

**UNIVERSITE DE L'ETAT A MONS**

FACULTE DES SCIENCES

SERVICE DE THERMODYNAMIQUE

**CONTRIBUTIONS THEORIQUE ET EXPERIMENTALE  
AU PROBLEME DE RAYLEIGH-BENARD**

**Didier VILLERS**

MEMOIRE PRESENTE POUR L'OBTENTION  
DU GRADE LEGAL DE LICENCIE  
EN SCIENCES CHIMIQUES

**ANNEE ACADEMIQUE**

**1981-1982**



Ce travail a été effectué dans le service de Chimie-Physique dirigé par Monsieur le Professeur J.J. Point, je le remercie vivement pour l'accueil qu'il m'a réservé.

Je remercie particulièrement Monsieur J.K. Platten pour la direction efficace de ce travail.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur J.M. Luijckx pour sa disponibilité et ses conseils amicaux, à Monsieur R. Quennay et le personnel de l'atelier de mécanique de la Faculté Polytechnique de Mons pour la fabrication et le polissage des plaques, et à Monsieur M. Lefebvre pour son aide technique.

Enfin, je remercie Madame Fr. Grossmann pour la rapidité et le soin apportés à la dactylographie de ce travail.

## TABLE DES MATIERES

-----

### CHAPITRE I : INTRODUCTION.

### CHAPITRE II : CONDITIONS THERMIQUES AUX BORDS.

- A. Expression mathématique des conditions aux bords.
  - 1. Thermostatisation ou température constante.
  - 2. Flux de chaleur constant.
- B. Incidence sur le nombre de Rayleigh critique.
  - 1. Appareil en verre.
  - 2. Appareil en plexiglas.

### CHAPITRE III : PROBLEME DE BENARD DANS LE CAS DE SOLUTIONS BINAIRES.

- A. Introduction.
- B. Equations hydrodynamiques. Etats stationnaires.
- C. Potentiel local pour les solutions concentrées.
- D. Fonctions d'essai.
- E. Expériences numériques.

### CHAPITRE IV : DESCRIPTION DU MONTAGE EXPERIMENTAL, ETALONNAGE ET APPLICATION AUX CORPS PURS.

- A. Description.
- B. Etalonnage du dispositif de mesure du gradient de température vertical.
- C. Etalonnage du dispositif de mesure du flux de chaleur.
- D. Mesure des variations éventuelles de la température au sein du liquide.
- E. Expériences dans les corps purs.
  - 1. Courbes de chauffe.
  - 2. Détermination des nombres de Rayleigh critiques.
  - 3. Domaine supercritique.

CHAPITRE V : EXPERIENCES DANS UN MELANGE EAU-ISOPROPANOL.

A. Conditions expérimentales, résultats.

B. Domaine conductif, point critique.

1. Appareil thermostatisé.

2. Appareil chauffé.

C. Domaine supercritique.

D. Comparaison quantitative.

CHAPITRE VI : CONCLUSIONS.

ANNEXE : GRANDEURS PHYSIQUES DES LIQUIDES.

BIBLIOGRAPHIE.

## CHAPITRE I

### INTRODUCTION

Nous avons apporté dans ce travail quelques éléments nouveaux autour du problème de Rayleigh-Bénard, notamment en ce qui concerne les conditions thermiques aux bords et l'influence des contraintes expérimentales (imposition du flux de chaleur ou imposition du gradient de température) sur le comportement du système.

Rappelons qu'une couche fluide pure à laquelle on impose un gradient de température entre ses limites inférieure et supérieure est le siège d'un gradient de densité ; la couche fluide est plus froide (et donc plus dense) dans sa partie supérieure, ce qui crée une situation instable. Pour une valeur critique du gradient de température  $\Delta T$  ou mieux du nombre de Rayleigh  $Ra$  défini par

$$Ra = \frac{g \alpha \Delta T d^3}{K \nu} \quad (I.1.)$$

où  $g$  est l'accélération due à la gravité,  $\alpha$  est le coefficient d'expansion thermique,  $d$  l'épaisseur de la couche fluide,  $K$  la diffusivité thermique et  $\nu$  la viscosité cinématique, le fluide se redistribue : c'est l'instauration soudaine de la convection accompagnée d'une structuration spatiale du fluide en cellules de convection impliquant un transport de chaleur additionnel, souvent mesurable. L'étude générale de la stabilité de l'état de repos pour ce problème a été effectuée par Chandrasekhar (1961) pour des conditions aux bords bien spécifiques (bords rigides ou libres, températures rigoureusement imposées).

Le même problème de stabilité se pose pour une couche fluide binaire où il faut en plus tenir compte de l'effet de thermodiffusion. L'étude théorique en a déjà été abordée ; du

point de vue expérimental, quelques expériences seulement ont été effectuées mais elles n'ont pas pu satisfaire pleinement une comparaison avec la théorie. En particulier, des expériences effectuées par Platten et Chavepeyer (1973) et Hurle et Jakeman (1973) ont suscité une large controverse ; celle-ci est due à la différence entre leurs modes opératoires. Les uns imposaient un flux de chaleur constant, tandis que les autres imposaient le gradient de température vertical et augmentaient celui-ci de manière continue, ne travaillant donc pas vraiment dans des conditions stationnaires. Dès lors, il n'est pas étonnant que le comportement du système soit différent dans les deux types d'expériences.

Le but de notre travail a été précisément d'étudier en détail tant du point de vue théorique qu'expérimental l'importance des différents modes opératoires pour obtenir le gradient de température ; en particulier en effectuant des expériences simultanément dans deux appareils semblables, mais différents par la manière de produire le gradient de température vertical (l'une consiste à imposer un flux de chaleur constant par le bas au moyen d'une résistance électrique, tandis qu'on mesure le gradient de température obtenu ; l'autre consiste à imposer le gradient de température vertical par thermostatisation tandis qu'on mesure le flux de chaleur). Le deuxième appareil permet d'effectuer une expérience aisément comparable à la théorie vu que dans celle-ci, le nombre de Rayleigh apparaît comme variable indépendante, alors que la première sert plutôt d'expérience de référence, puisque déjà réalisée (cependant la reproductibilité des résultats n'avait pas encore été testée). Nous avons donc cherché à mieux comprendre les différences qui pouvaient résulter des modes opératoires fondamentalement différents entre les deux appareils puisqu'en fait on inverse le rôle des variables indépendante et dépendante. Ces différences influencent aussi directement les conditions thermiques aux bords : on comprend aisément que si on impose les températures aux bords inférieur et supérieur, on pourrait, comme Chandrasekhar supposer que les

fluctuations de température sont nulles ( $\theta = 0$  aux bords). Par contre, si on impose le flux de chaleur, la question se pose de savoir s'il faut réellement écrire une condition de type  $\frac{d\theta}{dz} = 0$  aux bords, impliquant un point critique différent.

Nous avons tenté, aussi souvent qu'il était possible, une comparaison non seulement qualitative, mais aussi quantitative entre la théorie et l'expérience.

## CHAPITRE II

### CONDITIONS THERMIQUES AUX BORDS.

#### A. EXPRESSION MATHEMATIQUE DES CONDITIONS AUX BORDS.

Lorsque l'on résout les équations de l'hydrodynamique, appliquées au problème de Rayleigh-Bénard, il est évident qu'il faut leur adjoindre des conditions aux limites. En ce qui concerne les conditions auxquelles doit obéir la fluctuation de température  $\Theta$  aux bords du système, la plupart des théoriciens ont imposé une condition de type  $\Theta = 0$ , ce que les mathématiciens appellent une condition de Dirichlet. Certains autres théoriciens imposent plutôt la valeur de  $\frac{d\Theta}{d\vec{n}} = 0$ , ce que les mathématiciens appellent une condition de Neumann. La réalité expérimentale est évidemment tout autre. Même si on adopte

$\Theta = 0$  comme condition mathématique aux limites, correspondant physiquement à dire que la température est contrôlée avec une précision infinie au bord du liquide puisqu'elle ne peut pas fluctuer, il n'existe pas d'appareillage permettant de contrôler la température (ou le flux de chaleur si on adopte  $\frac{d\Theta}{d\vec{n}} = 0$ ) avec une précision infinie aux limites du fluide. En fait, le fluide est souvent contenu entre deux couches solides, et ce que nous désirons faire dans ce chapitre, c'est trouver la relation qui existe entre les conditions expérimentales imposées aux bords de ces couches solides et les conditions qui en résultent aux limites du liquide, c'est-à-dire aux interfaces solide-liquide.

Nous allons donc exprimer les conditions thermiques aux bords d'une couche fluide d'extension horizontale infinie et de hauteur  $d$  contenue entre deux bords solides d'épaisseur  $h$  (voir figure II.1.). On peut au sein d'un tel appareil produire un gradient de température vertical de deux manières : soit imposer les températures  $T_{\text{haut}}$  et  $T_{\text{bas}}$  grâce à des bains thermostatés, soit imposer  $T_{\text{haut}}$  et simultanément un flux de



chaleur constant au moyen par exemple d'une résistance électrique.

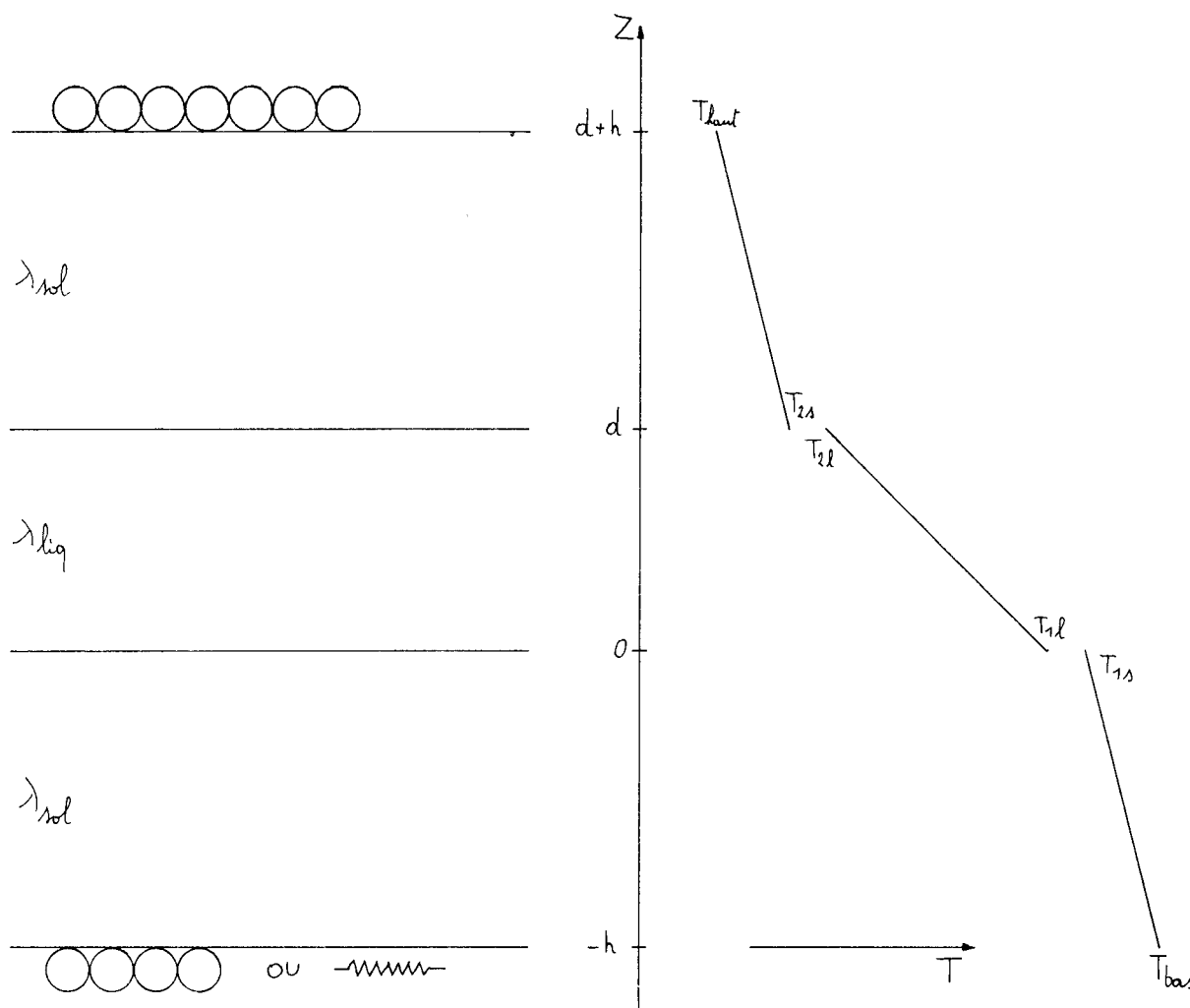


FIGURE II.1.

La température dans le solide est déterminée dans un tel "sandwich" par l'équation de Fourier,

$$\nabla^2 T = 0 \quad (\text{II.1.})$$

et dans le liquide par les équations hydrodynamiques : conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie,

$$\sum_i \frac{\partial V_i}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (\text{II.2.})$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} = - \sum_j V_j \frac{\partial V_i}{\partial \alpha_j} - \frac{1}{\rho^0} \frac{\partial P}{\partial \alpha_i} + \frac{\rho}{\rho^0} F_i + \nu \sum_j \frac{\partial^2 V_i}{\partial \alpha_j^2} \quad (\text{II.3.})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = - \sum_j V_j \frac{\partial T}{\partial \alpha_j} + K \sum_j \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha_j^2} \quad (\text{II.4.})$$

Lorsqu'on impose  $T_{\text{haut}}$  et  $T_{\text{bas}}$ , on peut trouver les températures intermédiaires  $T_{1s}$ ,  $T_{1l}$ ,  $T_{2s}$ ,  $T_{2l}$  en exprimant l'égalité des flux de chaleur à travers tout plan compris entre  $z = -h$  et  $z = d+h$ . On peut aussi tenir compte d'une discontinuité de température aux interfaces liquide-solide et introduire un coefficient de Newton. Le cas particulier de continuité de température aux interfaces correspond alors à un coefficient de Newton infini. Cette égalité des flux de chaleur s'exprime par

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{\text{sol}}}{h} (T_{\text{bas}} - T_{1s}) &= \alpha (T_{1s} - T_{1l}) = \frac{\lambda_{\text{liq}}}{d} (T_{1l} - T_{2l}) \\ &= \alpha (T_{2l} - T_{2s}) = \frac{\lambda_{\text{sol}}}{h} (T_{2s} - T_{\text{haut}}) \end{aligned} \quad (\text{II.5.})$$

A partir de ces quatre équations, on peut trouver  $T_{1s}$ ,  $T_{1l}$ ,  $T_{2s}$  et  $T_{2l}$  en fonction de  $T_{\text{haut}}$  et  $T_{\text{bas}}$  et donc le gradient dans le solide, ainsi que le gradient thermique réellement imposé à la couche liquide qui peut être franchement différent de celui qu'on impose à l'appareil entier, en particulier si le solide ou l'interface possède une résistance thermique importante.

La théorie de la stabilité hydrodynamique raisonne en termes de fluctuations : il faut perturber les équations de conservation et regarder ce qu'il advient des perturbations après analyse en modes normaux (Chandrasekhar, 1961). L'équation (II.1.) pour les solides reste identique pour la perturbation de température, tandis que les équations hydrodynamiques (II.2.), (II.3.), (II.4.), après perturbation, analyse en modes normaux et élimination de la pression, donnent le système

$$(D^2 - k^2 + \sigma)(D^2 - k^2)\hat{V}_z = k^2 Ra \hat{T}$$

$$(D^2 - k^2 + \sigma Pr)\hat{T} = -\hat{V}_z$$

(II.6.)

Les variables  $y$  sont non dimensionnelles,  $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$  est le nombre de Prandtl,  $D^n$  symbolise  $\frac{d^n}{dz^n}$ ,  $\hat{T}$  et  $\hat{V}_z$  sont respectivement les amplitudes des perturbations de température  $\Theta$  et de vitesse (composante verticale), de dépendance dans le plan horizontal  $\exp(i k_x x + i k_y y)$ , et de dépendance temporelle  $\exp(-\sigma t)$ .  $k$  est le nombre d'onde lié à la perturbation ( $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ ). La résolution de ce système (II.6.) nous fournit un nombre de Rayleigh critique pour un nombre d'onde  $k^{crit}$ ,

$$Ra^{crit} = \frac{g \alpha \Delta T^{crit} d^3}{\kappa \nu}$$

$k^{crit}$  définit la taille des cellules convectives. Cette résolution dépend des conditions aux bords et en particulier de la condition thermique ; le problème a été résolu comme nous l'avons dit précédemment pour des fluctuations de température nulles aux bords  $\hat{T} = 0$ , ou pour des fluctuations de flux de chaleur nulles  $D\hat{T} = 0$ . On se rend compte que ces conditions aux limites doivent être mises en relation avec la réalité expérimentale, tant du point de vue des matériaux employés, que du point de vue de la façon d'imposer le gradient de température. On doit donc transformer la condition thermique imposée en  $z = -h$  en une condition en  $z = 0$ , et faire de même pour le bord supérieur.

Dans le solide, l'équation pour la perturbation de température est :

$$\frac{\partial^2 \Theta_{sol}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta_{sol}}{\partial z^2} = 0 \quad (II.7.)$$

Par séparation des variables

$$\Theta_{\text{sol}}(\alpha, z) = \hat{T}_{\text{sol}}(z) \cdot f(\alpha) \quad (\text{II.8.})$$

on trouve

$$-\frac{1}{f(\alpha)} \frac{d^2 f}{d\alpha^2} = \frac{1}{\hat{T}_{\text{sol}}(z)} \frac{d^2 \hat{T}_{\text{sol}}}{dz^2} = a^2 \quad (\text{II.9.})$$

dont la solution formelle est

$$\hat{T}_{\text{sol}}(z) = A \cosh(az) + B \sinh(az) \quad (\text{II.10.})$$

$$f(\alpha) = A_2 \cos(\alpha x) + B_2 \sin(\alpha x) \quad (\text{II.11.})$$

A un interface, on peut écrire les égalités

$$\lambda_{\text{sol}} \left( \frac{d\hat{T}_{\text{sol}}}{dz} \right)_i = \alpha (\hat{T}_{\text{sol}} - \hat{T}_{\text{liq}})_i = \lambda_{\text{liq}} \left( \frac{d\hat{T}_{\text{liq}}}{dz} \right)_i \quad (\text{II.12.})$$

D'après (II.10.), la perturbation à l'interface en  $z = 0$  est

$$\hat{T}_{\text{sol}i} = A \quad (\text{II.13.})$$

D'autre part, à la limite inférieure  $z = -h$ , deux types de conditions peuvent être émises :

1. Thermostatisation ou température constante.

On suppose contrôler expérimentalement la température avec une précision infinie en  $z = -h$ . Dans ce cas, la perturbation  $y$  est nulle, et d'après (II.10.) :

$$A \cosh(ah) = B \sinh(ah) \quad (\text{II.14.})$$

En vertu de la continuité du flux de chaleur à l'interface

$$\lambda_{sol} \left( \frac{d \hat{T}_{sol}}{dz} \right)_i = \lambda_{liq} \left( \frac{d \hat{T}_{liq}}{dz} \right)_i \quad (\text{II.15.})$$

On pourra écrire, en dérivant (II.10.)

$$\left( \frac{d \hat{T}_{sol}}{dz} \right)_i = \frac{\lambda_{liq}}{\lambda_{sol}} \left( \frac{d \hat{T}_{liq}}{dz} \right)_i = a B \quad (\text{II.16.})$$

On remplace B par son expression tirée de (II.14.)

$$\left( \frac{d \hat{T}_{liq}}{dz} \right)_i = \frac{\lambda_{sol}}{\lambda_{liq}} a \frac{\cosh(ah)}{\sinh(ah)} A \quad (\text{II.17.})$$

On remplace A par  $\hat{T}_{sol i}$  en vertu de (II.13.), dont l'expression est tirée de (II.12.) et on trouve la forme définitive de la condition au bord inférieur pour la perturbation de température du liquide :

$$\left( \frac{d \hat{T}_{liq}}{dz} \right)_i \left( 1 + \frac{\lambda_{sol}}{\alpha} \frac{a}{\tanh(ah)} \right) - \frac{\lambda_{sol}}{\lambda_{liq}} \frac{a}{\tanh(ah)} \hat{T}_{liq i} = 0 \quad (\text{II.18.})$$

Pour le bord supérieur, on trouve pour la condition aux limites une expression semblable à (II.18.) à un signe près :

$$\left( \frac{d \hat{T}_{liq}}{dz} \right)_i \left( 1 + \frac{\lambda_{sol}}{\alpha} \frac{a}{\tanh(ah)} \right) + \frac{\lambda_{sol}}{\lambda_{liq}} \frac{a}{\tanh(ah)} \hat{T}_{liq i} = 0 \quad (\text{II.19.})$$

## 2. Flux de chaleur constant.

Ici, on suppose contrôler expérimentalement avec une précision infinie le flux de chaleur en  $z = -h$ . Dans ce cas, la perturbation du flux de chaleur  $y$  est nulle. D'après (II.10.), on aura donc

$$A \sinh(ah) = B \cosh(ah) \quad (\text{II.20.})$$

Cette équation remplace (II.14.). Comme le reste du calcul est inchangé dans sa logique, on se rend compte qu'il suffit de

remplacer  $\tanh(ah)$  par  $\coth(ah)$  dans l'expression de la condition au bord (II.18.)

$$\left( \frac{d\hat{T}_{liq}}{dz} \right)_i \left( 1 + \frac{\lambda_{sol}}{\alpha} \frac{a}{\coth(ah)} \right) - \frac{\lambda_{sol}}{\lambda_{liq}} \frac{a}{\coth(ah)} \hat{T}_{liq}_i = 0 \quad (II.21.)$$

On supposera toujours dans ce travail le coefficient de Newton  $\alpha$  non nul, car si  $\alpha \rightarrow 0$ , la résistance thermique de l'interface devient infinie et aucun gradient de température ne saurait être appliqué au liquide. En regardant (II.18.) et (II.21.), on remarque si  $\frac{\lambda_{sol}}{\lambda_{liq}} \rightarrow \infty$  (en pratique un appareil en cuivre contenant de l'eau par exemple) alors  $\hat{T}_{liq}_i = 0$  : on voit qu'aucune fluctuation de température n'est permise en  $z = 0$ , quelle que soit la condition expérimentale au bord  $z = -h$ . On comprend dès lors pourquoi des expériences menées en imposant la température en  $z = -h$ , ou des expériences du type Schmidt-Milverton dans lesquelles on impose le flux de chaleur en  $z = -h$ , conduisent à la même valeur de  $Ra^{crit}$  (notamment 1708), pour autant que les plaques solides soient très bonnes conductrices de la chaleur. Aucune fluctuation de température n'est également permise d'après (II.18.) si la température est parfaitement contrôlée en  $z = -h$  pour autant que  $h \rightarrow 0$  et que  $\alpha \rightarrow \infty$ ; c'est évidemment le cas trivial : il n'y a pas de discontinuité de température à l'interface et on applique directement la thermostatisation au fluide, puisque  $h$ , l'épaisseur de la plaque solide, tend vers zéro. Par contre, pour qu'aucune fluctuation de flux de chaleur ne soit permise, il faut que  $\frac{\lambda_{sol}}{\lambda_{liq}} \rightarrow 0$  aussi bien dans l'équation (II.18.) que dans (II.21.) (parois solides isolantes) ; une autre possibilité d'avoir  $\frac{d\hat{T}_{liq}}{dz} = 0$  est de faire  $h \rightarrow 0$  uniquement dans (II.21.). A nouveau, c'est le cas trivial où l'on contrôle directement le flux de chaleur appliqué au liquide.

Les conditions aux bords (II.18.), (II.19.) et (II.21.) peuvent facilement être rendues non dimensionnelles ( $z$  et  $h$  sont réduits par  $d$  ;  $Z = \frac{z}{d}$  par exemple), et exprimées sous la forme générale

$$D \hat{T}_{liq} + B \hat{T}_{liq} = 0 \quad (II.22.)$$

Lorsque le coefficient de Newton  $\alpha$  est petit, on obtient  $B = \frac{\alpha d}{\lambda_{liq}}$  parfois appelé nombre de Biot.

B. INCIDENCE SUR LE NOMBRE DE RAYLEIGH CRITIQUE.

On peut utiliser les conditions thermiques aux bords (II.22.) pour résoudre le problème de Bénard et trouver le nombre de Rayleigh critique en fonction du coefficient de transfert B. Le nombre d'onde  $k$  définissant la périodicité de la température dans le solide (II.11.) est pris identique au nombre d'onde  $k$  des structures convectives apparaissant dans le liquide. Nous avons effectué la recherche du nombre de Rayleigh critique par la méthode du potentiel local développée par Prigogine et Glansdorff (voir par exemple Prigogine, Glansdorff, 1970).

L'application du potentiel local au problème de Bénard a déjà été réalisée précédemment (Schechter et Himmelblau, 1965). Rappelons que ces auteurs ont écrit le potentiel local sous forme d'une intégrale du type

$$\phi = \int \mathcal{L} (V_z, V_z^{\circ}, \hat{T}, \hat{T}^{\circ}) dv \quad (II.23.)$$

où  $\mathcal{L}$  représente un lagrangien généralisé ;  $V_z$  et  $\hat{T}$  sont les grandeurs fluctuantes tandis que  $V_z^{\circ}$  et  $\hat{T}^{\circ}$  sont des grandeurs non fluctuantes.

L'application des équations d'Euler Lagrange à ce potentiel local (calcul du minimum de  $\phi$ ) rend les équations de départ (II.6.) dont on veut éviter la résolution. L'emploi de la méthode de Rayleigh-Ritz conduit à une équation caractéristique du type  $Ra = f(k)$ , d'où il est possible de déterminer  $k^{crit}$  et  $Ra^{crit}$ . Cependant, le potentiel local établi par Schechter et Himmelblau (II.23.) doit dans notre cas présent être complété

par un terme de surface. En effet, durant la construction du potentiel local, on effectue des intégrations par parties, et les termes de surfaces qui en résultent ne s'annulent que si  $\hat{T} = 0$  ou  $D\hat{T} = 0$  aux limites. Or, dans notre cas, nous considérons des conditions aux limites plus générales, à savoir (II.22.), qui évidemment n'annulent plus ces termes aux limites. Nous ne détaillerons pas ici ces termes aux limites qui peuvent être trouvés ailleurs (Lemoine, 1975). Néanmoins, la méthode de Rayleigh-Ritz reste d'application et permet, avec les conditions (II.22.) qui modifient évidemment les fonctions d'essai pour  $\hat{T}$ , de trouver une équation caractéristique reliant  $Ra$ ,  $k$  et  $B$ , soit par exemple

$$Ra = f(k, \lambda_{sol}, \lambda_{liq}, h, d, \alpha) \quad (II.24.)$$

Pour trouver les fonctions d'essai pour la température, on symbolisera les conditions thermiques par

$$D\hat{T} + B\hat{T} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (II.25.)$$

$$D\hat{T} + B^*\hat{T} = 0 \quad \text{en } z = 1 \quad (II.26.)$$

Le développement polynomial minimum (à un paramètre variationnel appelé  $C$ ) pour  $\hat{T}$  satisfaisant aux conditions (II.25.) et (II.26.) est :

$$\hat{T} = C (B - BBz + z^2) \quad (II.27.)$$

avec

$$B = \frac{B^* + 2}{BB^* + B - B^*} \quad (II.28.)$$

Les paramètres  $B$ ,  $B^*$  et  $B$  contiennent les données physiques de l'appareil, et également le nombre d'onde  $k$  des structures convectives. On obtient après introduction de (II.27.) dans le potentiel local, et application de la méthode de Rayleigh-Ritz, la



forme détaillée suivante de (II.24.) :

$$Ra = \frac{\left(\frac{k^2}{630} + \frac{4}{105} + \frac{4}{5k^2}\right) \left[ k^2 \left( \frac{1}{5} - \frac{B\beta}{2} + \frac{2\beta + B^2\beta^2}{3} - B\beta^2 + \beta^2 \right) \right]}{\left[ \frac{1}{7} - \frac{2 + B\beta}{6} + \frac{2B\beta + \beta + 1}{5} \right.}$$

$$\left. + \left( \frac{4}{3} - 2B\beta + B^2\beta^2 \right) - \left( 2\beta - 3B\beta + 2 + B^2\beta^2 \right) \right]^2} \quad (\text{II.29.})$$

$$- \frac{2\beta + B\beta}{4} + \frac{\beta}{3} \Big]^2$$

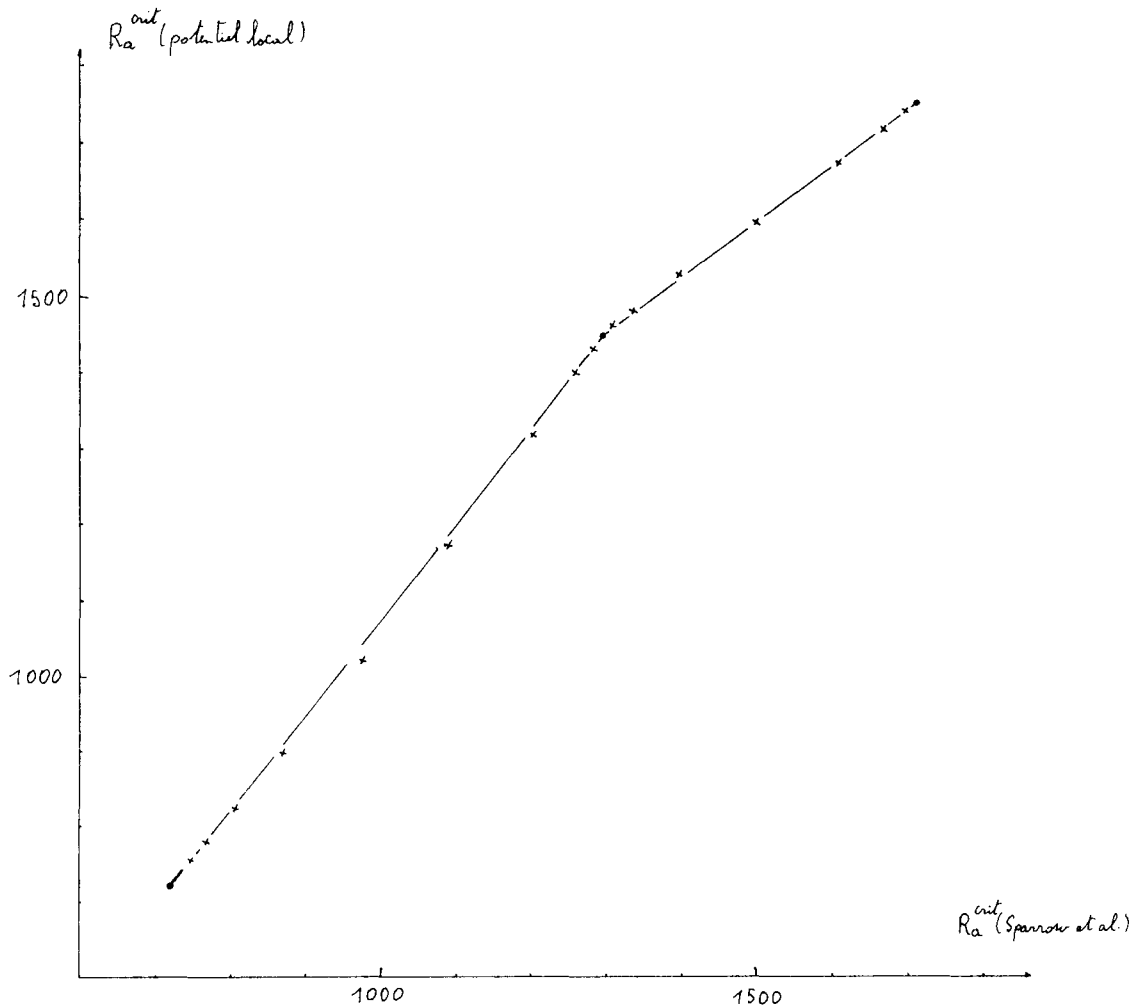
On voit que si B et  $B^* \rightarrow \infty$  (parois parfaitement conductrices,  $\beta \rightarrow 0$  et  $B\beta \rightarrow 1$ ), on obtient la même expression de Ra que Schechter et Himmelblau :

$$Ra = \frac{\left(\frac{k^2}{630} + \frac{4}{105} + \frac{4}{5k^2}\right) \left(\frac{k^2}{30} + \frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{140}\right)^2} \quad (\text{II.30.})$$

Il est très aisé dans ce cas limite de trouver  $Ra^{\text{crit}}$  en minimisant (II.30.) par rapport à k. Par contre, dans le cas général (II.29.) une dérivation par rapport à k est hors de question, et pour trouver  $Ra^{\text{crit}}$ , nous avons procédé par explorations successives de segments  $[k_{\min} \quad k_{\max}]$  de plus en plus petits (recherche dichotomique). Nous avons pu comparer les  $Ra^{\text{crit}}$  trouvés par le potentiel local aux  $Ra^{\text{crit}}$  des quatre cas limites (B et  $B^*$  nuls ou infinis) ainsi qu'à des  $Ra^{\text{crit}}$  donnés par Sparrow, Goldstein et Jonsson (1963) pour différentes valeurs du nombre de Biot  $\frac{\alpha d}{\lambda k_f}$  supérieur (Tableau II.2.). Ce tableau montre qu'en général le potentiel local surestime les nombres de Rayleigh critiques. Lorsque l'on comparera aux expériences, on tentera (grâce au tableau II.2. ou au graphique II.3.) de remplacer  $Ra^{\text{crit}}$  obtenu par le potentiel local par une valeur légèrement inférieure et qui, à notre avis, devrait être plus proche de la réalité.

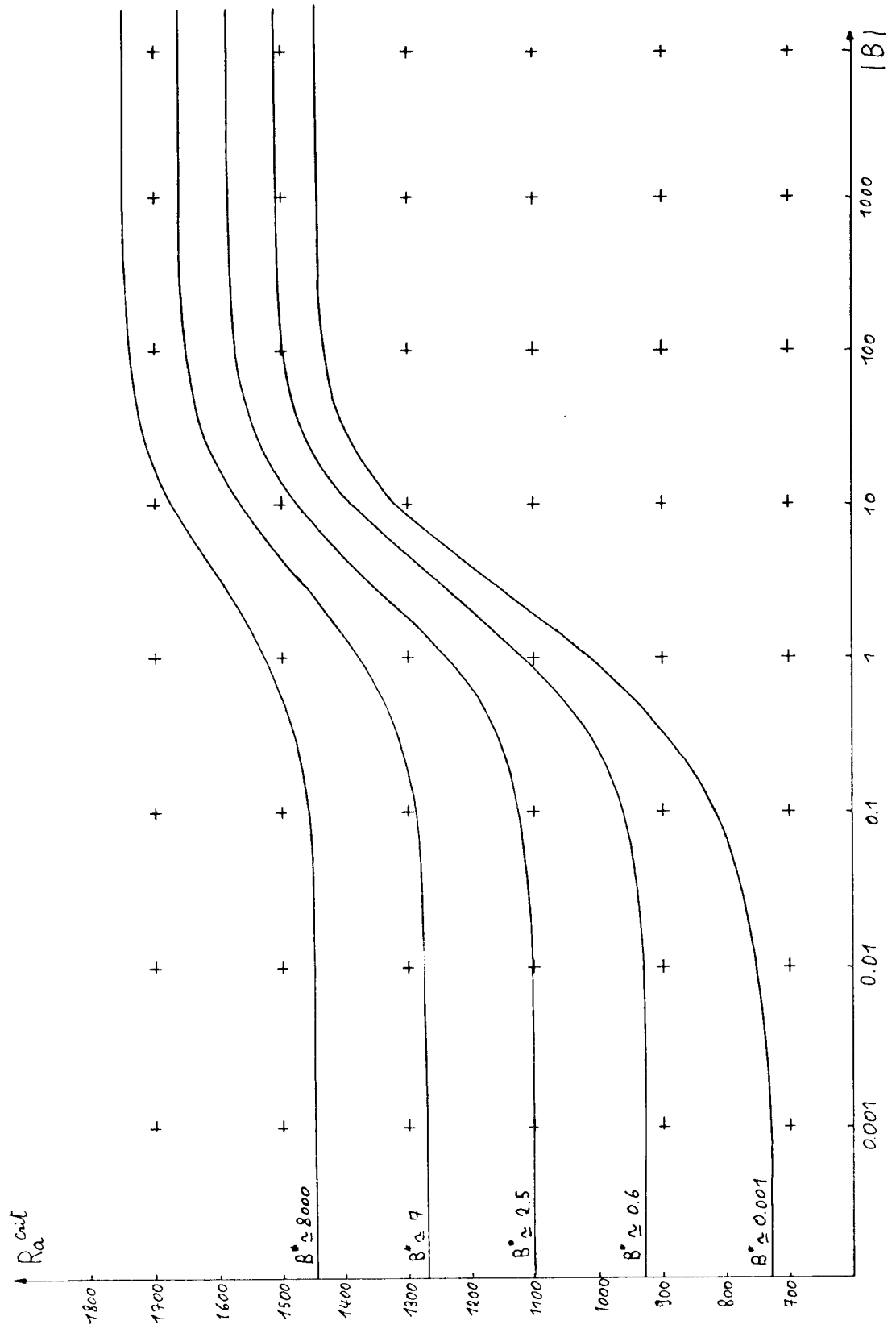
B	B*	Potentiel local	Sparrow et al.
$\infty$	$\infty$	1749.97	1707.77
$\infty$	100	1738.9	1694.6
$\infty$	30	1716.5	1667.1
$\infty$	10	1670.2	1607.1
$\infty$	3	1593.2	1497.6
$\infty$	1	1525.7	1398.5
$\infty$	0.3	1477.8	1334.1
$\infty$	0.1	1458.0	1309.5
$\infty$	0	1446.43	1295.78
0	$\infty$	1446.43	1295.78
0	100	1430.1	1284.3
0	30	1395.2	1259.9
0	10	1316.9	1204.6
0	3	1167.2	1093.7
0	1	1017.1	974.2
0	0.3	892.6	869.2
0	0.1	821.2	807.7
0	0.03	775.9	768.2
0	0.01	752.7	747.8
0	0	720	720

TABLEAU II.2.



GRAPHIQUE II.3.

Nous avons exploré l'espace  $B$   $B^*$  entre 0 et  $\infty$  ; on observe que les variations de  $Ra^{crit}$  importantes par rapport aux cas limites se situent dans les zones où  $(100)^{-1} < B$  ou  $B^* < 100$ , c'est-à-dire essentiellement pour des bords solides de conductibilité thermique comparable à celle du liquide (voir graphique II.4.). Nous avons cherché à comparer ces résultats numériques à des expériences réalisées avec des bords mauvais conducteurs, ce qui est peu ou pas utilisé dans la plupart des expériences effectuées par des gens qui voulaient trouver un  $Ra^{crit} = 1707.77$ .



GRAPHIQUE II.4.

Heureusement, Monique Dubois (1976) a utilisé pour des expériences de vélocimétrie laser (méthode optique) des bords transparents thermostatisés en verre et plexiglas dont la conductibilité thermique est précisément comparable à celle du liquide (huile de silicone). Nous avons donc pu, grâce à cela, confronter nos calculs à la réalité expérimentale.

1) Appareil en verre.

- Epaisseur de la paroi supérieure : 0.73 cm
- Epaisseur de la paroi inférieure : 0.73 cm
- Epaisseur de la couche liquide : 1 cm
- Conductibilité thermique du verre :  $12.5 \cdot 10^{-3} \text{ W cm}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- Conductibilité thermique de l'huile :  $1.55 \cdot 10^{-3} \text{ W cm}^{-1} \text{ K}^{-1}$

On trouve par le potentiel local  $B = B^* = 24.9$  et  $Ra^{\text{crit}} = 1670$ . Par interpolation (tableau II.2., graphique II.3.), cette valeur nous donne un  $Ra^{\text{crit}}$  "meilleur" = 1590.

Expérimentalement, M. Dubois obtient  $1500 \pm 120$ .

2) Appareil en plexiglas.

- Epaisseur de la paroi supérieure : 0.5 cm
- Epaisseur de la paroi inférieure : 0.5 cm
- Epaisseur de la couche liquide : 1 cm
- Conductibilité thermique du plexiglas :  $2.09 \cdot 10^{-3} \text{ W cm}^{-1} \text{ K}^{-1}$

On trouve par le potentiel local  $B = B^* = 4.1$  et  $Ra^{\text{crit}} = 1430$ .

Par interpolation, on obtient un  $Ra^{\text{crit}}$  "meilleur" = 1280.

Expérimentalement, M. Dubois obtient  $1320 \pm 140$ .

On observe donc un parfait accord entre la théorie et les expériences de M. Dubois. Cependant, le nombre de comparaisons expérimentales observées est restreint. Il faudrait systématiquement étudier l'influence de la conductibilité thermique et l'épaisseur des parois, ce qui n'était pas le but de M. Dubois. D'autres expériences sont expérimentalement concevables pour observer des  $Ra^{\text{crit}}$  compris entre 800 et 1708. Il devrait même être expérimentalement possible d'observer des différences notables dans le  $Ra^{\text{crit}}$  pour des appareils semblables, mais où le gradient de température serait amené des deux manières différentes : thermostatisation et flux de chaleur constant.

Nous avons également effectué des calculs en nous plaçant dans les conditions physiques des expériences que nous décrirons plus loin (au chapitre IV). Soit par exemple un appareil de cuivre contenant de l'eau ; les caractéristiques sont par exemple :

- Epaisseur de la paroi supérieure : 3 cm
- Epaisseur de la paroi inférieure : 3 cm
- Epaisseur de la couche liquide : 0.3 cm
- Conductibilité thermique du cuivre :  $3980 \cdot 10^{-3} \text{ W cm}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- Conductibilité thermique de l'eau :  $6.09 \cdot 10^{-3} \text{ W cm}^{-1} \text{ K}^{-1}$

Le coefficient de transfert  $\alpha$  entre un solide et un liquide est en général compris entre 300 et 30 000  $\text{W }^\circ\text{K}^{-1}$ . Pour ces différentes valeurs de  $\alpha$ , on obtient le tableau II.5.

$\alpha$	$B = B^*$	$Ra^{crit}$ potentiel local
$\infty$	$\infty$	1749.97
30 000	1955	1748.8
10 000	1811	1748.7
3 000	1440	1748.3
1 000	909	1747.4
300	397	1744.0

TABLEAU II.5.

On n'observe pas de différence entre les coefficients de transfert B calculés pour un appareil où l'on impose la température en bas et un appareil où l'on impose le flux de chaleur en bas (puisque  $kh \gg 1$ ,  $\cotgh(kh) = tgh(kh)$ ) ; on s'aperçoit également qu'il ne sera pas possible d'observer expérimentalement une différence entre le cas  $B = 400$  et le cas idéal  $\Theta = 0$  (c'est-à-dire  $B = \infty$ ) puisque l'erreur expérimentale est plus grande (7 %) que l'écart théorique.

Néanmoins, même si  $\frac{\lambda_{sol}}{\lambda_{liq}} \rightarrow \infty$ , des expériences dans un appareil où l'on impose le gradient de température et où on mesure le flux de chaleur et des expériences de type Schmidt-Milverton où l'on impose le flux de chaleur et on mesure le gradient de température ne sont pas toujours équivalentes. En effet, selon la théorie linéaire, les coefficients de transfert (donc les points critiques) sont les mêmes si  $\frac{\lambda_{sol}}{\lambda_{liq}} \rightarrow \infty$ . Cependant les courbes de chauffe, en particulier au-dessus du point critique, pourraient être différentes. C'est le cas des mélanges que nous étudierons du point de vue expérimental au chapitre V.

## CHAPITRE III

---

### PROBLEME DE BENARD DANS LE CAS DE SOLUTIONS BINAIRES.

---

#### A. INTRODUCTION.

Le problème de la stabilité d'une couche fluide binaire horizontale soumise à un gradient de température vertical (problème de Bénard dans les mélanges) est étudié depuis de nombreuses années déjà. L'effet de thermodiffusion, encore connu sous le nom d'effet Soret dans les liquides, modifie le gradient de densité déjà produit par le gradient de température que l'on impose. Cette modification, additive ou compétitive, suivant le signe du coefficient de diffusion thermique  $D'$ , provoquera donc à coup sûr une variation du nombre de Rayleigh critique (stabilisante ou déstabilisante). Schechter, Prigogine et Hamm (1972) ont examiné théoriquement l'apparition de la convection en émettant l'hypothèse que le principe d'échange de stabilité était valable. Par la suite, Platten (1971) a levé cette hypothèse, tout en imposant d'autres restrictions (bords libres, solutions diluées, ...) qui avaient seulement l'avantage de permettre un traitement analytique fournissant des expressions pour les nombres de Rayleigh en fonction des paramètres physiques. Simultanément, Legros et Platten (1972) établissaient un potentiel local et l'utilisaient pour calculer les points critiques dans le cas de solutions diluées, pour des bords rigides ; par après, Poty (1971, 1973) généralisait le calcul pour des solutions concentrées. Comme nos expériences sont menées effectivement en solutions concentrées, nous espérons utiliser les résultats de Poty pour confronter résultats expérimentaux et théoriques. Malheureusement, les résultats fournis par Poty ne correspondent pas à nos



conditions physiques expérimentales (par exemple, pas la même viscosité, pas la même conductibilité thermique) et d'autre part les fonctions d'essais utilisées par Poty ne satisfont pas les conditions aux limites. Nous avons donc été amenés à recommencer les calculs numériques avec cette fois de bonnes fonctions d'essai et des paramètres physiques correspondant au mélange étudié expérimentalement ( $\pm$  10 % isopropanol, 90 % eau).

B. EQUATIONS HYDRODYNAMIQUES. ETAT STATIONNAIRE.

Les équations de départ sont les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

$$0 = \sum_i \frac{\partial V_i}{\partial \alpha_i} \quad (\text{III.1.})$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = - \sum_j V_j \frac{\partial N_1}{\partial \alpha_j} + D \nabla^2 N_1 + \sum_j D' \frac{\partial}{\partial \alpha_j} (N_1 (1 - N_1) \frac{\partial T}{\partial \alpha_j}) \quad (\text{III.2.})$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} = - \sum_j V_j \frac{\partial V_i}{\partial \alpha_j} - \frac{1}{\rho^0} \frac{\partial P}{\partial \alpha_i} + \frac{\rho}{\rho^0} F_i + \nu \nabla^2 V_i \quad (\text{III.3.})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = - \sum_j V_j \frac{\partial T}{\partial \alpha_j} + K \nabla^2 T \quad (\text{III.4.})$$

Les axes sont orientés suivant la figure III.1.

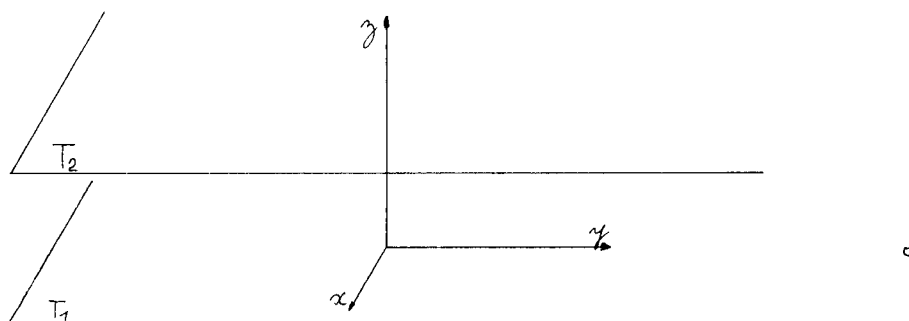


FIGURE III.1.

Les équations présentent comme solution un état stationnaire de repos :

$$V_i^S = 0 \quad (\text{III.5.})$$

$$T^S = T_1 - \frac{\Delta T}{d} z \quad (\text{III.6.})$$

$\Delta T = (T_1 - T_2)$  est le gradient de température

$$\frac{\partial P^S}{\partial \alpha_i} = \rho F_{ij} = -g^i \rho(T, N) \quad (\text{III.7.})$$

$$D \frac{\partial^2 N_1^S}{\partial z^2} + D' \frac{\partial}{\partial z} (N_1^S (1 - N_1^S) \frac{\partial T^S}{\partial z}) = 0 \quad (\text{III.8.})$$

Puisque le flux de thermodiffusion est nul aux bords, et d'après (III.6.), l'équation (III.8.) peut s'écrire

$$D \frac{\partial N_1^S}{\partial z} = D' \frac{\Delta T}{d} N_1^S (1 - N_1^S) \quad (\text{III.9.})$$

ce qui nous permet de déterminer la distribution stationnaire du titre

$$N_1^S = N_1^m \left( 1 + (1 - N_1^m) \frac{D'}{D} \frac{\Delta T}{d} \left( z - \frac{d}{2} \right) \right) \quad (\text{III.10.})$$

On considère alors des petites perturbations autour de l'état stationnaire dont on ne retiendra que les termes linéaires

$$\begin{aligned} N_1 &= N_1^S + \varepsilon m_1 \\ P &= P^S + \varepsilon P' \\ T &= T^S + \varepsilon \theta \\ V_j &= 0 + \varepsilon u_j \\ \rho &= \rho^S + \varepsilon \delta \rho \end{aligned} \quad (\text{III.11.})$$

*d a sup - 0 t*

On introduit ces expressions dans les équations (III.1. à 4.).  
On peut admettre l'hypothèse que la densité varie de façon linéaire :

$$\rho^S = \rho^0 (1 - \alpha (T(z) - T_1) + \gamma (N_1(z) - N_1^{in})) \quad (\text{III.12.})$$

avec

$$\alpha = - \frac{1}{\rho^0} \frac{\partial \rho}{\partial T} > 0 \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{\rho^0} \frac{\partial \rho}{\partial N_1} > 0$$

La valeur positive de  $\gamma$  implique que le constituant indicé 1 est le plus dense. Donc :

$$\delta \rho = \rho^0 (-\alpha \theta + \gamma m_1) \quad (\text{III.13.})$$

De plus, on rend non dimensionnelles les équations, en réduisant

le temps par	$\frac{d^2}{v}$	
les vitesses par	$\frac{K}{d}$	
la température par	$\Delta T$	
les titres par	$N_1^{in}$	
la pression par	$\frac{\rho^0 K v}{d^2}$	
les distances par	$d$	(III.14.)

On obtient donc des équations non dimensionnelles pour les perturbations :

$$\begin{aligned} S_c \frac{\partial m_1}{\partial t} = & - \frac{S_c}{P_2} \mathcal{L} w' + \nabla^2 m_1 - a \mathcal{L} \frac{\partial m_1}{\partial z} \\ & + a \mathcal{L}^2 \frac{\partial \theta}{\partial z} + b \mathcal{L} \nabla^2 \theta + \epsilon \mathcal{L}^2 m_1 \end{aligned} \quad (\text{III.15.})$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = - \frac{\partial P'}{\partial z} + Ra\theta - R\ell n_1 + \nabla^2 w' \quad (\text{III.16.})$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = - \frac{\partial P'}{\partial x} + \nabla^2 u' \quad (\text{III.17.})$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = - \frac{\partial P'}{\partial y} + \nabla^2 v' \quad (\text{III.18.})$$

$$Pr \frac{\partial \theta}{\partial t} = w' + \nabla^2 \theta \quad (\text{III.19.})$$

dans ces équations

$$a = \frac{1 - 2 N_1^{in} N_1^S}{1 - N_1^{in}}$$

$$b = \frac{N_1^S (1 - N_1^{in} N_1^S)}{1 - N_1^{in}}$$

$$c = \frac{2 N_1^{in}}{1 - N_1^{in}} \quad (\text{III.20.})$$

on voit également apparaître des nombres sans dimension :

$Pr$	nombre de Prandtl	$\frac{\nu}{K}$
$Sc$	nombre de Schmidt	$\frac{\nu}{D}$
$Ra$	nombre de Rayleigh	$\frac{D g \alpha \Delta T d^3}{K \nu}$
$R\ell$	nombre de Rayleigh de thermodiffusion	$\frac{g \delta N_1^{in} d^3}{K \nu}$
$\mathcal{S}$	nombre de Soret	$\frac{D'}{D} \Delta T (1 - N_1^{in})$ III.21.)

La définition du nombre de Soret ainsi que (III.10.) nous indique que pour  $\mathcal{S}$  positif (coefficient de thermodiffusion  $D'$  positif), le constituant 1 (le plus dense) migre vers la paroi froide supérieure et renforce le gradient de densité thermique, ce qui a pour conséquence une destabilisation par rapport aux corps purs.

Au contraire, un  $\mathcal{J}$  négatif produit un effet opposé.

C. POTENTIEL LOCAL POUR LES SOLUTIONS CONCENTREES.

La construction à partir des équations (III.15. à 19.) du potentiel local appliqué au problème de Bénard en solutions concentrées a été réalisée précédemment par Poty (1971, 1973). Nous ne rétablirons pas ici ce potentiel local. Notons simplement qu'il généralise l'expression (II.23.), en ce sens qu'à côté des perturbations de vitesse  $V_z$  et de température  $\hat{T}$ , apparaissent aussi la perturbation de titre  $\chi$ , ainsi que tous les nombres sans dimension nouveaux  $Sc$ ,  $R_{th}$ ,  $\mathcal{J}$  et le titre initial du mélange

$$\phi = \int \mathcal{L}(V_z, \hat{T}, \chi, V_z^0, \hat{T}^0, \chi^0, P_2, Sc, Ra, R_{th}, \mathcal{J}, N_1^{in}, k, \sigma) dz \quad (III.22.)$$

Et à nouveau, les équations extrémales appliquées à (III.22.) rendent les équations (III.15. à 19.) moyennant les conditions subsidiaires habituelles  $\hat{T} = \hat{T}^0$ , etc...

D. FONCTIONS D'ESSAI.

On introduit alors des fonctions d'essai pour la température, la vitesse et le titre. Celles-ci sont les développements polynomiaux minima satisfaisant les conditions aux bords. Pour la température :  $\hat{T} = 0$  en  $z = 0$  et  $z = 1$ , nous utiliserons donc comme fonction d'essai

$$\hat{T} = B z(1-z) \quad (III.23.)$$

Pour la vitesse, étant donnés des bords rigides,  $V_z = 0$  et  $DV_z = 0$  en  $z = 0$  et  $z = 1$ , la fonction d'essai sera

$$V_z = A z^2(1-z)^2 \quad (III.24.)$$

Pour le titre, la fonction d'essai trouvée est légèrement différente de celle donnée par Poty (1971, 1973), qui rappelons-le, ne satisfaisait pas les conditions aux bords. Le flux de thermodiffusion aux bords doit être nul, donc (III.2.) devient

$$D \frac{\partial N_1}{\partial z} + D' N_1 (1 - N_1) \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad \begin{array}{l} z = 0 \\ z = 1 \end{array} \quad (\text{III.25.})$$

En exprimant  $N_1$  comme une grandeur perturbée  $N_1 = N_1^S + \varepsilon m_1$  et en ne gardant que les termes du premier ordre en les perturbations, on a, après réduction dimensionnelle (suivant (III.14.)) :

$$\frac{\partial m_1}{\partial z} - a \mathcal{L} m_1 + b \mathcal{L} \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad \begin{array}{l} z = 0 \\ z = 1 \end{array} \quad (\text{III.26.})$$

Les coefficients a et b sont donnés en (III.20.). On obtient une expression équivalente en les amplitudes des modes normaux

$$D\mathcal{X} - a \mathcal{L}\mathcal{X} + b \mathcal{L} D\hat{T} = 0 \quad \text{en} \quad \begin{array}{l} z = 0 \\ z = 1 \end{array} \quad (\text{III.27.})$$

On prendra donc comme fonction d'essai pour  $\mathcal{X}$  une parabole, puisqu'il y a deux conditions

$$\mathcal{X} = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 \quad (\text{III.28.})$$

Calculons directement a et b en  $z = 0$  et  $z = 1$ , en prenant comme distribution de titre stationnaire

$$N_1^S = 1 + \mathcal{L}(z - \frac{1}{2}) \quad \begin{array}{l} = 1 - \frac{\mathcal{L}}{2} \quad \text{en } z = 0 \\ = 1 + \frac{\mathcal{L}}{2} \quad \text{en } z = 1 \end{array} \quad (\text{III.29.})$$

Posons en outre  $L = \frac{1}{1 - N_1^{\text{in}}}$  et  $M = \frac{N_1^{\text{in}}}{1 - N_1^{\text{in}}}$

$$\text{En } z = 0 \quad \alpha \equiv T_0 = 1 - M + M \mathcal{Y} \quad \checkmark$$

$$\text{En } z = 1 \quad \alpha \equiv T_1 = 1 - M - M \mathcal{Y} \quad \checkmark$$

$$\text{En } z = 0 \quad b \equiv R_0 = 1 - \frac{M \mathcal{Y}^2}{4} - \frac{\mathcal{Y}L}{2} + M \mathcal{Y}$$

$$\text{En } z = 1 \quad b \equiv R_1 = 1 - \frac{M \mathcal{Y}^2}{4} + \frac{\mathcal{Y}L}{2} - M \mathcal{Y} \quad (\text{III.30.})$$

Dès lors, étant donné les conditions (III.27.) on obtient une expression pour  $\chi$  ne gardant qu'un seul paramètre variationnel  $A_0 = C$

$$\chi = -B(Ez - Dz^2) + C(1 + T_0 \mathcal{Y}z + Fz^2) \quad (\text{III.31.})$$

avec

$$E = R_0 \mathcal{Y}$$

$$D = \frac{R_1 \mathcal{Y} + R_0 \mathcal{Y} - T_1 R_0 \mathcal{Y}^2}{(2 - T_1 \mathcal{Y})}$$

$$F = \frac{T_1 \mathcal{Y} - T_0 \mathcal{Y} + T_0 T_1 \mathcal{Y}^2}{(2 - T_1 \mathcal{Y})} \quad (\text{III.32.})$$

Par rapport aux expressions données par Poty, nous ne différons que par la définition des coefficients des puissances de  $z$ . L'introduction des fonctions d'essai  $\hat{V}_z$ ,  $\hat{T}$  et  $\chi$  (III.23.), (III.24.) et (III.31.) ainsi que des expressions équivalentes pour les fonctions d'essai non fluctuantes  $\hat{V}_z^0$ ,  $\hat{T}^0$  et  $\chi^0$  dans le potentiel local (III.22.) et l'intégration entre  $z = 0$  et  $z = 1$  conduit à une nouvelle expression du potentiel local, particulière aux fonctions d'essai que nous avons choisies :

$$\phi(A, A^0, B, B^0, C, C^0, R_e, S_e, R_a, R_{el}, \mathcal{Y}, N_1^{\text{in}}, k, \sigma) \quad (\text{III.33.})$$

Si nous minimisons (III.33.) par rapport aux paramètres A, B, C, on obtient un système d'équations linéaires homogènes en A, B, C qui ne possède une solution non triviale que si son déterminant est nul. On obtient une équation caractéristique en  $\sigma$  du troisième degré :

$$\alpha \sigma^3 + \beta \sigma^2 + \gamma \sigma + \delta = 0 \quad (\text{III.34.})$$

On s'intéresse bien entendu à déterminer le nombre de Rayleigh critique ; comme en général  $\sigma$  est complexe,

$$\sigma = \sigma_R + i \sigma_I \quad (\text{III.35.})$$

on s'intéresse à  $\sigma_R = 0$  (stabilité neutre). On a donc deux cas possibles :

$$\sigma_I = 0 \quad \text{solutions non oscillantes} \quad (\text{III.36.})$$

$$\sigma_I \neq 0 \quad \text{solutions oscillantes} \quad (\text{III.37.})$$

Si  $\sigma_I = 0$ , alors, l'équation caractéristique (III.34.) se ramène à

$$\delta = 0 \quad (\text{III.38.})$$

Cela nous fournit une relation entre tous les paramètres du problème, d'où il est possible d'extraire la valeur de  $Ra^{\text{crit}}$ , dit d'"échange de stabilité" et notée  $Ra^{\text{ex}}$

$$Ra^{\text{ex}} = f(S_c, Pr, Ra, \mathcal{L}, N_1^m) \quad (\text{III.39.})$$

Pour les solutions oscillantes, (III.37) se ramène à

$$\alpha \delta - \beta \gamma = 0 \quad (\text{III.40.})$$



On en tire l'expression de  $Ra^{crit}$  dit de "surstabilité" (en anglais overstability) et noté  $Ra^{over}$

$$Ra^{over} = g(Sc, Pr, R_{th}, \mathcal{L}, N_1^{in}) \quad (III.41.)$$

On peut également exprimer la pulsation

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} \quad (III.42.)$$

#### E. EXPERIENCES NUMERIQUES.

Nous avons tabulé (III.41.) et (III.42.) pour les valeurs des nombres sans dimensions correspondants aux expériences que nous avons effectuées et que nous exposons au chapitre V. Les données permettant de calculer  $Sc$ ,  $Pr$ ,  $R_{th}$  se trouvent dans le chapitre V ainsi qu'à l'annexe A.I.

Rappelons ici que le mélange étudié est une solution eau-alcool ( $N_1^{in}$  (eau) = 0.9091,  $N_2^{in}$  (isopropanol) = 0.0909). On trouve  $Pr = 7.8$  et  $Sc = 1100$  et étant donné la différence d'épaisseur de la couche liquide pour les deux appareils, nous obtenons deux  $R_{th}$  différents

- appareil 1       $d = 0.332$  cm       $R_{th} = 310\ 000$
- appareil 2       $d = 0.307$  cm       $R_{th} = 245\ 000$

Nous ne connaissons pas avec une très grande précision le coefficient de diffusion  $D$  (et donc  $Sc$ ). Cependant, le tableau (III.2.) montre que pour les valeurs des autres nombres sans dimensions correspondant à nos expériences, l'influence de  $Sc$  sur  $Ra^{over}$  est minime et de loin inférieure à l'erreur expérimentale (7 %).

- $Pr = 7.8$
- $R_{th} = 280\ 000$
- $N_1^{in} = 0.9091$
- $\mathcal{L} = - 10^{-2}$

Sc	Ra <sup>over</sup>	$\sigma_I$
700	4289	2.68
900	4286	2.68
1100	4283	2.68
1300	4281	2.68
1500	4279	2.68

TABLEAU III.2.

Les résultats tabulés dans le cas de nos deux expériences se trouvent dans les tableaux (III.3.) et (III.4.).

Appareil 1.

- Pr = 7.8
- Sc = 1100
- R<sub>th</sub> = 310 000
- N<sub>1</sub><sup>th</sup> = 0.9091

$\mathcal{J}$	Ra <sup>over</sup>	$\sigma_I$
- 10 <sup>-6</sup>	1757	0.03
- 10 <sup>-5</sup>	1759	0.09
- 10 <sup>-4</sup>	1784	0.28
- 10 <sup>-3</sup>	2036	0.88
- 2 10 <sup>-3</sup>	2316	1.25
- 3 10 <sup>-3</sup>	2596	1.53
- 4 10 <sup>-3</sup>	2875	1.77
- 5 10 <sup>-3</sup>	3155	1.98
- 6 10 <sup>-3</sup>	3435	2.17
- 6.207 10 <sup>-3</sup>	3493	2.21
- 7 10 <sup>-3</sup>	3715	2.35
- 8 10 <sup>-3</sup>	3995	2.52
- 9 10 <sup>-3</sup>	4275	2.68
- 10 <sup>-2</sup>	4555	2.83

TABLEAU III.3.

Appareil 2.

- Pr = 7.8
- Sc = 1100
- $R_{th} = 245\ 000$
- $N_1^{th} = 0.9091$

$\mathcal{P}$	$Ra^{over}$	$\sigma_I$
- $10^{-6}$	1757	0.02
- $10^{-5}$	1759	0.08
- $10^{-4}$	1779	0.25
- $10^{-3}$	1978	0.78
- $2 \cdot 10^{-3}$	2199	1.11
- $3 \cdot 10^{-3}$	2420	1.36
- $4 \cdot 10^{-3}$	2641	1.57
- $5 \cdot 10^{-3}$	2862	1.76
- $6 \cdot 10^{-3}$	3083	1.93
- $7 \cdot 10^{-3}$	3304	2.08
- $7.182 \cdot 10^{-3}$	3344	2.11
- $8 \cdot 10^{-3}$	3525	2.23
- $9 \cdot 10^{-3}$	3746	2.37
- $10^{-2}$	3967	2.50

TABLEAU III.4.

## CHAPITRE IV

-----

### DESCRIPTION DU MONTAGE EXPERIMENTAL, ETALONNAGE ET APPLICATION AUX CORPS PURS

-----

#### A. DESCRIPTION.

L'étude expérimentale s'est faite simultanément dans deux appareils, l'un pour lequel on impose le gradient de température et l'autre pour lequel on impose la puissance de chauffe.

Le premier appareil est constitué de deux plaques de cuivre P thermostatisées entre lesquelles on place le joint J destiné à contenir le liquide. Les plaques de cuivre sont des parallépipèdes de 120 x 59 x 30 mm. La face en contact avec le liquide est polie et aplanie à 5 microns près. Sur la face opposée, quatre tuyaux de cuivre de 10 mm de diamètre sont sertis ; ils sont destinés à la circulation d'eau qui maintient la température de cette face constante à 0.02 K près. Le joint J contenant le liquide est un cadre de plexiglas d'une épaisseur de l'ordre de 3 mm déterminée à 0.03 mm près et d'une largeur de l'ordre de 4 mm. Les orifices de remplissages  $R_1$  et  $R_2$  sont des aiguilles de seringues serties dans deux angles opposés. Cette disposition permet à l'air de s'échapper lors du remplissage qui s'effectue l'appareil penché. Des résistances à coefficient de température négatif (C.T.N.) peuvent être tendues en travers du joint afin de pratiquer des mesures de températures (et leurs variations possibles) au sein même du liquide. Les mesures du gradient de température vertical dans le liquide sont effectuées par l'intermédiaire de trois paires de thermocouples fer-constantan placés en série. Ces jonctions sont situées dans des orifices O de 20 mm de long pratiqués dans les plaques de cuivre à 3 mm du bords. Elles sont réunies aux appareils de mesure par l'intermédiaire de soudures froides. Puisque dans cet appareil

on impose le gradient de température, il est nécessaire d'y mesurer le flux de chaleur. Un tel "fluxmètre" est basé sur la mesure du gradient de température dans une des plaques de cuivre, proportionnel au flux de chaleur suivant la loi de Fourier. Afin de ne pas trop s'éloigner des conditions aux bords idéales, et de pratiquer une mesure suffisamment sensible et uniforme, cette mesure est effectuée comme pour le gradient de température dans le liquide par des paires de thermocouples en série, au nombre de 24, disposées tout autour de la plaque supérieure. L'ensemble de l'appareil est maintenu solidement par des plaques de polyacétal S reliées par des tiges filetées (figure IV.1.).

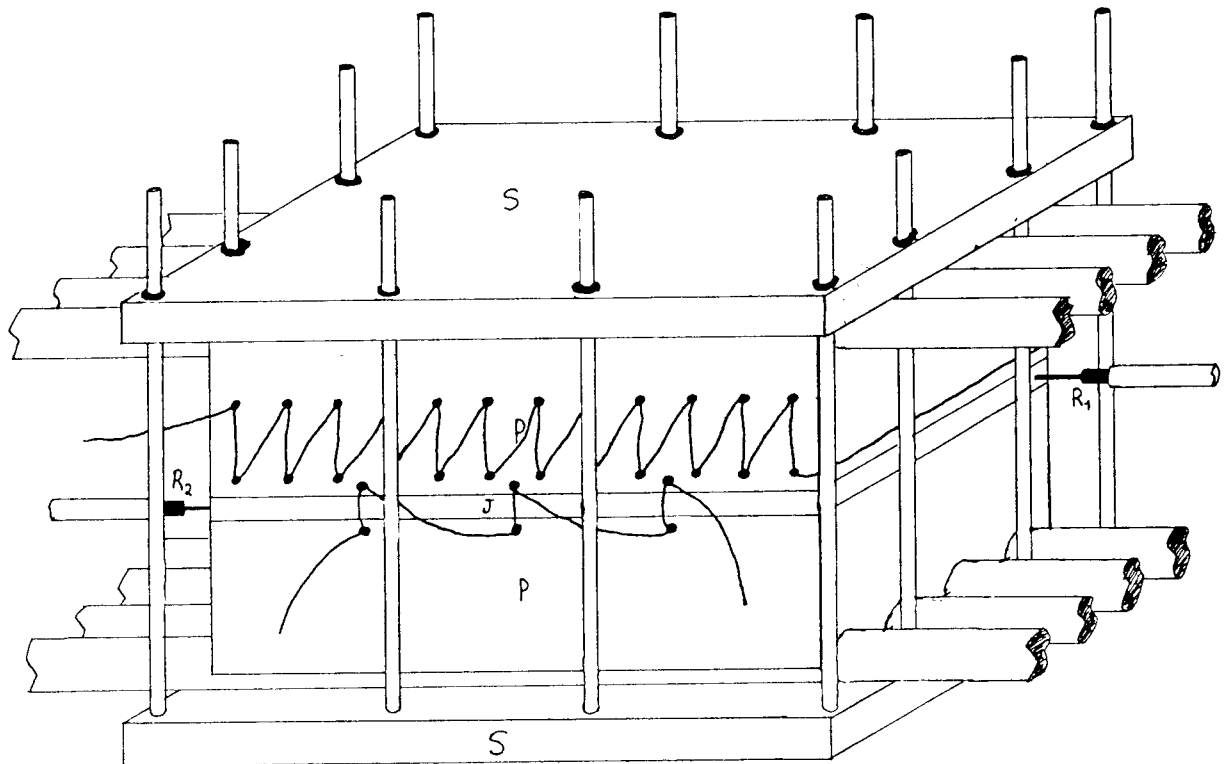


FIGURE IV.1.

Le deuxième appareil est identique au premier en ce qui concerne le joint et la plaque supérieure hormis le fluxmètre, inutile ici. La plaque inférieure est un simple parallélépipède de cuivre de mêmes dimensions, posé sur une résistance chauffante. Cette résistance est un fil de Kanthal de  $72.8 \Omega$ , déployé en zig-zag sur une plaque d'amiante de 5 mm d'épaisseur et protégée des courts-circuits par une mince feuille de mica. Le tout repose sur un contre-plaqué de 8 mm d'épaisseur et est maintenu comme l'appareil thermostatisé par deux plaques de polyacétal (figure IV.2.).

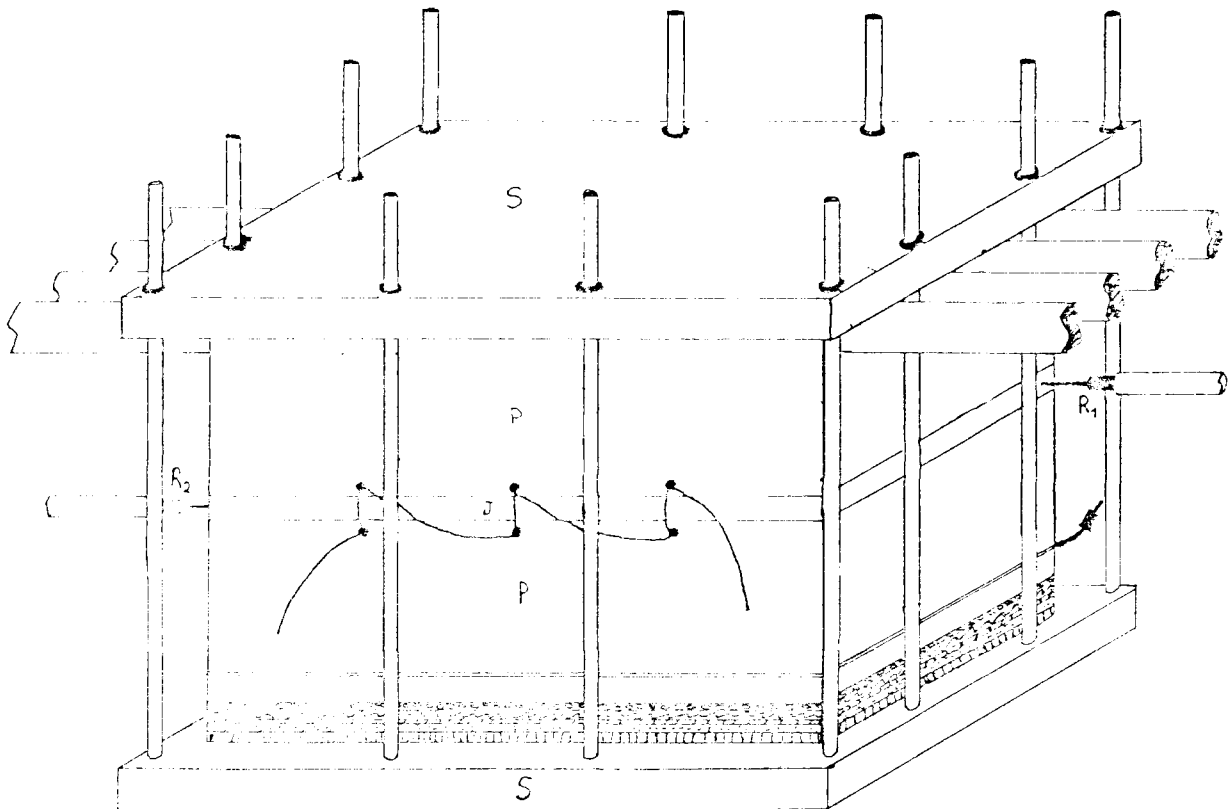


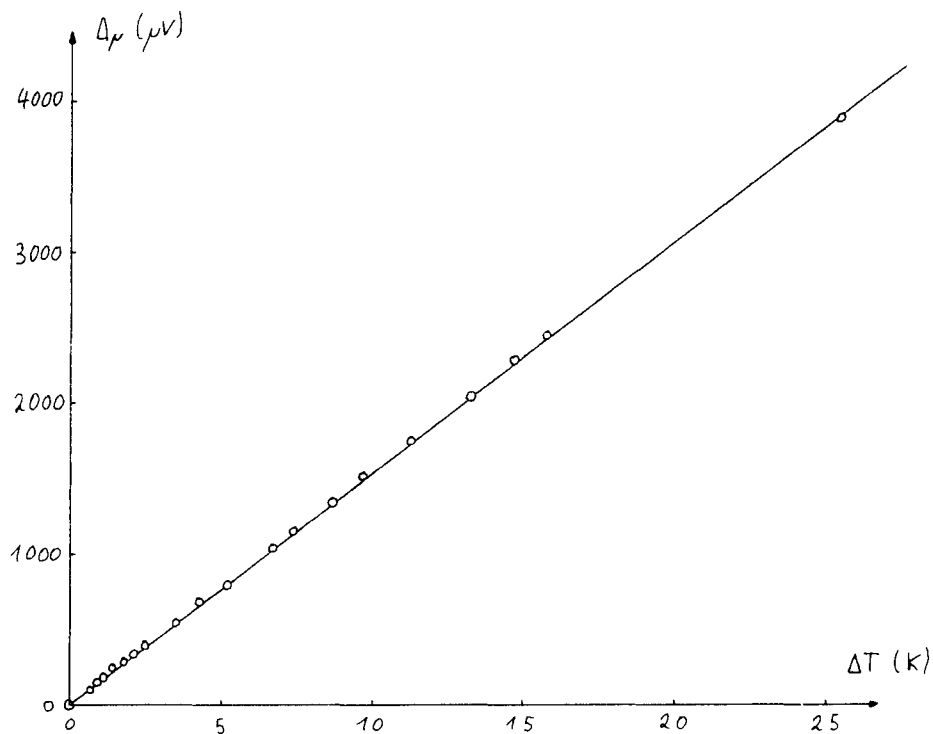
FIGURE IV.2.

Les deux appareils sont partiellement isolés de manière à diminuer les pertes extérieures. Ils sont de plus placés dans une armoire à laquelle on a ajouté une soufflerie, un refroidissement par eau, et une résistance chauffante commandée par un dispositif régulateur, afin de stabiliser la température de l'ambiance à la valeur moyenne de la température du fluide, à 0.2 °C près.

B. ETALONNAGE DU DISPOSITIF DE MESURE DU GRADIENT DE TEMPERATURE VERTICAL.

Comme on l'a signalé dans la description de l'appareillage expérimental, cette mesure est effectuée par l'intermédiaire de trois paires de thermocouples fer-constantan. Un étalonnage de ce système nous a permis de trouver la constante de proportionnalité liant la différence de température et la différence de potentiel (IV.1.), graphique (IV.3.)

$$\Delta T (K) = \Delta \mu (\mu V) (154 \mu V/K)^{-1} \quad (IV.1.)$$



GRAPHIQUE IV.3.

Pour une seule paire de thermocouples, la constante de proportionnalité de (IV.1.) serait  $51.3 \frac{\mu V}{K}$ , ce qui est en accord avec les tables qui fournissent des valeurs arrondies de l'ordre de  $50 \frac{\mu V}{K}$ .

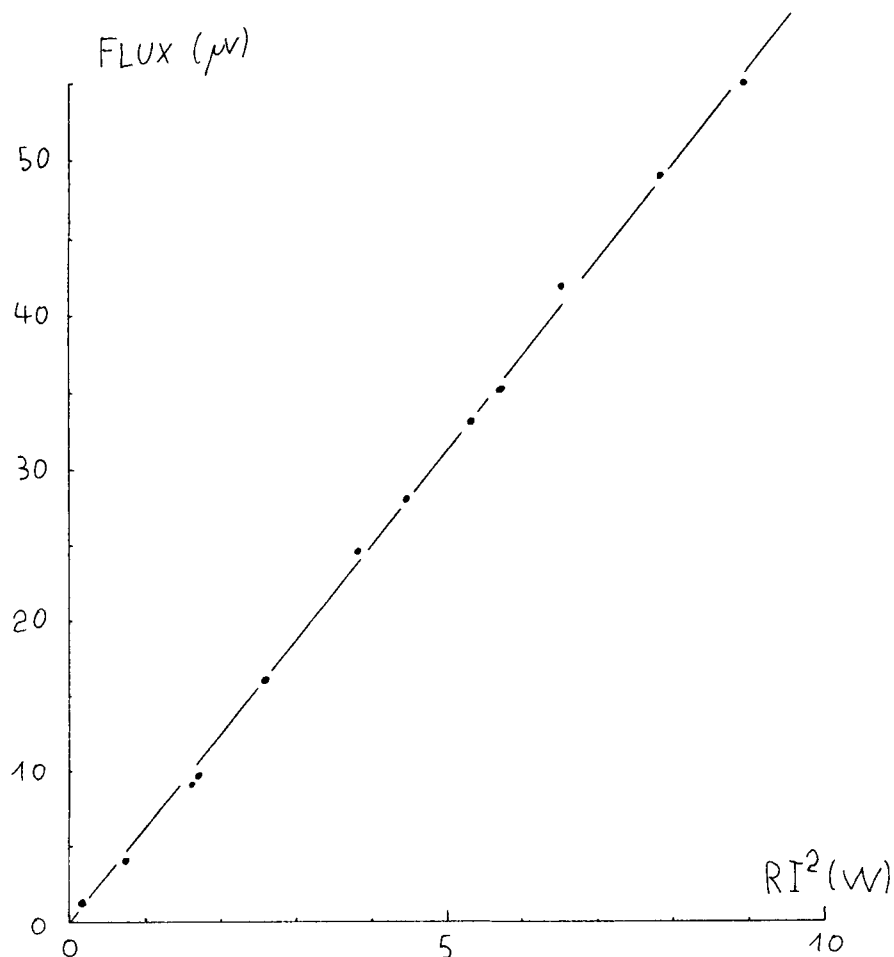
C. ETALONNAGE DU DISPOSITIF DE MESURE DU FLUX DE CHALEUR.

Cette mesure est effectuée par l'intermédiaire de 24 paires de thermocouples en série. Une expérience de type Bénard avec un appareil hybride (dont on impose le flux de chaleur en bas, avec cependant un fluxmètre sur la plaque supérieure) nous a permis d'étalonner ce fluxmètre dans les conditions idéales. Nous obtenons une droite d'étalonnage très acceptable, étant donné la faible valeur de la tension à mesurer (de l'ordre de  $10 \mu V$ ) (Tableau (IV.4.), graphique (IV.5.)). Cette tension est mesurée à l'aide d'un microvoltmètre analogique HP 419A ou, de préférence, sur un voltmètre numérique (Schlumberger) qui peut accumuler les données et rendre une valeur moyenne. Pour plus de facilités, le flux de chaleur mesuré au moyen du fluxmètre sera directement exprimé par sa tension de sortie en microvolts.

$R I^2 (w)$	flux ( $\mu V$ )
0.18	1.2
0.74	3.9
1.62	9
1.70	9.5
2.60	16
3.85	24.5
4.48	28
5.31	33
5.71	35
6.51	42
7.83	49
8.92	55

TABLEAU IV.4.





GRAPHIQUE IV.5.

Notons également ici qu'ultérieurement, on soustraira de la puissance délivrée par la résistance chauffante la puissance dissipée à travers le joint de plexiglas afin d'obtenir réellement la puissance transmise à travers le liquide.

$$Q_c = RI^2 - \frac{\lambda_{\text{plexi}} S_{\text{joint}}}{d} \Delta T \quad (\text{IV.2.})$$

D. MESURE DES VARIATIONS EVENTUELLES DE LA TEMPERATURE AU SEIN DU LIQUIDE.

Ces mesures sont effectuées par des thermistances (C.T.N.) au sein même du liquide. Elles présentent comme intérêt un faible encombrement et une grande sensibilité aux variations de

température. En effet, la dépendance en la température de ces résistances est donnée par la loi

$$R = A \exp\left(\frac{B}{T}\right) \quad (\text{IV.3.})$$

avec  $A = \pm 0.033 \Omega$  et  $B = \pm 3700 \text{ K}$

On a donc

$$\left(\frac{dR}{dT}\right)_{295\text{K}} = -\frac{AB}{T^2} \exp\left(\frac{B}{T}\right) \approx -390 \Omega/\text{K} \quad (\text{IV.4.})$$

Les thermistances ne permettent pas une mesure absolue de la température avec une grande précision, mais la sensibilité est excellente : les variations de température seront aisément détectées. Ces thermistances sont placées dans un pont de Wheatstone (figure IV.6.) dont on mesure le déséquilibre  $\Delta V$ . Ce déséquilibre peut être converti en K :

$$\varepsilon (\text{K}) = \frac{\Delta V}{1.64\text{V}} \frac{(x + 25000\Omega)}{390 \Omega/\text{K}} \quad (\text{IV.5.})$$

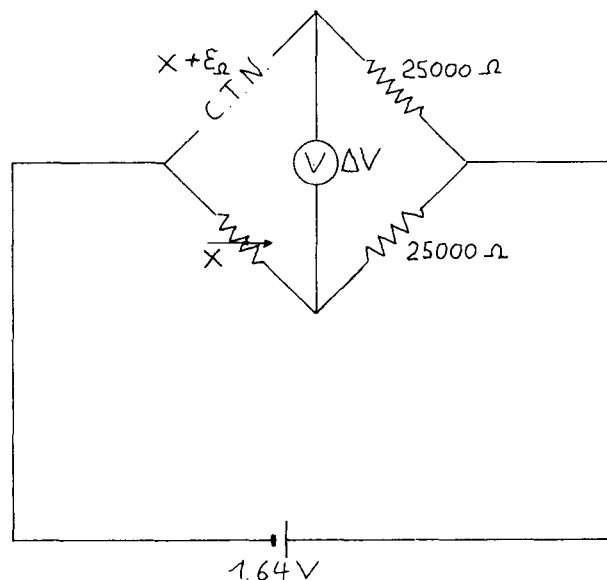


FIGURE IV.6.

## E. EXPERIENCES DANS LES CORPS PURS.

### 1. Courbes de chauffe.

Nous avons effectué des expériences avec de l'eau et de l'isopropanol qui sont les constituants du mélange étudié ultérieurement (chapitre V). Leurs caractéristiques physiques sont données dans l'annexe A.I.

La première expérience a été réalisée dans l'eau et a servi à étalonner le fluxmètre (cf. IV.C.) dans un appareil hybride. La deuxième expérience eut lieu également avec de l'eau, mais conjointement dans les deux appareils assemblés normalement (cf. IV.A.). La troisième expérience eu lieu avec de l'isopropanol, dans les mêmes conditions expérimentales. Notons qu'au cours de toutes ces expériences, nous attendions un temps de l'ordre de trois heures entre chaque mesure, de manière à garantir la mise à l'état stationnaire de la température et des vitesses convectives éventuelles. Notons également qu'en ce qui concerne l'épaisseur du joint, celle-ci est mesurée à l'aide d'un compas palmer, on lui ajoute l'épaisseur du joint d'échantéité en téflon ou en mastic de silicone. On effectue une moyenne sur plusieurs déterminations en plusieurs endroits, dont on donne la valeur. Celle-ci est entachée d'une erreur estimée à 0.03 mm.

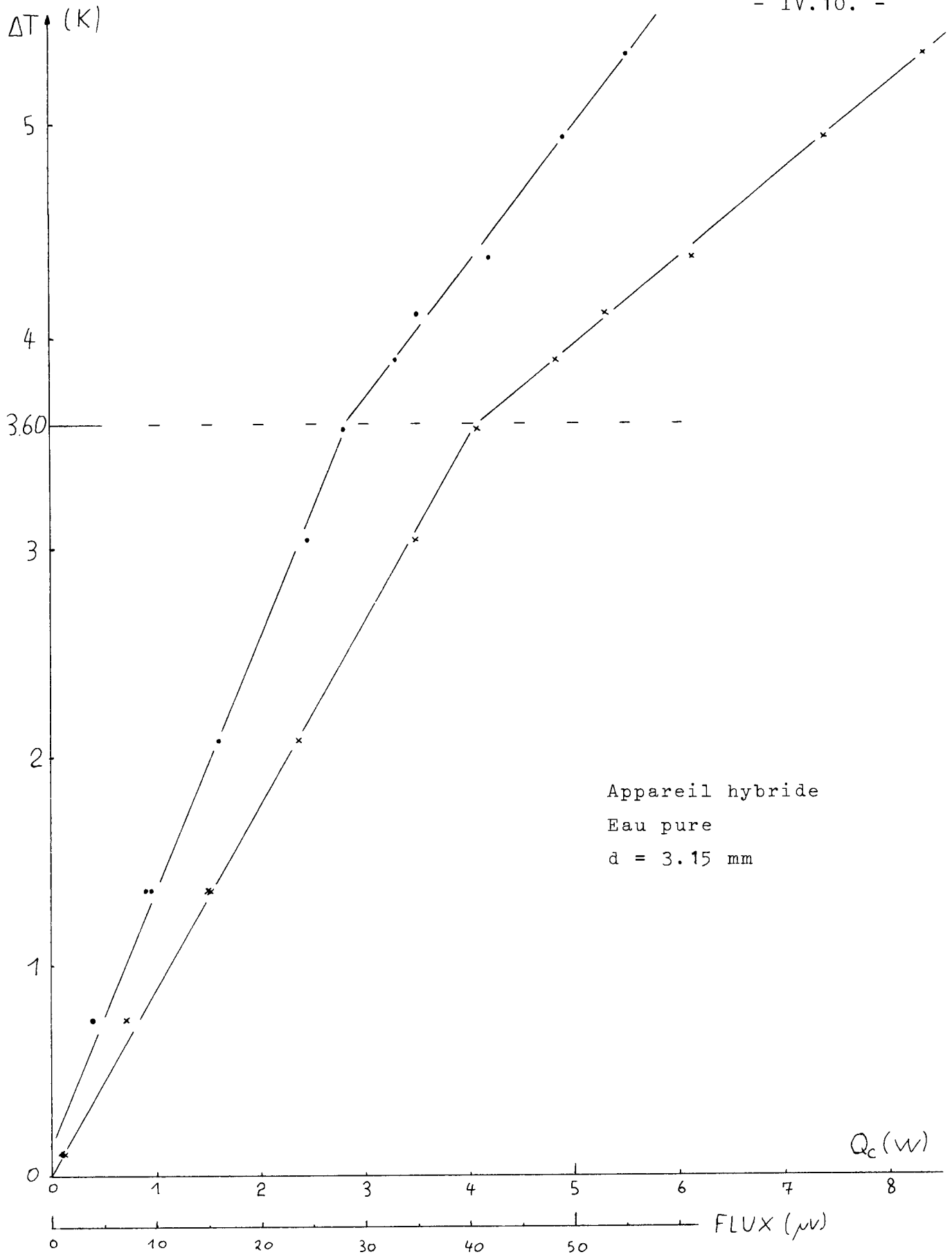
- Première expérience - eau pure - appareil hybride  
 Epaisseur du joint : d = 3.15 mm

$Q_C$ (W) imposé	$\Delta T$ (K) mesuré	Flux ( $\mu V$ ) mesuré	$T_{\text{moyen}}$ ( $^{\circ}C$ ) <sup>*</sup>	Nu <sup>**</sup>	$\frac{\Delta T^{\text{**}}}{\Delta T^{\text{crit}}}$
0.13	0.10	1.2	20.1	1	0.03
0.72	0.75	3.9	22.5	1	0.21
1.50	1.36	9	22.9	1	0.38
1.52	1.36	9.5	20.7	1	0.38
2.37	2.08	16	23.0	1	0.58
3.49	3.05	24.5	22.6	1	0.85
4.09	3.57	28	21.8	1	1.00
4.84	3.90	33	22.0	1.09	1.09
5.31	4.12	35	22.1	1.13	1.15
6.13	4.38	42	22.4	1.23	1.22
7.39	4.94	49	22.6	1.31	1.38
8.33	5.33	55	22.7	1.36	1.49

TABLEAU IV.7.

\*  $T_{\text{moyen}}$  est la température moyenne du liquide ; au cours de cette première expérience, l'appareil n'était pas encore placé dans une ambiance contrôlée et donc c'est la température du bain de thermostatisation que l'on devait ajuster afin de diminuer les pertes. Cela explique les variations irrégulières de  $T_{\text{moyen}}$ .

\*\* Nu et  $\frac{\Delta T}{\Delta T^{\text{crit}}} \approx \frac{Ra}{Ra^{\text{crit}}}$  seront utilisés plus loin.



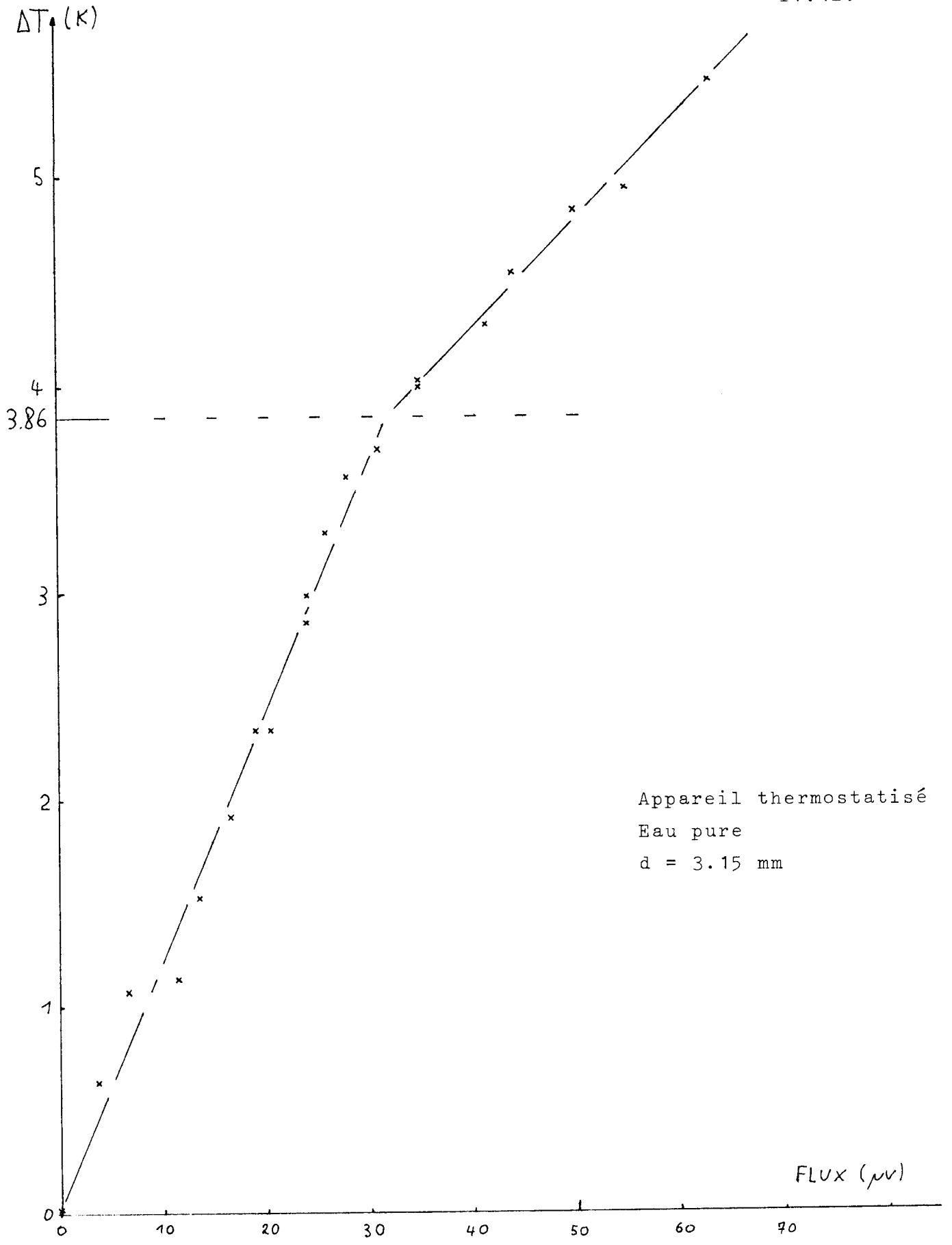
GRAPHIQUE IV.8.

- Deuxième expérience - eau pure - appareil thermostatisé (gradient de température imposé par thermostatisation).

Épaisseur du joint :  $d = 3.15$  mm

$\Delta T$ (K) imposé	Flux ( $\mu V$ ) mesuré	$T_{\text{moyen}}$ ( $^{\circ}C$ )	Nu	$\Delta T / \Delta T^{\text{crit}}$
0.02	0	21.2	1	0.01
0.64	3.8	20.0	1	0.17
1.08	6.6	20.1	1	0.28
1.14	11.5	20.4	1	0.30
1.53	13.5	20.6	1	0.40
1.92	16.5	20.8	1	0.50
2.34	19	21.0	1	0.61
2.34	20.5	21.1	1	0.61
2.86	24	21.3	1	0.74
2.99	24	21.2	1	0.77
3.31	26	21.3	1	0.86
3.57	28	21.4	1	0.92
3.70	31	21.4	1	0.96
4.00	35	21.4	1.06	1.04
4.03	35	21.9	1.05	1.04
4.29	41.5	21.4	1.16	1.11
4.55	44	22.0	1.17	1.18
4.84	50	21.9	1.25	1.25
4.94	55	22.8	1.34	1.28
5.46	63	22.5	1.40	1.41
6.74	88	21.9	1.57	1.75

TABLEAU IV.9.



Appareil thermostatisé  
Eau pure  
d = 3.15 mm

GRAPHIQUE IV.10.

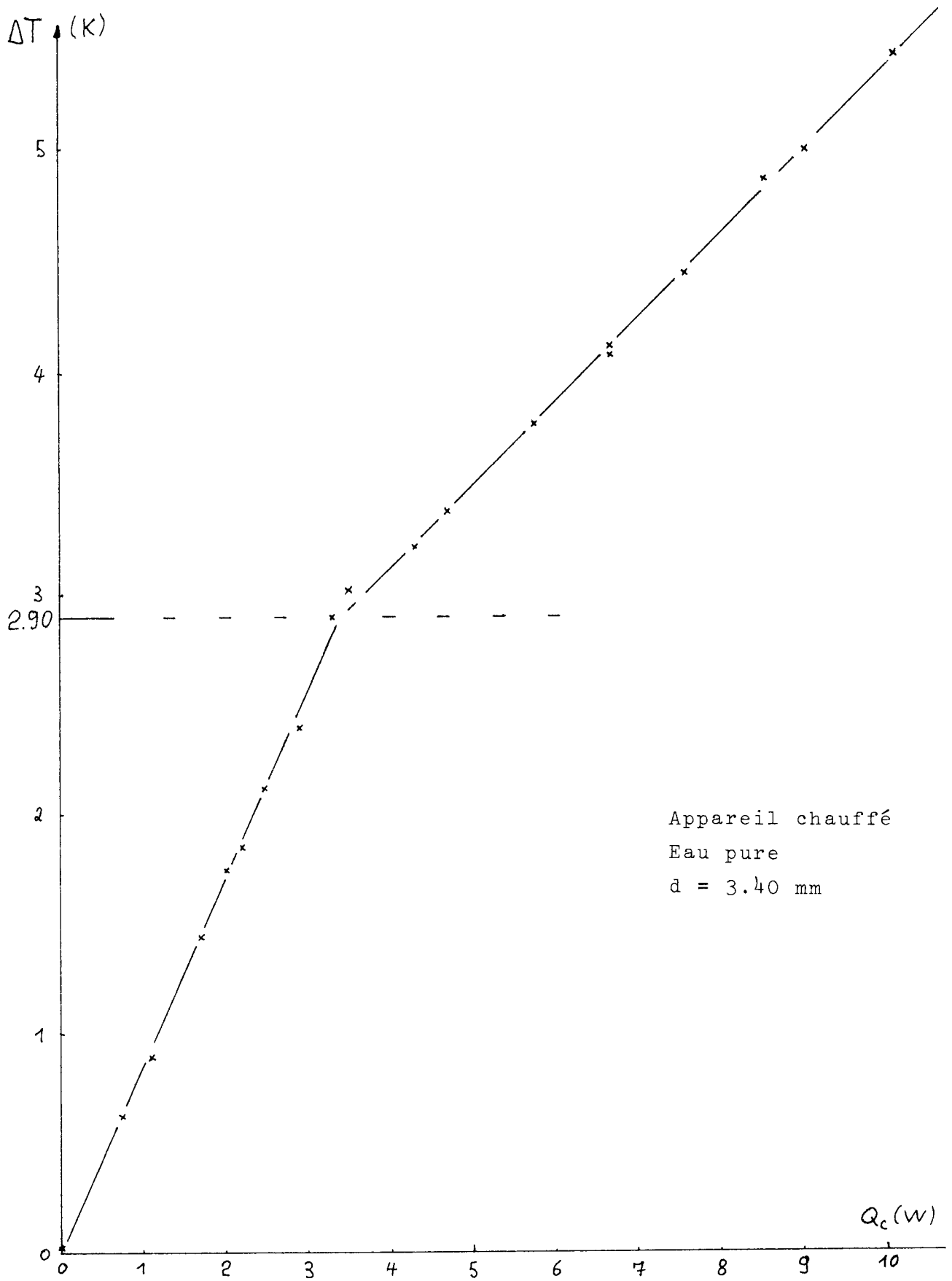
- Deuxième expérience - eau pure - appareil chauffé (flux de chaleur imposé par une résistance électrique).

Epaisseur du joint :  $d = 3.40$  mm

$Q_C$ (W) imposé	$\Delta T$ (K) mesuré	$T_{\text{moyen}}$ (°C)	Nu	$\Delta T / \Delta T^{\text{crit}}$
0	0.02	21.2	1	0.01
0.74	0.63	20.0	1	0.22
1.09	0.90	20.0	1	0.31
1.71	1.44	20.5	1	0.50
2.01	1.75	20.9	1	0.60
2.20	1.85	20.7	1	0.64
2.47	2.12	20.9	1	0.73
2.90	2.40	21.0	1	0.83
3.30	2.89	20.9	1	1.00
3.49	3.02	21.0	1.00	1.04
4.30	3.22	21.4	1.14	1.11
4.70	3.38	21.3	1.19	1.17
5.75	3.77	21.4	1.29	1.30
6.68	4.08	21.3	1.39	1.41
6.68	4.12	21.1	1.38	1.42
7.58	4.45	21.8	1.46	1.53
8.54	4.87	21.9	1.50	1.68
9.04	5.00	22.6	1.53	1.72
10.09	5.42	21.9	1.58	1.87

TABLEAU IV.11.





GRAPHIQUE IV.12.

- Troisième expérience - isopropanol pur - Appareil thermostatisé  
(gradient de température imposé par thermostatisation).

Epaisseur du joint :  $d = 3.32$  mm

$\Delta T(K)$ imposé	Flux ( $\mu V$ ) mesuré	$T_{\text{moyen}}$ ( $^{\circ}C$ )	Nu	$\Delta T/\Delta T^{\text{crit}}$
0	0.5	21.2	1	0
0.40	0.5	19.5	1	0.38
0.46	0.9	19.6	1	0.43
0.58	1.2	19.7	1	0.55
0.70	1.3	19.7	1	0.66
0.87	1.5	20.1	1	0.82
0.95	2.3	20.9	1	0.90
1.33	3.5	20.3	1.23	1.25
1.36	3.8	20.3	1.29	1.28
1.45	4.0	20.1	1.29	1.37
1.85	5.8	20.4	1.45	1.75
2.18	8.0	20.5	1.67	2.06
2.48	9.4	20.7	1.72	2.34
2.50	8.9	20.6	1.62	2.36
2.70	10.5	20.8	1.76	2.55
2.96	11.2	20.8	1.72	2.79
3.05	12.3	20.8	1.84	2.88
3.38	14.2	21.0	1.92	3.19
3.48	13.5	21.0	1.78	3.28
3.64	15.3	21.1	1.91	3.43
3.77	15.9	21.2	1.92	3.56
3.87	17	21.3	2.00	3.65
3.96	16.7	21.3	1.92	3.74
4.45	19.2	21.5	1.96	4.20
4.55	20.5	21.6	2.03	4.29

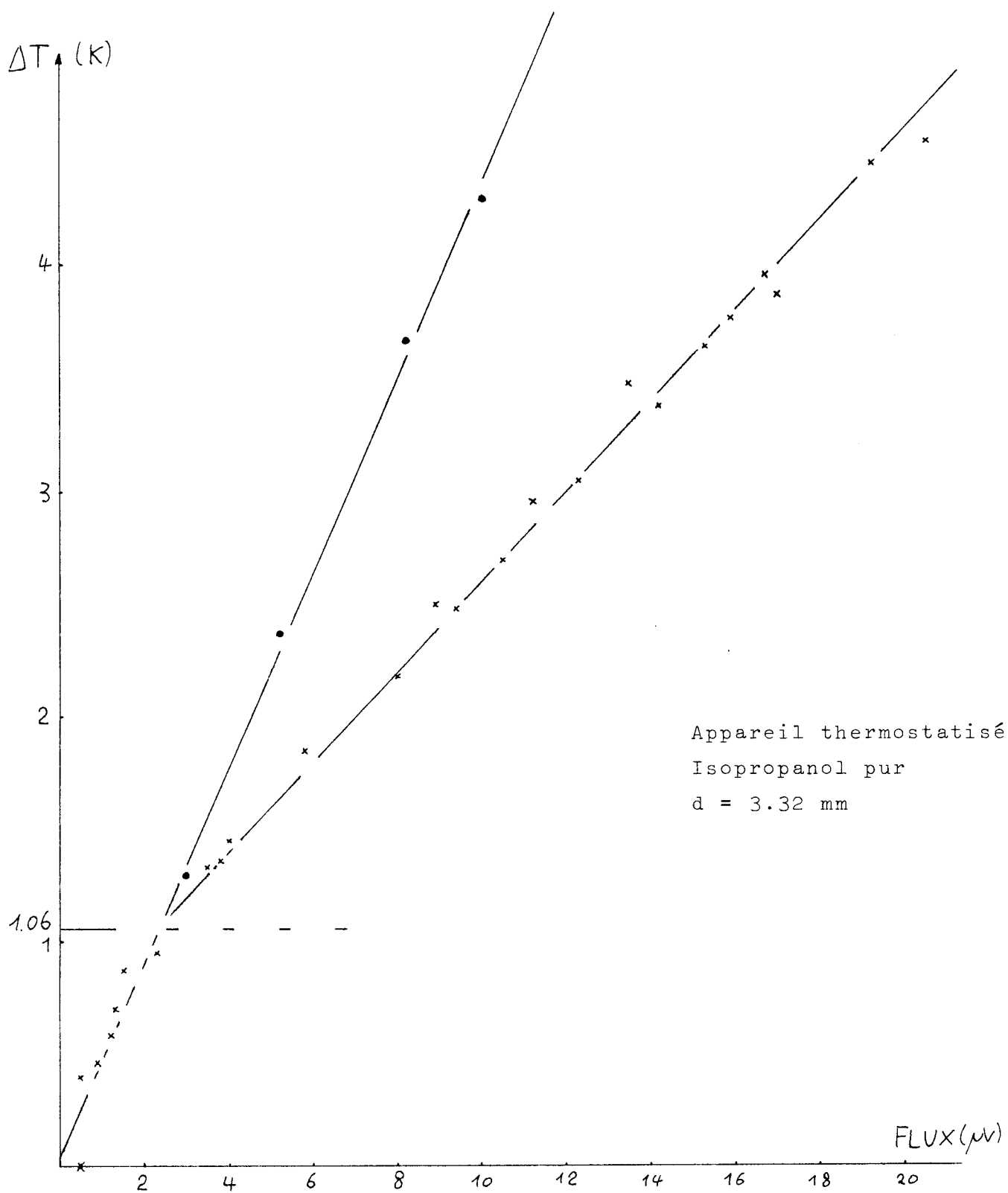
On sait d'après les propriétés physiques de l'isopropanol que  $\Delta T^{\text{crit}}$  est faible ( $\approx 1$  K). Nous avons alors inversé le gradient de température de manière à mieux estimer la droite

de conduction car nous nous trouvons de ce fait dans une situation stable hydrodynamiquement.

$\Delta T (K)$	Flux ( $\mu V$ )	$T_{moyen}$
- 1.30	- 3.0	20.3
- 2.37	- 5.2	20.5
- 3.67	- 8.2	20.8
- 4.29	- 10.0	20.7

TABLEAU IV.13

Ces derniers points sont placés dans le même graphique pour faciliter une meilleure compréhension visuelle.



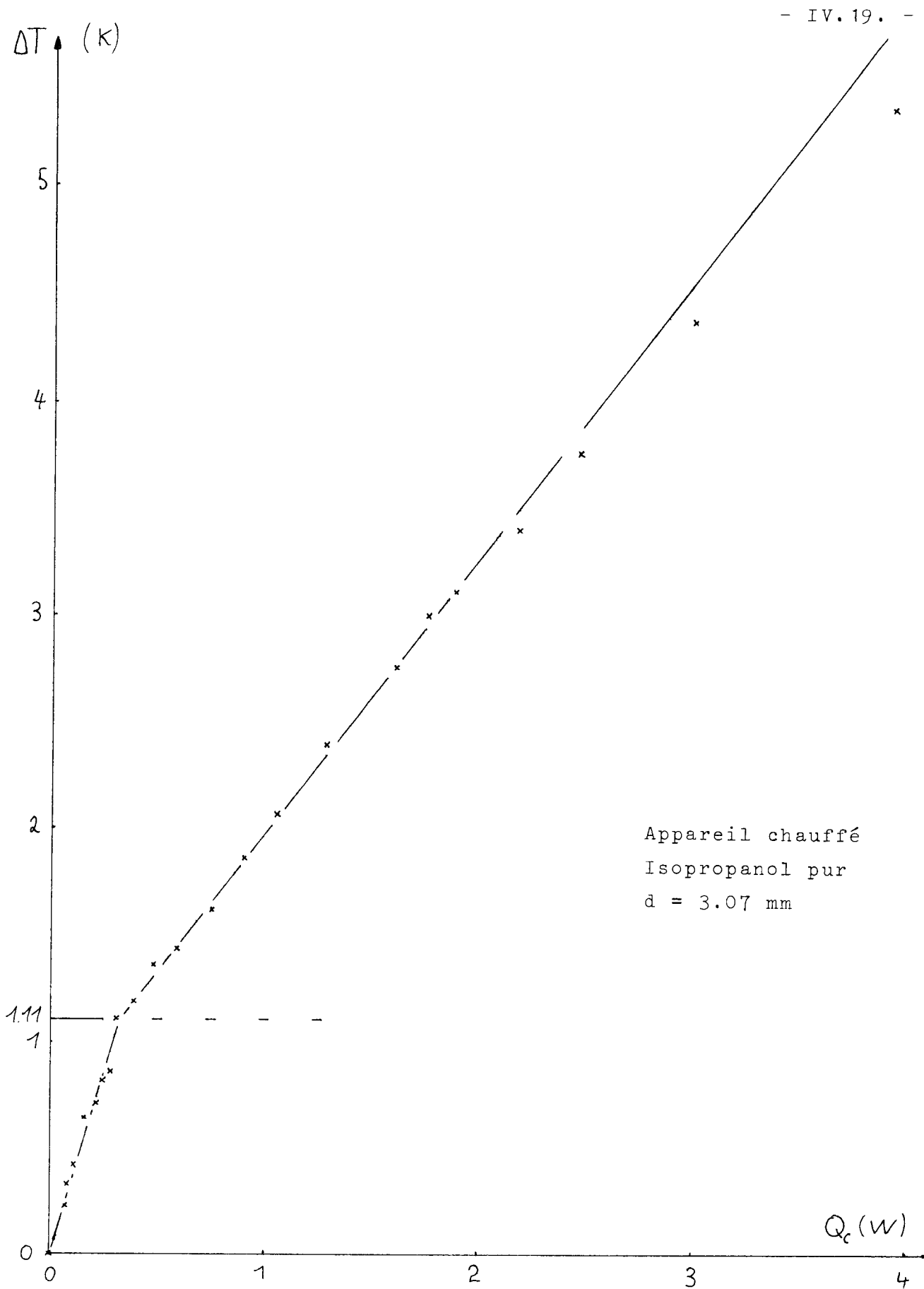
GRAPHIQUE IV.14.

- Troisième expérience - isopropanol pur - appareil chauffé  
(flux de chaleur imposé par une résistance électrique).

Epaisseur du joint :  $d = 3.07$  mm

$Q_C$ (W) imposé	$\Delta T$ (K) mesuré	$T_{\text{moyen}}$	Nu	$\Delta T / \Delta T^{\text{crit}}$
0	0	21.2	1	0
0.07	0.23	19.4	1	0.21
0.08	0.33	19.6	1	0.30
0.11	0.42	19.5	1	0.38
0.16	0.64	19.7	1	0.58
0.21	0.71	19.7	1	0.64
0.24	0.82	22.1	1	0.74
0.28	0.86	19.8	1	0.77
0.31	1.11	19.9	1	1.00
0.39	1.19	20.0	1.13	1.07
0.48	1.36	20.3	1.22	1.23
0.59	1.44	20.1	1.40	1.30
0.75	1.62	20.4	1.60	1.46
0.90	1.86	20.6	1.67	1.68
1.06	2.07	20.4	1.77	1.86
1.29	2.40	20.5	1.87	2.16
1.61	2.76	20.7	2.01	2.49
1.76	2.99	20.8	2.02	2.69
1.89	3.12	21.0	2.09	2.81
2.18	3.41	21.1	2.19	3.07
2.46	3.77	21.2	2.24	3.40
3.00	4.38	21.5	2.35	3.95
3.92	5.36	21.2	2.51	4.83

TABLEAU IV.15.



GRAPHIQUE IV.16.

2. Détermination des nombres de Rayleigh critiques.

Un nombre de Rayleigh critique obtenu à partir des données expérimentales est toujours entaché d'une erreur relative assez grande. En effet, par sa définition,

$$Ra = \frac{g \alpha \Delta T d^3}{K \nu}$$

le nombre de Rayleigh accumule les erreurs de chacun de ses facteurs. Notamment,  $\frac{g \alpha}{K \nu}$  repris en annexe A.I., dépend fortement de la température moyenne, et son imprécision est de l'ordre de 2 %. L'épaisseur n'est pas mesurée avec une précision meilleure que 0.03 mm, donc 1 %. Une imprécision sur la détermination de  $\Delta T^{crit}$  existe également, elle est aussi de l'ordre de 1 %, mais pour l'appareil où l'on mesure le flux de chaleur à l'aide du fluxmètre, l'imprécision peut être plus importante. Globalement, on peut considérer comme représentative une erreur expérimentale de 7 %, c'est d'ailleurs celle que Stork et Müller (1972) indiquent. Nous avons procédé pour la détermination des  $\Delta T^{crit}$  par la recherche de l'intersection des droites conductives et convectives obtenues par régression linéaire.

- Première expérience - eau pure - appareil hybride ; d = 0.315 cm

$$\begin{array}{ll} T_{moyen} = 21.8 \text{ } ^\circ\text{C} & \frac{g \alpha}{K \nu} = 16 \ 000 \text{ cm}^{-3} \text{ K}^{-1} \\ \Delta T^{crit} = 3.60 \text{ K} & Ra^{crit} = 1800 \end{array}$$

- Deuxième expérience - eau pure - appareil thermostatisé ;

d = 0.315 cm

$$\begin{array}{ll} T_{moyen} = 21.3 \text{ } ^\circ\text{C} & \frac{g \alpha}{K \nu} = 15 \ 500 \text{ cm}^{-3} \text{ K}^{-1} \\ \Delta T^{crit} = 3.86 \text{ K} & Ra^{crit} = 1870 \end{array}$$

- Deuxième expérience - eau pure - appareil chauffé ; d = 0.340 cm

$$\begin{array}{ll} T_{moyen} = 20.9 \text{ } ^\circ\text{C} & \frac{g \alpha}{K \nu} = 15 \ 050 \text{ cm}^{-3} \text{ K}^{-1} \\ \Delta T^{crit} = 2.90 \text{ K} & Ra^{crit} = 1715 \end{array}$$

- Troisième expérience - isopropanol pur - appareil thermostatisé  
 $d = 0.332$  cm

$$\begin{aligned} T_{\text{moyen}} &= 20 \text{ }^{\circ}\text{C} & \frac{q\alpha}{K\nu} &= 50\,320 \text{ cm}^{-3} \text{ K}^{-1} \\ \Delta T^{\text{crit}} &= 1.06 \text{ K} & Ra^{\text{crit}} &= 1952 \end{aligned}$$

- Troisième expérience - isopropanol pur - appareil chauffé  
 $d = 0.307$  cm

$$\begin{aligned} T_{\text{moyen}} &= 20 \text{ }^{\circ}\text{C} & \frac{q\alpha}{K\nu} &= 50\,320 \text{ cm}^{-3} \text{ K}^{-1} \\ \Delta T^{\text{crit}} &= 1.11 \text{ K} & Ra^{\text{crit}} &= 1616 \end{aligned}$$

Les  $Ra^{\text{crit}}$  déterminés sont tous effectivement proches de la valeur théorique 1708. L'erreur est plus grande pour l'appareil thermostatisé puisque la mesure du flux de chaleur reste encore imprécise comme nous l'avons expliqué précédemment. L'erreur relative sur  $\Delta T^{\text{crit}}$  est la plus grande dans le cas de l'isopropanol puisque l'ordre de grandeur de  $\Delta T^{\text{crit}}$  est 1 K. Si notre but était de mesurer avec précision  $Ra^{\text{crit}}$ , il est évident que nous choisirions de faire une expérience où l'on impose  $Q_C$  et pour laquelle  $\Delta T^{\text{crit}}$  serait de l'ordre de 4 K. L'expérience pratiquée dans ces conditions nous fournit effectivement une valeur de 1715 très proche de 1708 (0,5 %). D'autre part, la moyenne de nos cinq déterminations nous donne 1791, à moins de 5 % de la valeur théorique. On peut donc déduire des étalonnages de nos appareils que les résultats qu'ils nous fournissent sont des plus acceptables.

### 3. Domaine supercritique.

Nous avons également profité de ces expériences préliminaires dans les corps purs pour les confronter à la théorie non linéaire au-delà du point critique. Il est alors utile d'introduire un nouveau nombre sans dimension caractérisant le flux de chaleur : le nombre de Nusselt  $Nu$ , qui est le rapport du flux de chaleur réel à travers le fluide au flux de chaleur qui s'installerait en l'absence de convection. En pratique, dans les courbes



de chauffe, le nombre de Nusselt  $Nu$  vaut l'unité lorsqu'on se trouve en régime conductif en deça du point critique tandis qu'au delà,  $Nu$  est le rapport de la mesure du segment horizontal joignant le point expérimental à l'axe des températures, à la mesure du segment joignant le prolongement de la droite de conduction à l'axe des températures sur la même horizontale (figure IV.17.).

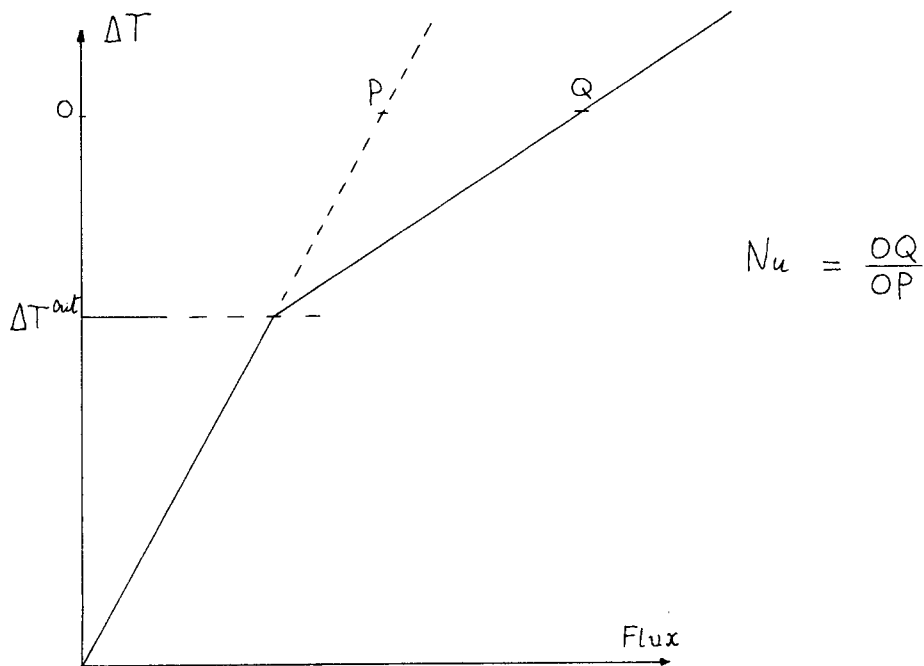


FIGURE IV.17.

On introduit également le nombre  $\epsilon$ , écart relatif au point critique, défini par

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{(Ra - Ra^{crit})}{Ra^{crit}} = \frac{Ra}{Ra^{crit}} - 1 \\ &= \frac{\Delta T}{\Delta T^{crit}} - 1 \end{aligned} \quad (IV.6.)$$

Les diverses théories, dont Legros et Platten (1978) ont fait la synthèse, admettent généralement la loi

$$(Nu - 1) \frac{Ra}{Ra^{crit}} = K \varepsilon^{+1} \quad (IV.7.)$$

pour autant que  $\varepsilon$  soit petit (domaine proche du point critique). La valeur de  $K$  est fonction du nombre de Prandtl et du type de cellules convectives. Pour des rouleaux infinis, Schluter, Lortz et Busse proposent

$$K = \frac{1}{0.69942 - 0.00472 Pr^{-1} + 0.00832 Pr^{-2}} \quad (IV.8.)$$

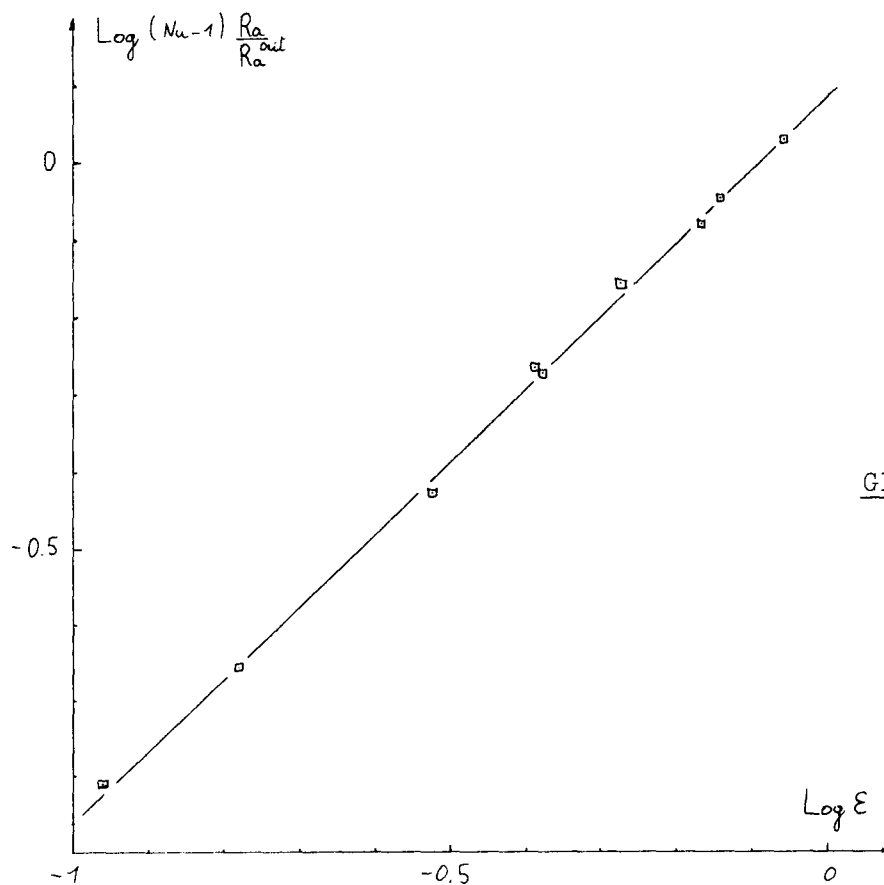
soit en pratique, pour des nombres de Prandtl  $> 2$  :  $K = 1.43$   
 La relation (IV.7.) n'est plus linéaire lorsque  $\varepsilon > 2$  (domaine hautement non linéaire) et d'après diverses théories (qui sont loin de donner des résultats en accord les unes avec les autres), on obtient en fait un exposant nettement supérieur à 1, proche de 1.2. Nous avons effectué la comparaison avec la théorie pour l'ensemble de nos résultats expérimentaux, ainsi que pour les résultats d'une expérience de Silveston avec de l'eau (d'après Chandrasekhar, 1961). Estimons avant tout quelle est l'erreur sur les grandeurs  $(Nu - 1) Ra/Ra^{crit}$  et  $\varepsilon$  que nous utilisons. L'erreur relative sur  $Nu$  peut être décomposée (voir figure IV.17.) en la somme de l'erreur relative sur  $OP$  (indétermination sur la pente de la droite conductive) et de l'erreur relative sur  $OQ$  (erreur sur la mesure du flux de chaleur),

$$E_{Nu} = E_{OP} + E_{OQ} \quad (IV.9.)$$

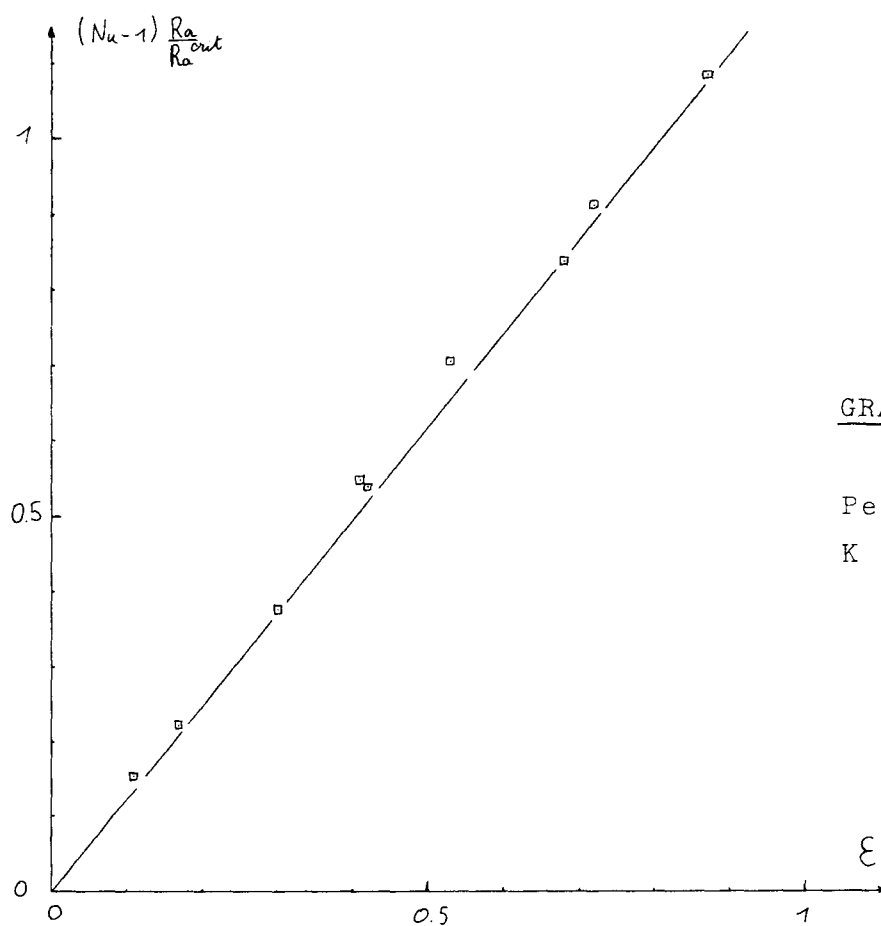
soit pour des cas moyennement favorable ( $E_{OP}$  et  $E_{OQ} \approx 3\%$ ),  $E_{Nu} \approx 6\%$ . Pour un nombre de Nusselt de l'ordre de 2, on voit que l'erreur relative sur  $(Nu - 1)$  sera donc approximativement de 12%. D'autre part, l'erreur relative sur la mesure de  $\Delta T$  est normalement 1% et l'erreur relative sur la détermination de

$\Delta T^{\text{crit}}$  est comme nous l'avons déjà signalé de 1 % dans les cas favorables ; et donc, l'erreur sur  $Ra/Ra^{\text{crit}} = \Delta T/\Delta T^{\text{crit}}$  est de l'ordre de 2 %, ce qui signifie que pour  $\varepsilon$  de l'ordre de 1, suivant la définition (IV.6.) l'erreur relative  $E_{\varepsilon}$  vaudra 4 %. En résumé, pour les ordres de grandeur signalés ( $Nu = 2$  et  $\varepsilon = 1$ ), l'erreur sur  $(Nu - 1) Ra/Ra^{\text{crit}}$  sera approximativement de 14 % et l'erreur sur  $\varepsilon$  vaudra approximativement 4 %. Notons néanmoins qu'une grande part de cette erreur est systématique, notamment en ce qui concerne l'erreur sur la pente de la droite conductive  $E_{OP}$  et l'erreur relative sur la détermination de  $\Delta T^{\text{crit}}$ . De ce fait, lorsque nous comparons l'expérience et la théorie, nous nous attendons à obtenir effectivement la relation linéaire (IV.7.), mais nous ne nous inquiéterons pas, du fait de certaines erreurs systématiques expliquées dans le calcul d'erreur précédent, de la précision de la pente  $K$ , celle-ci pouvant éventuellement atteindre 15 %. Nous avons effectué d'abord la comparaison entre la théorie et l'expérience pour laquelle nous obtenions les meilleurs résultats (soit donc la deuxième expérience décrite dans ce chapitre, pour laquelle nous obtenons  $Ra^{\text{crit}} = 1715$ , dont les résultats sont repris précédemment dans le tableau (IV.11.) et le graphique (IV.12.)). Nous avons porté dans un premier graphique (IV.18.)  $\log (Nu - 1) Ra/Ra^{\text{crit}}$  en fonction de  $\log \varepsilon$ , et dans un deuxième graphique (IV.19.)  $(Nu - 1) Ra/Ra^{\text{crit}}$  en fonction de  $\varepsilon$ . On observe dans le premier graphique que la pente est effectivement pratiquement unitaire (0.96), conformément à la théorie proche du point critique (IV.7.). Quand à la valeur de  $K$ , celle-ci est obtenue par deux régressions sur les deux graphiques ; la valeur moyenne est 1.24, soit à 13 % de la valeur 1.43 fournie par Schluter, Lortz et Busse, ce qui correspond à une erreur acceptable. Nous avons également porté dans deux graphiques similaires (IV.20.) et (IV.21.) l'ensemble de nos résultats expérimentaux, ainsi que les résultats de Silveston. On a tracé dans ces graphiques la droite de pente  $K$  calculée par Schluter, Lortz et Busse. On observe qu'effectivement les points expérimentaux se disposent autour de cette droite théorique. Dans le

graphique logarithmique (IV.21.), on voit que dans le domaine proche du point critique (en pratique  $\varepsilon < 2$  et  $\log \varepsilon < 0.3$ ), la pente est approximativement unitaire, conformément à la relation (IV.7.). Au delà de ce domaine, on observe conformément à ce que nous avons signalé précédemment que la pente est supérieure à l'unité et vaut approximativement 1.2. Il faut voir dans ces concordances que la physique du problème est respectée, même si les valeurs de K que l'on peut obtenir varient sensiblement autour de la valeur prédite. En effet, la loi en  $\varepsilon^{+1}$  est indépendante des conditions mécaniques aux bords (libres ou rigides), de la nature du liquide et du type de mouvement convectif, alors que la valeur de K est liée à des hypothèses, notamment celle qui suppose comme structure convective des rouleaux bidimensionnels infinis ; or, il ne nous a pas été possible de vérifier la présence de rouleaux réguliers qui ne pouvaient pas, de toutes manières, être infinis. Enfin, K dépend de la nature du fluide par l'intermédiaire de Pr (mais peu sensiblement), et aussi des conditions mécaniques. Nous pouvons donc remarquer un accord raisonnable entre nos résultats expérimentaux et la théorie. D'autre part, les résultats obtenus par Silveston ne semblent ni plus ni moins probants que les nôtres. Toutes ces expériences nous donnent donc une grande confiance dans nos appareillages. Nous adopterons de ce fait les mêmes techniques expérimentales dans la suite de nos expériences.



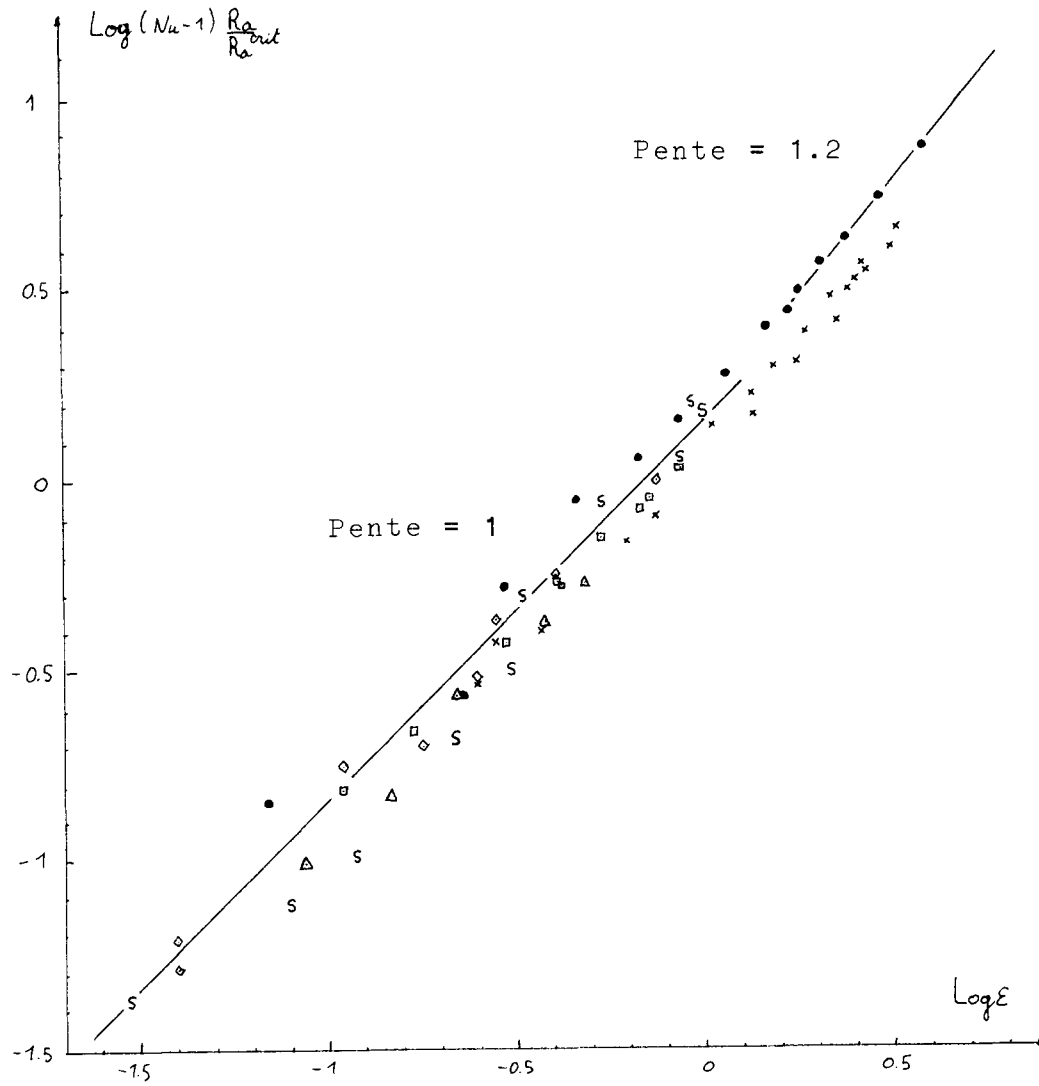
GRAPHIQUE IV.18.



GRAPHIQUE IV.19.

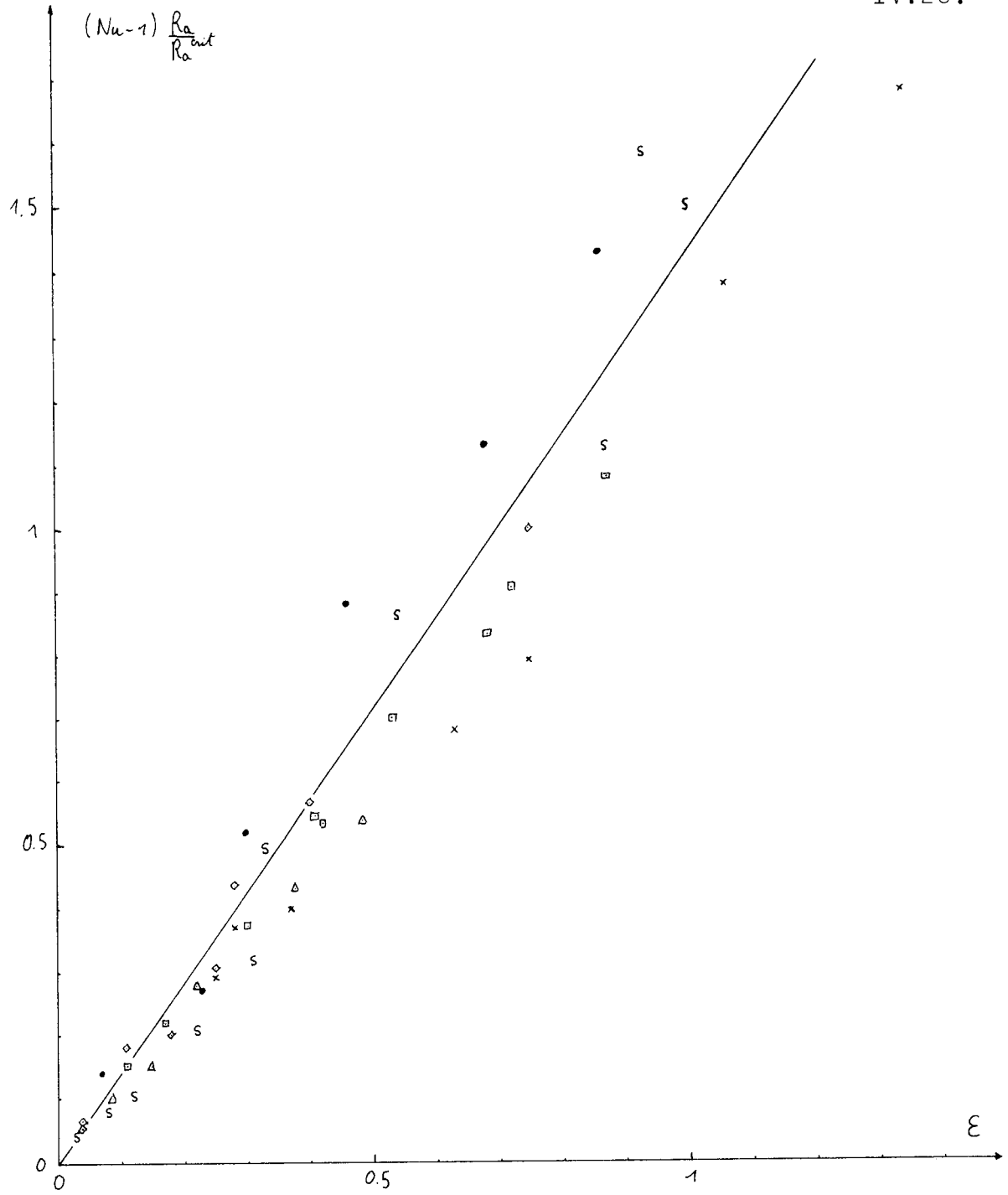
Pente = 0.96

K = 1.23



GRAPHIQUE IV.20.

- $\Delta$  Première expérience - eau pure - appareil hybride
- $\square$  Deuxième expérience - eau pure - appareil chauffé
- $\diamond$  Deuxième expérience - eau pure - appareil thermostatisé
- s Expérience de Silveston - eau pure
- $\bullet$  Troisième expérience - isopropanol pur - appareil chauffé
- x Troisième expérience - isopropanol pur - appareil thermostatisé



GRAPHIQUE IV.21.

## CHAPITRE V

-----

### EXPERIENCES DANS UN MELANGE EAU-ISOPROPANOL.

-----

#### A. CONDITIONS EXPERIMENTALES, RESULTATS.

Nous avons procédé à une expérience conjointement dans les deux appareils décrits au chapitre IV avec un mélange d'eau et d'isopropanol :

- titre massique en eau :  $N_1^{in} = 0.9091$
- titre massique en isopropanol  $(1 - N_1^{in}) = 0.0909$

La littérature nous indique que pour cette condition de titre, nous nous trouvons dans un cas où le coefficient de thermodiffusion  $D'$  est négatif (voir par exemple Poty, Legros, Thomaes (1974)). Le nombre de Soret, de ce fait négatif, implique que l'eau, le constituant le plus dense, migre vers la paroi chaude inférieure, ce qui a pour conséquence une convection retardée par rapport aux corps purs (voir chapitre III.B.) : c'est l'effet que l'on cherche à observer expérimentalement. Notons que le temps de mise à l'état stationnaire comprend outre les temps de mise à l'équilibre de la température et des vitesses, le temps d'établissement du gradient de titre provoqué par la thermodiffusion. Celui-ci est donné par S.R. de Groot et I. Prigogine (par exemple de Groot (1945)) pour un état conducteur ; la constante de temps  $\tau$  est donnée par

$$\tau = \frac{d^2}{\pi^2 D} \quad (V.1.)$$

où  $D$  est le coefficient de diffusion isotherme. Typiquement, pour  $d \approx 3$  mm,  $\tau \approx 1000$  s et nous sommes donc assurés d'être à l'état stationnaire après un temps de trois heures. En pratique, nous effectuons trois à quatre mesures par jour, espacées de trois heures au minimum. Les résultats expérimentaux ainsi que les graphiques qui en découlent sont rassemblés dans les pages qui suivent. Commentons-les.



Pour l'appareil thermostatisé (graphique (V.2.)), on a augmenté graduellement le gradient de température jusqu'au point critique C (les résultats obtenus en augmentant le gradient de température sont représentés par le symbole +), on observe alors l'instabilité de l'état de repos et il se produit une transition vers un état convectif D avec une augmentation considérable du flux de chaleur (47 %) pour une élévation du gradient de température "infinitésimale" (par exemple 0.03 K). On se trouve alors sur la droite de convection (probablement stationnaire) que l'on peut parcourir en augmentant le gradient de température jusqu'en E (toujours le symbole +). Lorsqu'on diminue le gradient de température (symbole o), on redescend par le même trajet jusqu'en D, mais à partir de là, on ne repasse plus sur les points expérimentaux obtenus (+) mais on poursuit la droite de convection jusqu'en F. Si alors on diminue encore le gradient de température, il se produit un retour à l'état de repos G avec une diminution importante du flux de chaleur (par exemple 20 %), à nouveau pour une diminution très faible du gradient de température. Contrairement aux corps purs, on voit qu'on a décrit un trajet différent en augmentant et en diminuant le gradient de température, il y a donc existence d'une hystérèse. Afin de garantir cela, on a parcouru deux fois cette boucle (voir tableau V.1.).

Pour l'appareil chauffé (graphique V.4.), la courbe de chauffe est essentiellement différente dans la région critique car ici, c'est le flux de chaleur qu'on impose. L'expérience, dans cet appareil classique, a déjà été réalisée précédemment sur ce mélange (Chavepeyer, 1974). Elle a été répétée avec soin dans un appareil de même conception et dimensions que l'appareil dit thermostatisé, alors que Chavepeyer utilisait un appareil circulaire ( $\varnothing = 20$  cm), l'épaisseur des plaques était seulement de 1.5 cm et 2 cm, valeurs faibles pour assurer une bonne homogénéité de température à la surface. De plus, les prises de température étaient assurées par des thermomètres à mercure gradués au 1/50 K (donc à gros bulbe) ce qui nécessite des trous de  $\approx 1$  cm. A nouveau, ceci est défavorable à une bonne homogénéité de température.

Dans l'appareil chauffé (graphique V.4.), l'expérience se déroule comme pour l'autre appareil jusqu'au point critique C. Les résultats obtenus en augmentant le flux de chaleur sont représentés par le symbole +, et pour un second passage, plus "lent", par le symbole x. Au delà du point C, une légère augmentation du flux de chaleur provoque l'instabilité de l'état de repos et entraîne une chute du gradient de température vers des états de la région X. Ces états ne semblent pas stationnaires ; si on augmente encore le flux de chaleur, ils rejoignent aux environs de D la droite de convection stationnaire, comparable à celle obtenue avec l'appareil thermostatisé et que l'on peut parcourir jusqu'en E. Si alors on diminue le flux de chaleur (symbole □ et pour la deuxième fois symbole o), on redescend par le même trajet jusqu'en D et la région X où les états ne semblent pas stationnaires. On ne rejoint pas l'état de repos en G par une augmentation spontanée du gradient de température et passage par C, on passe au contraire par une série d'états de la région Y. Une fois en G, on se retrouve dans les mêmes conditions qu'au début de l'expérience. On voit qu'ici aussi on a parcouru deux fois une boucle d'hystérese, mais que celle-ci n'est pas la même que pour l'appareil thermostatisé, même si la cause est la même ; cette différence est bien entendu liée à la différence entre les deux modes opératoires des appareils (gradient de température imposé ou flux de chaleur imposé).

- Mélange eau-isopropanol - appareil thermostatisé (gradient de température imposé par thermostatisation).

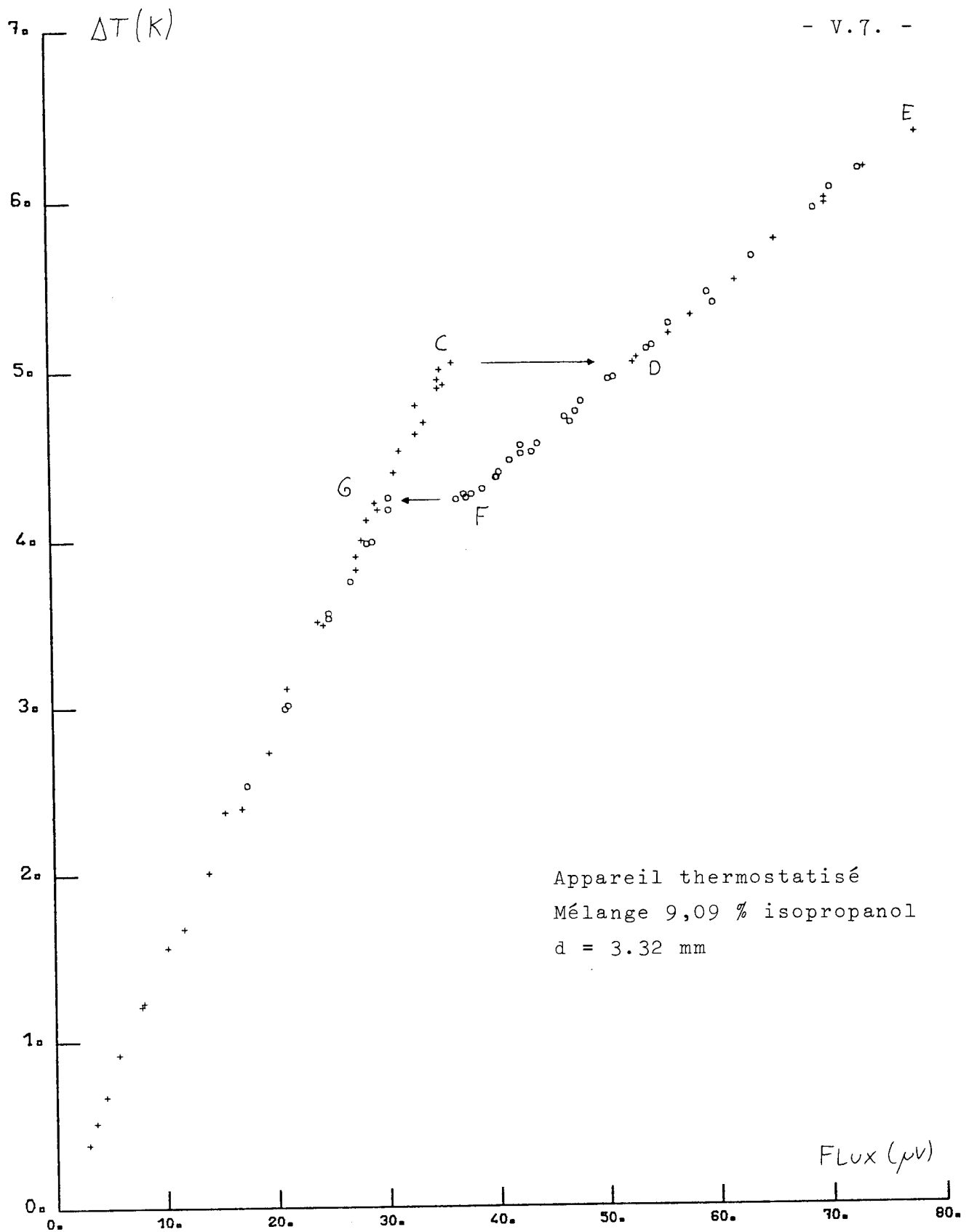
Epaisseur du point :  $d = 3.32$  mm

$\Delta T(K)$ imposé	Flux ( $\mu V$ ) mesuré	$T_{\text{moyen}}$	Nu	$\Delta T/\Delta T^{\text{crit}}$
0.38	2.9	19.5	1	0.08
0.51	3.6	19.7	1	0.10
0.67	4.5	19.7	1	0.13
0.92	5.7	19.8	1	0.18
1.21	7.8	19.9	1	0.24
1.23	8.6	20.0	1	0.24
1.67	11.7	19.7	1	0.33
2.01	14	20.1	1	0.40
2.37	15.5	20.3	1	0.47
3.51	24	20.8	1	0.70
3.82	27.5	20.8	1	0.76
4.00	28	21.0	1	0.79
4.12	28.5	21.1	1	0.82
4.22	29.25	21.2	1	0.84
4.40	31	21.2	1	0.87
4.63	33	21.3	1	0.92
4.70	33.75	21.5	1	0.93
4.90	35	21.6	1	0.97
5.05	52.75	21.7	1.47	1.00
5.33	58	21.7	1.53	1.06
5.53	62	21.9	1.58	1.10
5.77	65.5	22.0	1.59	1.14
5.98	70	22.1	1.64	1.18
6.01	70	22.1	1.64	1.19
6.19	73.5	22.2	1.67	1.23
6.39	78	22.3	1.71	1.27
6.18	73	22.2	1.66	1.22
6.07	70.5	22.1	1.63	1.20
5.95	69	22.0	1.63	1.18
5.67	63.5	21.9	1.57	1.12
5.46	59.5	21.7	1.53	1.08
5.40	60	21.8	1.56	1.07

$\Delta T(K)$ imposé	Flux ( V ) mesuré	$T_{\text{moyen}}$	Nu	$\Delta T/\Delta T^{\text{crit}}$
5.28	56	21.5	1.49	1.05
5.15	54.5	21.5	1.49	1.02
5.13	54	21.6	1.48	1.02
4.96	51	21.4	1.45	0.98
4.82	48	21.4	1.40	0.95
4.76	47.5	21.8	1.41	0.94
4.70	47	21.4	1.41	0.93
4.57	44	21.5	1.36	0.90
4.52	43.5	21.5	1.36	0.90
4.51	42.5	21.3	1.33	0.89
4.40	40.5	21.4	1.30	0.87
4.27	37.3	21.2	1.23	0.85
4.24	36.6	21.2	1.22	0.84
4.25	30.5	21.1	1	0.84
3.99	29	20.4	1	0.79
3.53	25	20.6	1	0.70
2.99	21	20.3	1	0.59
1.56	10.2	19.6	1	0.31
2.39	17	20.0	1	0.47
2.73	19.5	20.2	1	0.54
3.11	21.2	20.4	1	0.62
3.49	24.5	20.6	1	0.69
3.90	27.5	20.8	1	0.77
4.18	29.5	21.0	1	0.83
4.53	31.5	21.1	1	0.90
4.80	33	21.3	1	0.95
4.92	35.5	21.3	1	0.97
4.95	35	21.4	1	0.98
5.01	35.2	21.4	1	0.99
5.05	36.3	21.4	1	1.00
5.08	53.1	21.5	1.47	1.01
5.22	56	21.5	1.51	1.03
4.95	50.5	21.4	1.44	0.98

$\Delta T(K)$ imposé	Flux ( $\mu V$ ) mesuré	$T_{\text{moyen}}$	Nu	$\Delta T/\Delta T^{\text{crit}}$
4.73	46.5	21.3	1.39	0.94
4.56	42.5	21.2	1.31	0.90
4.47	41.5	21.1	1.31	0.89
4.37	40.3	21.1	1.30	0.87
4.37	40.2	21.1	1.30	0.87
4.30	39	21.0	1.28	0.85
4.27	38	21.0	1.26	0.86
4.25	37.5	21.0	1.25	0.84
4.18	30.5	20.9	1	0.83
3.98	28.5	20.8	1	0.79
3.75	27	20.7	1	0.74
3.56	25	20.6	1	0.70
3.01	21.3	20.3	1	0.60
2.53	17.5	20.0	1	0.50

TABLEAU V.1.



GRAPHIQUE V.2.

En se rapprochant du point D (courbe stationnaire convective), les oscillations deviennent irrégulières en amplitude tandis que la période tend à augmenter, mais elles persistent néanmoins (figures V.14. et V.15.).

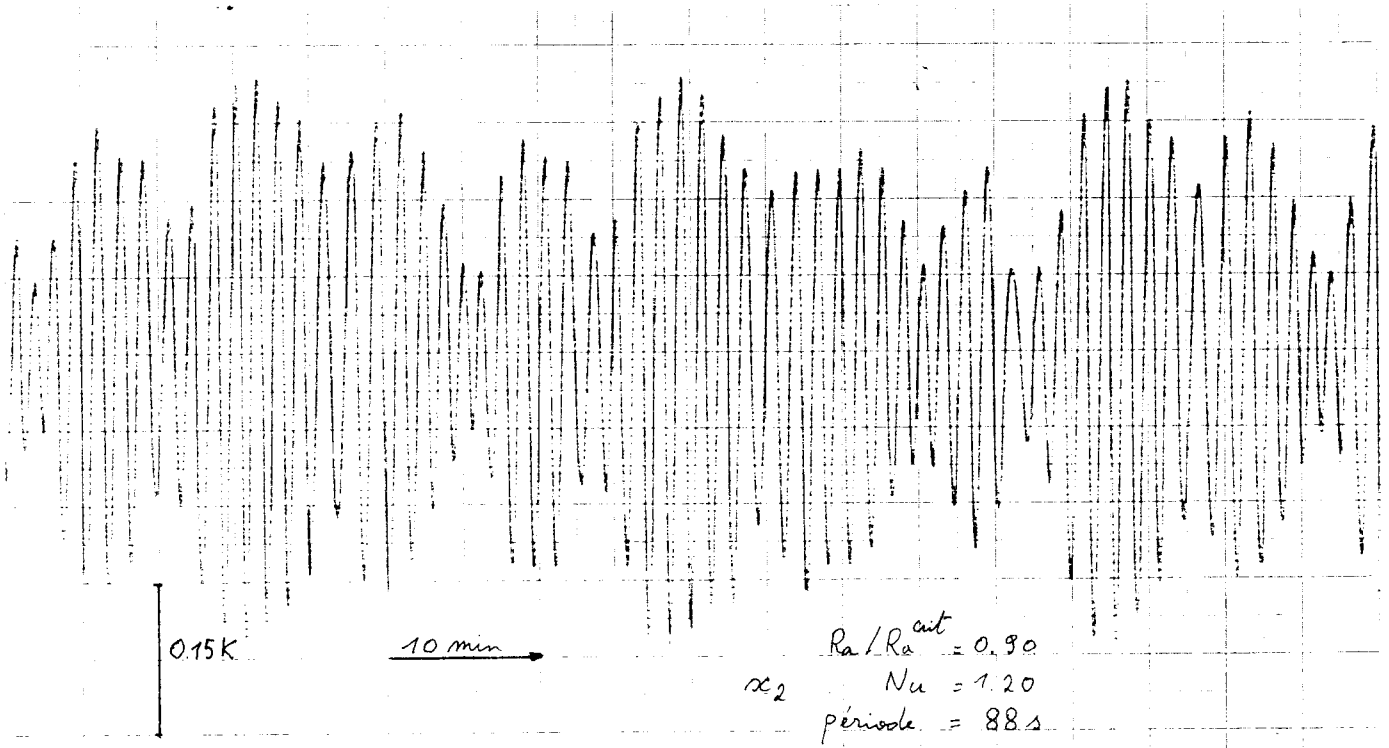


FIGURE V.14.

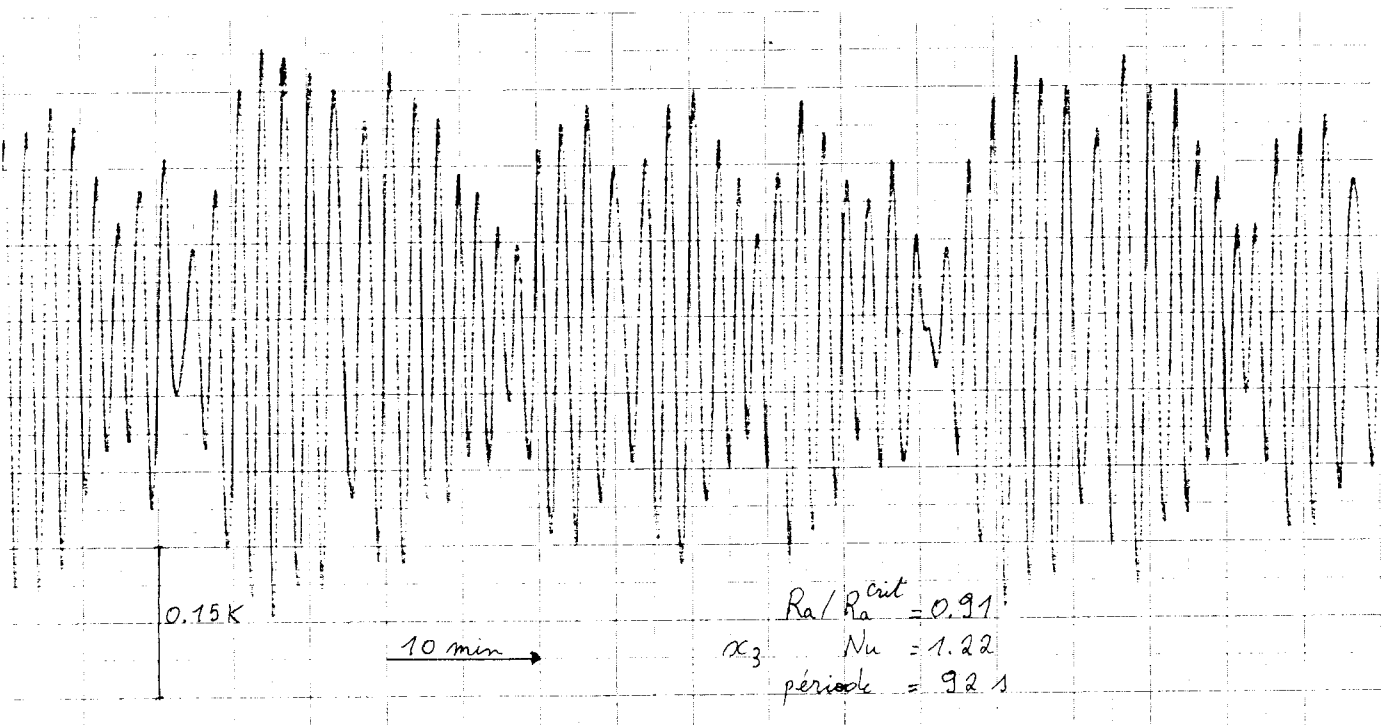


FIGURE V.15.

Finalement, en augmentant encore le flux de chaleur, on finit par rejoindre la courbe stationnaire de convection. De même, lorsqu'on diminue le flux de chaleur, on repasse également par la même région X ainsi que par la zone Y pour rejoindre l'état de repos. On voit que ces états Y correspondent à des valeurs du nombre de Nusselt  $Nu$  comprises entre 1 et 1.22, et que donc contrairement à l'autre mode opératoire, aucune valeur du nombre de Nusselt n'est interdite.

Cependant, fondamentalement, les graphiques (V.7.) et (V.8.) sont différents ; en les superposant, les portions de courbes DE coïncident, mais les états des régions X et Y (graphique V.8.) ne se superposent absolument pas avec états de la portion de courbe FD (graphique V.7.). Si on admet que les états sur la courbe FDE du graphique V.7. sont tous stationnaires et que ce sont les seuls états stationnaires convectifs stables (cf. figure V.6.), il faut alors admettre que les états des régions X et Y du graphique (V.8.) sont non-stationnaires. Dans l'état actuel de nos connaissances, nous ne nous hasarderons pas, sur base expérimentale, à proposer un diagramme de bifurcation.

#### D. COMPARAISON QUANTITATIVE.

On observe une nette concordance entre les deux graphiques  $Ra - Nu$  (V.7.) et (V.8.) pour les valeurs de  $Ra/Ra^{crit}$  supérieure à 1. En particulier, pour cette valeur 1, les deux expériences donnent une valeur approximative du nombre de Nusselt  $Nu = 1.45$ . On peut alors tenter d'effectuer une comparaison empirique avec la littérature. Celle-ci nous indique une valeur  $Nu = 1.45$  pour des valeurs de  $Pr$ ,  $Sc$ ,  $R_{th}$  et  $\mathcal{L}$  de l'ordre de nos paramètres non dimensionnels, mais dans le cas de surfaces libres (Platten et Chavepeyer (1974), figure (V.6.)). On peut en déduire une valeur approximative pour des surfaces rigides en se référant aux calculs non linéaires pour les corps purs. Ceux-ci donnent pour des surfaces libres la relation (voir par exemple Potigny (1978))



$$(Nu_L - 1) \frac{Ra}{Ra^{crit}} = 2 \left( \frac{Ra}{Ra^{crit}} - 1 \right) \quad (V.4.)$$

tandis que pour des surfaces rigides, on a déjà vu précédemment (IV.7.) et (IV.8.) que

$$(Nu_R - 1) \frac{Ra}{Ra^{crit}} = 1.43 \left( \frac{Ra}{Ra^{crit}} - 1 \right) \quad (V.5.)$$

où  $Nu_L$  et  $Nu_R$  sont les nombres de Nusselt pour des bords respectivement libres et rigides. Pour un rapport  $Ra/Ra^{crit} = 2$  (rappelons que dans les mélanges,  $Ra^{crit}$  est environ deux fois supérieur au  $Ra^{crit}$  des corps purs dans les mêmes conditions = 1708), on obtient

$$\frac{Nu_R}{Nu_L} = \frac{(2.43 \frac{Ra}{Ra^{crit}} - 1.43)}{(3 \frac{Ra}{Ra^{crit}} - 2)} \approx 0.86 \quad (V.6.)$$

Si on fait intervenir ce même rapport pour les mélanges, on obtient

$$Nu_R = 1.70 \quad 0.86 = 1.46 \quad (V.7.)$$

Ce qui est en accord avec l'expérience. La comparaison est bien sûr empirique, nous avons simplement supposé dans le cas présent que, comme dans le cas des corps purs, les nombres de Nusselt correspondant aux surfaces rigides étaient plus petits que ceux des surfaces libres et nous avons adopté le même coefficient aux mêmes nombres de Rayleigh, alors que les diagrammes de bifurcations sont différents.

## CHAPITRE VI

### CONCLUSIONS

Les résultats essentiels auxquels nous sommes arrivés peuvent se résumer ainsi :

- (i) Dans tous les cas, la condition thermique aux bords s'exprime sous la forme générale

$$\hat{D}\hat{T} + B\hat{T} = 0$$

L'expression du nombre sans dimension B est différente selon qu'on impose le flux de chaleur ou le gradient de température. Donc les deux modes opératoires conduiront à des conditions thermiques aux bords différentes, et en principe à des points critiques différents. Cependant, lors  $\lambda_{\text{sol}}/\lambda_{\text{liq}}$  est grand, les deux valeurs de B sont grandes ; lorsque l'épaisseur du bord solide est grande vis-à-vis de celle de la lame liquide, les deux valeurs de B sont proches ; dans ces cas, la différence entre les deux points critiques n'est pas mesurable expérimentalement. On comprend dès lors pourquoi toutes les expériences citées dans la littérature et dans lesquelles le liquide est confiné entre deux bords rigides métalliques fournissent un nombre de Rayleigh critique égal à 1708 pour les corps purs quel que soit le mode opératoire choisi. Il serait intéressant de pratiquer des expériences pour d'autres conditions (bords beaucoup moins conducteurs) où il serait possible de différencier les deux modes opératoires.

- (ii) des mesures précises de flux de chaleur dans les corps purs au voisinage du point critique permettent de confirmer que

$$(\text{Nu} - 1) \frac{\text{Ra}}{\text{Ra}_{\text{crit}}} = K \varepsilon^{+1}$$

impliquant que

$$V_z \div \varepsilon^{1/2}$$

en accord avec les prévisions théoriques et les mesures directes de  $V_z$  par vélocimétrie Laser-Doppler.

(iii) Si les courbes de chauffe sont équivalentes dans les corps purs, quel que soit le mode opératoire choisi, elles sont franchement différentes lorsqu'on étudie les mélanges. Les états accessibles dépendent fortement du mode opératoire utilisé. En particulier, le cycle d'hystérèse est différent et la description des états oscillants est différente. Ces états sont transitoires et correspondent à la théorie linéaire à leur début lorsqu'on fixe le gradient de température. Par contre, si on impose le flux de chaleur, on obtient finalement des états oscillants entretenus. Pour expliquer ces états, il serait utile de développer une théorie non linéaire pour des surfaces rigides, semblable au modèle de Lorenz employé pour des surfaces libres, et dresser le diagramme des bifurcations.

(iiii) De manière annexe, le traitement numérique par la méthode du potentiel local nous a permis d'estimer de façon très précise par rapport aux déterminations existantes, le coefficient  $D'/D$ . Dans leur travail antérieur, Platten et Chavepeyer (1973) effectuent des comparaisons des valeurs expérimentales des périodes d'oscillations persistantes avec la théorie linéaire ; cette comparaison n'est pas fondée et ils obtiennent un accord fortuit avec la théorie du fait d'une sous-estimation du coefficient  $D'/D$ . Comme nous disposons actuellement de valeurs sûres pour  $D'/D$ , le calcul théorique des périodes à partir de la théorie linéaire ( $\simeq 30$  s) est cette fois en désaccord complet avec la valeur expérimentale ( $\simeq 70$  s) trouvée à la fois par nous et par Platten & Chavepeyer. Ceci n'a rien de surprenant puisqu'il s'agit d'oscillations d'amplitude finie qui ne peuvent être décrites par une théorie

linéaire. Cependant le résultat de la théorie linéaire est confirmée si on s'intéresse aux oscillations initiales (de période 37 s), qui apparaissent immédiatement après l'instabilité de l'état de repos.

ANNEXE A.I.

-----

GRANDEURS PHYSIQUES DES LIQUIDES.

-----

Nous donnerons ici les grandeurs physiques propres aux liquides que nous utilisons dans nos expériences, ainsi que les valeurs des nombres sans dimensions les caractérisant (source : table C.R.C. et Lange Handbook of Chemistry).

1. L'EAU.

- conductibilité thermique =  $6 \cdot 10^{-3}$  watt  $\text{cm}^{-1} \text{K}^{-1}$
- chaleur spécifique =  $4.18 \text{ J gr}^{-1} \text{K}^{-1}$
- densité :  $1 \text{ gr ml}^{-1}$
- coefficient d'expansion thermique :  $220 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
- viscosité absolue : 1 centipoise
- viscosité cinématique : 1 centistokes ou  $10^{-2} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$

Les grandeurs dépendent de la température, on peut donc dresser le tableau suivant :

$T^\circ(\text{C})$	$\frac{\rho}{K \nu} (10^3 \text{ cm}^{-3} \text{ K}^{-1})$	$\text{Pr} = \frac{\nu}{K}$
19	13.10	7.21
20	14.11	7.01
21	15.14	6.83
22	16.19	6.64
23	17.25	6.47
24	18.33	6.30
25	19.42	6.14
26	20.53	5.99

2. L'ISOPROPANOL.

- conductibilité thermique =  $1.407 \cdot 10^{-3} \text{ W cm}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- chaleur spécifique =  $2.583 \text{ J gr}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- densité =  $0.784 \text{ gr ml}^{-1}$
- coefficient d'expansion thermique :  $1.08 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$
- viscosité absolue : 2.25 centipoise
- viscosité cinématique : 2.87 centistokes ou  $10^{-2} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$

Ici également, ces grandeurs dépendent de la température

T (°C)	$\frac{\eta \alpha}{\rho \nu} (10^3 \text{ cm}^{-3} \text{ K}^{-1})$	Pr = $\frac{\nu}{K}$
19	48.77	44.8
20	50.32	43.4
21	51.92	42.1
22	53.56	40.9
23	55.24	39.6
24	56.98	38.5
25	58.76	37.4
26	60.60	36.3

3. MELANGE EAU-ISOPROPANOL.

Le mélange utilisé dans nos expériences possède un titre massique en eau  $N_1^{\text{in}} = 0.909$  et donc un titre en isopropanol  $(1 - N_1^{\text{in}}) = 0.0909$ . Pour ces titres, le coefficient  $\gamma$  a été déterminé à partir de tables de densité en fonction du titre, on trouve

$$\gamma = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial N_1} \right) = 0.147$$

Les valeurs des autres grandeurs physiques sont trouvées en sommant les grandeurs de l'eau et de l'isopropanol, pondérées par leurs titres massiques. En voici les valeurs approximatives :

- conductibilité thermique  $\approx 5.6 \cdot 10^{-3} \text{ W cm}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- chaleur spécifique  $\approx 4.04 \text{ J gr}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- densité  $\approx 0.98 \text{ gr ml}^{-1}$
- coefficient d'expansion  $\approx 300 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
- viscosité absolue  $\approx 1.1 \text{ centipoise}$
- viscosité cinématique  $\approx 1.1 \text{ centistokes}$

De même que précédemment, ces grandeurs dépendent de la température.

T (°C)	$\frac{g\alpha}{K\nu}$ ( $10^3 \text{ cm}^{-3} \text{ K}^{-1}$ )	$\alpha$ ( $10^6 \text{ K}^{-1}$ )	Pr
19	16.38	275.2	8.41
20	17.35	285.2	8.17
21	18.35	295.0	7.95
22	19.37	304.6	7.72
23	20.41	314.1	7.52
24	21.45	323.4	7.32
25	22.54	332.6	7.12
26	23.61	341.5	6.93

D'autre part, le coefficient de diffusion isotherme D vaut approximativement  $10^{-5} \text{ cm}^2/\text{sec}$  ; de ce fait, le nombre de Schmidt  $Sc = \nu/D$  vaut  $\approx 1100$ . Le nombre de Rayleigh de thermodiffusion  $R_{th}$  peut être aisément calculé à partir des données du tableau précédent :

$$R_{th} = \frac{g\alpha}{K\nu} \frac{\gamma}{\alpha} N_1^m d^3$$

## BIBLIOGRAPHIE

-----

- S. CHANDRASEKHAR, "Hydrodynamic and hydromagnetic stability", Clarendon, Oxford, 1961.
- J.K. PLATTEN and G. CHAVEPEYER, J. Fluid Mech., 60(2), 305 (1973).
- D.T.J. HURLE and E. JAKEMAN, Physics Letters, 43A(2), 127 (1973).
- P. GLANSDORFF and I. PRIGOGINE, "Structure, stability and fluctuations", Wiley, Interscience, 1971.
- R.S. SCHECHTER and D.M. HIMMELBLAU, Phys. Fluids, 8(8), 1431 (1965).
- C. LEMOINE, Mémoire de licence, Université de Mons (1975).
- E.M. SPARROW, R.J. GOLDSTEIN and V.K. JONSSON, J. Fluid Mech., 18, 513 (1964).
- M. DUBOIS, thèse, Université de Paris VI (1976).
- R.S. SCHECHTER, I. PRIGOGINE and J. HAMM, Phys. Fluids, 15, 379 (1972).
- J.K. PLATTEN, Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Classe des Sciences), 57, 669 (1971).
- J.C. LEGROS, J.K. PLATTEN and P.G. POTY, Phys. Fluids, 15, 1383 (1972).
- P. POTY, Mémoire de licence, (1971) et rapport interne (1973), Université Libre de Bruxelles.
- K. STORK and U. MÜLLER, J. Fluid Mech., 54(4), 599 (1972).
- J.C. LEGROS et J.K. PLATTEN, Lecture Notes in Physics, 72 (1978).
- P. POTY, J.C. LEGROS and G. THOMAES, Z. Naturforsch., 29A, 1915 (1974).
- S.R. de GROOT, thèse (1945).
- G. CHAVEPEYER, thèse, Université de Mons (1974).



- D.T.J. HURLE and E. JAKEMAN, J. Fluid Mech., 47(4), 667 (1971).
- J.K. PLATTEN and G. CHAVEPEYER, Int. J. Heat Mass Transfer, 18, 1071 (1975).
- P. POTIGNY, Mémoire de licence, Université de Mons (1978).