+, -, 0\}$. Axiomatisez cette théorie. Montrez qu'elle est modèle-complète.

4. Soit p est un nombre premier, un p-groupe est un groupe où l'ordre de tout élément est une puissance de p. Y-a-t-il des p-groupes abéliens divisibles (non-triviaux) ? Justifiez votre réponse.

5. Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable (fini ou infini). Rappelons la définition suivante. Soient T et T' deux $\mathcal{L}$-théories consistantes. On dit que T' est une *modèle-compagne* de T si T' est modèle-complète, si tout modèle de T se plonge dans un modèle de T' et tout modèle de T' se plonge dans un modèle de T.

   (i) Montrer que si T_1 et T_2 sont deux modèle-compagnes de T, alors T_1 et T_2 ont les mêmes modèles.

   (ii) Soit T une théorie qui a une axiomatisation $\forall\exists$, montrer que si T a une modèle-compagne T', alors T' est la théorie de la classe des modèles existentiellement clos de T.

6. Montrer que si une $\mathcal{L}$-théorie T_0 est modèle-complète et si étant donnés deux modèles quelconques $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ de T_0, il existe un troisième modèle $\mathcal{C}$ de T_0 tel que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ se plongent dans $\mathcal{C}$, alors T_0 est complète.

7. Soit $\mathcal{L} := \{<\}$ et soit T la $\mathcal{L}$-théorie des ordres totaux denses.
   i) Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux modèles de T, montrer que le produit $(A \times B, <)$ est encore un modèle de T, où l'ordre $<$ est défini comme suit :

   $(a, b) < (c, d)$ si $(a < c$ ou $(a = c \,\&\, b < d))$, où $a, c \in A$, $b, d \in B$.
   ii) Déterminer les complétions de T et les axiomatiser.
   iii) Parmi ces complétions, quelles sont celles qui sont modèles-complètes ?
   iv) Montrer que T a une modèle-compagne et en donner une axiomatisation.

Annexe A

Rappels sur les algèbres de Boole.

Soit $\mathcal{L} := \{\wedge, \vee, ', 0, 1\}$ le langage des algèbres de Boole. Soit T la théorie suivante des algèbres de Boole dans le langage $\mathcal{L}$.

1. $0' = 1$, $1' = 0$
2. $\forall x\ (x \wedge 0 = 0 \,\&\, x \vee 1 = 1)$
3. $\forall x\ (x \wedge 1 = x \,\&\, x \vee 0 = x)$
4. $\forall x\ (x \wedge x' = 0 \ \&\ x \vee x' = 1)$
5. $\forall x\ ((x')' = x)$
6. $\forall x\ (x \wedge x = x \ \&\ x \vee x = x)$
7. $\forall x\ \forall y\ ((x \wedge y)' = x' \vee y')$,
8. $\forall x\ \forall y\ (x \wedge y = y \wedge x \ \&\ x \vee y = y \vee x)$,
9. $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z) \ \&\ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z)$
10. $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \ \&\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z))$.

Exemple : Soit I un ensemble et $\mathcal{P}(I)$ l'ensemble de toutes ses parties, la structure $(\mathcal{P}(I), \cap, \cup, ^c, \emptyset, I)$ est une algèbre de Boole.

Remarque : La théorie T des algèbres de Boole est axiomatisée par les axiomes : (3), (4), (8), (10).

Définition A.0.1 Soit $\mathcal{B} := (B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ une algèbre de Boole. Un *atome* $a \in B$ est un élément non nul de B tel que $\forall b\ (a \wedge b = b \rightarrow (a = b \text{ ou } b = 0))$.

Sur $\mathcal{B}$ on peut mettre un ordre partiel $\leq$ définit par $c \leq d$ si $c \wedge d = c$.

Une algèbre de Boole est atomique si tout élément non nul contient un atome. dans ces algèbres, les atomes sont les éléments non nuls minimaux pour $\leq$.

Exercices :

Montrer qu'une algèbre de Boole finie est de la forme $\mathcal{P}(I)$, où I est l'ensemble de ses atomes.

Soit R un anneau unitaire satisfaisant à l'énoncé $\forall x\ \ (x^2 = x)$. Montrez que l'on peut munir R d'une structure d' algèbre de Boole.

Annexe B

Rappels trés brefs sur les ordinaux et les cardinaux.

Ce chapitre est basée sur les chapitres 1 et 2 du livre de J-L Krivine ([7])ainsi que sur l'appendice A, du livre de D. Marker ([8] pages 315-322.)

Tout d'abord, si $(A, <)$ est un ensemble totalement ordonné, on dit qu'il est *bien ordonné* (b.o.) si tout sous-ensemble non vide de A a un plus petit élément.

Exemples : $(\mathbb{N}, <)$ est b.o., alors que $(\mathbb{Z}, <)$ ne l'est pas.

Rappelons tout d'abord que le lemme de Zorn et le principe du bon ordre (i.e. tout ensemble peut être b.o.) sont des formes équivalentes de l'axiome du choix.

Un ensemble A est *transitif* si pour tout $a \in A$ et $b \in a$, on a $b \in A$ et donc si $x \in A$, alors $x \subset A$.

Un ensemble A est un *ordinal* si A est transitif et si la relation $\in$ est une relation d'ordre (total) strict sur A qui est un bon ordre.

On notera la *classe* des ordinaux par On. En particulier, si $\alpha \in On$, alors $\alpha \notin \alpha$. Sur un ordinal α, on utilisera $<$ pour $\in$.

Sur la classe On, la relation $\in$ est également transitive et c'est un ordre total strict qui est un bon ordre. Au lieu de $\alpha \in \beta$, on écrira $\alpha < \beta$, $\alpha,\ \beta \in On$.

Par définition si $\alpha \in On$, $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$. De plus les segments initiaux d'un ordinal sont lui-même et ses éléments.

On supposera toujours le principe du bon ordre et donc tout ensemble A peut etre bien ordonné, disons par un ordre $<$. De plus, il existe un ordinal α tel que $(A, <)$ est isomorphe à $(\alpha, \in)$.

Montrons que On ne peut etre un ensemble A. Par le principe du bon ordre A peut être b.o. et tout élément de A est un ordinal et donc est inclus à A. Donc A est un ordinal (car transitif et bien ordonné). Donc $A \in A$, ce qui contredit le fait que sur les ordinaux la relation d'appartenance soit une relation d'ordre strict.

Démonstration par induction. Soit $P(x)$ une formule à une variable libre et supposons que l'on veuille montrer que pour tout ordinal α on a $P(\alpha)$. Alors il suffit de montrer pour tout α, si pour tout $\beta < \alpha$ on a $P(\beta)$, alors $P(\alpha)$.
Preuve : En effet s'il existe un ordinal α tel que $\neg P(\alpha)$, alors il en existe un plus petit disons

α_0 car On est bien ordonné. Donc, pour tout $\beta < \alpha_0$ on a $P(\beta)$, or par hypothèse on aurait $P(\alpha_0)$, une contradiction. $\square$

Si α est un ordinal, alors $\alpha \cup \{\alpha\}$ est un ordinal et c'est le plus petit ordinal plus grand que α. On dira que c'est le *successeur* de α. On le notera $\alpha + 1$.

Tout ensemble d'ordinaux a une borne supérieure qui est la réunion des éléments de cet ensemble. Soit a un ensemble d'ordinaux, alors sa borne supérieure est $\bigcup_{\gamma \in a} \gamma$.

Si un ordinal n'est pas le successeur d'un autre ordinal, on dira qu'il est *limite*. Notons que si α est un ordinal limite, alors pour tout $\beta < \alpha$, $\beta + 1 < \alpha$.

Notons que $\emptyset$ est un ordinal et que c'est le plus petit ordinal car $\emptyset \subset \alpha$. Son successeur est $\{\emptyset\}$, le successeur est $\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ etc. On dira qu'un ordinal α est *fini* si pour tout $\beta \leq \alpha$, $\beta \neq \emptyset$, il existe γ tel que $\beta = \gamma \cup \{\gamma\}$.

On note le plus petit ordinal infini ω.

Le *cardinal* de A est le plus petit ordinal tel qu'il existe un bon ordre $<$ sur A tel que $(A, <)$ est isomorphe à $(\alpha, \in)$. On note cet ordinal par $|A|$

Un ordinal α est un cardinal si $\alpha = |\alpha|$. Les ordinaux finis sont tous des cardinaux et l'ordinal ω est aussi un cardinal que l'on notera par $\aleph_0$. La classe des cardinaux infinis est isomorphe (en tant que bon ordre) à On et si α est un ordinal, on note $\aleph_\alpha$ l'image de α par cet isomorphisme. En particulier on a que $\aleph_{\alpha+1}$ est le plus petit cardinal strictement plus grand que $\aleph_\alpha$.

On définit la somme et le produit de deux cardinaux de la façon suivante. Soit $\kappa = |X|$, $\lambda = |Y|$. Alors $\kappa + \lambda = |(\{0\} \times X) \cup (\{1\} \times Y)|$ et $\kappa.\lambda = |X \times Y|$.

On montre que si l'un des cardinaux est infini, $\kappa + \lambda = \kappa.\lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.

De plus si $|I| = \kappa$ et pour tout $i \in I$, $|A_i| \leq \kappa$, alors $|\bigcup_{i \in I} A_i| \leq \kappa$.
En effet : Pour chaque i, comme $|A_i| \leq \kappa$, on peut construire une surjection $f_i : \kappa \to A_i$ (en utilisant l'axiome du choix). De même, il y a une surjection (en fait une bijection) $g : \kappa \to I$. On peut donc construire une surjection $f : \kappa = \kappa \times \kappa \to \bigcup_{i \in I} A_i, (\alpha, \beta) \mapsto f_{g(\alpha)}(\beta)$.

On définit l'exponentiation par $\kappa^\lambda := |X^Y|$, où X^Y dénote l'ensemble des fonctions de Y dans X.

On a pour $2 \leq \kappa < \lambda$ et $\aleph_0 \leq \lambda$ que $\kappa^\lambda = \lambda^\lambda = 2^\lambda$.

L'hypothèse du continu (*généralisée*) est l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ($2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$).

P. Cohen, en 1973, a montré qu'on ne pouvait prouver cette hypothèse dans ZFC mais qu'elle était consistante avec ZFC c.a.d. il a construit deux modèles de ZFC l'un où $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ et l'autre où ces deux cardinaux étaient différents.

Annexe C

Exercices résolus.

Dans ce chapitre, nous résolvons certains des exercices proposés (de nature et difficulté diverses). Parfois, la solution de certains des exercices est simplement *indiquée* mais non *rédigée.*

C.1 Section 7.2.

1. Soit s la fonction successeur dans $\mathbb{N}$ et dans $\mathbb{Z}$. Montrez que $(\mathbb{N}, s)$ est une sous-structure de $(\mathbb{Z}, s)$, mais pas une sous-structure élémentaire.

   Sous-structure : l'identité est bien un plongement préservant la fonction successeur. Soit maintenant la formule $\phi(y) := \forall x\ \neg(y = s(x))$. $(\mathbb{N}, s) \models \phi(0)$ mais $(\mathbb{Z}, s) \not\models \phi(0)$.

2. Montrez que l'anneau des entiers $< \mathbb{Z}, +, -, ., 0, 1 >$ a des fonctions de Skolem définissables.
   (Aide : tout entier positif est somme de 4 carrés.)

   Soit $\phi(\bar{x}, y)$, où $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, une formule dans le langage des anneaux. On définit $\leq$ par : $x \leq y$ ssi $\exists z_1 \ldots \exists z_4 (y - x = z_1^2 + \cdots + z_4^2$. On pose $\psi(\bar{x}, y) := \phi(\bar{x}, y) \& \forall z((0 \leq z \leq y \text{ ou } y \leq z \leq 0) \to z = y \text{ ou} \neg\phi(\bar{x}, z))$.

3. Soit K un corps commutatif et soit $\mathcal{L} := \{+, -, ., 0, 1\}$. Montrer que tout sous-ensemble de K définissable par une formule sans quantificateurs (à paramètres dans K) dans $(K, +, -, ., 0, 1)$ est soit fini soit cofini.

   Si $\phi(x, \bar{y})$ est une $\mathcal{L}$-formule atomique, alors il existe $q(X, \bar{Y}) \in \mathbb{Z}[X, \bar{Y}]$ telle que $\phi(x, \bar{y})$ ssi $q(x, \bar{y}) = 0$.
   Si $X := \{x \in K : \phi(x, \bar{a}\}$, alors $X = \{x : q(\bar{x}, \bar{a}) = 0\}$ et $q(X, \bar{a}) \in K[X]; \bar{a} \subseteq K$.

   Notons que X est fini, ou $X = K$ si q est le polynôme nul. Les ensembles définissables par une formule sans quantificateurs sont des combinaisons booléennes (justifier) d'ensembles définissables par une formule atomique, donc sont soit finis, soit cofinis (l'intersection de deux ensembles cofinis est cofinie).

Remarque : si $\{k_1, \ldots, k_n\} \subseteq K$, il existe une formule $\phi(x, \bar{y})$ et $\bar{a} \in K^n$ tels que $\{k_1, \ldots, k_n\} = \phi(K, \bar{a})$ (en prenant $\bar{a} = (k_1, \ldots, k_n)$ et $\phi(x, \bar{y}) := (x-y_1)\ldots(x-y_n)$).

4. Soient $\mathcal{L} := \{+, -, ., 0, 1\}$ le langage des anneaux et $\mathcal{L}_< := \mathcal{L} \cup \{<\}$ celui des anneaux totalement-ordonnés. Soit T la $\mathcal{L}_<$-théorie des corps réels-clos.
Ecrivez une axiomatisation de T.
Montrez que T n'a pas l'élimination des quantificateurs dans le langage $\mathcal{L}$.
Montrez que T a des fonctions de Skolem définissables.

— Axiomes pour les corps commutatifs totalement ordonnés, et :

$$\begin{cases} \forall x_1 \ldots \forall x_n \ (x_1^2 + \cdots + x_n^2 \neq -1) \\ \forall x \exists y \ (x = y^2 \text{ ou } -\mathrm{x} = \mathrm{y}^2) \\ \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \ (y^n + x_1 y^{n-1} + \cdots + x_{n-1} y + x_n = 0) \text{ (pour tous les n impairs)} \end{cases}$$

— Prendre la formule $\exists y \ (y^2 = x)$ (qui est équivalente à $x \geq 0$) ; l'ensemble défini par cette formule n'est ni fini, ni cofini (voir la remarque page 25 et l'exercice précédent).
— Soit $\phi(\bar{x}, y)$, où $x = (x_1, \ldots, x_n)$, une $\mathcal{L}_<$-formule. ϕ est une combinaison booléenne de formules du type $p_n(\bar{x})y^n + p_{n-1}(\bar{x})y^{n-1} + \cdots + p_1(\bar{x})y + p_0(\bar{x}) \geq 0$, où $p_1, \ldots, p_n$ sont des polynômes à coefficients entiers. Ce type de formule peut être réecrit de la façon suivante : y est dans l'union d'un certain ensemble fini d'intervalles de la forme : $[s_0(\bar{x}); s_1(\bar{x})], (-\infty; s_1(\bar{x})]$ ou $[s_0(\bar{x}), \infty)$, où $s_0(\bar{x}), s_1(\bar{x})$ sont des points définissables à partir de $\bar{x}$ à l'aide de formules dépendant uniquement de $p_0, \ldots, p_n$. Comme il est possible de définir un point d'un intervalle (par exemple son milieu) dont les extrémités sont définissables, la théorie a des fonctions de Skolem définissables.

5. Soit $(\mathbb{N}^*, \leq)$ l'ensemble des nombres naturels non nuls muni de la relation d'ordre partiel suivante : $n \leq m$ si n divise m, pour $n, m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les sous-ensembles suivants sont définisables sans paramètres : $\{1\}$, l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers, l'ensemble $\mathcal{D}$ des nombres naturels non nuls qui ne sont pas divisibles par le carré d'un nombre premier.

Considérer les formules
— $\phi(n) := \forall m \ n \leq m$; on a $\{1\} = \{n : \phi(n)\}$.
— $\psi(n) := \neg\phi(n) \ \& \ \forall m(m \leq n \to \phi(m) \vee m = n)$, on a $\mathcal{P} = \{n : \psi(n)\}$.
— $\theta(n) := \neg\phi(n) \ \& \ \neg\psi(n) \ \& \ \forall m(m \leq n \to \phi(m) \text{ ou } \psi(m) \text{ ou } m = n)$; on a $\mathcal{D} = \{n : \neg\theta(n)\}$

6. Pour tout langage $\mathcal{L}$, montrez que deux structures sont élémentairement équivalentes ssi elles le sont pour tout sous-langage fini.
Montrez que si $\mathcal{L}$ est dénombrable, si T est une $\mathcal{L}$-théorie sans modèles finis et si deux modèles dénombrables sont élémentairement équivalents, alors T est complète.

— Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux structures élémentairement équivalentes.
 $(\rightarrow)$: On a : pour tout $\mathcal{L}$-énoncé ϕ, $\mathcal{M} \models \phi$ ssi $\mathcal{N} \models \phi$. En particulier cela reste vrai pour tout sous-langage fini de $\mathcal{L}$.
 $(\leftarrow)$: Soit ϕ un $\mathcal{L}$-énoncé. Soit $\mathcal{L}'$ le sous-langage de $\mathcal{L}$ formé des symboles de fonctions, relations et constantes apparaissant dans ϕ. $\mathcal{L}'$ est fini et ϕ est un $\mathcal{L}'$-énoncé, donc on a : $\mathcal{M} \models \phi$ ssi $\mathcal{N} \models \phi$.

— Soit ϕ une $\mathcal{L}$-formule, on veut montrer que $T \models \phi$ ou $T \models \neg\phi$. Si $T \not\models \phi$, il y a un modèle $\mathcal{M}$ de T tel que $\mathcal{M} \models \neg\phi$. Soit X un sous-ensemble de M de cardinalité au plus $\aleph_0$. Par le théorème de Löwenheim-Skolem descendant, il existe une sous-structure élémentaire $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}$, contenant X et de cardinalité inférieure ou égale à $|X| + |\mathcal{L}| + \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. Puisque T n'a pas de modèle fini, $|B| = \aleph_0$. Comme $\mathcal{B}$ est une sous-structure élémentaire, $\mathcal{B} \models \neg\phi$.
 Si $\mathcal{N}$ était un modèle de T tel que $\mathcal{N} \models \phi$, on pourrait de la même façon trouver une sous-structure élémentaire $\mathcal{A} \models \phi$ de cardinalité $\aleph_0$. Mais cela contredirait le fait que deux modèles dénombrables de T sont élémentairement équivalents. Donc tous les modèles de T satisfont $\neg\phi$, ie $T \models \neg\phi$. Donc T est complète.

C.2 Section 7.5.

1. Montrez que la classe des groupes abéliens infinis où tout élément est d'ordre 2 est $\aleph_0$-catégorique.

 Soit $(G, +, 0)$ un groupe abélien où tout élément est d'ordre 2 (c.a.d tout élément différent de l'élément neutre est d'ordre 2). On peut voir G comme un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel, en définissant la multiplication par un scalaire de façon naturelle : $1.x := x$; $0.x := 0$. On a bien

$$x + x = 1.x + 1.x = (1+1).x = 0.x = 0$$

 Réciproquement tout $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel peut être vu comme un groupe abélien où tout élément est d'ordre 2.
 Si G est de cardinalité $\aleph_0$, il correspond alors à un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel de dimension $\aleph_0$.

2. Soit $\mathcal{L}_0 := \{s\}$, où s est un symbole de fonction unaire. Soit T l'ensemble des $\mathcal{L}_0$ énoncés qui expriment que s est une bijection sans cycles c.a.d. pour chaque $n \in \omega$, on a $\forall x\ s^n(x) \neq x$.
 Montrer que T est $\aleph_1$-catégorique mais pas $\aleph_0$-catégorique.

 Un modèle de T est un ensemble infini M sur lequel le groupe cyclique d'ordre infini (sans-torsion) $\langle s \rangle$ agit :

$$\begin{array}{ccccl} \langle s \rangle & \times & M & \rightarrow M & \\ (s^z & , & m) & \mapsto s^n(m), & z \in \mathbb{Z}, \end{array}$$

 Rappelons que les orbites forment une partition de M (elles sont disjointes et leur union est égale à M). Ici une orbite sous l'action de $\langle s \rangle$ correspond à l'ensemble des images d'un point par $< s >$:

$$\langle s\rangle \{m\} = \{s^z(m) : z \in \mathbb{Z}\}$$

$\mathcal{M}$ vérifie $\forall x\ s^n(x) \neq x$, donc en particulier on a : $\forall x \bigwedge_{n\neq m,\ m,n\in\mathbb{Z}} s^n(x) \neq s^m(x)$, et donc chaque orbite est infinie dénombrable.
le cardinal d'un modèle M sera donc $\aleph_0$ "multiplié par le nombre d'orbites". (Notons aussi que T ne peut donc pas avoir de modèle fini.)
Si M est de cardinalité $\aleph_0$, il peut y avoir une, deux,$\ldots, \aleph_0$ orbites, puisque $1.\aleph_0 = 2.\aleph_0 = \cdots = \aleph_0.\aleph_0 = \aleph_0 = |M|$. Or tout isomorphisme préserve les orbites.
Par contre, si M est de cardinalité $\aleph_1$, le "nombre d'orbites" multiplié par le cardinal d'une orbite en particulier (ie par $\aleph_0$) devra égaler $\aleph_1$, donc il doit y avoir $\aleph_1$ orbites, ie les modèles de cardinalité $\aleph_1$ sont isomorphes.

C.3 Section 8.4.

1. Soit T une $\mathcal{L}$-théorie consistante. Montrez que T est complète ssi tous ses modèles sont élémentairement équivalents.
   ($\Rightarrow$) Supposons que T soit complète.
   Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ deux modèles de T. Supposons que $\mathcal{A} \not\equiv \mathcal{B}$. Il existe donc un $\mathcal{L}$-énoncé τ tel que $\mathcal{A} \models \tau$ et $\mathcal{B} \not\models \tau$ (et donc $\mathcal{B} \models \neg\tau$). Donc $T \not\models \tau$ et $T \not\models \neg\tau$, ce qui contredit l'hypothèse que T soit complète.
   ($\Leftarrow$) Supposons que tous les modèles de T sont élémentairements équivalents et soit τ un $\mathcal{L}$-énoncé. Comme T est consistante, T a au moins un modèle, disons $\mathcal{A}$. Soit $\mathcal{A} \models \tau$ et donc comme tout autre modèle de T est élémentairement équivalent à $\mathcal{A}$, τ est vrai dans tous les modèles de T, ou encore $T \models \tau$. Soit $\mathcal{A} \not\models \tau$, et donc $\mathcal{A} \models \neg\tau$ et par le même raisonnement, $T \models \neg\tau$.

   Remarque : Notons que cet exercice implique que si T est complète, alors elle est équivalente à une théorie de la forme $Th(\mathcal{M})$, où $\mathcal{M} \models T$.
   En effet, comme T est consistante, T a un modèle, disons $\mathcal{M}$. On a donc que $T \subset Th(\mathcal{M})$. Montrons que pour tout $\sigma \in Th(\mathcal{M})$, $T \models \sigma$ (et donc T et $Th(\mathcal{M})$ seront équivalentes). Par l'exercice, tout modèle de T satisfait σ (puisqu'il est élémentairement équivalent à $\mathcal{M}$), autrement dit $T \models \sigma$.

2. Montrez que la classe de tous les groupes est une classe élémentaire.
   Pour $\mathcal{L} = \{., e\}$, une $\mathcal{L}$-structure est un ensemble muni d'une interprétation pour la fonction binaire ".", et pour la constante "e". On voit donc que les groupes sont des $\mathcal{L}$-structures.

   Par définition, $\mathcal{K}$ sera élémentaire s'il existe un ensemble de $\mathcal{L}$-énoncés Σ tel que $\mathcal{K}$ soit la classe de tous les modèles de Σ (noté par $\mathcal{K} = Mod(\Sigma)$).

   Une axiomatisation de la théorie des groupes est donnée, par exemple, par les trois énoncés suivants :

$\sigma_1 \equiv \forall x(e.x = x)$
$\sigma_2 \equiv \forall x\forall y\forall z(x.(y.z) = (x.y).z)$
$\sigma_3 \equiv \forall x\exists y(x.y = y.x = e)$
On peut donc prendre $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$

Remarque : on a bien que $\Sigma \vDash \theta_1 \equiv \forall x(x.e = x \,\&\, e.x = x)$.
Preuve : Soit y tel que $e = y.x = x.y$. On a donc $x.e = x.(y.x) = (x.y).x = e.x = x$.
On aurait donc pu prendre aussi $\Sigma' = \{\theta_1, \sigma_2, \sigma_3\}$.

3. Montrez que la classe $\mathcal{C}$ des corps finis n'est pas élémentaire.
Appliquer la Proposition 2.1 : cette classe n'est pas fermée par ultraproduits.
Voir exercice 12. Prendre

$$T_n := \begin{cases} \text{axiomes pour les corps} \\ A \\ \exists x_1 \ldots \exists x_n (\bigwedge_{1\leq i<j\leq n} x_i \neq x_j) \end{cases}$$

4. Donner une axiomatisation de la théorie des corps algébriquement clos. Montrer que cette théorie n'est pas complète.

Une axiomatisation (notée ACF) dans $\mathcal{L} = \{+, -, ., 0, 1\}$ est par exemple :

-axiomes pour les groupes additifs abéliens, et :

-axiomes pour les anneaux :
$\forall x\forall y\forall z\,(x - y = z \leftrightarrow x = y + z)$ car "-" a été ajouté dans le langage
$\forall x\forall y\forall z\,(x.(y.z) = (x.y).z)$
$\forall x\,(x.1 = 1.x = 1)$ (anneau unitaire)
on peut ajouter aussi : $\forall x(x.0 = 0.x = 0)$ mais cela découle des axiomes pour les groupes additifs et de la distributivité
$\forall x\forall y\forall z\,(x.(y + z) = (x.y) + (x.z))$
$\forall x\forall y\forall z\,((x + y).z = (x.z) + (y.z))$

-axiomes spécifiques aux corps commutatifs :
$\forall x\,(x \neq 0 \to \exists y\, x.y = 1)$
$\forall x\forall y\,(x.y = y.x)$ (commutativité)

-la série infinie d'axiomes (propriété d'être algébriquement clos) : pour chaque $n \in \omega$:

$$\forall a_0 \cdots \forall a_{n-1}\, \exists x\, (x^n + \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0)$$

Soit maintenant ψ_p exprimant qu'un corps est de caractéristique p :

$$\psi_p := \forall x\, \underbrace{x + \cdots + x}_{p\,\text{fois}} = 0$$

Pour p un nombre premier strictement positif, soient $ACF_p := ACF \cup \{\psi_p\}$ et $ACF_0 := ACF \cup \{\neg\psi_p : p > 0\}$ les théories des corps algébriquement clos de caractéristiques respectives p et 0. Ces deux théories étant consistantes, ACF n'est pas complète.

5. Soit $\mathcal{L} = \{E\}$, où E une relation binaire. Soit T la $\mathcal{L}$-théorie d'une relation d'équivalence avec un nombre infini de classes infinies. Donner une axiomatisation de T.

   -E est une relation d'équivalence :
   $\forall x E(x,x)$
   $\forall x \forall y (E(x,y) \to E(y,x))$
   $\forall x \forall y \forall z\, ((E(x,y) \wedge E(y,z)) \to E(x,z))$

   -il y a une infinité de classes d'équivalence (série infinie des axiomes :)

$$\phi_n := \exists x_1 \ldots \exists x_n (\bigwedge_{1 \le i < j \le n} \neg E(x_i, x_j)) \text{ pour chaque } n \in \omega$$

   -chaque classe est infinie (série infinie des axiomes :)

$$\psi_n := \forall x \exists x_1 \ldots \exists x_n (\bigwedge_{1 \le i < j \le n} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} E(x_i, x)) \text{ pour chaque } n \in \omega$$

6. On considère le langage $\mathcal{L} = \{E\}$, où E est une relation d'équivalence. On définit la $\mathcal{L}$-théorie $T := \{\sigma, \sigma_n : n \in \omega\}$ suivante :
   $\sigma := (\forall x\ E(x,x))\ \&\ (\forall x \forall y\ (E(x,y) \to E(y,x)))\ \&\ (\forall x \forall y \forall z\ ((E(x,y) \& E(y,z)) \to E(x,z)))$.
   E est une relation d'équivalence.
   $\sigma_{2n} := \exists u\ \tau_n(u)$, où $\tau_n(u)$ est la formule : $\exists x_1 \cdots \exists x_n ((\bigwedge_{i \neq j,\ i,j=1}^{n} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} E(x_1, x_j) \wedge (\forall x\ E(x_1, x) \to \bigvee_{i=1}^{n} x = x_i) \wedge (u = x_1))$.
   Cette formule $\tau_n(u)$ exprime la propriété que u appartient à une classe d'équivalence de cardinalité n.
   $\sigma_{2n+1} := \forall u \forall v\ (\tau_n(u)\ \& \tau_n(v) \to E(u,v))$.
   E a une seule classe de cardinalité n.
   Montrons que :

   T est consistante. Voici 3 preuves de la consistence de T :
   (i) Considérons les entiers naturels strictement positifs et définissons $E(x,y)$ ssi $\exists u\ u \le x,\ y < 2u$. Un modèle $\mathcal{M}$ de T est alors : $(\mathbb{N} - \{0\}, E)$.
   (ii) Soit Δ une partie finie de T, soit $m \in \omega$ l'indice maximal apparaissant dans les énoncés $\sigma_i,\ i \in \omega$, appartenant à Δ. Considérons $\mathbb{N}^2$ et soient $\bar{x}_1 = (x_1, y_1)$, $\bar{x}_2 = (x_2, y_2)$ définissons $E(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ ssi $\bigvee_{j=0}^{m}\ y_1 + x_1 = y_2 + y_2 = j\ \vee\ (y_1 + x_1 > m\ \wedge\ x_2 + y_2 > m)$.
   (iii) Considérons des sous-ensembles finis disjoints A_i de cardinalité $i \in \omega - \{0\}$: $|A_i| = i$. Définissons $E(x,y)$ sur l'union disjointe $\dot{\bigcup}_{i \in \omega - \{0\}} A_i$ de ces sous-ensembles A_i par : ($E(x,y)$ ssi il existe $i \in \omega - \{0\}$ tel que $x,\ y \in A_i$).

T a l'e.q. On introduit un ensemble $C := \{c_n :\ n \in \omega - \{0\}\}$ de nouvelles constantes et posons $T_C := T \cup \{\tau_n(c_n) :\ n \in \omega - \{0\}\}$.
Montrons tout d'abord que T_C a l'e.q. dans L_C.
On applique l'exercice précédent et donc il suffit de montrer que toute $\mathcal{L}_C$-formule de la forme : $\exists x_0\ \phi(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ où $\phi(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ une $\mathcal{L}_C$-formule sans quantificateur, est équivalente dans T_C à une $\mathcal{L}_C$-formule sans quantificateurs.
Posons $\bar{x} := (x_1, \cdots, x_n)$. Comme $\exists x_0(\phi_1(x_0, \bar{x}) \vee \phi_2(x_0, \bar{x}))$ est équivalente à $\exists x_0 \phi_1(x_0, \bar{x}) \vee \exists x_0 \phi_2(x_0, \bar{x})$, on peut supposer que $\phi(x_0, \bar{x})$ est de la forme $\bigwedge_{i \in I} E(x_0, u_i) \wedge \bigwedge_{i \in I'} x_0 = u_i \wedge \bigwedge_{j \in J} \neg E(x_0, u_j) \wedge \bigwedge_{j \in J'} x_0 \neq u_j\ \&\ \theta(x_1, \cdots, x_n)$, où $I, I', J, J' \subset \{1, \cdots, n\}$ et $\theta(x_1, \cdots, x_n)$ est une $\mathcal{L}_C$-formule sans quantificateurs et $u_i \in \{x_i, c_i\}$, $i \in I \cup I'$ et $u_j \in \{x_j, c_j\}$, $j \in J \cup J'$.
Si $I' \neq \emptyset$, disons $i_1 \in I'$,

$$T \models \exists x_0\ \phi(x_0, x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \phi(u_{i_1}, x_1, \cdots, x_n).$$

Supposons désormais que $I' = \emptyset$.
Si $I \cap J \neq \emptyset$, alors la formule $\phi(x_0, \bar{x})$ est contradictoire et

$$T \models \exists x_0 \phi(x_0, \bar{x}) \leftrightarrow \neg E(c_1, c_1).$$

Sinon, on suppose tout d'abord que $I = \emptyset$, alors comme la condition sur x_0 peut toujours être remplie puisque pour chaque naturel non nul n, tout modèle de T a une classe d'équivalence de cardinalité n,

$$T \models \exists x_0 \phi(x_0, \bar{x}) \leftrightarrow \theta(x_1, \cdots, x_n).$$

Si $I \neq \emptyset$, alors puisque E est une relation transitive, $\phi(x_0, \bar{x})$ est équivalente à $E(x_0, u_{i_0}) \wedge \bigwedge_{j \in J} \neg E(x_0, u_j) \wedge \bigwedge_{j \in J'} x_0 \neq u_j \wedge \theta'(x_1, \cdots, x_n)$, où $i_0 \in I$ et $\theta'(x_1, \cdots, x_n)$ est une $\mathcal{L}_C$-formule sans quantificateurs.
Pour chaque sous-ensembles $J''' \subset J'' \subset J'$, on pose $\chi_{J''', J''}((u_j)_{j \in J'})$ la formule sans quantificateurs : $\bigwedge_{j_1 \neq j_2, j_1, j_2 \in J''} u_{j_1} \neq u_{j_2} \wedge \bigwedge_{j' \in J'} \bigvee_{j'' \in J''} u_{j'} = u_{j''} \wedge \bigwedge_{j''' \in J'''} E(u_{j'''}, u_{i_0}) \wedge \bigwedge_{j'' \in J'' - J'''} \neg E(x_{j''}, u_{i_0})$. On a alors l'équivalence suivante :

$$T \models \exists x_0 \phi(x_0, \bar{x}) \leftrightarrow$$

$$\bigvee_{J''' \subset J'' \subset J'} (\bigwedge_{j \in J} \neg E(u_{i_0}, u_j) \wedge \chi_{J''', J''}((u_j)_{j \in J'}) \wedge \bigwedge_{j=1}^{|J'''|} \neg E(u_{i_0}, c_j) \wedge \theta'(x_1, \cdots, x_n)).$$

Comme nous n'avons pas introduit de nouvelles variables libres jusqu'à présent, il reste simplement à montrer qu'un $\mathcal{L}_C$-énoncé sans quantificateurs est équivalent à une $\mathcal{L}$-formule sans quantificateurs. Soit $\theta(x_1, \cdots, x_m)$ une $\mathcal{L}$-formule sans quantificateurs et soit $\theta(c_{i_1}, \cdots, c_{i_m})$, où $i_1, \cdots, i_m \in \omega - \{0\}$ le $\mathcal{L}_C$-énoncé correspondant. La validité de cet énoncé est déterminée par T_C et donc est équivalente dans tous les modèles de T à soit $E(x_1, x_1)$ soit à $\neg E(x_1, x_1)$.

T est complète. Soit ϕ un énoncé. Comme T a l'e.q., il existe une formule sans quantificateurs $\theta(x_1, \cdots, x_n)$ telle que $T \models \forall x_1 \cdots \forall x_n\ (\phi \leftrightarrow \theta(x_1, \cdots, x_n))$. En particulier, $T \models \forall x_1\ (\phi \leftrightarrow \theta(x_1, \cdots, x_1))$. Or $\theta(x_1, \cdots, x_1)$ est une combinaison booléenne de formules atomiques : $E(x_1, x_1)$, $x_1 = x_1$ qui sont conséquence de T et donc ϕ est soit toujours vraie soit toujours fausse.

T a un modèle qui contient un nombre infini de classes d'équivalences infinies. Ecrivons un ensemble d'axiomes qui traduit cette propriété. Soit $T_\infty := T \cup \{\sigma_{n,m} : n, m \in \omega - \{0\}\}$, où $\sigma_{n,m}$ exprime qu'il y a n éléments inéquivalents et que chacun appartiennent à une classe d'équivalence contenant m éléments distincts. On remarque que tout modèle de T est modèle d'une partie finie de T_∞ et donc en appliquant le théorème de compacité, on aura que T_∞ a un modèle. Ecrivons $\sigma_{n,m} :=$

$$\exists x_1 \cdots \exists x_{n.m} \bigwedge_{0 \leq i < j < n} \neg E(x_{i.m+1}, x_{j.m+1}) \wedge \bigwedge_{i=0}^{n} (\bigwedge_{j=1}^{m} (E(x_{i.m+1}, x_{i.m+j}) \wedge \bigwedge_{j'=1, j' \neq j}^{m} x_{i.m+j} \neq x_{i.m+j'})).$$

7. Montrer que la classe des anneaux commutatifs locaux c.a.d. avec un unique idéal maximal est finiment axiomatisable. (Donner aussi un exemple d'un tel anneau qui n'est pas un corps.)

   Lemme : Un anneau A est local ssi l'ensemble des éléments non inversibles forme un idéal de A (qui sera alors l'unique idéal maximal de A).

   $\Rightarrow$: Soit I l'unique idéal maximal de A. Par définition $I \neq A$, donc I ne contient aucun élément inversible de A. Montrons que I contient tous les éléments non inversibles de A, ie que si $x \notin I$, alors x est inversible. Soit donc $x \notin I$. xA est un idéal.
   -si $xA = A$, alors $\exists y \in A, xy = 1$ donc x est inversible.
   -si $xA \neq A$, alors (par le Lemme de Zorn), xA est contenu dans un idéal maximal différent de I ce qui contredit l'unicité de I.
   $\Leftarrow$: Si l'ensemble des éléments non inversibles forme un idéal I, celui-ci est maximal et est l'unique idéal maximal car tout idéal J qui le contiendrait strictement contiendrait un élément inversible donc serait égal à A. De même un idéal maximal $J \neq I$ contiendrait un élément inversible. L'anneau A est donc local.

   Une axiomatisation de la classe des anneaux commutatifs locaux peut donc être :
   -axiomes pour les anneaux unitaires commutatifs, et, en posant $\phi(x) := \forall y (x.y \neq 1)$ pour exprimer la "non-inversibilité" :
   -axiomes exprimant que les éléments non-inversibles forment un idéal :
   $\forall x \forall y (\phi(x) \wedge \phi(y) \to \phi(x - y))$ (I est sous-groupe additif de A)
   $\forall x \forall a (\phi(x) \to \phi(a.x))$
   Cette axiomatisation est finie.
   Exemple d'un tel anneau : soit p un nombre premier ; posons $\mathbb{Z}[p] := \{\frac{a}{b} :\ a, b \in \mathbb{Z}$ et p ne divise pas $b\}$. C'est un sous-anneau $(\mathbb{Q}, +, ., 0, 1)$, mais ce n'est pas un corps..., il a un unique idéal maximal : $p.\mathbb{Z}[p]$. Et donc c'est un exemple d'un anneau.

8. Montrez que la classe des groupes abéliens, sans-torsion, divisibles est élémentaire, mais pas finiment axiomatisable.

Notons $\mathcal{K}$ cette classe.
preuve 1 : on considère maintenant le réduit de $\mathbb{Z}[p] := \{\frac{a}{b} :\ a, b \in \mathbb{Z}$ et p ne divise pas $b\}$ au langage des groupes abéliens (et donc comme sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +, -, 0)$, avec $p \in \mathcal{P}$, où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers.
On a que $(\mathbb{Z}[p], +, -, 0)$ est un groupe abélien, sans-torsion mais il n'est pas divisible (car 1 n'est pas divisible par p).
Notons qu'un groupe abélien est divisible ssi il est p-divisible pour chaque $p \in \mathcal{P}$ (justifier).
On considère $(\prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}[p]/\mathscr{U}, +, -, 0)$, avec $\mathscr{U}$ un ultrafiltre non principal sur $\mathcal{P}$. Par le théorème de Łos, c'est un groupe abélien, sans-torsion et cette fois il est divisible car pour tout $p \in \mathcal{P}$, $\{q \in \mathcal{P} : \mathbb{Z}[q]$ est p-divisible $\}$ est cofini.
Preuve 2 : Soit Σ l'ensemble d'axiomes pour les groupes défini dans l'exercice 2 (notation multiplicative), et $\varphi := \forall x \forall y (x.y = y.x)$ (groupes abéliens). Soit $n \in \mathbb{N}$, et

$$\phi_n := \underbrace{x.x.\ldots.x}_{n\text{ fois}} = e \ \text{ et } \ \psi_{\mathrm{n}} := \underbrace{x.x.\ldots.x}_{\mathrm{n\ fois}} = \mathrm{y}$$

Soient B et C les ensembles infinis d'axiomes exprimant respectivement le fait qu'un groupe soit "sans-torsion" et "divisible" :

$$B := \{\forall x (x = e \vee \neg\phi_n(x)) : n \geq 2\}\ C := \{\forall y \exists x \psi_n(x, y) : n \geq 2\}$$

On prend pour ensemble d'axiomes $T := \Sigma \cup \{\varphi\} \cup B \cup C$.

L' ensemble d'axiomes T est infini. On peut montrer qu'on ne peut pas axiomatiser la classe $\mathcal{K}$ par un ensemble fini d'énoncés ; (remarque : on ne peut pas non plus axiomatiser "groupes abéliens sans-torsion" par un ensemble fini d'axiomes (voir cours de C. Michaux), car tout ensemble fini d'énoncés vrai dans tous les groupes sans-torsion est aussi vrai dans un certain groupe de torsion. Le complémentaire dans la classe des groupes abéliens de la classe des groupes abéliens sans-torsion n'est donc pas élémentaire (voir Proposition 8.2.4) mais on peut aussi le montrer directement (exercice 10))
Soit $\{\theta_1, \ldots, \theta_k\}$ un tel ensemble fini d'énoncés et soit la conjonction $\theta := \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_k$. Un modèle $\mathcal{M}$ de $\Sigma \cup B \cup C$ satisfait θ. Par le théorème de compacité, il existe $B^{'}$ (respectivement C') un sous-ensemble fini de B (respectivement de C) tel que tout groupe abélien modèle de $B^{'} \cup C'$ soit un modèle de θ.
Soit $n_0 := max\{n : \forall x(x = e \vee \neg\phi_n(x)) \in B^{'}\}$; $m_0 := max\{n : \forall y \exists x \psi_n(x, y) \in C'\}$; $N := max\{n_0, m_0\}$. Si p premier tel que $p > N$, $(\mathbb{Z}_p, +) \models B^{'} \cup C'$ et donc $(\mathbb{Z}_p, +) \models \theta$, et pourtant $(\mathbb{Z}_p, +)$ n'est pas sans-torsion.

9. Montrez qu'il y a $\aleph_0$ groupes abéliens, sans-torsion, divisibles dénombrables non-isomorphes.
On remarque que tout groupe abélien, divisible sans torsion peut être muni d'une structure de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel ([8] p.41) (et inversement tout $\mathbb{Q}$-espace vectoriel est un modèle de T. En effet :
-Si V est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, le groupe additif $(V, +, -, 0)$ est abélien, sans-torsion

et divisible.
-Si G est un groupe abélien, sans-torsion et divisible, si $g \in G$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver $h \in G$ tel que $nh = g$. Si $nk = g$, alors $n(h-k) = 0$. Comme G est sans-torsion, il y a un unique $h \in G$ tel que $nh = g$. En appelant cet élément g/n, on peut voir G comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel avec la multiplication par un scalaire : $\frac{m}{n}g = m(g/n)$.
Deux $\mathbb{Q}$-espaces sont isomorphes ssi ils ont la même dimension, donc deux modèles de T sont déterminés à isomorphisme près par leur dimension. Si G (en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel) est de dimension λ, alors $|G| = \lambda.\aleph_0 = max\{\lambda, \aleph_0\}$ $(\star)$.
Notons que T n'est pas $\aleph_0$-catégorique, puisque pour tout $\lambda \in \omega$, $|G| = \aleph_0$. Il y a donc $\aleph_0$ modèles non-isomorphes, correspondant aux $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels de dimensions respectives $1, 2, \cdots$.
Par contre on voit que T est κ-catégorique pour $\kappa > \aleph_0$, puisque, d'après $(\star)$, lorsque G est de cardinalité κ, G est de dimension $\lambda = \kappa$.
Montrons $(\star)$ pour $\lambda \geq \aleph_0$.
Soit G un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel et B une base de G de cardinalité λ : $B = (b_\alpha)_{\alpha<\lambda}$. Un élément $g \in G$ s'écrit : $g = \sum_{\alpha_i \in \lambda, i \in I} b_{\alpha_i} q_i$, I fini, $q_i \in \mathbb{Q}$, $b_{\alpha_i} \in B$. Considérons $\tilde{B} := \{b.q : b \in B, q \in \mathbb{Q}\} \cong B \times \mathbb{Q}$. G s'injecte dans $\bigcup_n \tilde{B}^n$ par la fonction : $g \mapsto (b_{\alpha_1} q_1, \ldots, b_{\alpha_n} q_n)$; donc $|G| \leq \left|\bigcup_n \tilde{B}^n\right|$.
On sait aussi que $\left|\tilde{B}\right| = |B \times \mathbb{Q}| = |B| = \lambda$ (règles de calcul sur les cardinaux infinis et car on a supposé $\lambda \geq \aleph_0$) ; et que $\left|\bigcup_n \tilde{B}^n\right| \leq \left|\tilde{B}\right|$ (voir Annexe B).
On a alors $|B| \leq |G| \leq \left|\bigcup_n \tilde{B}^n\right| \leq \left|\tilde{B}\right| = |B| = \lambda = dimG$.

10. Montrez que la classe des groupes abéliens de torsion n'est pas élémentaire.

Voir le corollaire dans l'exercice 8. On peut aussi le montrer directement en utilisant le lemme suivant, dont une conséquence sera que tout énoncé vrai dans tous les groupes abéliens de torsion est aussi vrai dans un groupe qui n'est pas de torsion.

Lemme : (voir cours de C. Michaux). Si A est un ensemble d'énoncés (du premier ordre) vrai dans chaque groupe $(\mathbb{Z}_p, +)$, alors il y a un groupe $(G, +, 0)$ qui contient un élément g d'ordre infini et qui est un modèle de A.

Preuve du lemme : On enrichit $\mathcal{L}$ des symboles $+, 0$ et d'un nouveau symbole de constante c. Soit T_n l'ensemble d'axiomes :

$$T_n := \begin{cases} \text{axiomes pour les groupes abeliens} \\ A \\ c \neq 0 \\ c + c \neq 0 \\ \vdots \\ \underbrace{c + c + \cdots + c}_{n \, \text{fois}} \neq 0 \end{cases}$$

On pose $T := \bigcup_{n\in\omega} T_n$.
Pour chaque n, T_n a un modèle $(\mathbb{Z}_p, +, 0, 1)$, $p > n$, p premier, car l'ordre de 1 dans $(\mathbb{Z}_p, +)$ est p. Par le théorème de compacité, T a un modèle $(G, +, 0, g)$, où g est l'interprétation du symbole de constante c. Et donc G est un groupe abélien avec un élément g d'ordre infini.

11. Soit $(G, +, <, 0)$ un groupe abélien totalement ordonné ; G est archimédien si pour tout x, y dans G, tels que $0 < x < y$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $y < m.x$. Montrez que la classe des groupes archimédiens n'est pas élémentaire.

    $\mathbb{R}^\omega/\mathscr{U}$, $\mathscr{U}$ ultrafiltre non principal, n'est pas archimédien. (Considérer $0 < x = \left[\frac{1}{n}\right] < y = 1$. On a que pour tout naturel m différent de 0, $m.\left[\frac{1}{n}\right] < 1$ car $\{n \in \omega : \frac{m}{n} < 1\} = \{n \in \omega : n \geq m+1\}$ et donc inclus dans tout ultrafiltre non principal.)

12. Montrer que $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, +, 0)$ n'est pas élémentairement équivalent à $(\mathbb{Z}, +, 0)$.

    Considerer les cardinalités des quotients $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (ou de façon équivalente l'indice de $2G$ dans G pour G un groupe abélien).
    On écrit l'énoncé suivant $\exists u\ (u \neq 0\,\&\ \forall x\ \exists y\ (x = y + y \ \text{ ou } x = y + y + u))$ et on montre qu'il est vrai dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mais pas dans $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$.

13. Trouver deux ordres totaux denses sans extrémités non-isomorphes mais de même cardinalité.

    Rappel : cette théorie (notons la DLO) est $\aleph_0$-catégorique mais pas $\aleph_1$-catégorique. Soient $\mathcal{M}_1 := (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, <)$ et $\mathcal{M}_2 := (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}, <)$, avec $<$ l'ordre lexicographique : $(a, b) < (c, d)$ ssi $a < c$ ou ($a = c$ et $b < d$). $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont deux modèles de DLO, ayant même cardinalité $\aleph_1$.

    Supposons qu'il existe un isomorphisme $f : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$. Cet isomorphisme respecte l'ordre et donc vérifie $f(0, 0) < f(1, 0)$. Supposons que $f(0, 0)$ et $f(1, 0)$ soient dans deux "copies" différentes de $\mathbb{R}$, i.e. respectivement dans $\{i\} \times \mathbb{R}$ et $\{j\} \times \mathbb{R}$, $i < j$. On peut supposer sans perte de généralité que $f(0, 0) \in \{0\} \times \mathbb{R}$, par exemple $f(0, 0) = (0, 0)$, et que $f(1, 0) \in \{n\} \times \mathbb{R}$, par exemple $f(1, 0) = (n, 0)$, $n \in \mathbb{N}$.
    Comme entre $\{0\} \times \mathbb{R}$ et $\{1\} \times \mathbb{R}$ on a une infinité de copies de $\mathbb{R}$ (dans $\mathcal{M}_1$) mais que dans $\mathcal{M}_2$ entre $\{0\} \times \mathbb{R}$ et $\{n\} \times \mathbb{R}$ on n'a qu'un nombre fini de copies de $\mathbb{R}$, par le principe des tiroirs il existe $0 \leq q_1 < q_2 \leq 1$ tels que $f(q_1, 0)$ et $f(q_2, 0)$ appartiennent à la même copie, disons $\{m\} \times \mathbb{R}$), $0 \leq m \leq n$. Comme f respecte l'ordre, on doit avoir $(m, r) := \mathit{sup}\, f(q_1, \mathbb{R}^+) < f(q_2, 0)$, et pour tous $x \in \mathbb{R}, (q_1, x) < f^{-1}(m, r) \leq (q_2, 0)$. Or dans $\mathcal{M}_1$, il y a des éléments strictement plus grands que ceux de $\{q_1\} \times \mathbb{R}$ et strictement plus petits que $f^{-1}(m, r)$; contradiction.

14. Soient T_1 et T_2 deux $\mathcal{L}$-théories telles que $T_1 \cup T_2$ n'a pas de modèles. Alors il existe un enoncé θ tel que $T_1 \models \theta$ et $T_2 \models \neg\theta$.

Par le théoreme de compacité, il existe un sous-ensemble fini $\Sigma \subset T_1 \cup T_2$ qui n'est pas satisfaisable. Comme T_1 et T_2 sont consistantes, Σ n'est ni inclus à T_1, ni à T_2. Supposons que $\Sigma \cap T_1 \neq \emptyset$, posons $\theta := \bigwedge_{\sigma \in \Sigma \cap T_1} \sigma$. On a que $T_1 \models \theta$.
Montrons que $T_2 \models \neg\theta$. Sinon, il existerait $\mathcal{M} \models T_2$ et $\mathcal{M} \models \theta$. Mais $\Sigma \subset T_2 \cup \Sigma \cap T_1$ et donc Σ aurait un modèle, contradiction.

15. Soient T_1 et T_2 deux $\mathcal{L}$-théories telles que pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models T_1$ ssi $\mathcal{A} \not\models T_2$. Montrez que T_1 et T_2 sont finiment axiomatisables.
Rappel : T est finiment axiomatisable si il existe un $\mathcal{L}$-énoncé σ tel que la classe des modèles de T coincide avec celle de σ.

On peut utiliser l'exercice précédent, car on voit ici que $T_1 \cup T_2$ n'a pas de modèles. Il existe alors un $\mathcal{L}$-énoncé θ tel que $T_1 \vDash \theta$ et $T_2 \vDash \neg\theta$.

Montrons que $\mathcal{A} \in Mod(T_1) \leftrightarrow \mathcal{A} \in Mod(\theta)$.
$(\rightarrow)$: $\mathcal{A} \in Mod(T_1) \rightarrow \mathcal{A} \in Mod(\theta)$ car θ est une conséquence logique de T_1.
$(\leftarrow)$: on utilise "$\mathcal{A} \notin Mod(\neg\theta) \rightarrow \mathcal{A} \notin Mod(T_2)$", qui est la contraposée du fait que $\neg\theta$ soit une conséquence logique de T_2. Cela donne : $\mathcal{A} \in Mod(\theta) \rightarrow \mathcal{A} \notin Mod(\neg\theta) \rightarrow \mathcal{A} \notin Mod(T_2) \rightarrow \mathcal{A} \in Mod(T_1)$. Donc $\mathcal{A} \in Mod(T_1) \leftrightarrow \mathcal{A} \in Mod(\theta)$. De meme pour T_2 et $\neg\theta$.

C.4 Section 10.3.

1. Soit $\mathcal{C}$ une classe de $\mathcal{L}$-structures qui est inductive c.a.d. fermée par unions de chaînes. Soit $\mathcal{C}^{ec}$ la classe des structures de $\mathcal{C}$ qui sont existentiellement closes dans $\mathcal{C}$. Montrez que $\mathcal{C}^{ec}$ est non vide et que cette classe est fermée par unions de chaînes.

i) On procède comme dans la première partie de la preuve du critère de Lindström. Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$. On trouve tout d'abord une extension $\mathcal{A}_1 \in \mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$, où toute formule existentielle à paramètres dans $\mathcal{A}$ vraie dans un élément de $\mathcal{C}$ contenant $\mathcal{A}$ est vraie. Ensuite remplaçant dans la construction $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A}_1$, on itère ω fois. Soit $\mathcal{A}^* := \bigcup \mathcal{A}_n$, où $\mathcal{A}_n \in \mathcal{C}$, $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$, pour tout $n \in \omega$ et toute formule existentielle à paramètres dans $\mathcal{A}_n$ vraie dans un élément de $\mathcal{C}$ contenant $\mathcal{A}_n$ est vraie dans $\mathcal{A}_{n+1}$. Il est aisé de vérifier que $\mathcal{A}^* \in \mathcal{C}^{ec}$.
Construisons $\mathcal{A}_1 \in \mathcal{C}$. On énumère les formules existentielles de $\mathcal{L}_A$ (il n'y en a pas plus que $max\{|A|, \aleph_0\}$). Soit $(\phi_\alpha)_{\alpha<\mu}$ une telle énumération. Posons $\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}$; par induction sur $\beta < \mu$ on suppose que pour chaque formule ϕ_α où $\alpha < \beta$ l'on a un élément $\mathcal{A}_\alpha$ de $\mathcal{C}$ contenant $\mathcal{A}$ tel que si ϕ_α est vrai dans une extension de $\mathcal{A}_\alpha$ appartenant à $\mathcal{C}$, alors ϕ_α est vraie dans $\mathcal{A}_\alpha$. De plus on suppose que si $\gamma_1 < \gamma_2 < \beta$, alors $\mathcal{A}_{\gamma_1} \subset \mathcal{A}_{\gamma_2}$.
On considère alors ϕ_β et la structure $\bigcup_{\gamma<\beta} \mathcal{A}_\gamma$ qui appartient à $\mathcal{C}$ par hypothèse.
Si ϕ_β est vraie dans une extension $\mathcal{D} \in \mathcal{C}$ de $\bigcup_{\gamma<\beta} \mathcal{A}_\gamma$, alors on pose $\mathcal{A}_\beta = \mathcal{D}$, sinon on pose $\mathcal{D} := \bigcup_{\gamma<\beta} \mathcal{A}_\gamma$. On a bien que pour tout $\delta \leq \beta$, si ϕ_δ est vraie dans une extension de $\mathcal{A}_\beta$, alors elle est déjà vraie dans $\mathcal{A}_\beta$.

ii) Soit $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ une chaîne de $\mathcal{C}^{ec}$. Montrons que $\bigcup \mathcal{M}_i \in \mathcal{C}^{ec}$. Soit donc $\bar{a} \subseteq \bigcup M_i$, ϕ une formule sans quantificateurs, et $\mathcal{N} \in \mathcal{C}$ telle que $\bigcup \mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{N}$ et $\mathcal{N} \models \exists \bar{x}\ \phi(\bar{x}, \bar{a})$. Il existe i tel que $\bar{a} \subseteq M_i$ et $\mathcal{M}_i$ est existentiellement close par hypothèse, donc $\mathcal{M}_i \models \exists \bar{x}\ \phi(\bar{x}, \bar{a})$, et donc $\bigcup \mathcal{M}_i \models \exists \bar{x}\ \phi(\bar{x}, \bar{a})$.

2. Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre et T une théorie qui a une axiomatisation $\forall\exists$. Soit $\mathcal{A} \subset_{ec} \mathcal{B}$ deux $\mathcal{L}$-structures avec $\mathcal{B}$ un modèle de T. Montrez que $\mathcal{A}$ est un modèle de T et que si $\mathcal{B}$ est existentiellement clos dans la classe des modèles de T, alors $\mathcal{A}$ l'est également.

   Remarque : Une théorie consistante T a une axiomatisation $\forall\exists$ si on peut trouver un ensemble Σ d'énoncés de la forme $\forall x_1 \ldots \forall x_m \exists y_1 \ldots \exists y_n$ pour $m, n \geq 0$ tel que : $\Sigma \models T$.

   Soit donc Σ un tel ensemble d'énoncés, et $\sigma \in \Sigma$. σ est de la forme $\forall \bar{x} \exists \bar{y} \theta(\bar{x}, \bar{y})$. Montrons que $\mathcal{A} \models \sigma$. Soit $\bar{a} \subseteq A$. $\mathcal{B} \models \sigma$ et $\bar{a} \subseteq A \subseteq B$, donc $\mathcal{B} \models \exists \bar{y} \theta(\bar{a}, \bar{y})$. $\mathcal{A} \subset_{ec} \mathcal{B}$, donc $\mathcal{A} \models \exists \bar{y} \theta(\bar{a}, \bar{y})$, i.e. $\mathcal{A} \models \sigma$. $\mathcal{A}$ est donc un modèle de T.

   Supposons maintenant que $\mathcal{B}$ soit existentiellement clos dans la classe des modèles de T.
   Soit $\mathcal{C}$ un modèle de T tel que $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$. On va utiliser le théorème 7.13 d'amalgamation existentielle. Soit $\bar{a}$ un uple infini énumérant A. Comme $A \subseteq \mathcal{C}$, sans perte de généralité on peut supposer que le plongement f de $\langle \bar{a} \rangle$ dans $\mathcal{C}$ est l'identité. Dire que $(\mathcal{B}, \bar{a}) \Rrightarrow_1 (\mathcal{C}, f(\bar{a}))$ est alors équivalent à la propriété que toute formule existentielle à paramètres dans A, vraie dans $\mathcal{B}$ est vraie dans $\mathcal{C}$ (ce qui est bien le cas car $\mathcal{A} \subset_{ec} \mathcal{B}$ et la formule est existentielle et donc dès qu'elle est vraie dans $\mathcal{A}$ elle est vraie dans $\mathcal{C}$).
   Il existe donc $\mathcal{D}$ et un plongement de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$ qui est l'identité sur A et tel que $\mathcal{B} \prec \mathcal{D}$.
   Montrons que $\mathcal{A} \subset_{ec} \mathcal{C}$. Soit ϕ une formule existentielle à paramètres dans A et vraie dans $\mathcal{C}$. Comme $\mathcal{C}$ se plonge dans $\mathcal{D}$, cette formule est aussi satisfaite par $\mathcal{D}$ et comme $\mathcal{B} \prec \mathcal{D}$, elle est vraie dans $\mathcal{B}$. Or $\mathcal{A} \subset_{ec} \mathcal{B}$, et donc elle est vraie dans $\mathcal{A}$, ce qu'il fallait montrer.

3. Soit T la théorie des groupes abéliens divisibles sans torsion dans le langage $\mathcal{L} := \{+, -, 0\}$. Axiomatisez cette théorie. Montrez qu'elle est modèle-complète.

   On peut utiliser le critère de Lindström car T n'a pas de modèles finis et est $\aleph_1$-catégorique (voir exercice 9 chapitre 8.4). Montrons que T est aussi fermée par union de chaînes : soit $(\mathcal{A}_i, i \in I)$ une chaîne infinie de $\mathcal{L}$-structures modèles de T. Considérons $\bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i$ et $\sigma \in T$. Notons que σ est un énoncé de la forme $\forall x_1 \cdots \forall x_n\ \exists y_1\ \cdots\ \exists y_m\ \theta(\bar{x}, \bar{y})$, où θ est une formule sans quantificateurs. Prenons des éléments $a_1, \cdots, a_n \in \bigcup_{i\in I} A_i$, il existe donc $i_0 \in I$ tel que $a_1, \cdots, a_n \in A_{i_0}$. Or $\mathcal{A}_{i_0} \models \sigma$ et donc il existe $b_1, \cdots, b_m \in A_{i_0}$ tels que $\mathcal{A}_{i_0} \models \theta(\bar{a}, \bar{b})$. Mais $\mathcal{A}_{i_0}$ est une sous-structure de $\bigcup \mathcal{A}_i$ et donc $\bigcup \mathcal{A}_i \models \theta(\bar{a}, \bar{b})$ car la formule θ est sans quantificateurs.

4. Soit p est un nombre premier, un p-groupe est un groupe où l'ordre de tout éléments est une puissance de p. Y-a-t-il des p-groupes abéliens divisibles ? Justifiez votre réponse.

   Le groupe trivial $G = \{e\}$ est un p-groupe pour tout p car tout élément y est d'ordre p^0. De plus il vérifie la série infinie d'axiomes (définie dans l'exercice 8 du chapitre 8.4) exprimant la divisibilité.

   Supposons maintenant que G est un groupe abélien non-trivial et notons le multiplicativement. Pour qu'un groupe soit divisible il suffit que pour tout nombre premier q, et pour tout élément g de G il existe $y \in G$ tel que $y^q = g$. Si G est un p-groupe, alors il est nécessairement q-divisible pour tout nombre premier $q \neq p$. (En effet par le théorème de Bezout, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $z_1,\ z_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $p^n.z_1 + q.z_2 = 1$. Donc si $g^{p^n} = 1$, on a que $g = g^{p^n.z_1}.g^{q.z_2}$ et donc $g = (g^{z_2})^q$.) Notons par μ_{p^n} le sous-groupe de $\mathbb{C}^*$ de (toutes) les racines p^n ièmes de l'unité ; c'est un p-groupe abélien. On plonge μ_{p^n} dans $\mu_{p^{n+1}}$; montrons que l'image de ce plongement est égal à $\{y^p :\ y \in \mu_{p^{n+1}}$. Tout élément de $\mu_{p^{n+1}}$ de la forme y^p appartient à cette image et par ailleurs si $y_1^p = y_2^p$, alors $(y_1.y_2^{-1})^p$. Or il y a p racine p ièmes de l'unité dans $\mu_{p^{n+1}}$.
   Considèrons l'union $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mu_{p^n}$. C'est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$ qui est un p-groupe abélien. Pour montrer qu'il est divisible, par la remarque ci-dessus, il suffit de montrer que chaque élément $g \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mu_{p^n}$ est égal à y^p pour un certain $y \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mu_{p^n}$. Mais il existe n tel que $g \in \mu_{p^n}$. On plonge μ_{p^n} dans $\mu_{p^{n+1}}$ et donc $g = y^p$ pour un certain $y \in \mu_{p^{n+1}}$.

5. Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable (fini ou infini). Rappelons la définition suivante. Soient T et T' deux $\mathcal{L}$-théories consistantes. On dit que T' est une *modèle-compagne* de T si T' est modèle-complète, si tout modèle de T se plonge dans un modèle de T' et tout modèle de T' se plonge dans un modèle de T.
   (i) Montrer que si T_1 et T_2 sont deux modèle-compagnes de T, alors T_1 et T_2 ont les mêmes modèles.
   (ii) Soit T une théorie qui a une axiomatisation $\forall\exists$, montrer que si T a une modèle-compagne T', alors T' est la théorie de la classe des modèles existentiellement clos de T.

   (i) Soit $\mathcal{A}_1$ un modèle de T_1 : $\mathcal{A}_1$ se plonge dans un modèle de T qui lui-même se plonge dans un modèle $\mathcal{A}_2$ de T_2. De la même façon, $\mathcal{A}_2$ se plonge dans un modèle de T qui lui-même se plonge dans un modèle $\mathcal{B}_1$ de T_1. Comme T_1 est modèle-complète, $\mathcal{A}_1 \prec \mathcal{B}_1$. On va montrer que $\mathcal{A}_1 \prec \mathcal{A}_2$, où $\mathcal{A}_1$ varie dans la classe des modèles de T_1, et $\mathcal{A}_2$ varie dans la classe des modèles de T_2. on procède par induction sur la complexité n (nombre de quantificateurs) d'une $\mathcal{L}$-formule $\theta(\bar{x})$.
   $n = 0$: pour tout uple $\bar{a} \subseteq A_1$, $\mathcal{A}_1 \models \theta(\bar{a})$ ssi $\mathcal{A}_2 \models \theta(\bar{a})$, car $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq B_1$ et $\mathcal{A}_1 \prec \mathcal{B}_1$, pour un certain modèle $\mathcal{B}_1$ de T_1.
   $n \geq 1$: soit $\xi(\bar{x}) := \exists y\psi(y, \bar{x})$, où ψ est de complexité $\leq n$. Soit $\bar{a} \subseteq A_1$. Montrons que $\mathcal{A}_1 \models \xi(\bar{a})$ ssi $\mathcal{A}_2 \models \xi(\bar{a})$.

$(\rightarrow)$: Si $\mathcal{A}_1 \models \exists y \psi(y, \bar{a})$, alors $\mathcal{A}_1 \models \psi(c, \bar{a})$ pour un $c \in A_1$. Cela est équivalent à $\mathcal{A}_2 \models \psi(c, \bar{a})$ par hypothèse d'induction, et donc implique $\mathcal{A}_2 \models \exists y \psi(y, \bar{a})$.
$(\leftarrow)$: Si $\mathcal{A}_2 \models \exists y \psi(y, \bar{a})$, alors $\mathcal{A}_2 \models \psi(d, \bar{a})$ pour un $d \in A_2$. Cela est équivalent à $\mathcal{B}_2 \models \psi(d, \bar{a})$, pour un certain modèle $\mathcal{B}_2$ de T_2 tel que, pour un modèle $\mathcal{B}_1$ de T_1, $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$, $\mathcal{A}_2 \prec \mathcal{B}_2$ et $\mathcal{A}_1 \prec \mathcal{B}_1$.
Par hypothèse d'induction, $\mathcal{B}_2 \models \psi(d, \bar{a})$ implique $\mathcal{B}_1 \models \psi(d, \bar{a})$, i.e. $\mathcal{B}_1 \models \exists y \psi(y, \bar{a})$.
Par le test de Tarski-Vaught et car $\mathcal{A}_1 \prec \mathcal{B}_1$, on a : $\mathcal{A}_1 \models \exists y \psi(y, \bar{a})$.

(ii) Il suffit de montrer que les modèles de T' sont des modèles de T. Soit $\mathcal{A}'$ un modèle de T'. $\mathcal{A}'$ se plonge dans un modéle $\mathcal{A}$ de T, qui lui-même se plonge dans un modèle $\mathcal{B}'$ de T'. Par le théorème 10.1.2 et car T' est modèle-complète, on a : $\mathcal{A}' \subset_{ec} \mathcal{B}'$, et donc en particulier $\mathcal{A}' \subset_{ec} \mathcal{A}$. Par l'exercice 2, $\mathcal{A}'$ est un modèle de T.

6. Montrer que si une $\mathcal{L}$-théorie T_0 est modèle-complète et si étant donnés deux modèles quelconques $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ de T_0, il existe un troisième modèle $\mathcal{C}$ de T_0 tel que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ se plongent dans $\mathcal{C}$, alors T_0 est complète.

   Soit ϕ une $\mathcal{L}$-formule, on veut montrer que $T_0 \models \phi$ ou $T_0 \models \neg\phi$. Si $T_0 \not\models \phi$, il y a un modèle $\mathcal{A}$ de T_0 tel que $\mathcal{A} \models \neg\phi$. Supposons qu'il y ait un autre modèle $\mathcal{B}$ de T_0 tel que $\mathcal{B} \models \phi$. Or $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ se plongent dans $\mathcal{C}$ et T_0 est modèle complète donc $\mathcal{A} \prec \mathcal{C}$ et $\mathcal{B} \prec \mathcal{C}$ (car $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$). On devrait donc avoir $\mathcal{C} \models \phi$ et $\mathcal{C} \models \neg\phi$, ce qui est une contradiction, donc $\mathcal{B} \models \neg\phi$, i.e. $T_0 \models \neg\phi$.

Dans les références citées ci-dessous, se trouvent de nombreux exercices.

Bibliographie

[1] Cameron, P. J., Transitivity of permutation groups on unordered sets, Math. Z. 148 (1976), no. 2, 127-139.

[2] Chang, C. C., Keisler, H. J., Model theory, (Third edition), Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 73, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990 (1977, 1973).

[3] Chatzidakis Z., Cours de Logique, ENS, automne 2015 (http :www.math.ens.fr/ zchatzid/)

[4] Hodges, W., Model theory, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 42, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[5] Jacobson, N., Basic Algebra 1 (second edition), W.H. Freeman and Compagny, San Francisco, 1985 (réédité dans la collection *Dover*).

[6] Jacobson, N., Basic Algebra 2 (second edition), W.H. Freeman and Compagny, San Francisco, 1985 (réédité dans la collection *Dover*).

[7] Krivine, J.-L., Théorie axiomatique des ensembles, collection PUF, 1969 (ou réédition en 1972).

[8] Marker, D., Model theory. An introduction, Graduate Texts in Mathematics, 217, Springer-Verlag, New York, 2002.

[9] Mendelson E., Introduction to Mathematical Logic (third edition), The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series, 1987.

[10] Poizat B., Cours de théorie des modèles, 1985, Nur Al-Mantiq Wal-Ma'rifah. [Version anglaise éditée chez Springer en 2000.]

[11] Prestel A., Model theory for the real algebraic geometer, Pisa Istituti editoriali e poligrafici internazionale, 1998.

[12] Rothmaler P., Introduction to Model Theory, Algebra, Logic and Applications Series Volume 15, Gordon and Breach Science Publishers, 2000.

[13] Tent, K., Ziegler, M., A course in model theory, Lecture Notes in Logic, 40, Association for Symbolic Logic, La Jolla, CA ; Cambridge University Press, Cambridge, 2012.