Droites et plans dans l'espace: opérationnalisation du cadre de la théorie de l'activité

Céline Nihoul

Université de Mons
Département de Mathématique

31 mai 2019

Plan

Plan

Contexte du travail

- CONSTAT : difficulté récurrente des étudiants de L3 à décrire les objets géométriques associés à des équations (Nihoul, 2016).

Contexte du travail

- CONSTAT : difficulté récurrente des étudiants de L3 à décrire les objets géométriques associés à des équations (Nihoul, 2016).
- CHOIX : chapitre des droites et des plans dans l'espace.

Contexte du travail

- CONSTAT : difficulté récurrente des étudiants de L3 à décrire les objets géométriques associés à des équations (Nihoul, 2016).
- CHOIX : chapitre des droites et des plans dans l'espace.
- OBJECTIF : étudier en quoi la démarche d'interprétation géométrique est difficile à développer dans le parcours des étudiants.

Contexte du travail

- CONSTAT : difficulté récurrente des étudiants de L3 à décrire les objets géométriques associés à des équations (Nihoul, 2016).
- CHOIX : chapitre des droites et des plans dans l'espace.
- OBJECTIF : étudier en quoi la démarche d'interprétation géométrique est difficile à développer dans le parcours des étudiants.
  ↪ diagnostic d'un cours de L1 et analyse des programmes de 1re S.

Cadre de la théorie de l'activité

- HYPOTHÈSE : Les activités des élèves en classe sont considérées comme des vecteurs essentiels d'apprentissage (Robert & Roditi, 2019).

Cadre de la théorie de l'activité

- HYPOTHÈSE : Les activités des élèves en classe sont considérées comme des vecteurs essentiels d'apprentissage (Robert & Roditi, 2019).
- ETUDE :
  - des apprentissages des élèves via les activités qui leur sont proposées et leurs déroulements.
  - des liens entre les activités des élèves et la conceptualisation facilitée par l'étude du relief sur les notions (Nihoul, 2016).
  - des interventions des enseignants (aides, méta, proximités) (Nihoul, à paraître).

Cadre de la théorie de l'activité

- HYPOTHÈSE : Les activités des élèves en classe sont considérées comme des vecteurs essentiels d'apprentissage (Robert & Roditi, 2019).
- ETUDE :
  - des apprentissages des élèves via les activités qui leur sont proposées et leurs déroulements.
  - des liens entre les activités des élèves et la conceptualisation facilitée par l'étude du relief sur les notions (Nihoul, 2016).
  - des interventions des enseignants (aides, méta, proximités) (Nihoul, à paraître).

$\hookrightarrow$ permet de constituer un savoir de référence (Rogalski & Samurçay, 1994).

Cadre de la théorie de l'activité

- HYPOTHÈSE : Les activités des élèves en classe sont considérées comme des vecteurs essentiels d'apprentissage (Robert & Roditi, 2019).
- ETUDE :
  - des apprentissages des élèves via les activités qui leur sont proposées et leurs déroulements.
  - des liens entre les activités des élèves et la conceptualisation facilitée par l'étude du relief sur les notions (Nihoul, 2016).
  - des interventions des enseignants (aides, méta, proximités) (Nihoul, à paraître).

$\hookrightarrow$ permet de constituer un savoir de référence (Rogalski & Samurçay, 1994).

Question de recherche

Est-il possible de proposer un ensemble de tâches consistantes à des élèves de première au lycée sur les notions de droites et de plans dans l'espace permettant de développer leur interprétation géométrique et favoriser la conceptualisation de ces notions ?

Analyses *a priori* et étude des déroulements en classe

- Articulation des registres (Duval, 1993) : très peu présente.

Analyses *a priori* et étude des déroulements en classe

- Articulation des registres (Duval, 1993) : très peu présente.
- Articulation des points de vue (Rogalski, 1991) : vectoriel $\rightarrow$ paramétrique $\rightarrow$ cartésien.

Analyses *a priori* et étude des déroulements en classe

- Articulation des registres (Duval, 1993) : très peu présente.
- Articulation des points de vue (Rogalski, 1991) : vectoriel $\rightarrow$ paramétrique $\rightarrow$ cartésien.
- Comparaison des démarches GS/GA : aucun exercice prescrit.

Analyses *a priori* et étude des déroulements en classe

- Articulation des registres (Duval, 1993) : très peu présente.
- Articulation des points de vue (Rogalski, 1991) : vectoriel $\rightarrow$ paramétrique $\rightarrow$ cartésien.
- Comparaison des démarches GS/GA : aucun exercice prescrit.
- Interprétation géométrique : présente dans le discours mais aucun exercice ne la travaille réellement.

Analyses *a priori* et étude des déroulements en classe

- Articulation des registres (Duval, 1993) : très peu présente.
- Articulation des points de vue (Rogalski, 1991) : vectoriel $\rightarrow$ paramétrique $\rightarrow$ cartésien.
- Comparaison des démarches GS/GA : aucun exercice prescrit.
- Interprétation géométrique : présente dans le discours mais aucun exercice ne la travaille réellement.
- Niveaux de mise en fonctionnement des connaissances dans les exercices : technique et mobilisable (Robert, 1998).

Analyses *a priori* et étude des déroulements en classe

- Articulation des registres (Duval, 1993) : très peu présente.
- Articulation des points de vue (Rogalski, 1991) : vectoriel $\rightarrow$ paramétrique $\rightarrow$ cartésien.
- Comparaison des démarches GS/GA : aucun exercice prescrit.
- Interprétation géométrique : présente dans le discours mais aucun exercice ne la travaille réellement.
- Niveaux de mise en fonctionnement des connaissances dans les exercices : technique et mobilisable (Robert, 1998).
- Les calculs algébriques font l'objet de nombreuses proximités horizontales.

Analyses *a priori* et étude des déroulements en classe

- Articulation des registres (Duval, 1993) : très peu présente.
- Articulation des points de vue (Rogalski, 1991) : vectoriel $\rightarrow$ paramétrique $\rightarrow$ cartésien.
- Comparaison des démarches GS/GA : aucun exercice prescrit.
- Interprétation géométrique : présente dans le discours mais aucun exercice ne la travaille réellement.
- Niveaux de mise en fonctionnement des connaissances dans les exercices : technique et mobilisable (Robert, 1998).
- Les calculs algébriques font l'objet de nombreuses proximités horizontales.
- Le discours des enseignants modifie les activités (prévues *a priori*) des élèves.

Analyses *a priori* et étude des déroulements en classe

- Articulation des registres (Duval, 1993) : très peu présente.
- Articulation des points de vue (Rogalski, 1991) : vectoriel $\rightarrow$ paramétrique $\rightarrow$ cartésien.
- Comparaison des démarches GS/GA : aucun exercice prescrit.
- Interprétation géométrique : présente dans le discours mais aucun exercice ne la travaille réellement.
- Niveaux de mise en fonctionnement des connaissances dans les exercices : technique et mobilisable (Robert, 1998).
- Les calculs algébriques font l'objet de nombreuses proximités horizontales.
- Le discours des enseignants modifie les activités (prévues *a priori*) des élèves.
- Pas de dialectique outil-objet (Douady, 1986) : c'est principalement la dimension objet qui est travaillée.

Analyses *a priori* et étude des déroulements en classe

- Articulation des registres (Duval, 1993) : très peu présente.
- Articulation des points de vue (Rogalski, 1991) : vectoriel $\rightarrow$ paramétrique $\rightarrow$ cartésien.
- Comparaison des démarches GS/GA : aucun exercice prescrit.
- Interprétation géométrique : présente dans le discours mais aucun exercice ne la travaille réellement.
- Niveaux de mise en fonctionnement des connaissances dans les exercices : technique et mobilisable (Robert, 1998).
- Les calculs algébriques font l'objet de nombreuses proximités horizontales.
- Le discours des enseignants modifie les activités (prévues *a priori*) des élèves.
- Pas de dialectique outil-objet (Douady, 1986) : c'est principalement la dimension objet qui est travaillée.
- Pas de dialectique sens-technique : c'est principalement la technique qui est travaillée.

Analyses *a priori* et étude des déroulements en classe

- Articulation des registres (Duval, 1993) : très peu présente.
- Articulation des points de vue (Rogalski, 1991) : vectoriel $\rightarrow$ paramétrique $\rightarrow$ cartésien.
- Comparaison des démarches GS/GA : aucun exercice prescrit.
- Interprétation géométrique : présente dans le discours mais aucun exercice ne la travaille réellement.
- Niveaux de mise en fonctionnement des connaissances dans les exercices : technique et mobilisable (Robert, 1998).
- Les calculs algébriques font l'objet de nombreuses proximités horizontales.
- Le discours des enseignants modifie les activités (prévues *a priori*) des élèves.
- Pas de dialectique outil-objet (Douady, 1986) : c'est principalement la dimension objet qui est travaillée.
- Pas de dialectique sens-technique : c'est principalement la technique qui est travaillée.

$\Rightarrow$ Nombreux manques/insuffisances par rapport au savoir de référence.

Plan

Scénario (1/2)

Pari

Il est possible d'introduire les nouvelles notions en partant de ce que les élèves connaissent déjà sur les équations, les résolutions de systèmes et la géométrie.

Scénario (1/2)

Pari

Il est possible d'introduire les nouvelles notions en partant de ce que les élèves connaissent déjà sur les équations, les résolutions de systèmes et la géométrie.

$\hookrightarrow$ Profiter des interactions avec les élèves pour introduire les connaissances nouvelles et tenter des proximités avec ce qui a déjà été fait et le travail des élèves en classe.

Scénario (1/2)

Pari

Il est possible d'introduire les nouvelles notions en partant de ce que les élèves connaissent déjà sur les équations, les résolutions de systèmes et la géométrie.

$\hookrightarrow$ Profiter des interactions avec les élèves pour introduire les connaissances nouvelles et tenter des proximités avec ce qui a déjà été fait et le travail des élèves en classe.

- Activité d'introduction 1 : Trouvez, grâce à un dessin, l'ensemble des solutions des systèmes dans $\mathbb{R}^2$.

$$(S_1)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4y+4=0 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} 2x+3y=2 \\ 4y+4=0 \end{cases}$$

Scénario (1/2)

Pari

Il est possible d'introduire les nouvelles notions en partant de ce que les élèves connaissent déjà sur les équations, les résolutions de systèmes et la géométrie.

$\hookrightarrow$ Profiter des interactions avec les élèves pour introduire les connaissances nouvelles et tenter des proximités avec ce qui a déjà été fait et le travail des élèves en classe.

- Activité d'introduction 1 : Trouvez, grâce à un dessin, l'ensemble des solutions des systèmes dans $\mathbb{R}^2$.

$$(S_1)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4y+4=0 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} 2x+3y=2 \\ 4y+4=0 \end{cases}$$

- Objectifs :
  - revenir sur la notion d'équation.

Scénario (1/2)

Pari

Il est possible d'introduire les nouvelles notions en partant de ce que les élèves connaissent déjà sur les équations, les résolutions de systèmes et la géométrie.

↪ Profiter des interactions avec les élèves pour introduire les connaissances nouvelles et tenter des proximités avec ce qui a déjà été fait et le travail des élèves en classe.

- Activité d'introduction 1 : Trouvez, grâce à un dessin, l'ensemble des solutions des systèmes dans $\mathbb{R}^2$.

$$(S_1)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4y+4=0 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} 2x+3y=2 \\ 4y+4=0 \end{cases}$$

- Objectifs :
  - revenir sur la notion d'équation.
  - établir des liens entre résolution et positions relatives des objets.

Scénario (1/2)

Pari

Il est possible d'introduire les nouvelles notions en partant de ce que les élèves connaissent déjà sur les équations, les résolutions de systèmes et la géométrie.

↪ Profiter des interactions avec les élèves pour introduire les connaissances nouvelles et tenter des proximités avec ce qui a déjà été fait et le travail des élèves en classe.

- Activité d'introduction 1 : Trouvez, grâce à un dessin, l'ensemble des solutions des systèmes dans $\mathbb{R}^2$.

$$(S_1)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4y+4=0 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} 2x+3y=2 \\ 4y+4=0 \end{cases}$$

- Objectifs :
  - revenir sur la notion d'équation.
  - établir des liens entre résolution et positions relatives des objets.
  - différencier résoudre une équation/décrire par une équation.

Scénario (1/2)

Pari

Il est possible d'introduire les nouvelles notions en partant de ce que les élèves connaissent déjà sur les équations, les résolutions de systèmes et la géométrie.

$\hookrightarrow$ Profiter des interactions avec les élèves pour introduire les connaissances nouvelles et tenter des proximités avec ce qui a déjà été fait et le travail des élèves en classe.

- Activité d'introduction 1 : Trouvez, grâce à un dessin, l'ensemble des solutions des systèmes dans $\mathbb{R}^2$.

$$(S_1)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4y+4=0 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} 2x+3y=2 \\ 4y+4=0 \end{cases}$$

- Objectifs :
  - revenir sur la notion d'équation.
  - établir des liens entre résolution et positions relatives des objets.
  - différencier résoudre une équation/décrire par une équation.
  - introduire la démarche d'interprétation géométrique sur des connaissances déjà-là.

Scénario (2/2)

- Activité d'introduction 2 : Trouvez, grâce à un dessin, l'ensemble des solutions des systèmes dans $\mathbb{R}^3$.

$$(S_1)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4z-3=2z+1 \\ y=0 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4y+4=0 \end{cases}$$

Scénario (2/2)

- Activité d'introduction 2 : Trouvez, grâce à un dessin, l'ensemble des solutions des systèmes dans $\mathbb{R}^3$.

$$(S_1)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4z-3=2z+1 \\ y=0 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4y+4=0 \end{cases}$$

- Objectifs :
  - exploiter la démarche d'interprétation géométrique.

Scénario (2/2)

- ACTIVITÉ D'INTRODUCTION 2 : Trouvez, grâce à un dessin, l'ensemble des solutions des systèmes dans $\mathbb{R}^3$.

$$(S_1)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4z-3=2z+1 \\ y=0 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4y+4=0 \end{cases}$$

- OBJECTIFS :
  - exploiter la démarche d'interprétation géométrique.
  - mobiliser les connaissances antérieures de GS et de GV.

Scénario (2/2)

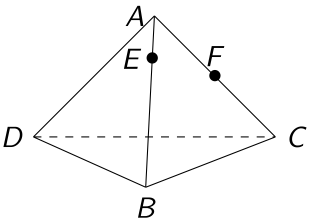
- Activité d'introduction 2 : Trouvez, grâce à un dessin, l'ensemble des solutions des systèmes dans $\mathbb{R}^3$.

$$(S_1)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4z-3=2z+1 \\ y=0 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4y+4=0 \end{cases}$$

- Objectifs :
  - exploiter la démarche d'interprétation géométrique.
  - mobiliser les connaissances antérieures de GS et de GV.
  - introduire les connaissances nouvelles (équations, points de vue, positions relatives).

Les exercices (1/3)

Soit le tétraèdre $ABCD$ suivant.



1. Déterminez synthétiquement le point de percée de la droite passant par les points E et F dans le plan BCD.
2. Considérons un repère orthonormé $(D, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Les coordonnées des points A, B et C sont respectivement $(0, 2, 2)$, $(2, 3, 0)$ et $(0, 4, 0)$. Les points E et F sont définis comme étant $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Déterminez analytiquement le point de percée de la droite passant par les points E et F dans le plan BCD.

Les exercices (2/3)

- Donnez une équation vectorielle, paramétrique et cartésienne du plan α comprenant le point $P(1, 4, -2)$ et la droite $d \equiv x - 3 = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$.

Les exercices (2/3)

- Donnez une équation vectorielle, paramétrique et cartésienne du plan α comprenant le point $P(1, 4, -2)$ et la droite $d \equiv x - 3 = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$.
- Donnez une équation cartésienne du plan α passant par le point $(-1, 0, 2)$ et perpendiculaire à la droite d'intersection des plans d'équations $4x + 2y + 2z = -1$ et $3x - 2y + 3z = 7$.

Les exercices (2/3)

- Donnez une équation vectorielle, paramétrique et cartésienne du plan α comprenant le point $P(1, 4, -2)$ et la droite $d \equiv x - 3 = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$.
- Donnez une équation cartésienne du plan α passant par le point $(-1, 0, 2)$ et perpendiculaire à la droite d'intersection des plans d'équations $4x + 2y + 2z = -1$ et $3x - 2y + 3z = 7$.
- Soit le système

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 3x + 2y - 5z = 2. \end{cases}$$

Décrivez géométriquement l'ensemble des solutions de ce système. Expliquez votre démarche. Déterminez ensuite algébriquement quel est cet ensemble de solutions.

Les exercices (3/3)

51. Une épreuve de sélection est organisée dans le cadre d'un jeu télévisé. Les candidats doivent répondre à trois questionnaires, côtés sur 20, mais avec des pondérations différentes. Le premier questionnaire porte sur l'histoire des sciences et des techniques (pondération 2), le deuxième sur la géographie de l'Europe (pondération 1) et le dernier comprend des questions de culture générale (pondération 2). Un candidat est sélectionné s'il a obtenu au moins 50 points sur 100. Les notes possibles des candidats dans chacune des matières sont représentées par les variables x (histoire des sciences et techniques), y (géographie) et z (culture générale). Un point $P(x, y, z)$ est associé à chaque candidat.
    (a) Dans quelle partie de l'espace sont situés les points P ? Représentez-la.
    (b) Dans quelle partie de l'espace sont situés les points associés aux candidats ayant obtenu 50 points ? Représentez-la.
    (c) Est-il possible de trouver un candidat qui a eu 50 points à l'examen en ayant eu une note de 0 en histoire des sciences et des techniques ? Même question s'il a eu 0 en géographie, puis 0 en culture générale.
    (d) Est-il possible de trouver un candidat qui a réussi l'examen avec une note strictement supérieure à 50 mais qui a eu une note de 0 en histoire des sciences et techniques ?
    (e) On veut qu'un candidat ayant eu 8 en histoire des sciences et des techniques, 12 en géographie de l'Europe et 9 en culture générale soit sélectionné. Quelles sont les valeurs des pondérations a, b et c que l'on doit choisir pour qu'il soit sélectionné ? Donnez, si possible, un exemple de pondération acceptée.

Hypothèses

- L'interprétation géométrique des objets à partir des équations et des ensembles de points peut être développée par les élèves.
- Des conversions entre plusieurs registres et des changements de points de vue variés apparaissent.
- Les occasions de proximités avec les connaissances déjà-là des élèves sont nombreuses.
- Des parallèles entre le cadre de la géométrie synthétique et le cadre de la géométrie analytique peuvent être effectués dans plusieurs exercices.
- Les dialectiques sens/technique et outil/objet peuvent être travaillées.

Plan

Conclusion

L'opérationnalisation du cadre de la théorie de l'activité consiste à :

- préciser la notion étudiée.
- étudier la conceptualisation attendue de la notion à un moment donné du cursus.
- formuler une question de recherche précise.
- définir une méthodologie et des outils pour les diverses analyses menées en vue d'apporter des éléments de réponses à la problématique.
- élaborer un dispositif pouvant influencer les activités des élèves.

Conclusion

L'opérationnalisation du cadre de la théorie de l'activité consiste à :

- préciser la notion étudiée.
- étudier la conceptualisation attendue de la notion à un moment donné du cursus.
- formuler une question de recherche précise.
- définir une méthodologie et des outils pour les diverses analyses menées en vue d'apporter des éléments de réponses à la problématique.
- élaborer un dispositif pouvant influencer les activités des élèves.

Perspectives

- Expérimenter le scénario et analyser son déroulement.
- Analyser son impact en termes d'apprentissages via un pré/post-test.