

Optimisation

Quand les extrêmes sont les meilleurs !

Stéphanie BRIDOUX & Christophe TROESTLER

Département de Mathématique

<http://math.umons.ac.be>

Université de Mons



Plan

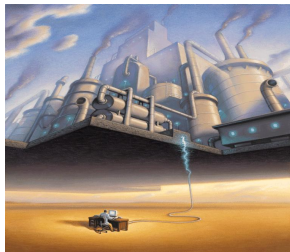
- 1 Qu'est-ce-qu'un problème d'optimisation ?
- 2 Superman, mon héros
- 3 Les mines d'or
- 4 Problème de résistance minimale de Newton

Qu'est-ce-qu'un problème d'optimisation ?

En latin, *optimum* : le meilleur.

En première approche...

optimiser = « rechercher le meilleur »



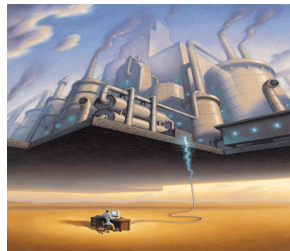
► Tâches très variées pour le mathématicien.

Qu'est-ce-qu'un problème d'optimisation ?

En latin, *optimum* : le meilleur.

En première approche...

optimiser = « rechercher le meilleur »



► Tâches très variées pour le mathématicien.

Qu'est-ce-qu'un problème d'optimisation ?

Logistique

Quels moyens une firme doit-elle utiliser pour assurer le transport de ses marchandises en tenant compte des offres des transporteurs, du temps de transit, des zones de livraison,... ? Il s'agit d'**optimiser la gestion des stocks** tout en minimisant les coûts.



Qu'est-ce-qu'un problème d'optimisation ?

Première définition

Un point commun à chaque exemple : le mot « optimiser » revient à maximiser ou à minimiser une fonction.

- Maximiser la fonction bénéfice,
- Minimiser la fonction prix de revient.

L'optimisation est la branche des mathématiques qui traite de la recherche d'un minimum ou d'un maximum (extrema) d'une fonction à valeurs réelles.

Qu'est-ce-qu'un problème d'optimisation ?

Première définition

Un point commun à chaque exemple : le mot « optimiser » revient à maximiser ou à minimiser une fonction.

- Maximiser la fonction bénéfice,
- Minimiser la fonction prix de revient.

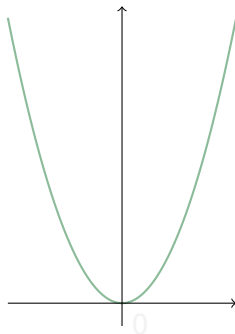
L'optimisation est la branche des mathématiques qui traite de la recherche d'un minimum ou d'un maximum (extrema) d'une fonction à valeurs réelles.

Qu'est-ce-qu'un problème d'optimisation ?

Problèmes élémentaires

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = x^2$$

Cette fonction admet un minimum en $x = 0$.



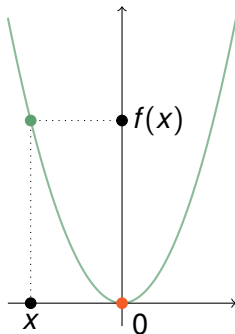
Qu'est-ce-qu'un problème d'optimisation ?

Problèmes élémentaires

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = x^2$$

Cette fonction admet un minimum en $x = 0$.

En effet, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geq 0$. Donc, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq f(0) = 0$.



Qu'est-ce-qu'un problème d'optimisation ?

Problèmes élémentaires

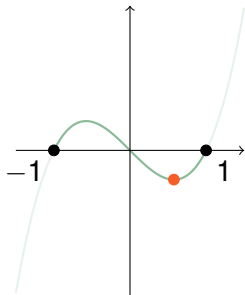
$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = x^3 - x$$

Sur $[-1, 1]$, la fonction f admet

- un minimum en $x = \sqrt{3}/3$;

- un maximum $x = -\sqrt{3}/3$.

Autrement dit, quel que soit $x \in [-1, 1]$,
 $f(x) \geq f(\sqrt{3}/3)$ et $f(x) \leq f(-\sqrt{3}/3)$.



TECHNIQUE : On a $f'(x) = 3x^2 - 1$ et $f'(x) = 0$ ssi $x = \pm\sqrt{3}/3$. On étudie le signe de f' et on en déduit le tableau suivant :

x	-1		$-\sqrt{3}/3$		$\sqrt{3}/3$		1
f		$\nearrow$	$0,38\dots$	$\searrow$	$-0,38\dots$	$\nearrow$	

On compare alors avec les valeurs de f au bord de $[-1, 1]$.

Qu'est-ce-qu'un problème d'optimisation ?

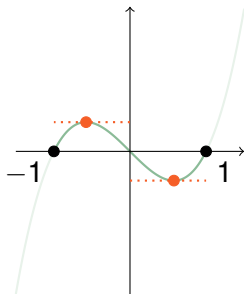
Problèmes élémentaires

$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = x^3 - x$$

Sur $[-1, 1]$, la fonction f admet

- un minimum en $x = \sqrt{3}/3$;
- un maximum $x = -\sqrt{3}/3$.

Autrement dit, quel que soit $x \in [-1, 1]$,
 $f(x) \geq f(\sqrt{3}/3)$ et $f(x) \leq f(-\sqrt{3}/3)$.



TECHNIQUE : On a $f'(x) = 3x^2 - 1$ et $f'(x) = 0$ ssi $x = \pm\sqrt{3}/3$. On étudie le signe de f' et on en déduit le tableau suivant :

x	-1		$-\sqrt{3}/3$		$\sqrt{3}/3$		1
f		↗	0,38...	↘	-0,38...	↗	0

On compare alors avec les valeurs de f au bord de $[-1, 1]$.

Qu'est-ce-qu'un problème d'optimisation ?

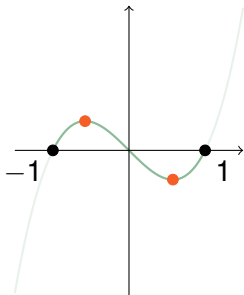
Problèmes élémentaires

$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = x^3 - x$$

Sur $[-1, 1]$, la fonction f admet

- un minimum en $x = \sqrt{3}/3$;
- un maximum $x = -\sqrt{3}/3$.

Autrement dit, quel que soit $x \in [-1, 1]$,
 $f(x) \geq f(\sqrt{3}/3)$ et $f(x) \leq f(-\sqrt{3}/3)$.



TECHNIQUE : On a $f'(x) = 3x^2 - 1$ et $f'(x) = 0$ ssi $x = \pm\sqrt{3}/3$. On étudie le signe de f' et on en déduit le tableau suivant :

x	-1		$-\sqrt{3}/3$		$\sqrt{3}/3$		1
f	0	$\nearrow$	$0,38\dots$	$\searrow$	$-0,38\dots$	$\nearrow$	0

On compare alors avec les valeurs de f au bord de $[-1, 1]$.

Qu'est-ce-qu'un problème d'optimisation ?

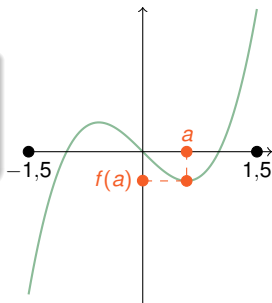
Problèmes élémentaires — valeurs au bord

$$f : [-1,5; 1,5] \rightarrow \mathbb{R} \text{ min en } a = \sqrt{3}/3$$

Quel que soit $x \in [-1,5; 1,5]$,
 $f(x) \geq f(a)$.

Non car, pour $x = -1,5$, on a

$$f(x) = -1,875 \not\geq f(a) = -0,38...$$



$$f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ min en } a = \sqrt{3}/3$$

Quel que soit $x \in [-1; 1]$, $f(x) \geq f(a)$.

a minimum dans $] -1, 1 [\Rightarrow f'(a) = 0$



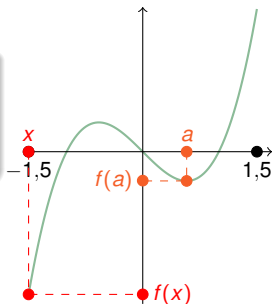
Qu'est-ce-qu'un problème d'optimisation ?

Problèmes élémentaires — valeurs au bord

$$f : [-1,5; 1,5] \rightarrow \mathbb{R} \text{ min en } a = \sqrt{3}/3$$

Quel que soit $x \in [-1,5; 1,5]$,
 $f(x) \geq f(a)$.

Non car, pour $x = -1,5$, on a
 $f(x) = -1,875 \not\geq f(a) = -0,38...$



$$f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ min en } a = \sqrt{3}/3$$

Quel que soit $x \in [-1; 1]$, $f(x) \geq f(a)$.

a minimum dans $] -1, 1 [\Rightarrow f'(a) = 0$



Qu'est-ce-qu'un problème d'optimisation ?

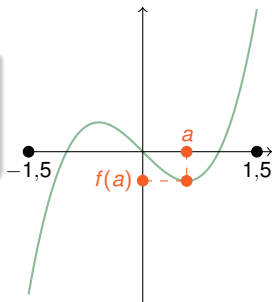
Problèmes élémentaires — valeurs au bord

$$f : [-1,5; 1,5] \rightarrow \mathbb{R} \text{ min en } a = \sqrt{3}/3$$

Quel que soit $x \in [-1,5; 1,5]$,
 $f(x) \geq f(a)$.

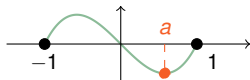
Non car, pour $x = -1,5$, on a

$$f(x) = -1,875 \not\geq f(a) = -0,38...$$



$$f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ min en } a = \sqrt{3}/3$$

Quel que soit $x \in [-1; 1]$, $f(x) \geq f(a)$.



a minimum dans $] -1, 1 [\Rightarrow f'(a) = 0$

Qu'est-ce-qu'un problème d'optimisation ?

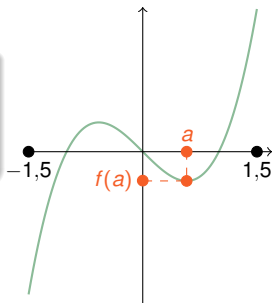
Problèmes élémentaires — valeurs au bord

$$f : [-1,5; 1,5] \rightarrow \mathbb{R} \text{ min en } a = \sqrt{3}/3$$

Quel que soit $x \in [-1,5; 1,5]$,
 $f(x) \geq f(a)$.

Non car, pour $x = -1,5$, on a

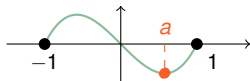
$$f(x) = -1,875 \not\geq f(a) = -0,38...$$



$$f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ min en } a = \sqrt{3}/3$$

Quel que soit $x \in [-1; 1]$, $f(x) \geq f(a)$.

a minimum dans $] -1, 1[\Rightarrow f'(a) = 0$



Qu'est-ce-qu'un problème d'optimisation ?

Formulation générale

Problème de minimisation

DONNÉE : $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ où A est un ensemble.

ON CHERCHE : $a \in A$ tel que, quel que soit $x \in A$, on a

$$f(a) \leq f(x).$$

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in A \end{cases}$$

Problème de maximisation

DONNÉE : $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ où A est un ensemble.

ON CHERCHE : $a \in A$ tel que, quel que soit $x \in A$, on a

$$f(x) \leq f(a).$$

$$\begin{cases} \max f(x) \\ x \in A \end{cases}$$

Qu'est-ce-qu'un problème d'optimisation ?

Formulation générale

Problème de minimisation

DONNÉE : $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ où A est un ensemble.

ON CHERCHE : $a \in A$ tel que, quel que soit
 $x \in A$, on a

$$f(a) \leq f(x).$$

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in A \end{cases}$$

Problème de maximisation

DONNÉE : $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ où A est un ensemble.

ON CHERCHE : $a \in A$ tel que, quel que soit
 $x \in A$, on a

$$f(x) \leq f(a).$$

$$\begin{cases} \max f(x) \\ x \in A \end{cases}$$

Qu'est-ce-qu'un problème d'optimisation ?

Formulation générale

Problème de minimisation

DONNÉE : $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ où A est un ensemble.

ON CHERCHE : $a \in A$ tel que, quel que soit $x \in A$, on a

$$f(a) \leq f(x).$$

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in A \end{cases}$$

Problème de maximisation

DONNÉE : $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ où A est un ensemble.

ON CHERCHE : $a \in A$ tel que, quel que soit $x \in A$, on a

$$f(x) \leq f(a).$$

$$\begin{cases} \max f(x) \\ x \in A \end{cases}$$

Qu'est-ce-qu'un problème d'optimisation ?

Formulation générale

Problème de minimisation

DONNÉE : $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ où A est un ensemble.

ON CHERCHE : $a \in A$ tel que, quel que soit $x \in A$, on a

$$f(a) \leq f(x).$$

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in A \end{cases}$$

Problème de maximisation

DONNÉE : $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ où A est un ensemble.

ON CHERCHE : $a \in A$ tel que, quel que soit $x \in A$, on a

$$f(x) \leq f(a).$$

$$\begin{cases} \max f(x) \\ x \in A \end{cases}$$

Qu'est-ce-qu'un problème d'optimisation ?

Formulation générale

Problème de minimisation

DONNÉE : $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ où A est un ensemble.

ON CHERCHE : $a \in A$ tel que, quel que soit $x \in A$, on a

$$f(a) \leq f(x).$$

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in A \end{cases}$$

Problème de maximisation

DONNÉE : $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ où A est un ensemble.

ON CHERCHE : $a \in A$ tel que, quel que soit $x \in A$, on a

$$f(x) \leq f(a).$$

$$\begin{cases} \max f(x) \\ x \in A \end{cases}$$

Qu'est-ce-qu'un problème d'optimisation ?

Formulation générale

Problème de minimisation

DONNÉE : $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ où A est un ensemble.

ON CHERCHE : $a \in A$ tel que, quel que soit $x \in A$, on a

$$f(a) \leq f(x).$$

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in A \end{cases}$$

Problème de maximisation

DONNÉE : $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ où A est un ensemble.

ON CHERCHE : $a \in A$ tel que, quel que soit $x \in A$, on a

$$f(x) \leq f(a).$$

$$\begin{cases} \max f(x) \\ x \in A \end{cases}$$

- 1 Qu'est-ce-qu'un problème d'optimisation ?
- 2 **Superman, mon héros**
- 3 Les mines d'or
- 4 Problème de résistance minimale de Newton

Le défi...

Mission



Sauver Lois Lane le plus rapidement possible de la noyade.



Le défi...

Mission



Sauver Lois Lane le plus rapidement possible de la noyade.

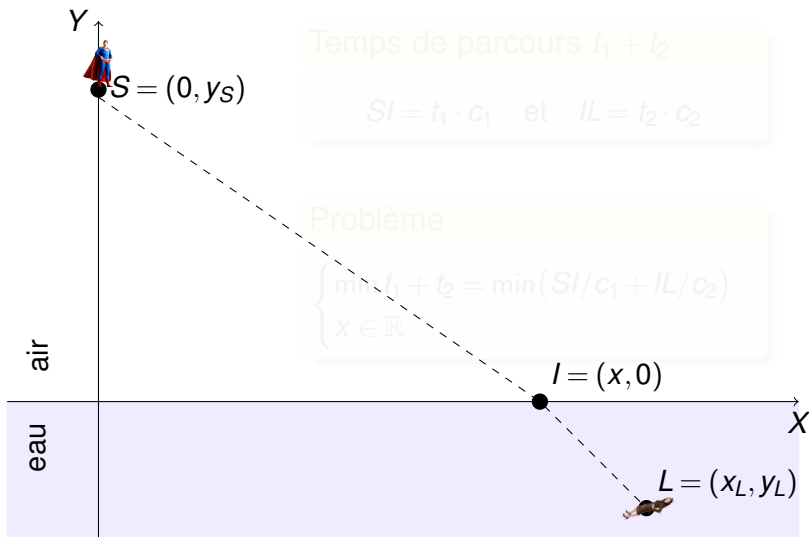
Pouvoirs



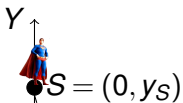
Voyage à la vitesse de la lumière



Modélisation (1/2)



Modélisation (1/2)

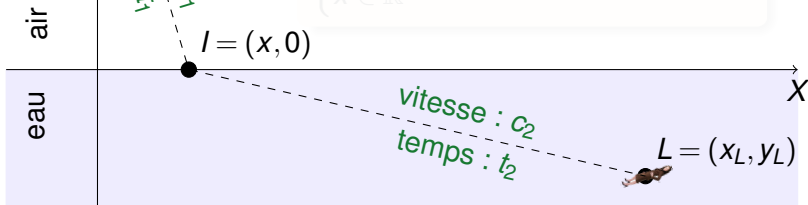


Temps de parcours $t_1 + t_2$

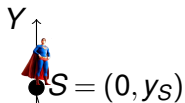
$$SI = t_1 \cdot c_1 \quad \text{et} \quad IL = t_2 \cdot c_2$$

Problème

$$\begin{cases} \min t_1 + t_2 = \min(SI/c_1 + IL/c_2) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Modélisation (1/2)



Temps de parcours $t_1 + t_2$

$$SI = t_1 \cdot c_1 \quad \text{et} \quad IL = t_2 \cdot c_2$$

Problème

$$\begin{cases} \min t_1 + t_2 = \min(SI/c_1 + IL/c_2) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

air

eau

vitesse : c_1
temps : t_1

$I = (x, 0)$

vitesse : c_2
temps : t_2

$L = (x_L, y_L)$

Modélisation (2/2)



doit viser le point d'impact $I = (x, 0)$ avec x solution de :

Problème de minimisation

$$\begin{cases} \min f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + y_S^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(x_L - x)^2 + y_L^2}}{c_2} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$f(x)$ = temps mis par  pour atteindre Lois en passant par le point d'impact $I = (x, 0)$.

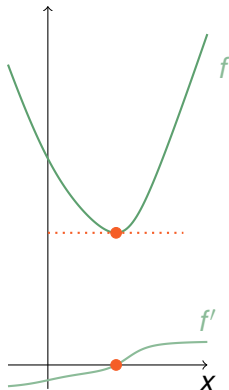
Solution (unique)

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + y_S^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(x_L - x)^2 + y_L^2}}{c_2}$$

$$f'(x) = \frac{x}{c_1 \sqrt{x^2 + y_S^2}} - \frac{x_L - x}{c_2 \sqrt{(x_L - x)^2 + y_L^2}}$$

Les x tels que $f'(x) = 0$ vérifient :

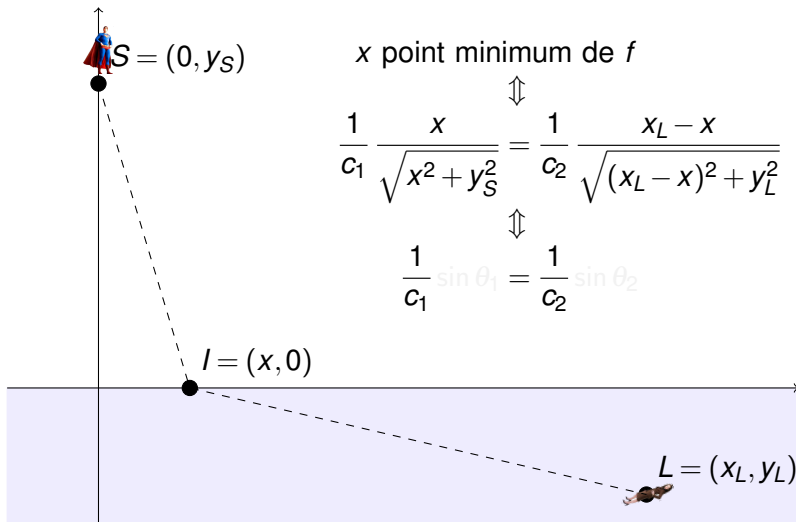
$$\frac{x}{c_1 \sqrt{x^2 + y_S^2}} = \frac{x_L - x}{c_2 \sqrt{(x_L - x)^2 + y_L^2}}$$



TECHNIQUE :

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow f$ possède au moins un minimum.
- $f''(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'$ est strictement croissante $\Rightarrow f'$ a au plus une racine $\Rightarrow f$ a au plus un minimum.

Solution : interprétation géométrique



$$S = (0, y_S)$$
$$\frac{1}{c_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_S^2}} \stackrel{\updownarrow}{=} \frac{1}{c_2} \frac{x_L - x}{\sqrt{(x_L - x)^2 + y_L^2}}$$

$$\frac{1}{c_1} \sin \theta_1 = \frac{1}{c_2} \sin \theta_2$$

$$I = (x, 0)$$
$$L = (x_L, y_L)$$

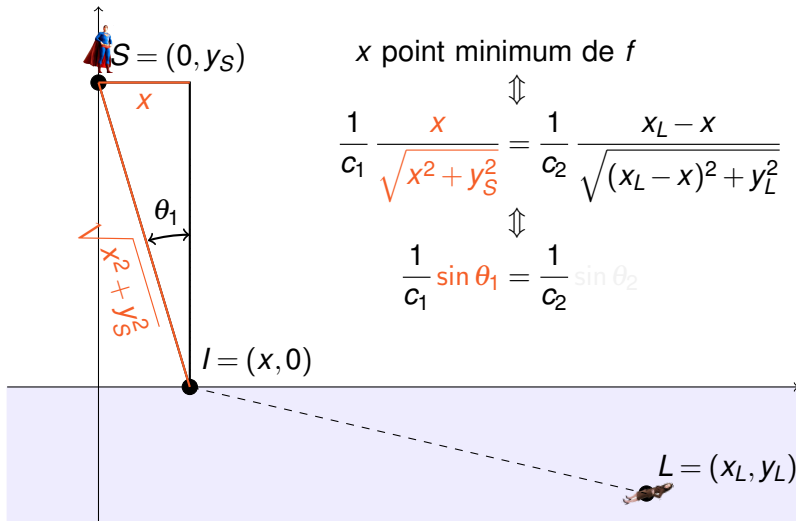
$$S = (0, y_S)$$
$$\frac{1}{c_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_S^2}} = \frac{1}{c_2} \frac{x_L - x}{\sqrt{(x_L - x)^2 + y_L^2}}$$

$$\frac{1}{c_1} \sin \theta_1 = \frac{1}{c_2} \sin \theta_2$$
$$\frac{1}{c_1} \sin \theta_1 = \frac{1}{c_2} \sin \theta_2$$
$$I = (x, 0)$$
$$L = (x_L, y_L)$$

$$\frac{1}{c_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_S^2}} = \frac{1}{c_2} \frac{x_L - x}{\sqrt{(x_L - x)^2 + y_L^2}}$$

$$\frac{1}{c_1} \sin \theta_1 = \frac{1}{c_2} \sin \theta_2$$
$$L = (x_L, y_L)$$

Solution : interprétation géométrique



$S = (0, y_S)$

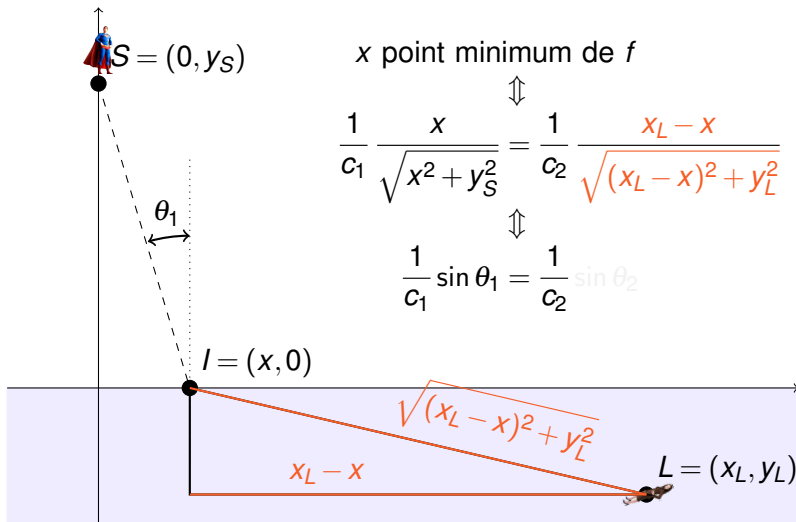
x point minimum de f

$$\frac{1}{c_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_S^2}} \stackrel{\updownarrow}{=} \frac{1}{c_2} \frac{x_L - x}{\sqrt{(x_L - x)^2 + y_L^2}}$$

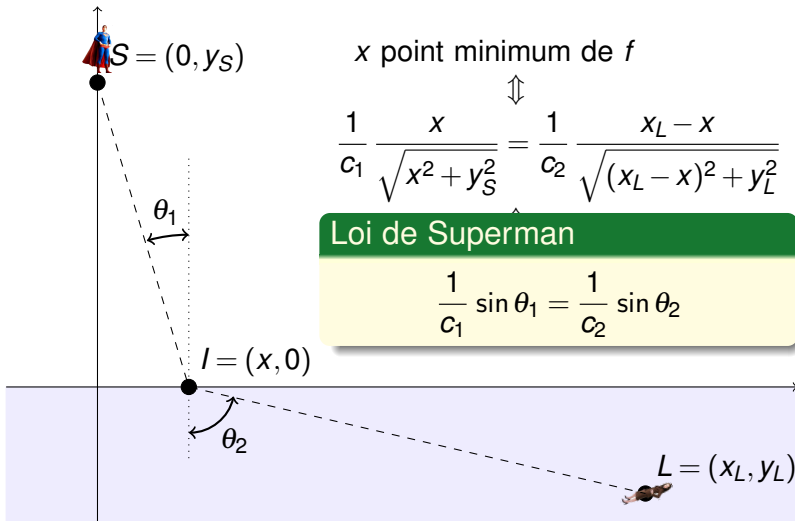
$$\frac{1}{c_1} \sin \theta_1 = \frac{1}{c_2} \sin \theta_2$$

$$I = (x, 0)$$
$$L = (x_L, y_L)$$

Solution : interprétation géométrique



Solution : interprétation géométrique



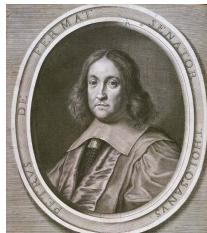
Grâce aux mathématiques...



Principe de Fermat

Principe de Fermat

La lumière se propage d'un point à un autre sur une trajectoire telle que le temps de parcours soit minimum.

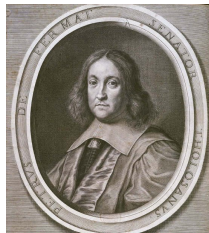


P. de Fermat énonce ce principe en 1657.

Principe de Fermat

Principe de Fermat

La lumière se propage d'un point à un autre sur une trajectoire telle que le temps de parcours soit minimum.



P. de Fermat énonce ce principe en 1657.

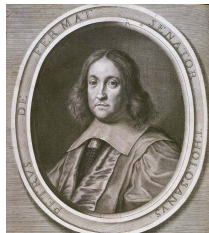
CONSÉQUENCES :

- Dans un milieu homogène, un rayon lumineux se propage à vitesse constante et donc en ligne droite.
- Loi de réfraction (la démonstration vue est due essentiellement à Maupertuis en 1744).
- Loi de réflexion.

Principe de Fermat

Principe de Fermat

La lumière se propage d'un point à un autre sur une trajectoire telle que le temps de parcours soit minimum.



P. de Fermat énonce ce principe en 1657.

CONSÉQUENCES :

- Dans un milieu homogène, un rayon lumineux se propage à vitesse constante et donc en ligne droite.
- Loi de réfraction (la démonstration vue est due essentiellement à Maupertuis en 1744).
- Loi de réflexion.

- 1 Qu'est-ce-qu'un problème d'optimisation ?
- 2 Superman, mon héros
- 3 Les mines d'or
- 4 Problème de résistance minimale de Newton

Le problème des mines d'or

- 1 Deux mines, mine 1 et mine 2.
- 2 Trois catégories d'or : supérieure, moyenne et inférieure.
- 3 Un contrat : par semaine
 - 12 tonnes catégorie supérieure
 - 8 tonnes catégorie moyenne
 - 24 tonnes catégorie inférieure



Fonctionnement de chaque mine :

Mine	Production (tonnes/jour)			Coût/jour (milliers €)
	sup.	moy.	inf.	
1	6	3	4	180
2	1	1	6	160

Le problème des mines d'or

- 1 Deux mines, mine 1 et mine 2.
- 2 Trois catégories d'or : supérieure, moyenne et inférieure.
- 3 Un contrat : par semaine
 - 12 tonnes catégorie supérieure
 - 8 tonnes catégorie moyenne
 - 24 tonnes catégorie inférieure



Fonctionnement de chaque mine :

Mine	Production (tonnes/jour)			Coût/jour (milliers €)
	sup.	moy.	inf.	
1	6	3	4	180
2	1	1	6	160

Le problème des mines d'or

- 1 Deux mines, mine 1 et mine 2.
- 2 Trois catégories d'or : supérieure, moyenne et inférieure.
- 3 Un contrat : par semaine
 - 12 tonnes catégorie supérieure
 - 8 tonnes catégorie moyenne
 - 24 tonnes catégorie inférieure



Fonctionnement de chaque mine :

Mine	Production (tonnes/jour)			Coût/jour (milliers €)
	sup.	moy.	inf.	
1	6	3	4	180
2	1	1	6	160

Le problème des mines d'or

- ① Deux mines, mine 1 et mine 2.
- ② Trois catégories d'or : supérieure, moyenne et inférieure.
- ③ Un contrat : par semaine
 - 12 tonnes catégorie supérieure
 - 8 tonnes catégorie moyenne
 - 24 tonnes catégorie inférieure



Fonctionnement de chaque mine :

Mine	Production (tonnes/jour)			Coût/jour (milliers €)
	sup.	moy.	inf.	
1	6	3	4	180
2	1	1	6	160

Le problème des mines d'or

Objectif

Objectif

Satisfaire le contrat au moindre coût.

Mine	Coût/jour
1	180
2	160

Pour satisfaire le contrat, il faut travailler :

- x jours dans la mine 1
- y jours dans la mine 2

On cherche x et y .

Coût $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x, y) = 180x + 160y$ (fonction de deux variables réelles).

Le problème des mines d'or

Objectif

Objectif

Satisfaire le contrat au moindre coût.

Mine	Coût/jour
1	180
2	160

Pour satisfaire le contrat, il faut travailler :

- x jours dans la mine 1
- y jours dans la mine 2

On cherche x et y .

Coût $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x, y) = 180x + 160y$ (fonction de deux variables réelles).

Le problème des mines d'or

Objectif

Objectif

Satisfaire le contrat au **moindre coût**.

Mine	Coût/jour
1	180
2	160

Pour satisfaire le contrat, il faut travailler :

- x jours dans la mine 1
- y jours dans la mine 2

On cherche x et y .

Coût $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x, y) = 180x + 160y$ (fonction de deux variables réelles).

Le problème des mines d'or

Contraintes

Jours de travail

$$0 \leq x \leq 5$$

$$0 \leq y \leq 5$$

$$1 \text{ jour} = 8 \text{ heures}$$



Production

$$0.2x + y \geq 12$$

$$0.5x + 2y \geq 24$$

$$0.2x + 2y \geq 24$$

Mine	Production (tonnes/jour)		
	sup.	moy.	inf.
1	6	3	4
2	1	1	6

Contrat (tonnes/semaine)		
12	8	24

Le problème des mines d'or

Contraintes

Jours de travail

$$0 \leq x \leq 5$$

$$0 \leq y \leq 5$$

1 jour = 8 heures

Production

$$6x + y \geq 12$$

$$3x + y \geq 8$$

$$4x + 6y \geq 24$$



Mine	Production (tonnes/jour)		
	sup.	moy.	inf.
1	6	3	4
2	1	1	6

Contrat (tonnes/semaine)

12	8	24
----	---	----

Le problème des mines d'or

Contraintes

Jours de travail

$$0 \leq x \leq 5$$

$$0 \leq y \leq 5$$

$$1 \text{ jour} = 8 \text{ heures}$$



Production

$$6x + y \geq 12$$

$$3x + y \geq 8$$

$$4x + 6y \geq 24$$

Mine	Production (tonnes/jour)		
	sup.	moy.	inf.
1	6	3	4
2	1	1	6

Contrat (tonnes/semaine)

12	8	24
----	---	----

Le problème des mines d'or

Contraintes

Jours de travail

$$0 \leq x \leq 5$$

$$0 \leq y \leq 5$$

1 jour = 8 heures

Production

$$6x + y \geq 12$$

$$3x + y \geq 8$$

$$4x + 6y \geq 24$$



Mine	Production (tonnes/jour)		
	sup.	moy.	inf.
1	6	3	4
2	1	1	6

Contrat (tonnes/semaine)

12	8	24
----	---	----

Le problème des mines d'or

Contraintes

Jours de travail

$$0 \leq x \leq 5$$

$$0 \leq y \leq 5$$

1 jour = 8 heures

Production

$$6x + y \geq 12$$

$$3x + y \geq 8$$

$$4x + 6y \geq 24$$



Mine	Production (tonnes/jour)		
	sup.	moy.	inf.
1	6	3	4
2	1	1	6

Contrat (tonnes/semaine)

12	8	24
----	---	----

Le problème des mines d'or

Formulation mathématique

Problème de minimisation

$$\min f(x, y) = 180x + 160y$$

$$(x, y) \text{ satisfaisant } \begin{cases} 0 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq y \leq 5 \\ 6x + y \geq 12 \\ 3x + y \geq 8 \\ 4x + 6y \geq 24 \end{cases}$$

On cherche donc un couple (x^*, y^*)

- qui satisfait chacune des contraintes et
- tel que f atteigne son minimum en ce point.

Le problème des mines d'or

Formulation mathématique

Problème de minimisation

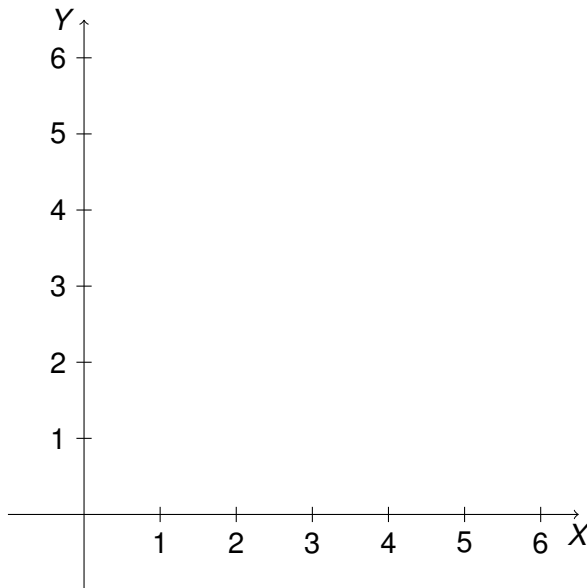
$$\min f(x, y) = 180x + 160y$$

$$(x, y) \text{ satisfaisant } \begin{cases} 0 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq y \leq 5 \\ 6x + y \geq 12 \\ 3x + y \geq 8 \\ 4x + 6y \geq 24 \end{cases}$$

On cherche donc un couple (x^*, y^*)

- qui satisfait chacune des contraintes et
- tel que f atteigne son minimum en ce point.

Représentation graphique des contraintes



Contraintes

$$0 \leq x \leq 5$$

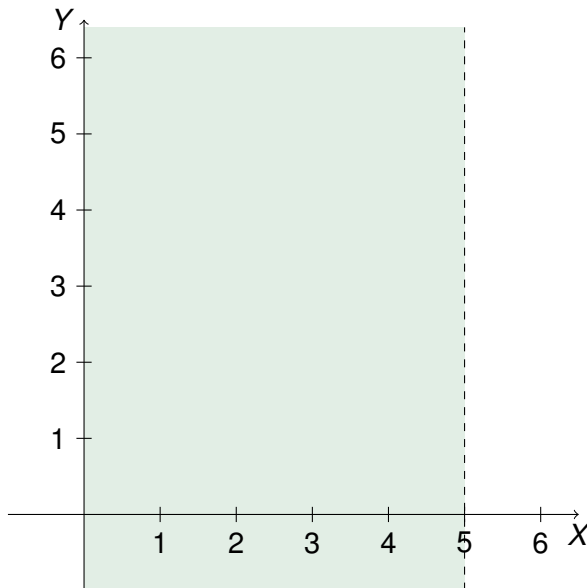
$$0 \leq y \leq 5$$

$$6x + y \geq 12$$

$$3x + y \geq 8$$

$$4x + 6y \geq 24$$

Représentation graphique des contraintes



Contraintes

$$0 \leq x \leq 5$$

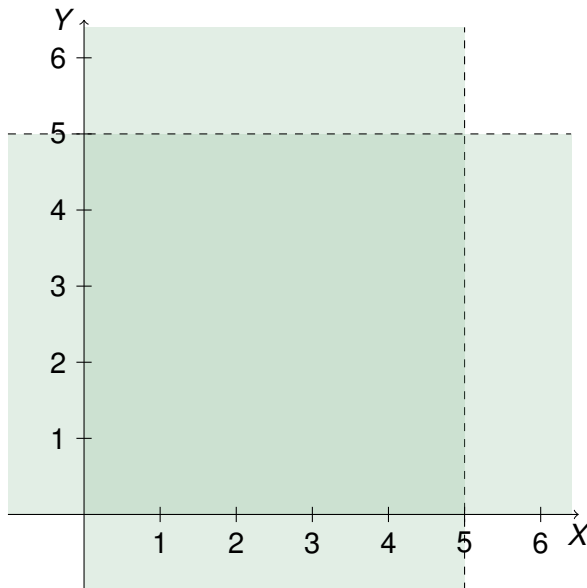
$$0 \leq y \leq 5$$

$$6x + y \geq 12$$

$$3x + y \geq 8$$

$$4x + 6y \geq 24$$

Représentation graphique des contraintes



Contraintes

$$0 \leq x \leq 5$$

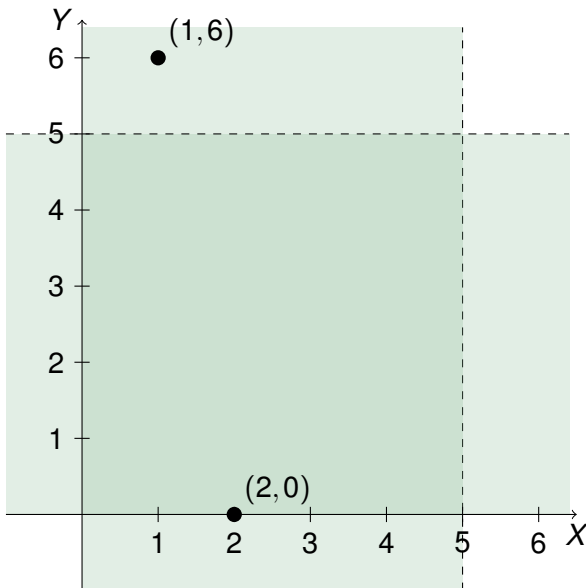
$$0 \leq y \leq 5$$

$$6x + y \geq 12$$

$$3x + y \geq 8$$

$$4x + 6y \geq 24$$

Représentation graphique des contraintes



Contraintes

$$0 \leq x \leq 5$$

$$0 \leq y \leq 5$$

$$6x + y \geq 12$$

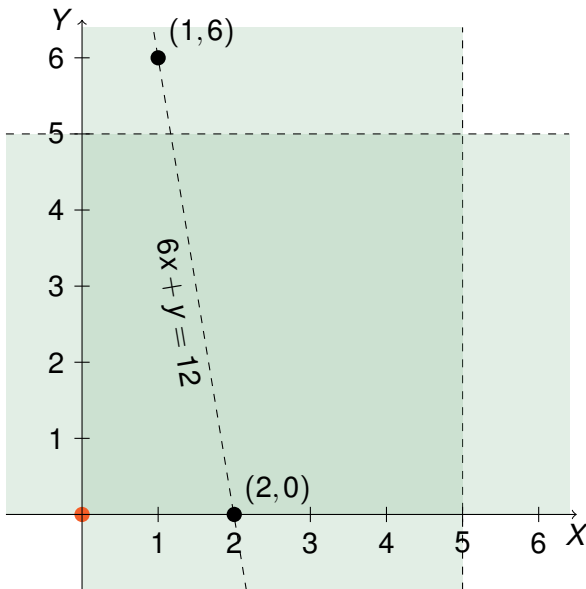
$$3x + y \geq 8$$

$$4x + 6y \geq 24$$

Tracer

$$6x + y = 12$$

Représentation graphique des contraintes



Contraintes

$$0 \leq x \leq 5$$

$$0 \leq y \leq 5$$

$$6x + y \geq 12$$

$$3x + y \geq 8$$

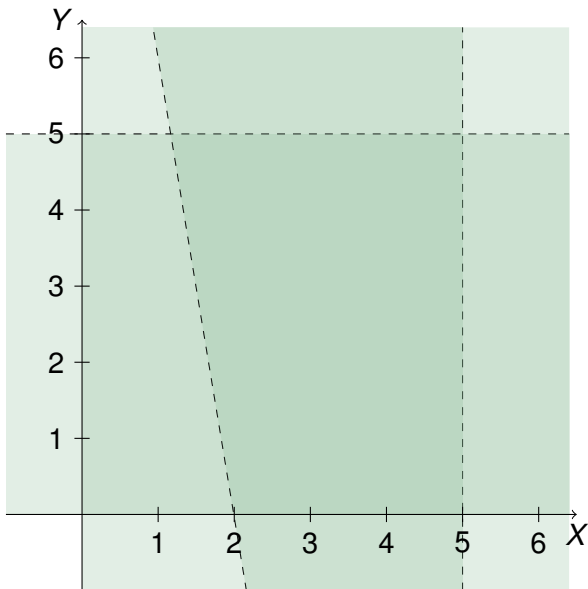
$$4x + 6y \geq 24$$

Tracer

$$6x + y = 12$$

Évaluer au
point (0,0)

Représentation graphique des contraintes



Contraintes

$$0 \leq x \leq 5$$

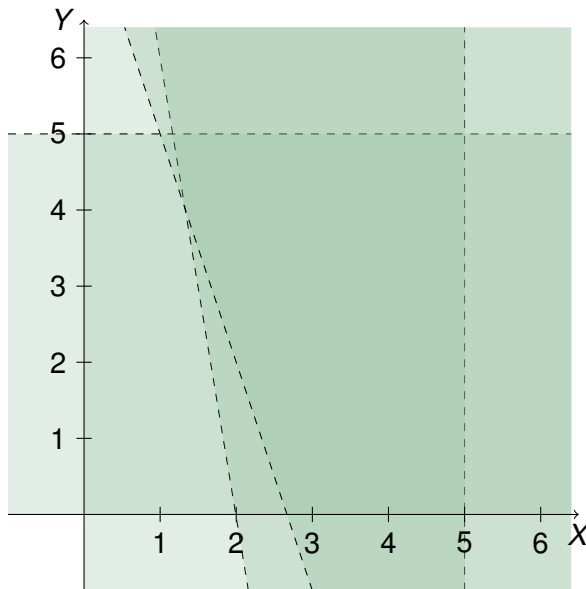
$$0 \leq y \leq 5$$

$$6x + y \geq 12$$

$$3x + y \geq 8$$

$$4x + 6y \geq 24$$

Représentation graphique des contraintes



Contraintes

$$0 \leq x \leq 5$$

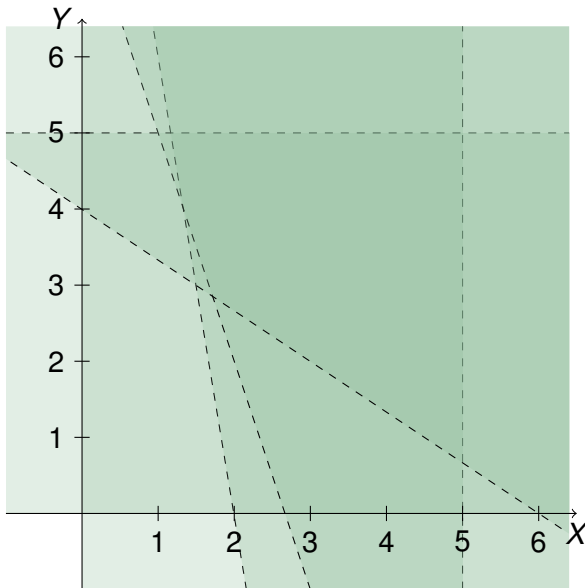
$$0 \leq y \leq 5$$

$$6x + y \geq 12$$

$$3x + y \geq 8$$

$$4x + 6y \geq 24$$

Représentation graphique des contraintes



Contraintes

$$0 \leq x \leq 5$$

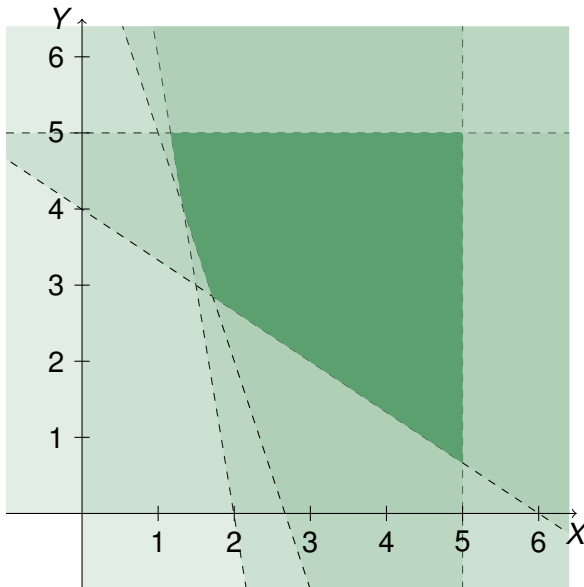
$$0 \leq y \leq 5$$

$$6x + y \geq 12$$

$$3x + y \geq 8$$

$$4x + 6y \geq 24$$

Représentation graphique des contraintes



Contraintes

$$0 \leq x \leq 5$$

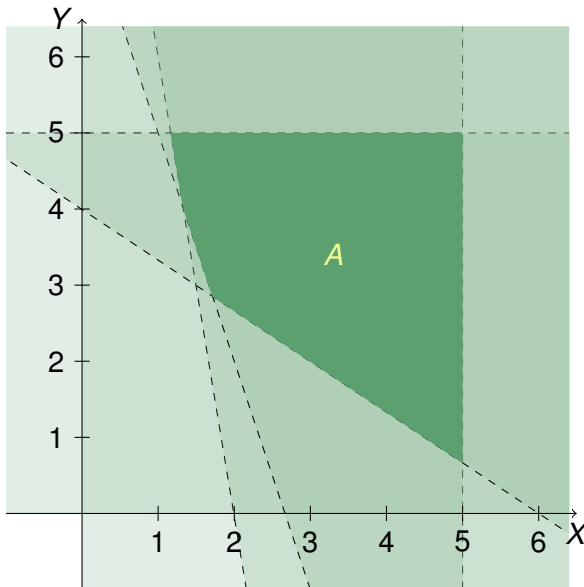
$$0 \leq y \leq 5$$

$$6x + y \geq 12$$

$$3x + y \geq 8$$

$$4x + 6y \geq 24$$

Représentation graphique des contraintes



Contraintes

$$0 \leq x \leq 5$$

$$0 \leq y \leq 5$$

$$6x + y \geq 12$$

$$3x + y \geq 8$$

$$4x + 6y \geq 24$$

$$\begin{array}{c} \updownarrow \\ (x, y) \in A \end{array}$$

A est appelé le
**polygone des
contraintes.**

Comment chercher le minimum de f ?

Problème de minimisation

$$\begin{cases} \min f(x, y) = 180x + 160y \\ (x, y) \in A \end{cases}$$

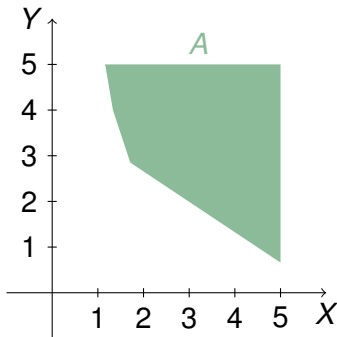
$$(4, 4) \in A$$

$$f(4, 4) = 180 \cdot 4 + 160 \cdot 4 = 1360$$

$$(2, 3) \in A$$

$$f(2, 3) = 180 \cdot 2 + 160 \cdot 3 = 840$$

À quel point $(x^*, y^*) \in A$ la fonction f prend-elle sa valeur minimale ?



Comment chercher le minimum de f ?

Problème de minimisation

$$\begin{cases} \min f(x, y) = 180x + 160y \\ (x, y) \in A \end{cases}$$

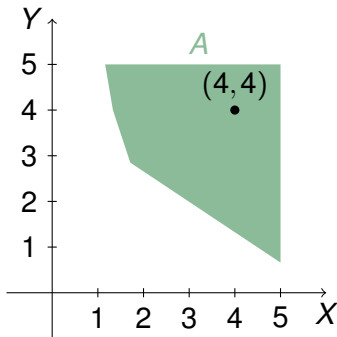
$$(4, 4) \in A$$

$$f(4, 4) = 180 \cdot 4 + 160 \cdot 4 = 1360$$

$$(2, 3) \in A$$

$$f(2, 3) = 180 \cdot 2 + 160 \cdot 3 = 840$$

À quel point $(x^*, y^*) \in A$ la fonction f prend-elle sa valeur minimale ?



◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡

◀ ◻ ▶ ◀ ▢ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Recherche du minimum (1/3)

Courbe de niveau

Ensemble des points (x, y) en lesquels la fonction f prend une même valeur réelle c .

La courbe de niveau c a pour équation

$$f(x, y) = c$$

Ici $f(x, y) = 180x + 160y$. Toutes les droites d'équation

$$180x + 160y = c$$

avec $c \in \mathbb{R}$, forment un faisceau de droites parallèles.



Recherche du minimum (2/3)

Gradient

Le gradient de $f(x, y) = ax + by$ est $\nabla f = (a, b)$.

Recherche du minimum (2/3)

Gradient

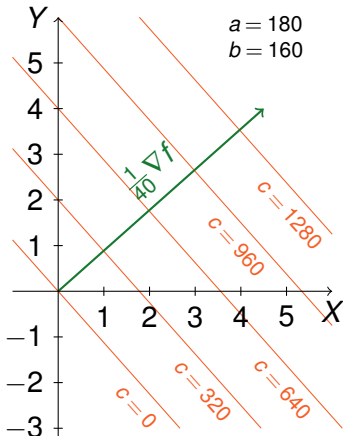
Le gradient de $f(x, y) = ax + by$ est $\nabla f = (a, b)$.

Toute droite d'équation

$$ax + by = c$$

avec $c \in \mathbb{R}$ est perpendiculaire
au vecteur ∇f .

La valeur de c augmente (resp. diminue) quand on se déplace dans le même sens (resp. dans le sens opposé) que celui du gradient.



Recherche du minimum (3/3)

Balayer le plan avec des droites d'équation $180x + 160y = c$.

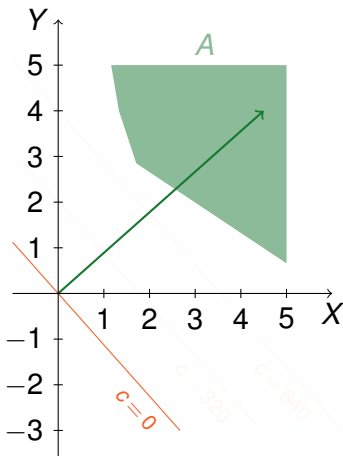
Le minimum recherché est atteint au premier point (x^*, y^*) de A rencontré lors du balayage :

$$f(x^*, y^*) = \min_{(x, y) \in A} 180x + 160y$$

(x^*, y^*) est solution du système

$$\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 4x + 6y = 24 \end{cases}$$

Solution : $(x^*, y^*) = \left(\frac{12}{7}, \frac{20}{7}\right)$.



Recherche du minimum (3/3)

Balayer le plan avec des droites d'équation $180x + 160y = c$.

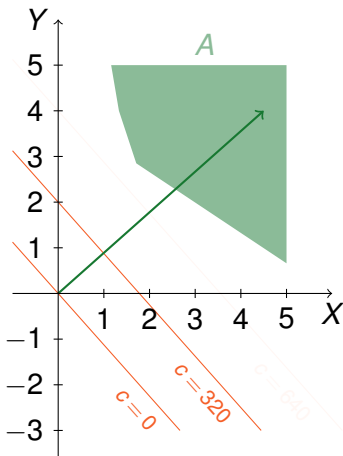
Le minimum recherché est atteint au premier point (x^*, y^*) de A rencontré lors du balayage :

$$f(x^*, y^*) = \min_{(x, y) \in A} 180x + 160y$$

(x^*, y^*) est solution du système

$$\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 4x + 6y = 24 \end{cases}$$

Solution : $(x^*, y^*) = \left(\frac{12}{7}, \frac{20}{7}\right)$.



Recherche du minimum (3/3)

Balayer le plan avec des droites d'équation $180x + 160y = c$.

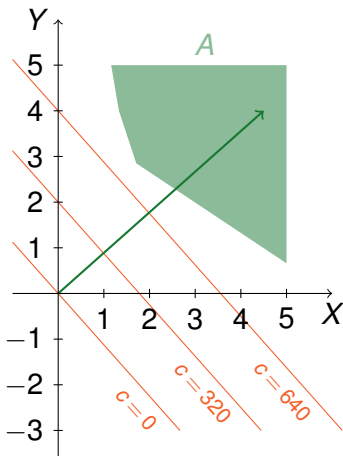
Le minimum recherché est atteint au premier point (x^*, y^*) de A rencontré lors du balayage :

$$f(x^*, y^*) = \min_{(x, y) \in A} 180x + 160y$$

(x^*, y^*) est solution du système

$$\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 4x + 6y = 24 \end{cases}$$

Solution : $(x^*, y^*) = \left(\frac{12}{7}, \frac{20}{7}\right)$.



Recherche du minimum (3/3)

Balayer le plan avec des droites d'équation $180x + 160y = c$.

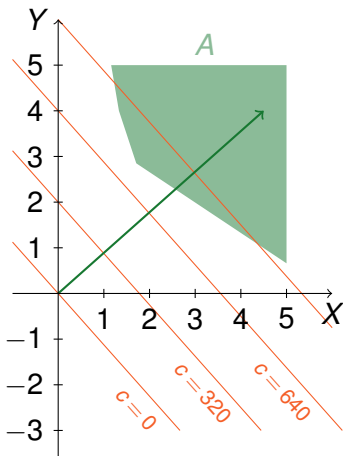
Le minimum recherché est atteint au premier point (x^*, y^*) de A rencontré lors du balayage :

$$f(x^*, y^*) = \min_{(x, y) \in A} 180x + 160y$$

(x^*, y^*) est solution du système

$$\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 4x + 6y = 24 \end{cases}$$

Solution : $(x^*, y^*) = \left(\frac{12}{7}, \frac{20}{7}\right)$.



Recherche du minimum (3/3)

Balayer le plan avec des droites d'équation $180x + 160y = c$.

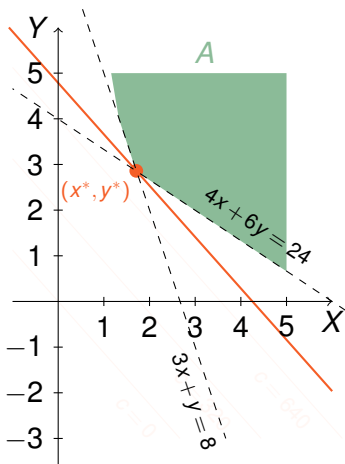
Le minimum recherché est atteint au premier point (x^*, y^*) de A rencontré lors du balayage :

$$f(x^*, y^*) = \min_{(x, y) \in A} 180x + 160y$$

(x^*, y^*) est solution du système

$$\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 4x + 6y = 24 \end{cases}$$

$$\text{Solution : } (x^*, y^*) = \left(\frac{12}{7}, \frac{20}{7}\right).$$



Conclusion

La fonction coût f atteint son minimum au point

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{12}{7}, \frac{20}{7}\right)$$

Le contrat est donc satisfait avec

- 1 jour et 6 heures¹ de travail dans la mine 1 et
- 2 jours et 7 heures¹ dans la mine 2.

Le coût vaut

$$f(x^*, y^*) = 180 \cdot \frac{12}{7} + 160 \cdot \frac{20}{7} \quad (\text{milliers d'€})$$
$$\approx 765714 \text{ €}.$$

1. Arrondi à l'heure supérieure.

Conclusion

La fonction coût f atteint son minimum au point

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{12}{7}, \frac{20}{7}\right)$$

Le contrat est donc satisfait avec

- 1 jour et 6 heures¹ de travail dans la mine 1 et
- 2 jours et 7 heures¹ dans la mine 2.

Le coût vaut

$$\begin{aligned} f(x^*, y^*) &= 180 \cdot \frac{12}{7} + 160 \cdot \frac{20}{7} \quad (\text{milliers d'€}) \\ &\approx 765714 \text{ €}. \end{aligned}$$

Un peu d'histoire

On a résolu un problème d'optimisation linéaire :

- Maximiser / minimiser une fonction linéaire f de plusieurs variables. Ici, $f(x, y) = 180x + 160y$ (fonction linéaire de deux variables).
- Des contraintes qui s'expriment sous la forme d'inéquations linéaires. Ici, l'ensemble A des couples (x, y) qui vérifient chaque inéquation. À deux dimensions, l'ensemble A est un polygone.

Un peu d'histoire

L. V. Kantorovich (1912–1986)

- Problèmes de répartition des ressources humaines et matérielles dans les entreprises pour en augmenter la productivité.
- Il est le premier à affirmer que ces problèmes peuvent être modélisés et résolus numériquement (vers 1940).
- Prix Nobel de sciences économiques en 1975.



Un peu d'histoire

G. Dantzig (1914–2005), programmation
linéaire

- Le mot « programme » fait référence à des questions d'ordre militaire : planifier et organiser l'approvisionnement et le déploiement des troupes.
- Après un an de travail, Dantzig produit un algorithme pour résoudre ces questions logistiques : l'algorithme du simplexe.



Un peu d'histoire

L'algorithme du simplexe, 1947

- Problème : optimiser une fonction de N variables réelles $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ soumises à des contraintes qui définissent un polyèdre dans l'espace à N dimensions.
- Beaucoup de variables et beaucoup de calculs.
- La programmation linéaire prend son essor avec l'apparition des ordinateurs.
- Karmarkar (1957–), 1984 : méthode projective, le premier algorithme efficace à la fois en théorie et en pratique.



- 1 Qu'est-ce-qu'un problème d'optimisation ?
- 2 Superman, mon héros
- 3 Les mines d'or
- 4 Problème de résistance minimale de Newton**

Problème de résistance minimale de Newton

Le problème

Optimiser la forme d'un corps de façon à minimiser sa résistance à la pression exercée par un fluide dans lequel il se déplace uniformément.

Problème décrit il y a trois siècles par I. Newton dans les *Principia*. Il y donne le problème de minimisation associé :

$$\begin{cases} \min \int_{\Omega} \frac{1}{1 + |\nabla u(x)|^2} dx \\ u : \Omega \rightarrow [0, M] \text{ concave} \end{cases}$$

Problème de résistance minimale de Newton

Le problème

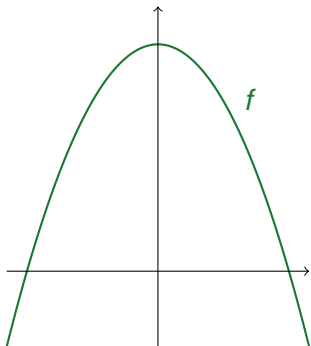
Optimiser la forme d'un corps de façon à minimiser sa résistance à la pression exercée par un fluide dans lequel il se déplace uniformément.

Problème décrit il y a trois siècles par I. Newton dans les *Principia*. Il y donne le problème de minimisation associé :

$$\begin{cases} \min \int_{\Omega} \frac{1}{1 + |\nabla u(x)|^2} dx \\ u : \Omega \rightarrow [0, M] \text{ concave} \end{cases}$$

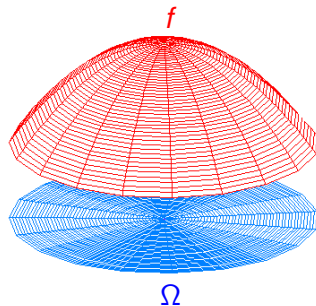
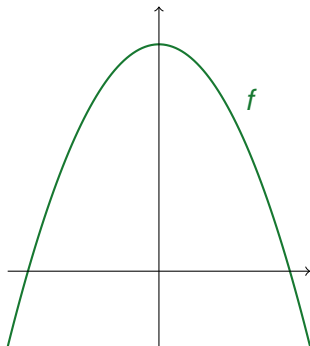
Fonction concave

$$f''(x) \leq 0 \text{ pour tout } x$$

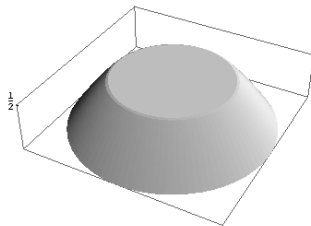
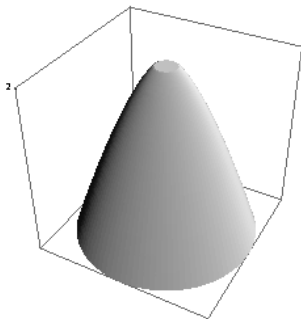
 f Ω

Fonction concave

$$f''(x) \leq 0 \text{ pour tout } x$$



Solution symétrique



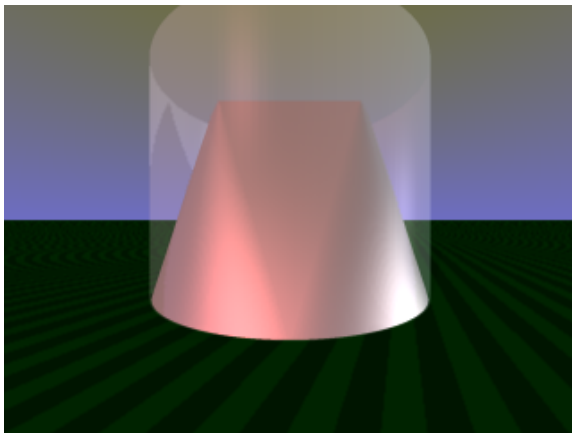
Solution non symétrique

1996 : F. BROCK, V. FERONE, B. KAWOHL ont montré que la solution n'est pas à symétrie radiale.

Cette image résulte d'expérimentations numériques (2004), il y a peu de résultats théoriques sur la forme de la solution optimale.

Solution non symétrique

1996 : F. BROCK, V. FERONE, B. KAWOHL ont montré que la solution n'est pas à symétrie radiale.



Cette image résulte d'expérimentations numériques (2004), il y a peu de résultats théoriques sur la forme de la solution optimale.

Lockheed Martin SR-71 Blackbird



Vitesse maximale : 4023 km/h

X-43



Vitesse maximale : 10 618 km/h

Merci pour votre attention !

<http://math.umons.ac.be/pds>