LES ÉQUATIONS DE DROITES DANS L'ESPACE : UNE ÉTUDE DES PROXIMITÉS DISCURSIVES DANS LES MANUELS DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE BELGE

NIHOUL* Céline

Résumé – Nous nous intéressons au chapitre des équations de droites dans l'espace dans l'enseignement secondaire belge. Nous présentons tout d'abord quelques spécificités pour cette notion afin de préciser notre problématique de recherche. Celle-ci nous amène à analyser plusieurs manuels belges. Nous abordons alors nos outils théoriques dont la notion de proximités-en-acte. Nous précisons ensuite notre méthodologie d'analyse et illustrons nos résultats par quelques extraits de manuels.

Mots-clefs : droites, équations, espace, manuels, proximités-en-acte

Abstract – We are interested in the teaching of equations of lines in the three-dimensional Euclidian space in Belgian secondary education. First, we present some specificities for this notion to clarify our research problem. This leads us to analyse several Belgian textbooks. We then present our theoretical tools, including the notion of proximities-in-act. We then specify our methodology and illustrate our results with some excerpt from manuals.

Keywords: lines, equations, three-dimensional Euclidian space, textbooks, proximities-in-act

I. PROBLEMATIQUE DE RECHERCHE

Cette communication s'inscrit dans notre travail de thèse et porte sur l'enseignement des notions de « droites » et de « plans » dans l'espace en Belgique. Ces notions sont travaillées pour la première fois dans l'enseignement secondaire et sont reprises dans un cours de première année universitaire pour la section mathématique. Nous avons réalisé un diagnostic de cet enseignement et mis en évidence des difficultés récurrentes (Nihoul, 2016). Nous nous centrons ici sur la difficulté à reconnaître et à décrire les droites de l'espace à partir de leurs équations. L'importance de cette difficulté nous amène à nous intéresser à la façon dont la notion de « droite » est travaillée dans le secondaire. Dans cet article, nous choisissons de nous focaliser sur son introduction.

Notre inscription dans la Théorie de l'Activité (Vandebrouck, 2008; Abboud-Blanchard, Robert, Rogalski, & Vandebrouck, 2017) nous amène à étudier les activités des élèves pour caractériser leurs apprentissages. Les traces de ces activités sont plus facilement observables lors des phases d'exercices, notamment grâce à une analyse *a priori* des tâches qui leur sont proposées. En revanche, l'introduction d'une notion relève des moments de cours où les élèves ne rentrent peu voire pas en activité. Notre objectif est alors d'étudier le discours de l'enseignant lors de ces moments d'exposition des connaissances. Pour ce faire, l'analyse *a priori* des tâches est remplacée par une étude *a priori* du « relief » de la notion. Il s'agit d'une étude croisant une dimension épistémologique (nature des notions), une dimension curriculaire (étude des programmes) et une dimension cognitive (difficultés des élèves) (cf. Bridoux au sein du même groupe de travail). Nous évoquons ici quelques résultats de ces différentes dimensions et exposons les outils théoriques et la méthodologie qui vont préparer le terrain à cette étude dans les classes.

Les programmes de l'enseignement secondaire belge préconisent d'étudier la géométrie analytique plane (droite, vecteurs, …) en seconde[1]. En première[2], ces notions sont étendues à l'espace et les notions de droites et de plans sont caractérisées dans le cadre (au sens de

---

* LDAR (EA4434) UMONS – Belgique – celine.nihoul@umons.ac.be

[1] Les élèves ont majoritairement entre 15 et 16 ans.

[2] Les élèves ont majoritairement entre 16 et 17 ans.

Douady, 1986) de la géométrie synthétique[3] (perspectives, positions relatives,…). C'est en terminale scientifique[4] que les équations de droites et de plans dans l'espace, ainsi que la résolution de systèmes d'équations linéaires sont abordées. Pendant ces trois années, la notion de droite est alors travaillée dans les cadres synthétique et analytique. Cependant, les programmes laissent à penser qu'un seul cadre à la fois est travaillé par année. Il est donc possible que les changements de cadres pour cette notion soient peu pris en compte dans l'enseignement secondaire. Pourtant, notre étude historique révèle qu'il est important d'associer le côté intuitif de la méthode synthétique à celle analytique. En effet, la méthode analytique a éloigné les mathématiciens de l'époque du sens géométrique du problème en jetant un voile sur leur perception visuelle (Dorier, 1990). Selon nous, il est alors important que ces changements de cadres soient présents et explicités dans l'enseignement.

Dans le cadre de la géométrie analytique, il y a de multiples façons de décrire, de voir et de définir l'objet « droite ». En effet, les équations peuvent être vectorielles, paramétriques ou cartésiennes. Les points de vue (au sens de Rogalski, 1995) sont donc nombreux. Dans sa thèse, Alves-Dias (1998) montre que les changements de points de vue ont un rôle fondamental dans l'apprentissage des notions d'algèbre linéaire élémentaire. Nous faisons l'hypothèse que ce rôle n'est pas minimisé pour les notions de géométrie analytique puisqu'elles peuvent donner des « images » à certains concepts vectoriels tels que les ensembles de solutions de systèmes d'équations linéaires (Rogalski, 2000). En outre, le travail sur les équations de droites peut amener à faire un calcul, à réaliser un dessin et à décrire en langue naturelle un ensemble de solutions. Il peut également consister à chercher une équation à partir de diverses informations données dans un énoncé. Plusieurs registres de représentation (au sens de Duval, 1993) peuvent donc être en jeu. Selon Pavlopoulou (1993), les conversions entre les registres ne sont pas travaillées ou explicitées dans l'enseignement. Or, la maîtrise des conversions entre registres aide à la compréhension des concepts et des méthodes à acquérir.

Ainsi, les équations de droites peuvent être travaillées dans le cadre analytique selon de nombreux points de vue et dans de multiples registres. De plus, les connaissances antérieures en géométrie synthétique peuvent aider à établir les liens entre l'objet géométrique et les équations. Ces liens nous semblent importants puisque la notion d'équation, notion para-mathématique au sens de Chevallard (1985), n'a dans l'enseignement secondaire belge que le rôle d'«étiquette» (Schneider, 1988) et leurs interprétations peuvent « révéler des surprises lorsqu'elles sont susceptibles de représenter des objets géométriques différents dans un plan ou dans l'espace » (Schneider & Lebeau, 2010). Pariès et Robert (2009) parlent d'extensions de notion avec accident ou encore de ruptures entre le plan et l'espace. La notion dont il est question ici est donc une extension des droites du plan avec accident, notamment parce que dans le plan une seule équation cartésienne suffit à la représenter alors que dans l'espace on a besoin d'un système d'équations. Nous supposons que la prise en compte de ces spécificités contribue à donner du sens à la notion de droite dans l'espace et développe une certaine flexibilité chez les élèves, celle-ci n'est pas automatique et doit explicitement être un des objectifs de l'enseignement (Artigue, Chartier, & Dorier, 2000). Nous nous intéressons alors à la façon dont les enseignants du lycée prennent en compte son développement. Pour préparer cette étude dans les classes, nous avons mené une analyse de manuels. Notre problématique de recherche est donc : « Comment les manuels de l'enseignement secondaire prennent en compte le développement de la flexibilité entre les cadres, les registres et les points de vue pour les équations de droites dans l'espace ? ».

[3] La géométrie synthétique est basée sur les axiomes d'Euclide.
[4] Les élèves ont majoritairement entre 17 et 18 ans.

II. OUTILS THÉORIQUES

Notre question de recherche nous place dans une approche opérationnelle de la conceptualisation. Autrement dit, nous l'associons à une disponibilité des notions, à l'organisation entre les connaissances antérieures et nouvelles, à la flexibilité attendue et la possibilité de résoudre des tâches comportant de nombreuses adaptations (Bridoux, Grenier-Boley, Hache, & Robert, 2016). Les conversions entre les registres, les changements de cadres et de points de vue participent ainsi à la conceptualisation de la notion de droite de l'espace. Outre le fait d'expliciter les cadres, les registres et les points de vue dans les textes du savoir, nous nous intéressons particulièrement aux ajouts qui peuvent être faits et qui permettent de rester aussi « proche » que possible des connaissances que les élèves ont déjà. Nous partageons l'hypothèse, formulée dans (Robert & Vandebrouck, 2014; Bridoux et al., 2016), qu'ils participent à la conceptualisation par les élèves de la connaissance nouvelle visée. Pour les caractériser, Robert et Vandebrouck (2014) utilisent la notion de proximités-en-acte :

> Les proximités-en-acte traduisent une activité de l'enseignant (discursive ou autre) visant à provoquer et/ou exploiter une proximité entre ce qu'il veut introduire et les réflexions ou les activités ou les connaissances des élèves.

Ces proximités peuvent être ou non cognitives mais nous nous centrons uniquement sur les proximités discursives de nature cognitive.

Comme ces auteurs l'expliquent, c'est à partir de l'étude du relief de la notion visée que le chercheur peut traquer *a priori* ces occasions de proximités. Nous complétons alors notre étude du relief par une analyse des occasions de proximités dans plusieurs manuels belges. Celle-ci nous permettra de repérer *a posteriori* dans le discours tenu par l'enseignant des proximités possibles ou inexistantes. Cependant, ce que le chercheur qualifie de proximités-en-acte reste potentiel. En effet :

> Même si l'étude préalable du relief sur la notion nous aide dans notre appréciation de ce qui est supposé connu des élèves et de ce qui est nouveau, voire difficile, il y a cependant toujours une part d'appréciation subjective du chercheur dans l'interprétation de ce que dit l'enseignant. (Bridoux et al., 2016, p.197)

Bridoux et al. (2016) distinguent trois types de proximités discursives dans le discours des enseignants: ascendantes, descendantes ou horizontales. Les proximités ascendantes se placent entre ce que les élèves ont déjà fait et le nouveau. Elles explicitent comment la nouvelle notion a été généralisée à partir de ce que les élèves ont déjà fait sur un cas particulier ou un exercice. Par exemple, l'enseignant propose aux élèves une activité dans laquelle une droite de l'espace est déterminée par deux points et l'objectif est d'écrire une équation telle que $(x, y, z) = (0,1,2) + k(1,2,3)$, où k est un réel. L'enseignant réalise ensuite le même raisonnement pour amener de manière générale le point de vue paramétrique $(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k(a, b, c)$, où k est un réel et (x_1, y_1, z_1) et (a, b, c) sont respectivement un point et un vecteur directeur de la droite. Dans ce cas, il s'appuie sur un cas particulier traité par les élèves pour généraliser le raisonnement et le point de vue paramétrique.

Les proximités descendantes se placent entre ce qui a été exposé et des exemples ou des exercices à faire ensuite avec ou par les élèves. Elles explicitent comment la connaissance nouvelle peut être utilisée dans un exercice ou une démonstration. Par exemple, après avoir introduit de manière générale la description de la droite de l'espace d'un point de vue cartésien, l'enseignant demande aux élèves de donner un système d'équations cartésiennes d'une droite dont un point et un vecteur directeur sont donnés. Il y a une proximité descendante possible parce qu'il applique l'énoncé général à un cas particulier en substituant les données aux variables sans refaire le cheminement qui a amené ce point de vue.

Les proximités horizontales n'amènent pas de changement de niveau de généralité, au contraire des deux autres types de proximités. Elles peuvent porter sur le cours en train de se faire, sur la structuration du cours ou sur les méthodes en jeu. Elles peuvent également expliciter une suite de calculs ou le sens d'un théorème. Par exemple, l'enseignant demande aux élèves de résoudre le système composé des équations $x = 3$ et $(x, y, z) = (0,1,2) + k(1,2,3)$, où k est un réel et dit « pour résoudre ce système, vous devez substituer dans la deuxième équation x par 3 et utiliser les opérations sur les vecteurs pour trouver d'abord la valeur du paramètre k et puis celle du point d'intersection ». Il y a une proximité horizontale possible car il explique la méthode à appliquer dans cet exemple, sans pour autant donner un procédé général de résolution des systèmes linéaires.

Dans la suite de cet article, nous précisons notre méthodologie d'analyse des manuels et nous illustrons nos résultats en mettant en évidence les occasions de proximités que nous y avons repérées.

III. METHODOLOGIE

Nous avons analysé tous les manuels belges[5] pour la terminale scientifique car ce sont, selon nous, les plus « complets ». Notre étude se réalise autour de trois manuels: *CQFD* (2013), *Espace Math* (2004) et *Actimath* (2016). Nous y avons, pour le chapitre dont il est question ici, regardé les activités d'introduction éventuelles, la partie « théorique », c'est-à-dire la partie dévolue au texte du savoir et les exercices proposés. Nous n'abordons ici que l'analyse de la partie théorique, correspondant en classe aux moments d'exposition des connaissances par l'enseignant.

Pour apporter des éléments de réponse à notre problématique sur la flexibilité, nous repérons les cadres, les registres et les points de vue en jeu dans cette partie. Nous pointons également les conversions de registres et les changements de points de vue proposés. Nous sommes particulièrement attentive au point de vue cartésien car il constitue une rupture lors du passage du plan à l'espace pour la notion de droite. De plus, les occasions de proximités qui pourraient se dégager à la lecture du manuel sont détectées. Par ce biais, nous obtenons des informations sur les liens entre les connaissances antérieures, ce que les élèves ont déjà fait et le nouveau. Nous pouvons donc inférer des éléments sur la place occupée par la géométrie synthétique au sein de ce chapitre.

IV. ANALYSE DES MANUELS ET RÉSULTATS

Nous commençons par une présentation générale de chaque manuel pour situer la notion visée au sein du chapitre de géométrie analytique. La progression lors de la présentation des équations de droites dans l'espace est à chaque fois explicitée. Nous nous concentrons ensuite sur le point de vue cartésien pour y repérer des occasions de proximités.

1. Présentation générale des trois manuels

La géométrie dans l'espace dans le manuel *CQFD* commence par l'étude des équations de droites de l'espace puis vient celle des équations de plans, le parallélisme, l'orthogonalité et la notion de distance d'un point à un plan ou à une droite. Pour les manuels *Actimath* et *Espace Math*, l'ordre est similaire si ce n'est que les équations de plans sont vues avant les équations de droites dans l'espace.

[5] Tous les manuels francophones existants pour ce degré d'enseignement et pour cette filière.

La progression suivie pour les droites est identique dans les trois manuels analysés. Elles sont d'abord décrites suivant le point de vue vectoriel. Ensuite, un repère de l'espace est fixé et l'équation vectorielle est traduite en termes de coordonnées. Cette égalité entre deux vecteurs est écrite comme un système d'équations paramétriques. Enfin, le point de vue cartésien est donné en éliminant le paramètre du système précédent. Les changements de points de vue vont du vectoriel vers le paramétrique et du paramétrique vers le cartésien.

2. *Le manuel CQFD*

La figure 1 montre l'introduction du point de vue cartésien.

En éliminant λ entre les équations du système (2), on obtient des équations cartésiennes de la droite d, définie par un point $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(x_{\vec{u}}\,;\,y_{\vec{u}}\,;\,z_{\vec{u}})$.

1. Si $x_{\vec{u}} \neq 0$, $y_{\vec{u}} \neq 0$ et $z_{\vec{u}} \neq 0$, alors $d \equiv \dfrac{x-x_A}{x_{\vec{u}}} = \dfrac{y-y_A}{y_{\vec{u}}} = \dfrac{z-z_A}{z_{\vec{u}}}$

Si la droite d est définie par les points $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$, $B(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ et si $(x_B-x_A)\neq 0$, $(y_B-y_A)\neq 0$ et $(z_B-z_A)\neq 0$, alors $AB \equiv \dfrac{x-x_A}{x_B-x_A} = \dfrac{y-y_A}{y_B-y_A} = \dfrac{z-z_A}{z_B-z_A}$.

***Figure 1** – CQFD p. 365*

Nous constatons dans la figure 1 la présence du registre de la langue naturelle accompagné d'expressions algébriques. Les justifications et la méthode à appliquer pour éliminer le paramètre ne sont pas explicitées, c'est donc à la charge de l'élève ou du professeur de faire les détails. De plus, deux expressions algébriques *a priori* différentes sont données en fonction des informations connues (un vecteur directeur ou deux points). Rien n'est dit sur le fait que ces deux expressions sont en fait identiques et que le vecteur directeur donné est désormais exprimé en fonction de son origine et de son extrémité. Un rapprochement avec une connaissance ancienne pourrait être fait et une occasion de proximité horizontale serait ainsi présente. Deux autres cas sont envisagés: l'un où une des composantes du vecteur directeur est nulle, l'autre où deux des composantes sont nulles. Dans les deux cas, un système d'équations cartésiennes est donné mais il n'est pas indiqué qu'il faut repartir du point de vue paramétrique et substituer la.es composante.s nulle.s du vecteur directeur dans le système pour obtenir le résultat final. L'explicitation de cette démarche serait une occasion de proximité horizontale.

3. *Le manuel Espace Math*

Le point de vue cartésien est exprimé en distinguant trois cas : les composantes du vecteur directeur sont non nulles, une composante est nulle, toutes les composantes sont nulles.

• **Si $x_u \neq 0$, $y_u \neq 0$ et $z_u \neq 0$,** alors

$$\boxed{d \equiv \frac{x-x_A}{x_u} = \frac{y-y_A}{y_u} = \frac{z-z_A}{z_u}}$$

Ces équations forment un **système d'équations cartésiennes** de la droite d passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(x_u; y_u; z_u)$. Ce système est formé des équations cartésiennes de trois plans dont l'intersection est la droite d. On n'en retient que deux.

***Figure 2** – Espace Math p. 96*

La figure 2 suit immédiatement l'exposition du point de vue paramétrique. Les cas et le résultat sont donnés sans dire comment les trouver. Le changement de point de vue n'est alors pas expliqué. En classe, il est possible que l'enseignant explique cette étape. Une interprétation géométrique d'une droite comme intersection de plans est donnée. Cependant, il n'y aucun rapprochement repéré avec la forme générale d'une équation cartésienne de plan. Il y a alors une occasion de proximité horizontale. L'expression « On n'en retient que deux » est donnée sans explication supplémentaire. Une occasion de proximité horizontale serait de rappeler les connaissances de l'élève en géométrie synthétique. Le dernier cas est illustré par la figure 3.

• **Si $x_u = 0$, $y_u = 0$ et $z_u = 0$,** alors

$$\boxed{d \equiv \begin{cases} x - x_A = 0 \\ y - y_A = 0 \end{cases}}$$

(équation du plan parallèle au plan yOz passant par le point de coordonnées $(x_A; 0; 0)$)

(équation du plan parallèle au plan xOz passant par le point de coordonnées $(0; y_A; 0)$).

On obtient des formules analogues dans les deux autres cas.

Figure 3 *– Espace Math p. 97*

À la figure 3, nous observons que chaque équation du système est interprétée géométriquement. Même si le système donné représente bien une droite, nous remarquons que le vecteur directeur est égal au vecteur nul. Ainsi, la droite considérée n'a pas de direction. Il est probable que l'enseignant interprète géométriquement ce problème et corrige cette erreur en se donnant une cote non nulle, ce qui amène une occasion de proximité horizontale. Nous pointons également que le registre de la langue naturelle accompagné de formules algébriques est omniprésent. Quelques liens avec le cadre synthétique sont aussi relevés mais non explicités.

4. Le manuel Actimath

Dans ce manuel, seul le cas où toutes les composantes du vecteur directeur sont non nulles est traité. Les autres cas sont vus plus loin dans la partie « droites particulières ». Ce manuel est le seul à expliciter la méthodologie pour passer du point de vue paramétrique vers le cartésien. Vient après une remarque illustrée à la figure 4.

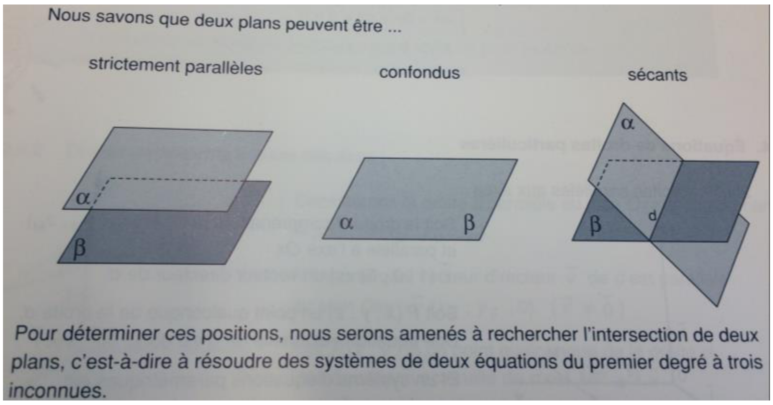

Figure 4 *– Actimath p. 49*

La figure 4 rappelle à l'élève une connaissance antérieure de géométrie synthétique. Un commentaire est donné pour interpréter la résolution d'un système comme la détermination des positions relatives d'objets géométriques. Selon nous, c'est une occasion d'établir des liens entre les cadres synthétique et analytique. Les registres de la langue naturelle et du dessin sont ici en jeu. Trois systèmes sont ensuite résolus: un système impossible, un système doublement indéterminé et un système déterminé. Les calculs lors de la résolution des différents systèmes ne sont pas explicités, l'ensemble des solutions n'est jamais indiqué, les explications liant les équations et le type de système ne sont pas données; il y a alors plusieurs occasions de proximités horizontales. Cependant, pour le système déterminé, il est indiqué:

> Les deux plans ne sont ni strictement parallèles ni confondus. Ils sont donc sécants. Ce système d'équations constitue donc des équations de la droite d'intersection des deux plans. (*Actimath*, p. 50)

Une interprétation géométrique de la position relative des deux plans, ainsi que celle de l'ensemble des solutions est donnée. Le registre algébrique est employé lors de la résolution des systèmes et les solutions sont exprimées en langue naturelle. Nous constatons néanmoins que cette conversion n'est pas expliquée. Une occasion de proximité horizontale est donc repérée. Ce troisième système sert de tremplin pour décrire une droite comme l'intersection de deux plans sécants. Il y a alors une occasion de proximité ascendante entre le cas particulier de l'exemple et le cas général avec deux plans sécants quelconques.

5. *Bilan de l'analyse des trois manuels*

L'analyse de manuels effectuée montre que le cadre analytique est travaillé avec très peu de références et de liens avec le synthétique, sauf dans le manuel *Actimath*. Le registre de la langue naturelle accompagné d'expressions algébriques est le plus présent. Ainsi, très peu de conversions entre registres sont repérées et quand il y en a une, elle n'est globalement pas expliquée. La partie théorique étudiée montre que les points de vue sont tous introduits dans le même ordre et que seuls les changements du vectoriel vers le paramétrique et du paramétrique vers le cartésien sont explicités. Nous avons pointé beaucoup d'occasions de proximités horizontales pour combler les manques des manuels notamment au niveau des justifications, reformulations, explications des calculs et des méthodes. Il y a quelques occasions de proximités descendantes entre la notion générale et un exemple ou un exercice. Enfin, il n'y a quasiment pas d'occasions de proximités ascendantes repérées dans ces trois manuels. Nous faisons l'hypothèse que cela s'explique par le fait que tous les points de vue sont immédiatement amenés de façon générale mais un travail pourrait être fait sur un exemple précis pour être ensuite généralisé.

V. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Nous nous intéressons à l'enseignement des droites dans l'espace en Belgique. L'étude du relief nous permet de préciser certaines spécificités de ces notions dont notamment la possibilité de les travailler dans les cadres synthétique et analytique, suivant de nombreux registres et points de vue. Nous étudions alors comment la flexibilité attendue pour cette notion est développée dans les manuels. De plus, l'approche opérationnelle de la conceptualisation nous amène à considérer tous les rapprochements entre ce que les élèves connaissent déjà et le nouveau. En tant que chercheur, nous traquons donc *a priori* dans les manuels ces occasions de proximités (au sens de Robert & Vandebrouck, 2014) avant de nous rendre dans les classes.

Notre analyse de manuels montre qu'il y a peu de rapprochement avec ce que les élèves connaissent déjà sur la notion de droite. Nous en déduisons qu'ils ne mettent pas en évidence les éventuelles ruptures entre le plan et l'espace. De plus, les calculs, les reformulations et les explications de méthodes sont peu ou pas prises en compte surtout lors des changements de points de vue ou des conversions de registres. Plusieurs occasions de proximités horizontales sont ainsi repérées. Peu d'exemples ou de contre-exemples sont présents. Pourtant, nous pointons des occasions de proximités descendantes. Ce panorama très général nous amène à supposer que la flexibilité attendue pour cette notion n'est que peu développée par les manuels. Au vu du nombre de manuels disponibles, nous prévoyons d'étudier le document rédigé par les enseignants pour leurs élèves afin d'enrichir les occasions de proximités relevées dans les manuels. L'objectif final de notre recherche est de réaliser une étude du discours des enseignants lors des moments d'exposition des connaissances pour la notion de « droite ». Nous voulons alors déterminer les proximités possibles, inexistantes ou imprévues grâce à une analyse *a posteriori* de leurs discours et savoir si la flexibilité est développée par les enseignants au sein de ce chapitre.

REFERENCES

Abboud-Blanchard M., Robert A., Rogalski J., Vandebrouck F. (2017) Pour une théorie de l'activité en didactique des mathématiques, Un résumé des fondements partagés, des développements récents et des perspectives, *Cahier du laboratoire de didactique André Revuz*, 17, Université Paris Diderot.

Alves-Dias M. (1998) *Les problèmes d'articulation entre points de vue «cartésien» et «paramétrique» dans l'enseignement de l'algèbre linéaire.* Thèse de doctorat. Paris VII.

Artigue M., Chartier G., Dorier J.-L. (2000) Presentation of other research works. Mathematics Education Library, On the teaching of Linear Algebra (pp. 247-264).

Bridoux S., Grenier-Boley N., Hache C., Robert A. (2016) Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques; analyses et exemples. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 21, 187-234.

Chevallard Y. (1985) La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. *Grenoble: La Pensée Sauvage.*

Dorier J.-L. (1990) Analyse historique de l'émergence des concepts élémentaires d'algèbre linéaire, *Cahier de didactique des mathématiques*, 7, Université Paris Diderot.

Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

Nihoul C. (2016) Quelques difficultés d'étudiants universitaires à reconnaître les objets «droites» et «plans» dans l'espace: une étude de cas. In Nardi, E., Winslow, C., Hausberger, T. (Eds). Proceedings of INDRUM 2016, 464-473.

Pariès M., Robert A. (2009) Changement de cadres en géométrie dans l'espace. *Repères-IREM*, 75, 35-45.

Pavlopoulou K. (1993) Un problème décisif pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire: la coordination des registres de représentation. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 67-93.

Robert A., Vandebrouck F. (2014) Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves: analyses de séances sur des tâches complexes. *Cahier du laboratoire de didactique André Revuz*, 10, Université Paris Diderot.

Rogalski M. (1995) Notes du séminaire à Sao Paulo, Brésil.

Rogalski M. (2000) The teaching experimented in Lille. Mathematics Education Library. On the teaching of Linear Algebra (pp. 133-150).

Schneider M. (1988) *Des objets mentaux 'aire' et 'volume' au calcul des primitives*. Thèse doctorale, Louvain-la-neuve: Université catholique de Louvain.

Schneider M., Lebeau C. (2010) Equations incomplètes de plans et obstacles à la nécessité épistémique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 30(1), 11-45.

Vandebrouck F. (2008) *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse: Octarès.