

Analyse multifractale des sommes fractales de pulses

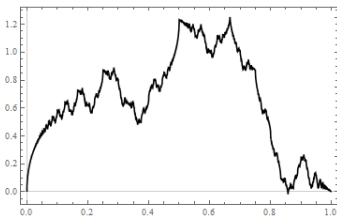
Guillaume Saës
En collaboration avec Stéphane Seuret

Université Paris-Est Créteil (France)
Université de Mons (Belgique)

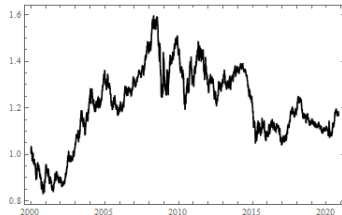
Journées du GdR AFHP 2020
Mercredi 11 Novembre 2020

Fonctions partout "irrégulières"

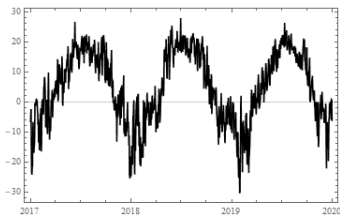
Fonctions partout "irrégulières"



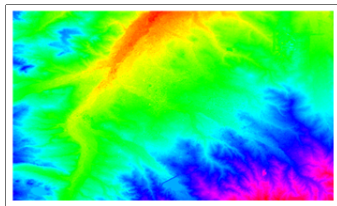
Fonction de Riemann $R(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sin(\pi n^2 x)}{n^2}$.



Euro vs Dollar (2000-2019).



Température moyenne (2017-2019).



Élévation Denver.

L'analyse Multifractale pour des fonctions :

Décrire les fonctions dont la "régularité" varie d'un point à un autre.

L'analyse Multifractale pour des fonctions :

Décrire les fonctions dont la "régularité" varie d'un point à un autre.

Outils pour cet exposé :

L'analyse Multifractale pour des fonctions :

Décrire les fonctions dont la "régularité" varie d'un point à un autre.

Outils pour cet exposé :

- Définir une notion de régularité ponctuelle :

L'analyse Multifractale pour des fonctions :

Décrire les fonctions dont la "régularité" varie d'un point à un autre.

Outils pour cet exposé :

- Définir une notion de régularité ponctuelle : **Exposant de Hölder**

L'analyse Multifractale pour des fonctions :

Décrire les fonctions dont la "régularité" varie d'un point à un autre.

Outils pour cet exposé :

- Définir une notion de régularité ponctuelle : **Exposant de Hölder**
- Définir un ensemble de points de même régularité ponctuelle :

L'analyse Multifractale pour des fonctions :

Décrire les fonctions dont la "régularité" varie d'un point à un autre.

Outils pour cet exposé :

- Définir une notion de régularité ponctuelle : **Exposant de Hölder**
- Définir un ensemble de points de même régularité ponctuelle : **Ensembles iso-höldériens**

L'analyse Multifractale pour des fonctions :

Décrire les fonctions dont la "régularité" varie d'un point à un autre.

Outils pour cet exposé :

- Définir une notion de régularité ponctuelle : **Exposant de Hölder**
- Définir un ensemble de points de même régularité ponctuelle : **Ensembles iso-höldériens**
- Définir une notion pour "quantifier" ces ensembles :

L'analyse Multifractale pour des fonctions :

Décrire les fonctions dont la "régularité" varie d'un point à un autre.

Outils pour cet exposé :

- Définir une notion de régularité ponctuelle : **Exposant de Hölder**
- Définir un ensemble de points de même régularité ponctuelle : **Ensembles iso-höldériens**
- Définir une notion pour "quantifier" ces ensembles : **Dimension de Hausdorff**

L'analyse Multifractale pour des fonctions :

Décrire les fonctions dont la "régularité" varie d'un point à un autre.

Outils pour cet exposé :

- Définir une notion de régularité ponctuelle : **Exposant de Hölder**
- Définir un ensemble de points de même régularité ponctuelle : **Ensembles iso-höldériens**
- Définir une notion pour "quantifier" ces ensembles : **Dimension de Hausdorff**

Objectif : Définir une notion de spectre dit "multifractal"

A chaque valeur de **régularité ponctuelle** possible associer la **dimension de fractale** des ensembles de même régularité.

Table des matières

- 1 Notations et définitions
- 2 Historique
- 3 Modèle d'étude
- 4 Modules de continuité
- 5 Idée de la preuve
- 6 Perspectives

Exposant ponctuel de Hölder

Exposant ponctuel de Hölder

Définition (Exposant ponctuel de Hölder)

Soient $f \in L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R})$, α un réel positif et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Exposant ponctuel de Hölder

Définition (Exposant ponctuel de Hölder)

Soient $f \in L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R})$, α un réel positif et $x_0 \in \mathbb{R}$.

La fonction f appartient à $C^{\alpha}(x_0)$ lorsqu'il existe un polynôme P de degré strictement inférieur à $\lfloor \alpha \rfloor$ et une constante réelle $K_{\alpha} > 0$ tel que pour tout x sur un voisinage de x_0 ,

Exposant ponctuel de Hölder

Définition (Exposant ponctuel de Hölder)

Soient $f \in L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R})$, α un réel positif et $x_0 \in \mathbb{R}$.

La fonction f appartient à $C^{\alpha}(x_0)$ lorsqu'il existe un polynôme P de degré strictement inférieur à $\lfloor \alpha \rfloor$ et une constante réelle $K_{\alpha} > 0$ tel que pour tout x sur un voisinage de x_0 ,

$$|f(x) - P_{x_0}(x - x_0)| \leq K_{\alpha} |x - x_0|^{\alpha}.$$

Exposant ponctuel de Hölder

Définition (Exposant ponctuel de Hölder)

Soient $f \in L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R})$, α un réel positif et $x_0 \in \mathbb{R}$.

La fonction f appartient à $C^{\alpha}(x_0)$ lorsqu'il existe un polynôme P de degré strictement inférieur à $\lfloor \alpha \rfloor$ et une constante réelle $K_{\alpha} > 0$ tel que pour tout x sur un voisinage de x_0 ,

$$|f(x) - P_{x_0}(x - x_0)| \leq K_{\alpha} |x - x_0|^{\alpha}.$$

L'exposant ponctuel de Hölder est défini par,

$$h_f(x_0) = \sup\{\alpha \in \mathbb{R}_+ : f \in C^{\alpha}(x_0)\}.$$

Exposant ponctuel de Hölder

Définition (Exposant ponctuel de Hölder)

Soient $f \in L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R})$, α un réel positif et $x_0 \in \mathbb{R}$.

La fonction f appartient à $C^{\alpha}(x_0)$ lorsqu'il existe un polynôme P de degré strictement inférieur à $\lfloor \alpha \rfloor$ et une constante réelle $K_{\alpha} > 0$ tel que pour tout x sur un voisinage de x_0 ,

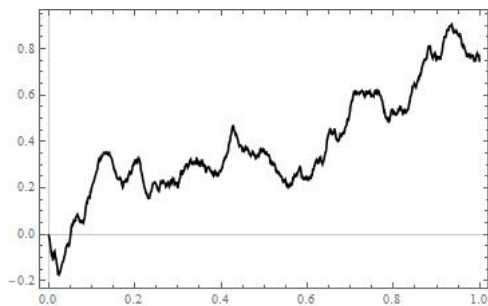
$$|f(x) - P_{x_0}(x - x_0)| \leq K_{\alpha} |x - x_0|^{\alpha}.$$

L'exposant ponctuel de Hölder est défini par,

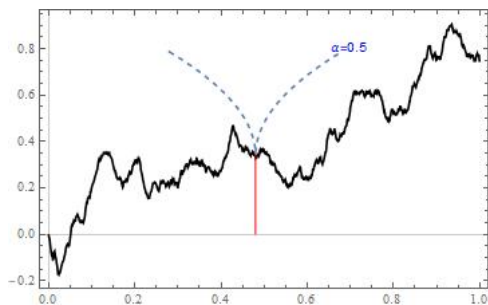
$$h_f(x_0) = \sup\{\alpha \in \mathbb{R}_+ : f \in C^{\alpha}(x_0)\}.$$

Remarque : Le polynôme P est unique et lorsque $\alpha \in]0, 1[$, P est constant et vaut $f(x_0)$.

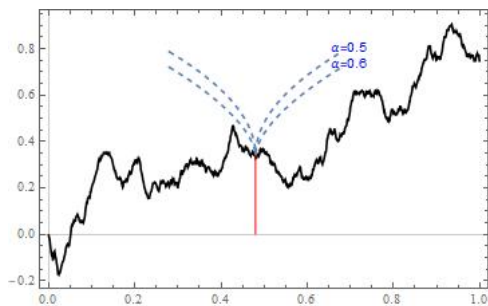
Ensemble Isohöderien



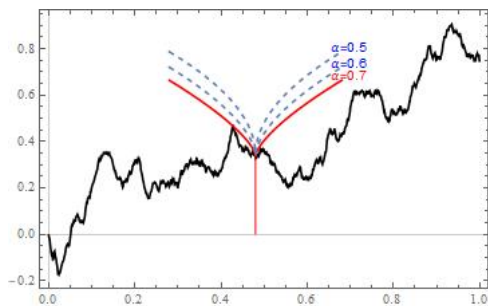
Ensemble Isohörderien



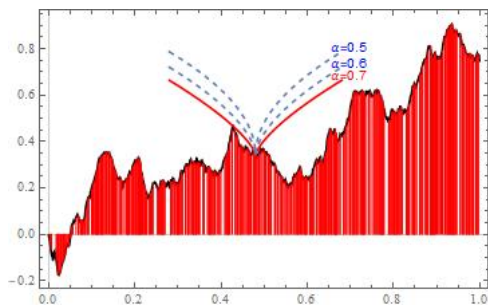
Ensemble Isohörderien



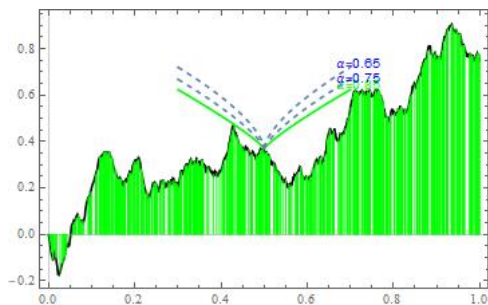
Ensemble Isohörderien



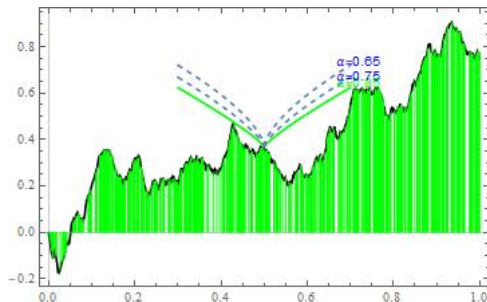
Ensemble Isohörderien



Ensemble Isohörderien



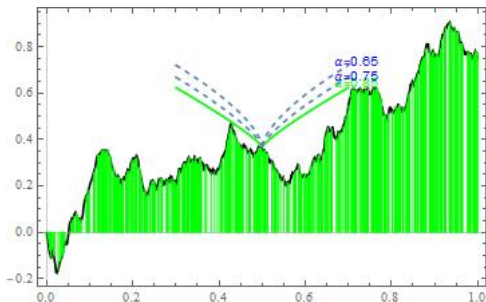
Ensemble Isohölderien



Définition (Ensemble Isohölderien)

Soient f une fonction définie sur \mathbb{R} et H un réel positif.
 L'ensemble isohölderien d'une fonction f en H est défini par,

Ensemble Isohölderien



Définition (Ensemble Isohölderien)

Soient f une fonction définie sur \mathbb{R} et H un réel positif.
L'ensemble isohölderien d'une fonction f en H est défini par,

$$E_f(H) = \{x \in \mathbb{R} : h_f(x) = H\}.$$

Dimension de Hausdorff

Dimension de Hausdorff

Pour quantifier l'espace qu'occupe les ensembles isohölderiens, on définit des notions de mesures et de dimensions fractionnaires :

Dimension de Hausdorff

Pour quantifier l'espace qu'occupe les ensembles isohölderiens, on définit des notions de mesures et de dimensions fractionnaires :

- Pré-mesure s -dimensionnelle de $E \subset \mathbb{R}^d$:

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i \in I} |U_i|^s : \bigcup_{i \in I} U_i \supset E \text{ et } |U_i| \leq \delta \right\}$$

où $|U|$ désigne le diamètre de U
et $(U_i)_{i \in I}$ est un δ -recouvrement de E .

Dimension de Hausdorff

Pour quantifier l'espace qu'occupe les ensembles isohölderiens, on définit des notions de mesures et de dimensions fractionnaires :

- Pré-mesure s -dimensionnelle de $E \subset \mathbb{R}^d$:

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i \in I} |U_i|^s : \bigcup_{i \in I} U_i \supset E \text{ et } |U_i| \leq \delta \right\}$$

où $|U|$ désigne le diamètre de U
et $(U_i)_{i \in I}$ est un δ -recouvrement de E .

- Mesure de Hausdorff s -dimensionnelle de E :

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E)$$

Dimension de Hausdorff

Pour quantifier l'espace qu'occupe les ensembles isohölderiens, on définit des notions de mesures et de dimensions fractionnaires :

- Pré-mesure s -dimensionnelle de $E \subset \mathbb{R}^d$:

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i \in I} |U_i|^s : \bigcup_{i \in I} U_i \supset E \text{ et } |U_i| \leq \delta \right\}$$

où $|U|$ désigne le diamètre de U
et $(U_i)_{i \in I}$ est un δ -recouvrement de E .

- Mesure de Hausdorff s -dimensionnelle de E :

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E)$$

- Soit $E \subset \mathbb{R}^d$, l'application $s \mapsto \mathcal{H}^s(E)$ ne prend qu'au plus 3 valeurs.

Dimension de Hausdorff

Pour quantifier l'espace qu'occupe les ensembles isohölderiens, on définit des notions de mesures et de dimensions fractionnaires :

- Pré-mesure s -dimensionnelle de $E \subset \mathbb{R}^d$:

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i \in I} |U_i|^s : \bigcup_{i \in I} U_i \supset E \text{ et } |U_i| \leq \delta \right\}$$

où $|U|$ désigne le diamètre de U
et $(U_i)_{i \in I}$ est un δ -recouvrement de E .

- Mesure de Hausdorff s -dimensionnelle de E :

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E)$$

- Soit $E \subset \mathbb{R}^d$, l'application $s \mapsto \mathcal{H}^s(E)$ ne prend qu'au plus 3 valeurs.
- Dimension de Hausdorff de E :

$$\dim_H(E) = \inf\{s > 0 : \mathcal{H}^s(E) = 0\} = \sup\{s > 0 : \mathcal{H}^s(E) = +\infty\}$$

Dimension de Hausdorff

Pour quantifier l'espace qu'occupe les ensembles isohölderiens, on définit des notions de mesures et de dimensions fractionnaires :

- Pré-mesure s -dimensionnelle de $E \subset \mathbb{R}^d$:

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i \in I} |U_i|^s : \bigcup_{i \in I} U_i \supset E \text{ et } |U_i| \leq \delta \right\}$$

où $|U|$ désigne le diamètre de U
et $(U_i)_{i \in I}$ est un δ -recouvrement de E .

- Mesure de Hausdorff s -dimensionnelle de E :

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E)$$

- Soit $E \subset \mathbb{R}^d$, l'application $s \mapsto \mathcal{H}^s(E)$ ne prend qu'au plus 3 valeurs.
- Dimension de Hausdorff de E :

$$\dim_H(E) = \inf\{s > 0 : \mathcal{H}^s(E) = 0\} = \sup\{s > 0 : \mathcal{H}^s(E) = +\infty\}$$

Par convention $\dim_H(\emptyset) = -\infty$.

Spectre multifractal

Spectre multifractal

Les fonctions que nous allons rencontrer par la suite possèdent des ensembles isohölderiens souvent fractals. Il est donc pertinent d'utiliser la dimension de Hausdorff pour les distinguer entre eux.

Spectre multifractal

Les fonctions que nous allons rencontrer par la suite possèdent des ensembles isohöldériens souvent fractals. Il est donc pertinent d'utiliser la dimension de Hausdorff pour les distinguer entre eux.

Définition (Spectre multifractal)

Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, le spectre multifractal de f est l'application :

$$D_f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{-\infty\} \\ H \longmapsto \dim_H(E_f(H)) \end{cases} \quad \text{où } E_f(H) = \{x \in \mathbb{R}^d : h_f(x) = H\}$$

Spectre multifractal

Les fonctions que nous allons rencontrer par la suite possèdent des ensembles isohölderiens souvent fractals. Il est donc pertinent d'utiliser la dimension de Hausdorff pour les distinguer entre eux.

Définition (Spectre multifractal)

Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, le spectre multifractal de f est l'application :

$$D_f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{-\infty\} \\ H \longmapsto \dim_H(E_f(H)) \end{cases} \quad \text{où } E_f(H) = \{x \in \mathbb{R}^d : h_f(x) = H\}$$

On dit que f est multifractale lorsqu'il y a plusieurs $E_f(H)$ non-vides. Dans le cas contraire on dit que f est monofractale.

Spectre multifractal

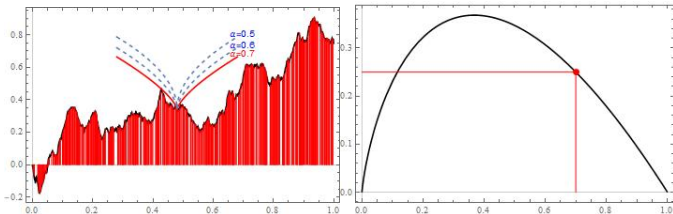
Les fonctions que nous allons rencontrer par la suite possèdent des ensembles isohédériens souvent fractals. Il est donc pertinent d'utiliser la dimension de Hausdorff pour les distinguer entre eux.

Définition (Spectre multifractal)

Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, le spectre multifractal de f est l'application :

$$D_f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{-\infty\} \\ H \longmapsto \dim_H(E_f(H)) \end{cases} \quad \text{où } E_f(H) = \{x \in \mathbb{R}^d : h_f(x) = H\}$$

On dit que f est multifractale lorsqu'il y a plusieurs $E_f(H)$ non-vides. Dans le cas contraire on dit que f est monofractale.



Spectre multifractal

Les fonctions que nous allons rencontrer par la suite possèdent des ensembles isohédériens souvent fractals. Il est donc pertinent d'utiliser la dimension de Hausdorff pour les distinguer entre eux.

Définition (Spectre multifractal)

Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, le spectre multifractal de f est l'application :

$$D_f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{-\infty\} \\ H \longmapsto \dim_H(E_f(H)) \end{cases} \quad \text{où } E_f(H) = \{x \in \mathbb{R}^d : h_f(x) = H\}$$

On dit que f est multifractale lorsqu'il y a plusieurs $E_f(H)$ non-vides. Dans le cas contraire on dit que f est monofractale.

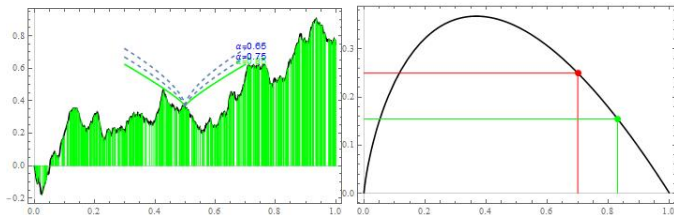


Table des matières

- 1 Notations et définitions
- 2 Historique
- 3 Modèle d'étude
- 4 Modules de continuité
- 5 Idée de la preuve
- 6 Perspectives

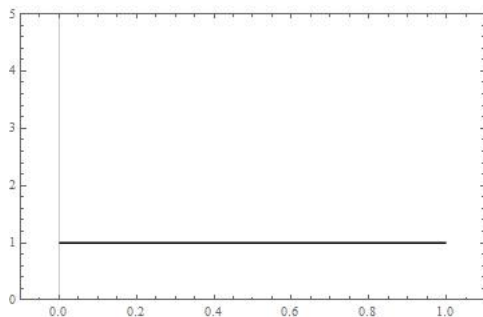
Premier modèle de sommes de pulses aléatoires

Premier modèle de sommes de pulses aléatoires

Lovejoy et Mandelbrot (1984) : Modèle bi-dimensionnel où l'on somme des fonctions saut sur un support fini dont les largeurs et les hauteurs ne sont pas indépendantes.

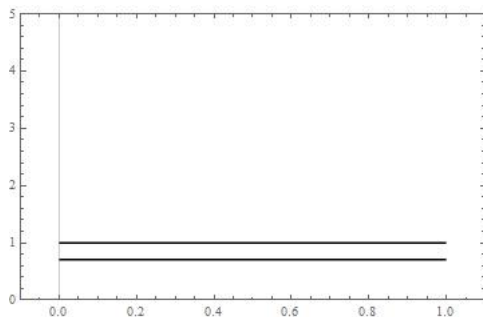
Premier modèle de sommes de pulses aléatoires

Lovejoy et Mandelbrot (1984) : Modèle bi-dimensionnel où l'on somme des fonctions saut sur un support fini dont les largeurs et les hauteurs ne sont pas indépendantes.



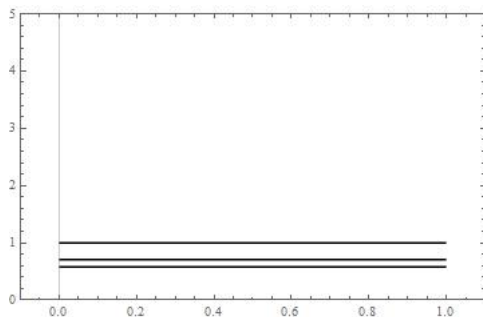
Premier modèle de sommes de pulses aléatoires

Lovejoy et Mandelbrot (1984) : Modèle bi-dimensionnel où l'on somme des fonctions saut sur un support fini dont les largeurs et les hauteurs ne sont pas indépendantes.



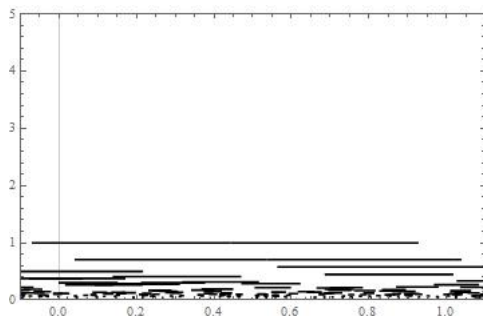
Premier modèle de sommes de pulses aléatoires

Lovejoy et Mandelbrot (1984) : Modèle bi-dimensionnel où l'on somme des fonctions saut sur un support fini dont les largeurs et les hauteurs ne sont pas indépendantes.



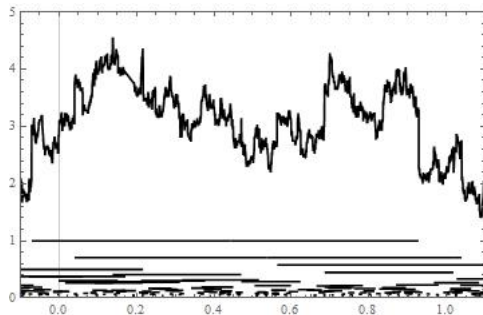
Premier modèle de sommes de pulses aléatoires

Lovejoy et Mandelbrot (1984) : Modèle bi-dimensionnel où l'on somme des fonctions saut sur un support fini dont les largeurs et les hauteurs ne sont pas indépendantes.



Premier modèle de sommes de pulses aléatoires

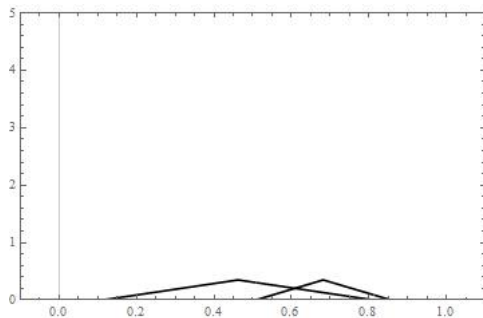
Lovejoy et Mandelbrot (1984) : Modèle bi-dimensionnel où l'on somme des fonctions saut sur un support fini dont les largeurs et les hauteurs ne sont pas indépendantes.



Deuxième modèle de sommes de pulses aléatoires

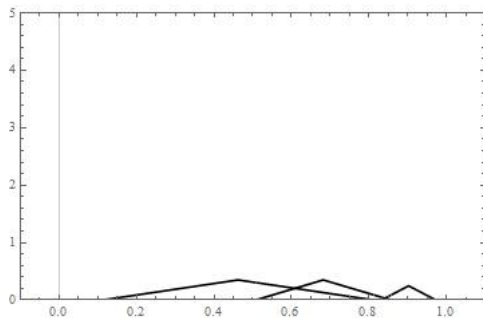
Deuxième modèle de sommes de pulses aléatoires

Cioczek et Mandelbrot (1996) : Prennent à la place des sauts des fonctions coniques.



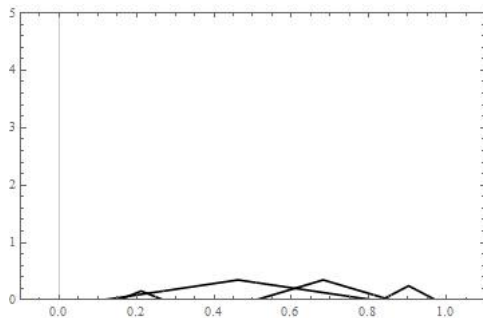
Deuxième modèle de sommes de pulses aléatoires

Cioczek et Mandelbrot (1996) : Prennent à la place des sauts des fonctions coniques.



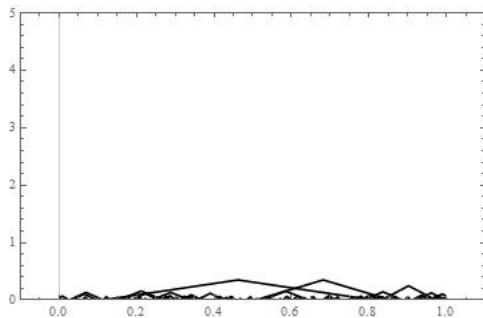
Deuxième modèle de sommes de pulses aléatoires

Cioczek et Mandelbrot (1996) : Prennent à la place des sauts des fonctions coniques.



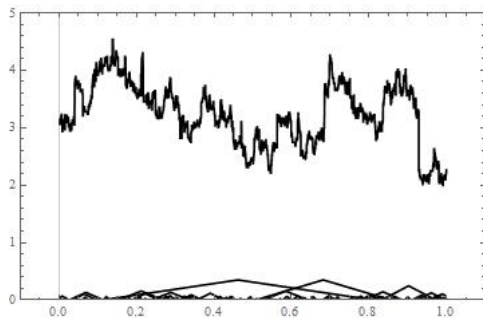
Deuxième modèle de sommes de pulses aléatoires

Cioczek et Mandelbrot (1996) : Prennent à la place des sauts des fonctions coniques.



Deuxième modèle de sommes de pulses aléatoires

Cioczek et Mandelbrot (1996) : Prennent à la place des sauts des fonctions coniques.



Autres modèles de sommes de pulses aléatoires

Autres modèles de sommes de pulses aléatoires

Demichel, Tricot et Falconer (2007) : Soient $\alpha \in]0, 1[$

Autres modèles de sommes de pulses aléatoires

Demichel, Tricot et Falconer (2007) : Soient $\alpha \in]0, 1[$, $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue paire décroissante sur $[0, 1]$ et égale à 0 sur $[1, +\infty[$ avec $\psi(0) = 1$

Autres modèles de sommes de pulses aléatoires

Demichel, Tricot et Falconer (2007) : Soient $\alpha \in]0, 1[$, $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue paire décroissante sur $[0, 1]$ et égale à 0 sur $[1, +\infty[$ avec $\psi(0) = 1$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendante de loi uniforme sur $[0, 1]$. L'aléatoire se trouve uniquement sur le paramètre de translation.

Autres modèles de sommes de pulses aléatoires

Demichel, Tricot et Falconer (2007) : Soient $\alpha \in]0, 1[$, $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue paire décroissante sur $[0, 1]$ et égale à 0 sur $[1, +\infty[$ avec $\psi(0) = 1$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendante de loi uniforme sur $[0, 1]$. L'aléatoire se trouve uniquement sur le paramètre de translation.

Une somme de pulse aléatoire est définie par

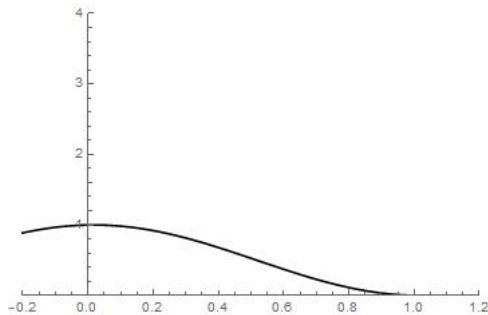
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\alpha} \psi(n(x - X_n)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Autres modèles de sommes de pulses aléatoires

Demichel, Tricot et Falconer (2007) : Soient $\alpha \in]0, 1[$, $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue paire décroissante sur $[0, 1]$ et égale à 0 sur $[1, +\infty[$ avec $\psi(0) = 1$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendante de loi uniforme sur $[0, 1]$. L'aléatoire se trouve uniquement sur le paramètre de translation.

Une somme de pulse aléatoire est définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\alpha} \psi(n(x - X_n)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

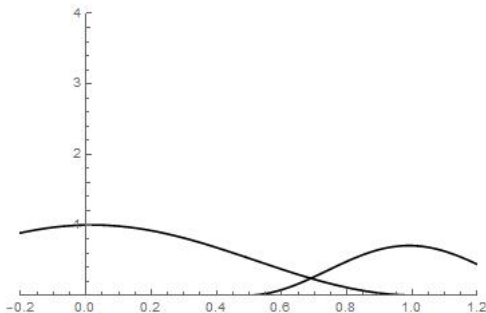


Autres modèles de sommes de pulses aléatoires

Demichel, Tricot et Falconer (2007) : Soient $\alpha \in]0, 1[$, $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue paire décroissante sur $[0, 1]$ et égale à 0 sur $[1, +\infty[$ avec $\psi(0) = 1$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendante de loi uniforme sur $[0, 1]$. L'aléatoire se trouve uniquement sur le paramètre de translation.

Une somme de pulse aléatoire est définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\alpha} \psi(n(x - X_n)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

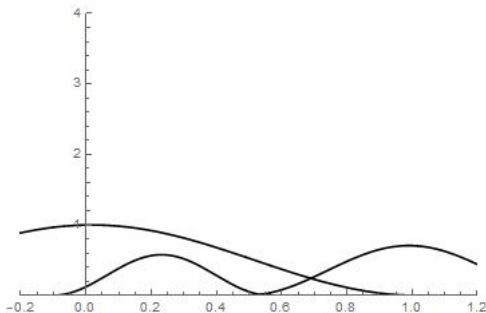


Autres modèles de sommes de pulses aléatoires

Demichel, Tricot et Falconer (2007) : Soient $\alpha \in]0, 1[$, $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue paire décroissante sur $[0, 1]$ et égale à 0 sur $[1, +\infty[$ avec $\psi(0) = 1$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendante de loi uniforme sur $[0, 1]$. L'aléatoire se trouve uniquement sur le paramètre de translation.

Une somme de pulse aléatoire est définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\alpha} \psi(n(x - X_n)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

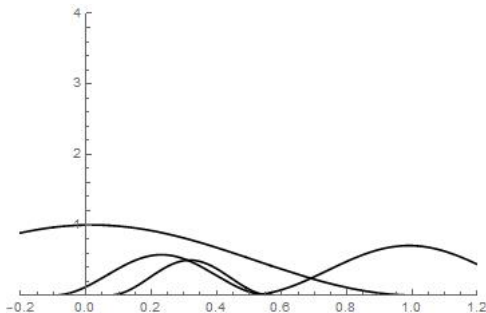


Autres modèles de sommes de pulses aléatoires

Demichel, Tricot et Falconer (2007) : Soient $\alpha \in]0, 1[$, $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue paire décroissante sur $[0, 1]$ et égale à 0 sur $[1, +\infty[$ avec $\psi(0) = 1$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendante de loi uniforme sur $[0, 1]$. L'aléatoire se trouve uniquement sur le paramètre de translation.

Une somme de pulse aléatoire est définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\alpha} \psi(n(x - X_n)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

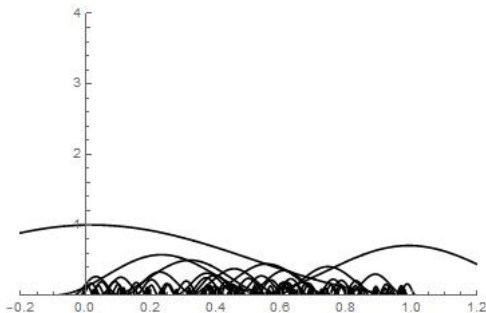


Autres modèles de sommes de pulses aléatoires

Demichel, Tricot et Falconer (2007) : Soient $\alpha \in]0, 1[$, $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue paire décroissante sur $[0, 1]$ et égale à 0 sur $[1, +\infty[$ avec $\psi(0) = 1$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendante de loi uniforme sur $[0, 1]$. L'aléatoire se trouve uniquement sur le paramètre de translation.

Une somme de pulse aléatoire est définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\alpha} \psi(n(x - X_n)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

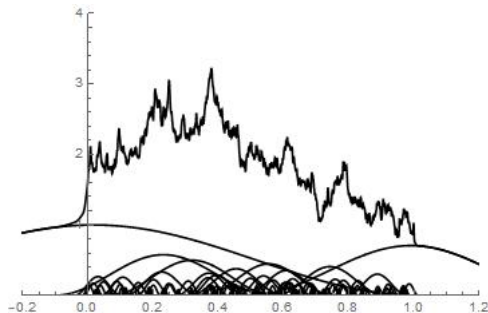


Autres modèles de sommes de pulses aléatoires

Demichel, Tricot et Falconer (2007) : Soient $\alpha \in]0, 1[$, $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue paire décroissante sur $[0, 1]$ et égale à 0 sur $[1, +\infty[$ avec $\psi(0) = 1$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendante de loi uniforme sur $[0, 1]$. L'aléatoire se trouve uniquement sur le paramètre de translation.

Une somme de pulse aléatoire est définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\alpha} \psi(n(x - X_n)), \quad x \in \mathbb{R}.$$



Autres modèles de sommes de pulses aléatoires

Γ_f est le graphe de la fonction f et \dim_B est la dimension de boîte.

Théorème (Demichel, Tricot et Falconer (2007))

S'il existe un intervalle I où la fonction ψ est un C^1 -diffeomorphisme et que la fonction $\psi \in C^h(\mathbb{R})$ alors presque sûrement

Autres modèles de sommes de pulses aléatoires

Γ_f est le graphe de la fonction f et \dim_B est la dimension de boîte.

Théorème (Demichel, Tricot et Falconer (2007))

S'il existe un intervalle I où la fonction ψ est un C^1 -diffeomorphisme et que la fonction $\psi \in C^h(\mathbb{R})$ alors presque sûrement

$$2 - \alpha \leq \dim_H(\Gamma_f) \leq \dim_B(\Gamma_f) \leq 2 - \min\{\alpha, h\}$$

Dans le cas $\alpha < h$, on a presque sûrement $\dim_H(\Gamma_f) = \dim_B(\Gamma_f)$.

Les sommes d'ondelettes

Une base d'ondelettes sur \mathbb{R} est engendrée par une fonction bien localisée, oscillante, ψ telle que les $2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, $j, k \in \mathbb{Z}$ forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

Les sommes d'ondelettes

Une base d'ondelettes sur \mathbb{R} est engendrée par une fonction bien localisée, oscillante, ψ telle que les $2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, $j, k \in \mathbb{Z}$ forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \quad \text{avec} \quad c_{j,k} = 2^{j/2} \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi(2^j x - k) dx.$$

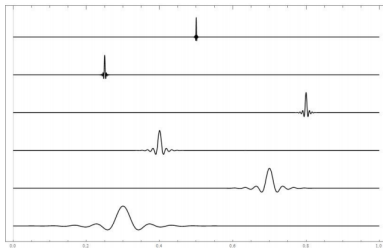


Figure – Analyse temps-échelle

Les séries aléatoires et lacunaires d'ondelettes

Les séries aléatoires et lacunaires d'ondelettes

Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\eta \in]0, 1[$, on définit les séries aléatoires et lacunaires d'ondelettes par la fonction $W_{\alpha, \eta}$ définie par

$$W_{\alpha, \eta}(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^j-1} C_{j,k} \psi(2^j x - k), x \in \mathbb{R}.$$

où les coefficients d'ondelettes $C_{j,k}$ sont tirés aléatoirement et indépendamment telle que pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} \mathbb{P}(C_{j,k} = 2^{-\alpha j}) & = & 2^{-(1-\eta)j} \\ \mathbb{P}(C_{j,k} = 0) & = & 1 - 2^{-(1-\eta)j}. \end{cases}$$

Théorème (S. Jaffard (2000))

Le spectre d'une série aléatoires et lacunaire d'ondelettes $W_{\alpha, \eta}$ est presque sûrement définie par

$$D_{W_{\alpha, \eta}}(H) = \begin{cases} \frac{\eta H}{\alpha} & \text{si } H \in [\alpha, \frac{\alpha}{\eta}] \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Table des matières

- 1 Notations et définitions
- 2 Historique
- 3 Modèle d'étude
- 4 Modules de continuité
- 5 Idée de la preuve
- 6 Perspectives

Définition

Soient $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un point d'un processus de Poisson dont l'intensité est Lebesgue sur \mathbb{R}_+ et S un autre point d'un processus de Poisson dont l'intensité est Lebesgue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. On écrit $S = (B_n, X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante. Par construction les trois suites de variables aléatoires $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont deux à deux indépendantes.

Définition

Soient $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un point d'un processus de Poisson dont l'intensité est Lebesgue sur \mathbb{R}_+ et S un autre point d'un processus de Poisson dont l'intensité est Lebesgue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. On écrit $S = (B_n, X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante. Par construction les trois suites de variables aléatoires $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont deux à deux indépendantes.

Définition (Sommes de pulses aléatoires)

Soient ψ une fonction $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne à support sur $[-1, 1]$

Définition

Soient $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un point d'un processus de Poisson dont l'intensité est Lebesgue sur \mathbb{R}_+ et S un autre point d'un processus de Poisson dont l'intensité est Lebesgue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. On écrit $S = (B_n, X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante. Par construction les trois suites de variables aléatoires $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont deux à deux indépendantes.

Définition (Sommes de pulses aléatoires)

Soient ψ une fonction $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne à support sur $[-1, 1]$ et $\alpha, \eta \in]0, 1[$

Définition

Soient $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un point d'un processus de Poisson dont l'intensité est Lebesgue sur \mathbb{R}_+ et S un autre point d'un processus de Poisson dont l'intensité est Lebesgue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. On écrit $S = (B_n, X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante. Par construction les trois suites de variables aléatoires $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont deux à deux indépendantes.

Définition (Sommes de pulses aléatoires)

Soient ψ une fonction $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne à support sur $[-1, 1]$ et $\alpha, \eta \in]0, 1[$. α s'interprète comme un coefficient de régularité et η comme un coefficient de lacunarité.

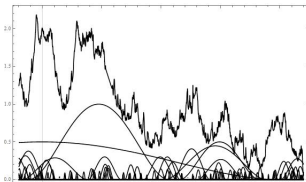
Définition

Soient $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un point d'un processus de Poisson dont l'intensité est Lebesgue sur \mathbb{R}_+ et S un autre point d'un processus de Poisson dont l'intensité est Lebesgue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. On écrit $S = (B_n, X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante. Par construction les trois suites de variables aléatoires $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont deux à deux indépendantes.

Définition (Sommes de pulses aléatoires)

Soient ψ une fonction $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne à support sur $[-1, 1]$ et $\alpha, \eta \in]0, 1[$. α s'interprète comme un coefficient de régularité et η comme un coefficient de lacunarité. On étudie la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par la somme de pulses aléatoires suivante

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n^{-\alpha} \psi \left(B_n^{\frac{1}{\eta}} (x - X_n) \right), \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$



Positionnement par rapport aux autres modèles

Par rapport à ce qu'on a vu précédemment,

Positionnement par rapport aux autres modèles

Par rapport à ce qu'on a vu précédemment,

- Il intègre les modèles définies par Cioczek et Mandelbrot (1996) avec différentes formes pour le pulse ;

Positionnement par rapport aux autres modèles

Par rapport à ce qu'on a vu précédemment,

- Il intègre les modèles définies par Cioczek et Mandelbrot (1996) avec différentes formes pour le pulse ;
- Il diffère du modèle de Tricot, Falconer (2007) et Jaffard (2002) puisqu'on choisit des coefficients de dilatations aléatoires ;

Positionnement par rapport aux autres modèles

Par rapport à ce qu'on a vu précédemment,

- Il intègre les modèles définies par Cioczek et Mandelbrot (1996) avec différentes formes pour le pulse ;
- Il diffère du modèle de Tricot, Falconer (2007) et Jaffard (2002) puisqu'on choisit des coefficients de dilatations aléatoires ;

Quels sont les intérêts d'étude du modèle,

Positionnement par rapport aux autres modèles

Par rapport à ce qu'on a vu précédemment,

- Il intègre les modèles définies par Cioczek et Mandelbrot (1996) avec différentes formes pour le pulse ;
- Il diffère du modèle de Tricot, Falconer (2007) et Jaffard (2002) puisqu'on choisit des coefficients de dilatations aléatoires ;

Quels sont les intérêts d'étude du modèle,

- On retrouve les mêmes propriétés que les précédents modèles ;

Positionnement par rapport aux autres modèles

Par rapport à ce qu'on a vu précédemment,

- Il intègre les modèles définies par Cioczek et Mandelbrot (1996) avec différentes formes pour le pulse ;
- Il diffère du modèle de Tricot, Falconer (2007) et Jaffard (2002) puisqu'on choisit des coefficients de dilatations aléatoires ;

Quels sont les intérêts d'étude du modèle,

- On retrouve les mêmes propriétés que les précédents modèles ;
- Il ne repose pas sur une grille dyadique comme pour les sommes aléatoires et lacunaires d'ondelettes ainsi le modèle est plus homogène et naturel d'un point de vue probabiliste.

Positionnement par rapport aux autres modèles

Par rapport à ce qu'on a vu précédemment,

- Il intègre les modèles définies par Cioczek et Mandelbrot (1996) avec différentes formes pour le pulse ;
- Il diffère du modèle de Tricot, Falconer (2007) et Jaffard (2002) puisqu'on choisit des coefficients de dilatations aléatoires ;

Quels sont les intérêts d'étude du modèle,

- On retrouve les mêmes propriétés que les précédents modèles ;
- Il ne repose pas sur une grille dyadique comme pour les sommes aléatoires et lacunaires d'ondelettes ainsi le modèle est plus homogène et naturel d'un point de vue probabiliste.

Résultats

Résultats

Théorème (Régularité uniforme)

Presque sûrement pour tout $\varepsilon \in]0, \alpha\eta[$, $F \in C^{\alpha\eta - \varepsilon}([0, 1])$.

Résultats

Théorème (Régularité uniforme)

Presque sûrement pour tout $\varepsilon \in]0, \alpha\eta[$, $F \in C^{\alpha\eta - \varepsilon}([0, 1])$.

Théorème (G. Saës & S. Seuret 2020)

Presque sûrement,

$$D_F(H) = \begin{cases} \frac{H}{\alpha} & \text{si } H \in [\alpha\eta, \alpha] \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

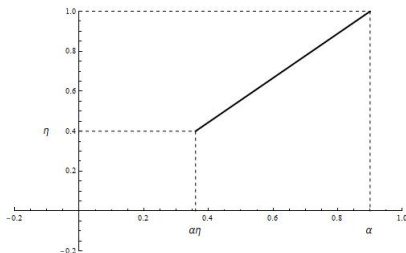


Table des matières

- 1 Notations et définitions
- 2 Historique
- 3 Modèle d'étude
- 4 Modules de continuité
- 5 Idée de la preuve
- 6 Perspectives

Définition

Définition

Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Le module de régularité de la fonction f est la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par

$$\omega_f(h) = \sup_{|x-x_0| \leq h} |f(x) - f(x_0)|.$$

Définition

Définition

Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Le module de régularité de la fonction f est la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par

$$\omega_f(h) = \sup_{|x-x_0| \leq h} |f(x) - f(x_0)|.$$

Définition

On dit que la fonction θ définie sur \mathbb{R}_+ est un module de continuité lorsque θ est une fonction croissante non-identiquement nulle telle que

- 1 $\theta(0) = 0$.
- 2 Il existe $K > 0$ tel que $\theta(2x) \leq K\theta(x)$.

Définition

Définition

Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Le module de régularité de la fonction f est la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par

$$\omega_f(h) = \sup_{|x-x_0| \leq h} |f(x) - f(x_0)|.$$

Définition

On dit que la fonction θ définie sur \mathbb{R}_+ est un module de continuité lorsque θ est une fonction croissante non-identiquement nulle telle que

- ❶ $\theta(0) = 0$.
- ❷ Il existe $K > 0$ tel que $\theta(2x) \leq K\theta(x)$.

Définition

Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. La fonction f appartient à l'espace hölderien $C_\theta(\mathbb{R})$ lorsqu'il existe $K > 0$ tel que $\forall h \in \mathbb{R}_+, \omega_f(h) \leq K\theta(h)$.

On dit alors que θ est un module de continuité uniforme de la fonction f .

Résultats sur les modules de continuités

Résultats sur les modules de continuités

Théorème (G. Saës & S. Seuret 2020)

Soit F une somme de pulses aléatoires définie en (1). Presque sûrement,

Résultats sur les modules de continuités

Théorème (G. Saës & S. Seuret 2020)

Soit F une somme de pulses aléatoires définie en (1). Presque sûrement,

(i) l'application $h \mapsto |\log_2 |h||^{3+\alpha} |h|^{\alpha\eta}$ est un module de continuité uniforme de F .

Résultats sur les modules de continuités

Théorème (G. Saës & S. Seuret 2020)

Soit F une somme de pulses aléatoires définie en (1). Presque sûrement,

- (i) l'application $h \mapsto |\log_2 |h||^{3+\alpha} |h|^{\alpha\eta}$ est un module de continuité uniforme de F .
- (ii) l'application $h \mapsto |\log_2 |h||^{3+\alpha} |h|^\alpha$ est un module de continuité presque partout de F .

Résultats sur les modules de continuités

Théorème (G. Saës & S. Seuret 2020)

Soit F une somme de pulses aléatoires définie en (1). Presque sûrement,

- (i) l'application $h \mapsto |\log_2 |h||^{3+\alpha} |h|^{\alpha\eta}$ est un module de continuité uniforme de F .
- (ii) l'application $h \mapsto |\log_2 |h||^{3+\alpha} |h|^\alpha$ est un module de continuité presque partout de F .
- (iii) Pour Lebesgue presque tout $x_0 \in [0, 1]$, le module de continuité local de F en x_0 est plus grand que $h \mapsto |\log_2 |h||^{2\alpha} |h|^\alpha$.

Résultats sur les modules de continuités

Théorème (G. Saës & S. Seuret 2020)

Soit F une somme de pulses aléatoires définie en (1). Presque sûrement,

- (i) l'application $h \mapsto |\log_2 |h||^{3+\alpha} |h|^{\alpha\eta}$ est un module de continuité uniforme de F .
- (ii) l'application $h \mapsto |\log_2 |h||^{3+\alpha} |h|^\alpha$ est un module de continuité presque partout de F .
- (iii) Pour Lebesgue presque tout $x_0 \in [0, 1]$, le module de continuité local de F en x_0 est plus grand que $h \mapsto |\log_2 |h||^{2\alpha} |h|^\alpha$.

On peut en déduire que le module optimal de continuité presque partout θ_F de F vérifie que,

$$|\log_2 |h||^{2\alpha} |h|^\alpha \leq \theta_F(h) \leq |\log_2 |h||^{3+\alpha} |h|^\alpha$$

Table des matières

- 1 Notations et définitions
- 2 Historique
- 3 Modèle d'étude
- 4 Modules de continuité
- 5 Idée de la preuve
- 6 Perspectives

Caractérisation de la régularité uniforme par les ondelettes

Caractérisation de la régularité uniforme par les ondelettes

Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction non-nulle à support compact, d'intégrale nulle et ψ suffisamment régulière,

Caractérisation de la régularité uniforme par les ondelettes

Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction non-nulle à support compact, d'intégrale nulle et ψ suffisamment régulière, c'est-à-dire que si $\alpha \in]0, 1[$ alors ψ est une fonction lipschitzienne, sinon $\psi \in C^{[\alpha]+1}(\mathbb{R})$.

Caractérisation de la régularité uniforme par les ondelettes

Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction non-nulle à support compact, d'intégrale nulle et ψ suffisamment régulière, c'est-à-dire que si $\alpha \in]0, 1[$ alors ψ est une fonction lipschitzienne, sinon $\psi \in C^{[\alpha]+1}(\mathbb{R})$.

Les coefficients d'ondelettes **continues** associé à la fonction ϕ d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ est définie par le couple $(s, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par

$$W_f(s, t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \phi_{s,t}(x) dx \quad \text{avec} \quad \phi_{s,t}(x) = \phi\left(\frac{x-t}{s}\right).$$

Caractérisation de la régularité uniforme par les ondelettes

Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction non-nulle à support compact, d'intégrale nulle et ψ suffisamment régulière, c'est-à-dire que si $\alpha \in]0, 1[$ alors ψ est une fonction lipschitzienne, sinon $\psi \in C^{[\alpha]+1}(\mathbb{R})$.

Les coefficients d'ondelettes **continues** associé à la fonction ϕ d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ est définie par le couple $(s, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par

$$W_f(s, t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \phi_{s,t}(x) dx \quad \text{avec} \quad \phi_{s,t}(x) = \phi\left(\frac{x-t}{s}\right).$$

Théorème (S. Jaffard & Y. Meyer)

Soit $H \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $x \mapsto |\log|x||^\beta |x|^H$ est un module de continuité uniforme pour f si et seulement si il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, |W_f(s, t)| \leq K s^{H+\frac{1}{2}} |\log|s||^\beta.$$

Régularité Uniforme

Régularité Uniforme

Théorème (G. Saës & S. Seuret)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{N}$ et $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ avec $\alpha\eta < 1$. Presque sûrement, il existe $K > 0$ tel que pour tout $(s, t) \in]0, 1] \times \mathbb{R}$,

$$|W_F(s, t)| \leq K |\log(s)|^{3+\alpha} s^{\alpha\eta + \frac{1}{2}}.$$

Régularité Uniforme

Théorème (G. Saës & S. Seuret)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{N}$ et $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ avec $\alpha\eta < 1$. Presque sûrement, il existe $K > 0$ tel que pour tout $(s, t) \in]0, 1] \times \mathbb{R}$,

$$|W_F(s, t)| \leq K |\log(s)|^{3+\alpha} s^{\alpha\eta + \frac{1}{2}}.$$

D'où l'application $h \mapsto |\log_2 |h||^{3+\alpha} |h|^{\alpha\eta}$ est un module de continuité uniforme de F .

Caractérisation de la régularité ponctuelle par les ondelettes

Caractérisation de la régularité ponctuelle par les ondelettes

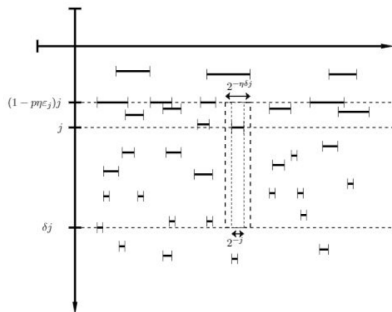
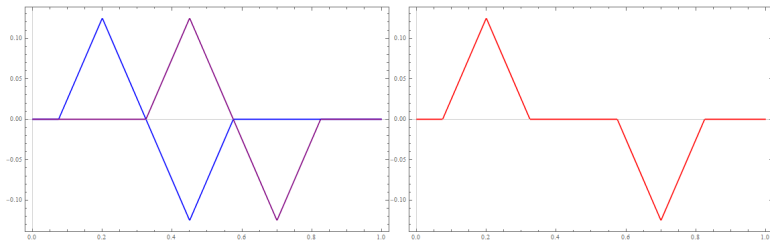
Théorème (S. Jaffard & Y. Meyer)

Soient $f \in L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $H \in \mathbb{R}_+^*$. Si $f \in C^H(x_0)$, alors ils existent $K > 0$ et U un voisinage de $(0^+, x_0)$ tel que

$$\forall (s, t) \in U, |W_F(s, t)| \leq K s^{\frac{1}{2}} (s + |x_0 - t|)^H.$$

Exposant de régularité ponctuelle de Hölder

Exposant de régularité ponctuelle de Hölder



Exposant de régularité ponctuelle de Hölder

On définit pour tout $\delta > 0$ les ensembles suivants :

$$G_\delta = \limsup_{j \rightarrow +\infty} \bigcup_{n \in A_j} B(X_n, B_n^{-\delta})$$

et

Exposant de régularité ponctuelle de Hölder

On définit pour tout $\delta > 0$ les ensembles suivants :

$$G_\delta = \limsup_{j \rightarrow +\infty} \bigcup_{n \in A_j} B(X_n, B_n^{-\delta})$$

et

$$G'_\delta = \limsup_{j \rightarrow +\infty} \bigcup_{n \in \mathcal{I}_j} B(X_n, B_n^{-\delta(1-\tilde{\varepsilon}_j)}) \quad \text{où } \tilde{\varepsilon}_j = \log_2(4j \log_2 j) / (\eta j).$$

où pour une valeur $p > (3 + 3\alpha)/(1 - \alpha\eta)$ et $p > (4 + 3\alpha)/(1 + \alpha\eta)$ on a

$$\mathcal{I}_j = \{n \in A_j : \forall m \in \bigcup_{j=(1-p\eta\varepsilon_j)}^{\delta j} A_j, n \neq m, B(X_n, B_n^{-\frac{1}{\eta}}) \cap B(X_m, B_m^{-\frac{1}{\eta}}) = \emptyset\}.$$

Exposant de régularité ponctuelle de Hölder

On définit pour tout $\delta > 0$ les ensembles suivants :

$$G_\delta = \limsup_{j \rightarrow +\infty} \bigcup_{n \in A_j} B(X_n, B_n^{-\delta})$$

et

$$G'_\delta = \limsup_{j \rightarrow +\infty} \bigcup_{n \in \mathcal{I}_j} B(X_n, B_n^{-\delta(1-\tilde{\varepsilon}_j)}) \quad \text{où } \tilde{\varepsilon}_j = \log_2(4j \log_2 j) / (\eta j).$$

où pour une valeur $p > (3 + 3\alpha)/(1 - \alpha\eta)$ et $p > (4 + 3\alpha)/(1 + \alpha\eta)$ on a

$$\mathcal{I}_j = \{n \in A_j : \forall m \in \bigcup_{j=(1-p\eta\varepsilon_j)}^{\delta j} A_j, n \neq m, B(X_n, B_n^{-\frac{1}{\eta}}) \cap B(X_m, B_m^{-\frac{1}{\eta}}) = \emptyset\}.$$

Proposition

Presque sûrement, pour tout $\delta \in [1, 1/\eta]$ et $x_0 \in G'_\delta$, $h_F(x_0) \leq \frac{\alpha}{\delta}$.

Exposant de régularité ponctuelle de Hölder

On définit pour tout $\delta > 0$ les ensembles suivants :

$$G_\delta = \limsup_{j \rightarrow +\infty} \bigcup_{n \in A_j} B(X_n, B_n^{-\delta})$$

et

$$G'_\delta = \limsup_{j \rightarrow +\infty} \bigcup_{n \in \mathcal{I}_j} B(X_n, B_n^{-\delta(1-\tilde{\varepsilon}_j)}) \quad \text{où } \tilde{\varepsilon}_j = \log_2(4j \log_2 j) / (\eta j).$$

où pour une valeur $p > (3 + 3\alpha)/(1 - \alpha\eta)$ et $p > (4 + 3\alpha)/(1 + \alpha\eta)$ on a

$$\mathcal{I}_j = \{n \in A_j : \forall m \in \bigcup_{j=(1-p\eta\varepsilon_j)}^{\delta j} A_j, n \neq m, B(X_n, B_n^{-\frac{1}{\eta}}) \cap B(X_m, B_m^{-\frac{1}{\eta}}) = \emptyset\}.$$

Proposition

Presque sûrement, pour tout $\delta \in [1, 1/\eta]$ et $x_0 \in G'_\delta$, $h_F(x_0) \leq \frac{\alpha}{\delta}$.

Proposition

Presque sûrement, pour tout $\delta \in [1, 1/\eta]$ et $x_0 \notin G_\delta$, $h_F(x_0) \geq \frac{\alpha}{\delta}$.

Conclusion

Pour tout $H \in [\alpha\eta, \alpha[$,

$$G'_{\alpha/H} \setminus \bigcup_{\delta > \frac{\alpha}{H}} G_\delta \subseteq E_F(H) \subseteq \bigcap_{\delta < \frac{\alpha}{H}} G_\delta$$

Conclusion

Pour tout $H \in [\alpha\eta, \alpha]$,

$$G'_{\alpha/H} \setminus \bigcup_{\delta > \frac{\alpha}{H}} G_\delta \subseteq E_F(H) \subseteq \bigcap_{\delta < \frac{\alpha}{H}} G_\delta$$

$$\frac{H}{\alpha} = \dim_H \left(G'_{\alpha/H} \setminus \bigcup_{\delta > \frac{\alpha}{H}} G_\delta \right) \leq D_F(H) \leq \dim_H \left(\bigcap_{\delta < \frac{\alpha}{H}} G_\delta \right) = \frac{H}{\alpha}.$$

Table des matières

- 1 Notations et définitions
- 2 Historique
- 3 Modèle d'étude
- 4 Modules de continuité
- 5 Idée de la preuve
- 6 Perspectives

Idées de perspectives

- p -exposants afin de traiter les cas non-bornés
- Exposant d'oscillation
- Modifier le modèle

Espace $T_\alpha^p(x_0)$ et p -exposants

Espace $T_\alpha^p(x_0)$ et p -exposants

Espace $T_\alpha^p(x_0)$ et p -exposantsDéfinition (p -exposant)

Soient $p \in [1, +\infty[$, $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R})$ et $\alpha > -\frac{1}{p}$.

Espace $T_\alpha^p(x_0)$ et p -exposantsDéfinition (p -exposant)

Soient $p \in [1, +\infty[$, $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R})$ et $\alpha > -\frac{1}{p}$.

La fonction f appartient à $T_\alpha^p(x_0)$ lorsqu'il existe un polynôme P de degré inférieur à α et deux constantes réelles $R, K_\alpha > 0$ telles que pour tout x sur un voisinage de x_0 , on a

Espace $T_\alpha^p(x_0)$ et p -exposantsDéfinition (p -exposant)

Soient $p \in [1, +\infty[$, $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R})$ et $\alpha > -\frac{1}{p}$.

La fonction f appartient à $T_\alpha^p(x_0)$ lorsqu'il existe un polynôme P de degré inférieur à α et deux constantes réelles $R, K_\alpha > 0$ telles que pour tout x sur un voisinage de x_0 , on a

$$\forall r \in]0, R[, \left(\frac{1}{r} \int_{B(x_0, r)} |f(x) - P_{x_0}(x - x_0)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq K_\alpha r^\alpha.$$

Espace $T_\alpha^p(x_0)$ et p -exposantsDéfinition (p -exposant)

Soient $p \in [1, +\infty[$, $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R})$ et $\alpha > -\frac{1}{p}$.

La fonction f appartient à $T_\alpha^p(x_0)$ lorsqu'il existe un polynôme P de degré inférieur à α et deux constantes réelles $R, K_\alpha > 0$ telles que pour tout x sur un voisinage de x_0 , on a

$$\forall r \in]0, R[, \left(\frac{1}{r} \int_{B(x_0, r)} |f(x) - P_{x_0}(x - x_0)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq K_\alpha r^\alpha.$$

Le p -exposant de f en x_0 est défini par,

$$h_f^p(x_0) = \sup\{\alpha \in \mathbb{R}_+ : f \in T_\alpha^p(x_0)\}.$$

Merci de votre attention !