

FACULTE DES SCIENCES

SERVICE DE CHIMIE-PHYSIQUE

THERMODYNAMIQUE

**COUPLAGE ENTRE LES CONVECTIONS
CAPILLAIRE ET THERMOGRAVITATIONNELLE**

Didier Villers

*Dissertation originale
présentée pour l'obtention
du grade de docteur en
Sciences Chimiques*

Remerciements.

Un tel travail n'aurait pu être accompli sans l'aide de nombreuses personnes.

Je tiens à exprimer à Monsieur le Professeur J.-J. Point toute ma gratitude pour m'avoir accueilli dans son service. Son soutien et sa gentillesse m'ont toujours été précieux.

Mes plus vifs remerciements vont au Professeur J. K. Platten. Nos nombreuses discussions, sa direction scientifique efficace et ses efforts pour l'obtention d'un équipement expérimental de grande qualité m'ont été particulièrement utiles.

Je tiens aussi à remercier les scientifiques que j'ai côtoyés à Mons, ou au cours de missions, pour les discussions, aides et conseils divers. Je songe en particulier au Professeur D. Schwabe, aux Docteurs K.H. Winters, B. Roux, J. De coninck, J.M. Luijkx et à Mr. O. Lhost.

Je suis reconnaissant également au personnel du service de Chimie-Physique Thermodynamique et à celui de l'Université de Mons-Hainaut en général, pour leur aide technique et l'accueil chaleureux qui m'a toujours été réservé.

Finalement, amis et parents ont contribué chacun à leur façon à ce travail, par l'intérêt qu'ils y ont porté. Je remercie particulièrement mon épouse Martine pour sa patience et ses encouragements.

Table des matières.

Chapitre I. Introduction.

- | | | |
|----|---|------|
| 1. | L'effet Marangoni : mouvements convectifs liés à des variations de tension superficielle. | I-1 |
| 2. | But et résumé du travail. | I-9 |
| 3. | Les équations du mouvement. | I-12 |
| 4. | Bibliographie. | I-19 |

Chapitre II. Convection capillaire dans le système eau-heptanol.

- | | | |
|----|---|-------|
| 1. | Introduction. | II-1 |
| 2. | Expériences à épaisseur de liquide constante. | II-7 |
| 3. | Simulations numériques. | II-14 |
| 4. | Modèle analytique. | II-27 |
| 5. | Expériences à ΔT constant et épaisseur variable; comparaison avec le modèle analytique. | II-38 |
| 6. | Comparaison entre le modèle numérique et le modèle analytique. | II-46 |
| 7. | Comparaison entre le modèle numérique et les expériences à h variable. | II-61 |
| 8. | Oscillations. | II-65 |
| 9. | Bibliographie. | II-68 |

Chapitre III. Convection thermocapillaire dans l'eau.

- | | | |
|----|------------------|-------|
| 1. | Introduction. | III-1 |
| 2. | Les expériences. | III-2 |
| 3. | Conclusion. | III-7 |
| 4. | Bibliographie. | III-7 |

Chapitre IV. Convection thermocapillaire dans l'acétone.

1.	Introduction.	IV-1
2.	Expériences, cas stationnaires.	IV-2
3.	Comparaison avec des simulations numériques.	IV-8
4.	Etude expérimentale de la convection oscillante.	IV-22
5.	Validation du code numérique dans le cas de la convection oscillante.	IV-32
6.	Simulations numériques de la convection oscillante dans l'acétone.	IV-40
7.	Discussion.	IV-43
8.	Bibliographie.	IV-48

Chapitre V. Convection dans des mélanges où l'effet de thermodiffusion est important.

1.	Introduction.	V-1
2.	Modèle analytique.	V-4
3.	Discussion.	V-5
4.	Expériences exploratoires.	V-6
5.	Bibliographie.	V-10

Chapitre VI. Convection dans des couches immiscibles superposées.

1.	Introduction.	VI-1
2.	Définition du problème.	VI-2
3.	Résultats expérimentaux.	VI-4
4.	Modèle analytique.	VI-8
5.	Comparaison avec les résultats expérimentaux.	VI-22
6.	Conclusion.	VI-28
7.	Bibliographie.	VI-28

Chapitre VII. Conclusion générale et perspectives.

Annexe A. Le modèle numérique.

- | | | |
|----|--------------------------------|------|
| 1. | Les différences finies. | A-1 |
| 2. | Implémentation de la méthode. | A-12 |
| 3. | Validations du code numérique. | A-14 |
| 4. | Bibliographie. | A-21 |

Annexe B. La vélocimétrie laser-Doppler.

- | | | |
|----|---|------|
| 1. | Principes de la vélocimétrie laser-Doppler. | B-1 |
| 2. | Description de l'équipement. | B-6 |
| 3. | Qualité et traitement du signal. | B-9 |
| 4. | Mesures biaisées en vélocimétrie laser-Doppler. | B-12 |
| 5. | Bibliographie. | B-19 |

Annexe C. Propriétés physiques des liquides utilisés.

Nomenclature.

A	Rapport d'aspect = l/h
A_T	Gradient de température horizontal.
Bi	Nombre de Biot ($= h.d/\lambda$)
C_v	Chaleur spécifique
d	Longueur de référence
D	Coefficient de diffusion isotherme
D_T	Coefficient de thermodiffusion
E	Energie totale.
g	Accélération du champ de pesanteur terrestre
h	épaisseur de liquide
h_N	Coefficient de transfert de Newton
k	Nombre caractérisant le rapport des forces thermocapillaires aux forces thermogravitationnelles ($= -4 Ma/Ra$)
J	Flux de chaleur
l	Longueur de la couche de liquide
Ma	Nombre de Marangoni ($= -(\partial\sigma/\partial T)\Delta T.d/\rho.\kappa.v$)
p	Pression
Pr	Nombre de Prandtl ($= \nu/\kappa$)
Ra	Nombre de Rayleigh ($= g.\alpha.\Delta T.d^3/\kappa.v$)
T	Température
V	Vitesse
x,y,z	Coordonnées dimensionnelles de l'espace
X,Y,Z	Coordonnées non dimensionnelles de l'espace

Symboles grecs

α	Coefficient d'expansion thermique
β	Coefficient d'expansion massique
Δ	Différence
κ	Diffusivité thermique
λ	Conductibilité thermique
μ	Viscosité absolue
ν	Viscosité cinématique
ρ	Densité
σ	Tension superficielle ou interfaciale
Φ	Vorticité
Ψ	Fonction de courant

Chapitre I.

Introduction.

1. L'effet Marangoni : mouvements convectifs liés à des variations de tension superficielle.

Parmi les nombreux problèmes de convection, compliqués par un ou plusieurs phénomènes physico-chimiques, une classe importante considère l'influence de la tension superficielle ou interfaciale d'une surface de séparation entre deux milieux différents. Levich *et al.* [1] divise cette convection dite capillaire en deux origines distinctes, suivant que :

- i) la surface de séparation entre les deux milieux est courbée de façon non négligeable.
- ii) la tension superficielle varie d'un endroit à un autre de la surface.

Dans le premier cas, on tient compte principalement des forces perpendiculaires à la surface de séparation. La tension superficielle σ apparaît explicitement, ainsi que les pressions hydrostatiques des deux phases et toutes les composantes du vecteur vitesse, puisqu'aucune ne doit s'annuler à l'interface. Nous considérerons dans ce travail des interfaces planes et non déformables et nous ne tiendrons pas compte, par conséquent, de cette première cause de mouvements capillaires.

Le second cas met en jeu les forces tangentielles à l'interface, impliquant de manière explicite le gradient le long de la surface de la tension superficielle σ : $\partial\sigma/\partial x$. De par la conservation des quantités de mouvement, de même qu'une différence de pression dans un fluide provoque un mouvement des zones de haute pression en direction des zones de basse pression, de même une différence de tension de surface induit un mouvement des zones de basse tension superficielle vers les zones de haute tension superficielle (voir figure I-1). Le mouvement en surface est transmis aux couches fluides adjacentes, par l'effet de la viscosité. Cette cause de mouvements capillaires est connue sous le nom d'**EFFET MARANGONI**.

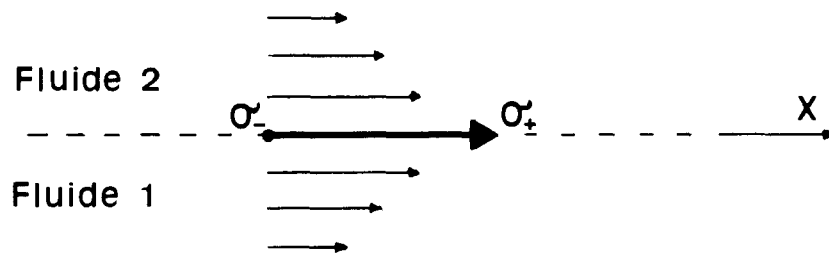


Figure I-1.

Mouvements provoqués par des différences de tension superficielle σ .

La chronologie des premières découvertes concernant ce sujet a été retracée par Scriven *et al.* [2]. Le premier article scientifique décrivant des mouvements convectifs en surface et les reliant à la tension superficielle est dû à James Thomson [3] en 1855 : "On certain curious motions observable at the surface of wine and other alcoholic liquors". Cependant, la première personne qui a établi un lien direct entre les mouvements et des différences locales de tension superficielle fut Van der Mensbrugge [4] en 1869. Un peu plus tard, Marangoni [5] aboutissait aux mêmes conclusions et s'appropriait la priorité de la découverte. Le fait que le journal dans lequel parut l'article de Marangoni était largement répandu n'est sans doute pas étranger à l'acceptation définitive par la communauté scientifique de l'appellation "Effet Marangoni".

Même si les larmes de vin coulant le long des verres fascinent et sont pour une part à l'origine des études sur les mouvements capillaires, un grand nombre d'investigateurs s'aperçoivent que ces mouvements affectent de nombreux phénomènes physico-chimiques. Citons : l'évaporation, les mélanges de liquides, la croissance cristalline, la distillation, l'extraction liquide-liquide, les mousses et leur stabilité, le séchage des peintures, la soudure,...

On peut diviser l'effet Marangoni en deux classes distinctes suivant l'origine des différences de tension superficielle : solutale ou thermique. Dans le premier cas, ce sont des différences de concentration qui induisent les mouvements. En effet, la tension superficielle dépend de la concentration C d'un soluté, et on décompose alors le gradient de tension superficielle en :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial x} \quad (\text{I-1})$$

La dépendance $\partial\sigma/\partial C$ est particulièrement importante lorsque les molécules de soluté s'adsorbent préférentiellement à la surface (c'est le cas de la plupart des solutions aqueuses de molécules organiques). Dès lors, l'effet Marangoni solutal est souvent très violent, mais c'est également un phénomène transitoire parce qu'il est difficile d'entretenir indéfiniment des gradients de concentration. On observe cet effet dans des phénomènes tels que la dissolution et l'évaporation. Une expérience simple à réaliser, et qui permet de se rendre compte de l'importance de l'effet solutal et de son caractère transitoire, consiste à déposer sur une mince couche d'eau dans une boîte de Pétri une goutte d'un alcool comme l'hexanol le long du bord. On observe alors une circulation rapide en surface, s'achevant lorsque la dissolution de l'alcool est complète (voir figure I-2). Les vitesses observées sont de l'ordre de plusieurs cm/s, beaucoup plus grandes que les vitesses relevées en convection thermogravitationnelle.

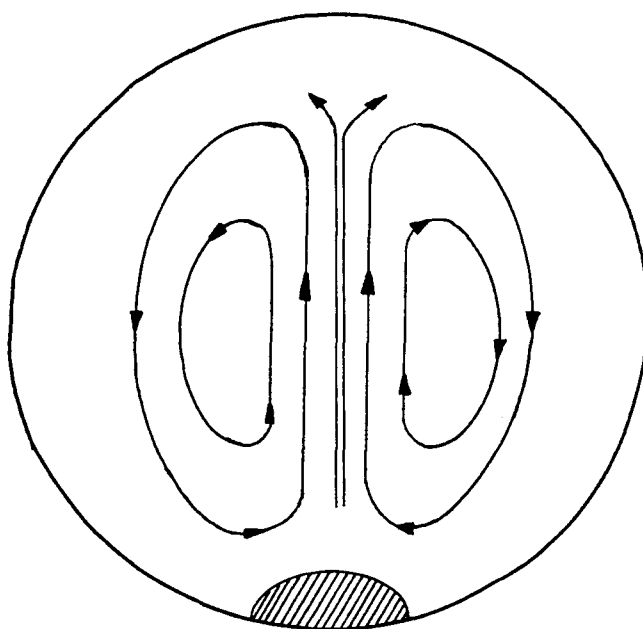


Figure I-2.

Mouvements superficiels produits lors de la dissolution d'une goutte d'hexanol dans une mince couche d'eau contenue dans une boîte de Pétri.

L'autre type d'effet Marangoni est la thermocapillarité. Des différences de température en surface induisent des mouvements convectifs en surface parce que la tension superficielle ou interfaciale dépend de la température. On a alors :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{I-2})$$

Même s'il est difficile de prédire la dépendance de la tension superficielle envers la température $\partial\sigma/\partial T$, on constate que pour une grande majorité de liquides, la tension σ diminue lorsque la température augmente, et que cette dépendance est relativement faible. Par exemple, $\partial\sigma/\partial T$ vaut environ $-0.1 \text{ mN m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ pour de nombreux liquides organiques, dont la tension est de l'ordre de 30 mN m^{-1} . Par conséquent, l'effet thermocapillaire ne provoque des mouvements importants que si le gradient de température $\partial T/\partial x$ est important. Par contre, il est aisé de maintenir stationnaire la convection thermocapillaire. Il suffit pour cela d'imposer un gradient de température en surface. Une expérience permettant d'illustrer la thermocapillarité peut s'effectuer à l'aide d'une bougie de grand diamètre. Le dégagement de chaleur provoqué par la flamme chauffe localement la surface de cire fondue. On observe alors un mouvement superficiel de la cire, de l'extérieur où la cire est plus froide vers la mèche qui est plus chaude.

La façon dont les mouvements convectifs sont engendrés par la capillarité dépend des conditions imposées à l'interface. Si par exemple un gradient de température est appliqué perpendiculairement à la surface d'un liquide, celle-ci possède une tension superficielle que l'on pourrait croire uniforme. Cependant des petites fluctuations (de température, c'est-à-dire de σ entraînant des fluctuations de vitesse) peuvent être amplifiées, provoquant l'instabilité de l'état de repos. On a alors l'apparition d'une structure convective à petite échelle, sous la forme d'hexagone, par exemple dans le cas de l'instabilité de Bénard [6] (voir figure I-3). Cette instabilité ne se produit que lorsqu'on dépasse un seuil critique : une différence de température critique, dépendant de l'épaisseur et des propriétés physiques du fluide.

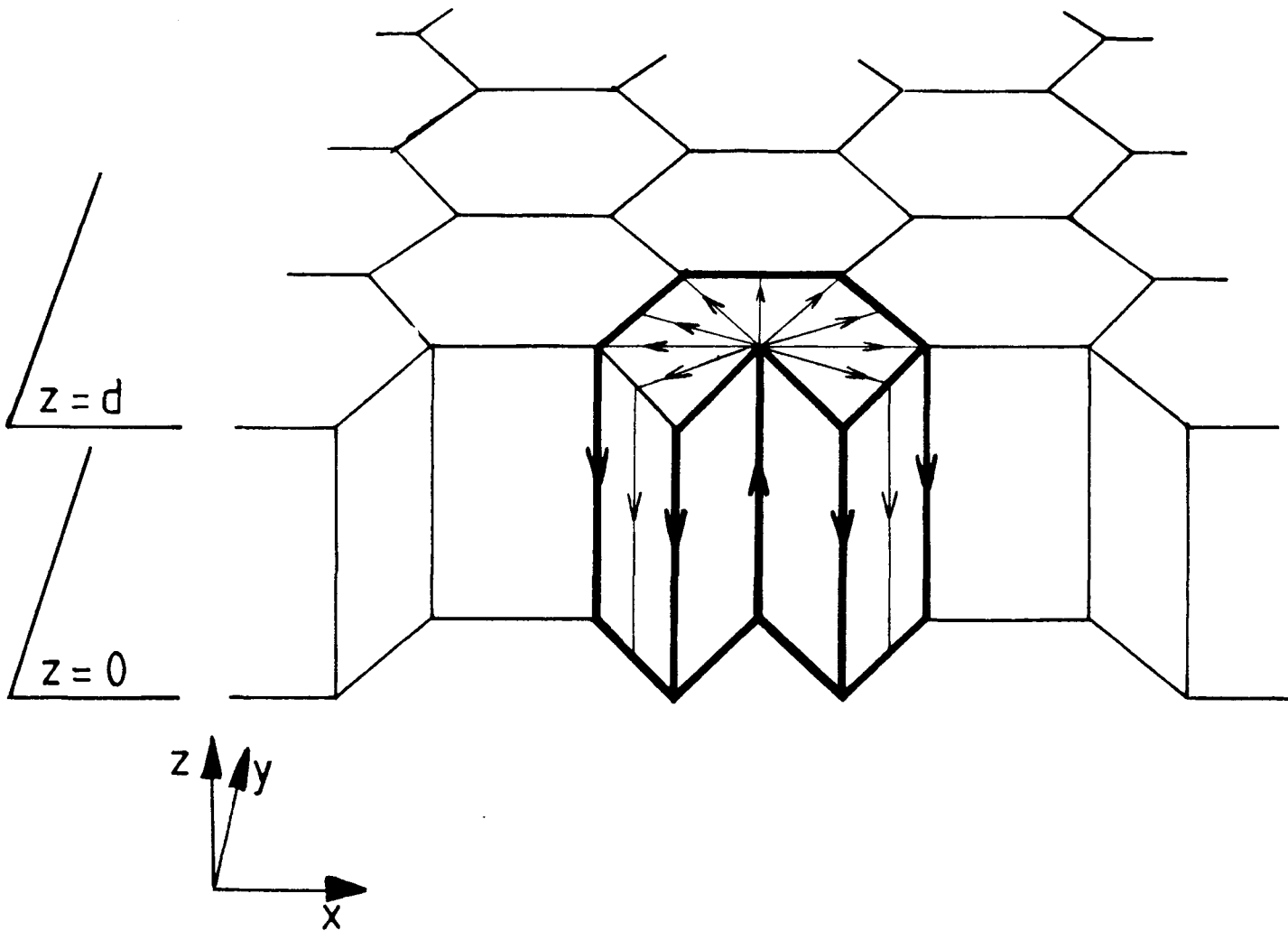


Figure I-3.
Structure convective hexagonale
de l'instabilité de Bénard.

Lorsque par contre on impose un gradient de température parallèle à l'interface, on induit d'office un mouvement de circulation à grande échelle de toute la surface du liquide (voir figure I-4).

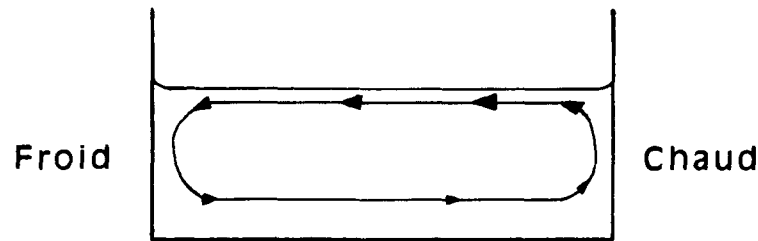


Figure I-4.

Mouvement à grande échelle produit par un gradient de température parallèle à l'interface.

La première étude théorique sur l'instabilité thermocapillaire d'une couche liquide soumise à un gradient de température perpendiculaire à la surface (Pearson [7]) a permis de dissiper un malentendu datant du début du siècle. Les expériences de Bénard sur la convection cellulaire avaient inspiré la théorie de Rayleigh [8] concernant les mouvements convectifs induits par des différences de densité. Cette théorie avait permis d'introduire un nombre sans dimension caractéristique de l'effet thermogravitationnel : le nombre de Rayleigh

$$Ra = \frac{g \alpha \Delta T d^3}{\kappa \nu} \quad (I-3)$$

où g est l'accélération de la pesanteur, α le coefficient de dilatation, ΔT la différence de température, d la longueur de référence, κ la diffusivité thermique et ν la viscosité cinématique. Mais en fait Pearson [7], avec le travail expérimental de Block [9] a montré que les cellules convectives observées par Bénard étaient principalement provoquées par la thermocapillarité. La stabilité d'une couche liquide était déterminée à partir de la valeur d'un autre nombre sans dimension : le nombre de Marangoni

$$Ma = \frac{-\left[\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right] \Delta T d}{\rho \kappa \nu} \quad (I-4)$$

où ρ est la densité du liquide.

Plus tard, Nield [10] calcula le seuil de stabilité de l'état de repos en considérant l'effet

conjoint de la tension superficielle et des forces gravifiques. Il obtenait la relation approximative entre le nombre de Marangoni critique et le nombre de Rayleigh critique :

$$\frac{Ma^c}{Ma^\circ} + \frac{Ra^c}{Ra^\circ} = 1 \quad (I-5)$$

où Ma° est le nombre de Marangoni critique lorsque la gravité n'agit pas, et Ra° est le nombre de Rayleigh critique en absence d'effet capillaire. L'étude de Nield est importante dans la mesure où elle compare les effets thermocapillaire et thermogravitationnel. Elle permet de quantifier l'évidence : la thermocapillarité est prépondérante pour des petites épaisseurs de fluide, tandis que la gravité est le moteur essentiel de la convection lorsque la phase volumique est importante, pour de grandes épaisseurs.

Par la suite, un regain d'intérêt pour la convection de Marangoni s'est produit, grâce à deux éléments conjoints :

- i) D'une part la volonté de réduire l'influence de la convection principalement due à la gravité lors des processus de croissance cristalline. Ceci a pour conséquence de rendre les effets capillaires prépondérants, alors qu'ils étaient masqués auparavant.
- ii) D'autre part, les avancées de la technologie spatiale ont permis d'envisager et d'obtenir un environnement de microgravité (l'influence de la gravité est réduite d'un facteur 10^4 par exemple) pendant des périodes relativement longues (de plusieurs minutes à plusieurs jours). Dans ce cas évidemment, les forces capillaires deviennent en pratique la cause principale des mouvements convectifs.

Les études se sont maintenant focalisées sur deux types de configuration : le pont liquide et la cavité ouverte; ces deux géométries correspondent aux deux processus les plus répandus de fabrication et de purification de cristaux : la zone fondue et le processus de Bridgman (voir figure I-5).

La caractéristique de ces procédés est l'existence d'un gradient de température parallèle à l'interface, donc d'une convection à grande échelle causée par la thermocapillarité.

Le but commun en science des matériaux est d'obtenir des cristaux les plus gros possibles, de formes régulières et exempts de défauts tels que des striations inhomogènes de particules dopantes (Schwabe [11]). Le moyen de parvenir à ce but est de mieux comprendre la convection lors des processus de cristallisation et en particulier d'étudier la convection oscillante, source de défauts importants. Dès lors on se rend compte qu'une recherche dite fondamentale est nécessaire en vue de mieux contrôler les mouvements convectifs généralement complexes induits dans les procédés technologiques.

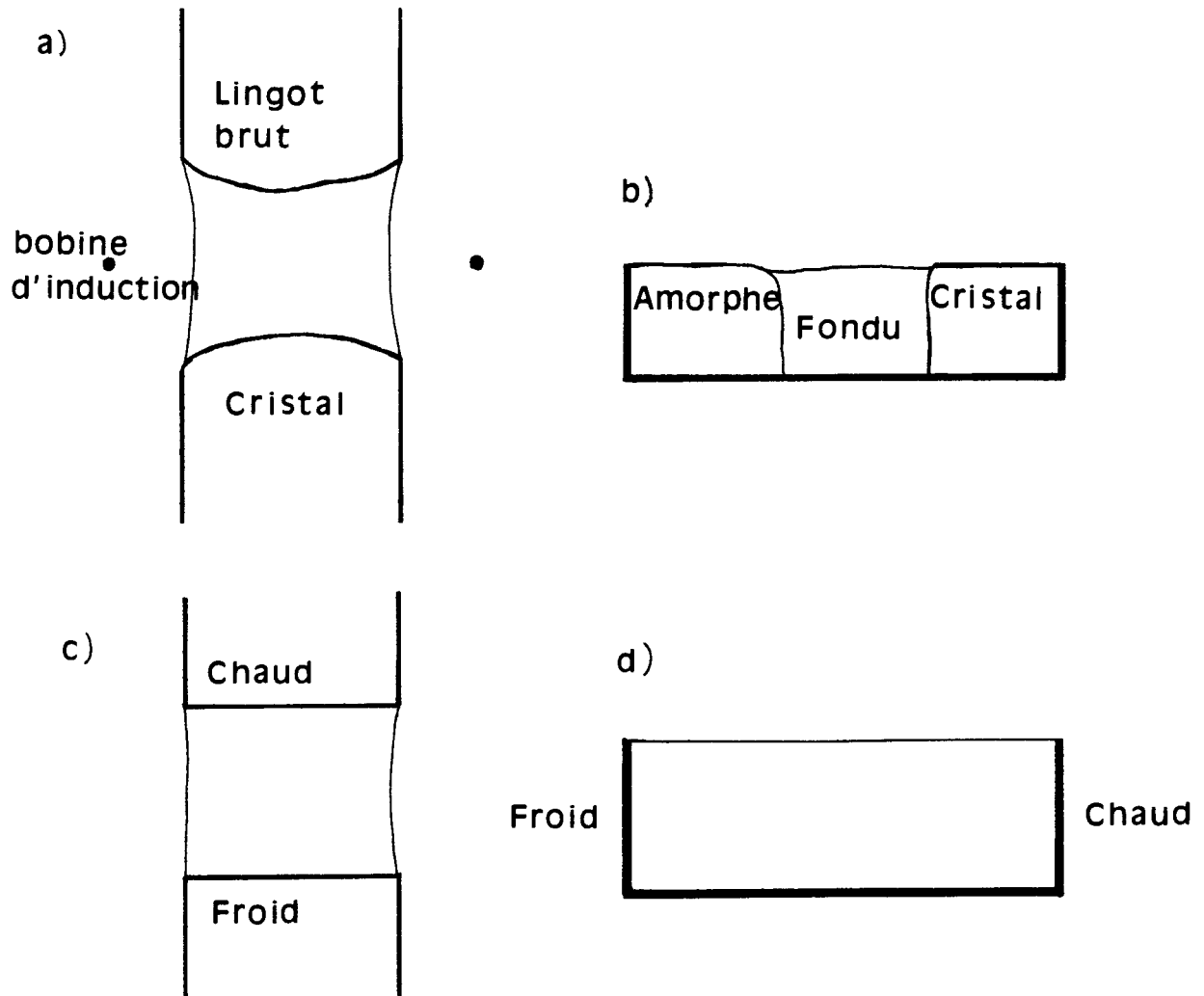


Figure I-5.

Modèles technologiques pour la fabrication et la purification de cristaux, et modèles expérimentaux correspondants.

2. But et résumé du travail.

Le point de départ de ce travail fut l'existence d'une expérience de thermocapillarité réalisée en environnement de microgravité au cours du vol de la fusée-sonde TEXUS 8 (Limbouurg-Fontaine *et al.* [12]). Le liquide utilisé était une solution aqueuse d'heptanol, pour laquelle la tension superficielle présente un minimum en fonction de la température. Cette solution était contenue dans une cavité parallélépipédique soumise à un gradient de température latéral (comme la configuration décrite à la figure I-5.d). Comme les températures imposées étaient telles que $\partial\sigma/\partial T$ était positif, l'expérience montra l'existence d'une cellule convective dont le sens de rotation était tel qu'en surface, les mouvements allaient du froid vers le chaud, des zones de basse tension superficielle vers les zones de haute tension superficielle. Dans l'expérience répétée sur terre, une seconde cellule convective était observée. Créée par la thermogravitation, son sens de rotation était opposé à celui de la cellule thermocapillaire. Cette expérience sur le système eau-heptanol a fourni peu d'informations quantitatives, et les quelques trajets de particules décrits étaient complexes. Comme il n'existait aucune étude ni théorique ni expérimentale complète permettant d'interpréter le couplage et l'interaction entre ces deux types de convection, ceci suscita notre travail.

Tout au long de cette étude, nous avons toujours tenté de confronter les mesures expérimentales à des prévisions théoriques. Nous désirons généralement faire mieux qu'une simple comparaison qualitative concernant par exemple le nombre de cellules convectives ou la forme des lignes de courant. Nous avons la prétention de tenter chaque fois que c'est possible une comparaison quantitative. Dès lors, au chapitre II, nous présentons des expériences sur le système eau-heptanol, toutes effectuées sur terre, et dans lesquelles nous avons mesuré le champ de vitesse par la technique de vélocimétrie laser-Doppler. Les paramètres sur lesquels on agit sont la différence de température et la température moyenne. Nous constatons l'existence de deux cellules superposées, l'une due à la thermocapillarité, l'autre à la thermogravitation. Nous expliquons ce type de convection en développant un modèle numérique dans lequel nous avons incorporé une variation quadratique de la tension superficielle avec la température. Une comparaison quantitative entre les expériences réalisées et le modèle numérique s'avère malaisée, du fait que les nombres Ra et Ma sont de l'ordre de 10^6 , induisant des difficultés d'ordre numérique dans notre modèle. Pour contourner cette difficulté, nous avons développé un modèle analytique, considérant un écoulement parallèle dans une couche liquide d'extension horizontale infinie. L'analyse montre que le rapport Ma/Ra détermine seul la forme du profil de vitesse horizontale en fonction de la hauteur, du moins en l'absence d'instabilité. En particulier, nous montrons que d'après la valeur de ce

rapport, on peut déterminer si une des causes de convection (la thermocapillarité ou la thermogravitation) peut être négligée. Cette analyse induit une série d'expériences avec la solution aqueuse d'heptanol, où l'on fait varier non plus la différence de température mais l'épaisseur de liquide, pour obtenir différents régimes convectifs. Pour les grandes épaisseurs, le processus thermogravitationnel domine; pour des épaisseurs moyennes, on observe deux cellules superposées, et pour des petites épaisseurs, la thermocapillarité semble être la seule cause de mouvement. Nous confrontons ces résultats expérimentaux au modèle analytique unidimensionnel et aux simulations numériques bidimensionnelles. Même s'il y a accord qualitatif concernant la forme des profils de vitesse, nous discutons les différentes causes possibles du désaccord quantitatif constaté. Ce désaccord nous suggère d'effectuer de nouvelles expériences, dans des liquides purs, et avec une tension superficielle monotone décroissante en fonction de la température.

Dès lors dans le chapitre III, nous montrons plusieurs profils de vitesse mesurés dans de l'eau pure. Malgré les difficultés importantes liées aux problèmes de contamination de la surface, nous avons pour la première fois observé et quantifié des mouvements convectifs provoqués par la thermocapillarité dans l'eau. Mais aussi à cause de ces problèmes de contamination, nous avons préféré utiliser un autre liquide.

Le chapitre IV est consacré à la convection thermocapillaire dans l'acétone. Etant donné ses propriétés de tension superficielle, sa difficulté à être contaminé par des surfactants, il est possible de créer des mouvements capillaires par des petites différences de température dans des couches minces d'acétone. Les nombres de Rayleigh et de Marangoni (de l'ordre de 10^3-10^4) rendent alors possibles des comparaisons avec des simulations numériques. De plus, en partant de bas Ra et Ma , et en les augmentant graduellement, nous montrons quels sont les régimes successivement atteints : la circulation monocellulaire comme état de base, un régime multicellulaire mais toujours stationnaire, et enfin un régime oscillant. Les simulations numériques permettent de rendre compte quantitativement des expériences stationnaires. En ce qui concerne les états à dépendance spatio-temporelle, la complexité de l'écoulement ne permet encore que des comparaisons qualitatives. Ces régimes périodiques, que nous décrivons dans des cavités de dimensions finies, sont discutés par rapport aux résultats d'une théorie linéaire de stabilité des mouvements thermocapillaires seuls dans une couche horizontale d'extension infinie.

Comme au chapitre II nous avons utilisé un mélange eau-heptanol supposé rester homogène en composition, au chapitre V, nous considérons l'influence possible de la thermodiffusion sur la convection thermocapillaire. La tension superficielle varie souvent fortement avec la concentration d'un soluté. Comme la thermodiffusion crée des inhomogénéités de concentration y compris en surface, le signe même du gradient $\partial\sigma/\partial x$ pourrait être modifié. Nous montrons qu'on peut observer des cellules superposées contrarotatives, tout comme dans le cas de solutions aqueuses d'heptanol présentant un minimum de σ , alors que $\partial\sigma/\partial T$ est négatif, pour autant qu'on ajoute une contribution liée à la variation de la tension superficielle avec la concentration.

Enfin, comme l'eau et l'heptanol ne sont pas miscibles en toute proportion, le chapitre VI est consacré à la convection thermocapillaire et thermogravitationnelle dans deux couches liquides immiscibles superposées soumises à un gradient de température latéral. A cause de la continuité des vitesses à l'interface, il existe plusieurs possibilités quant au nombre de cellules convectives dans chaque couche et leur sens de rotation. Nous montrons expérimentalement le rôle important de la tension interfaciale. Nous développons un modèle analytique capable de rendre compte des profils de vitesse expérimentaux.

3. Les équations du mouvement.

Les équations fondamentales de l'hydrodynamique, destinées à traiter des problèmes de fluides visqueux incompressibles, newtoniens, dans le champ de la pesanteur comme seule force extérieure sont les suivantes (voir par exemple Platten et Legros [13]) :

3.a. L'équation de continuité.

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{I-6})$$

où V_x , V_y , V_z sont les trois composantes du vecteur vitesse dans l'espace cartésien x , y , z , tel qu'illustré à la Figure I-6. Par convention, l'axe z est orienté verticalement et g représente l'accélération de la gravité.

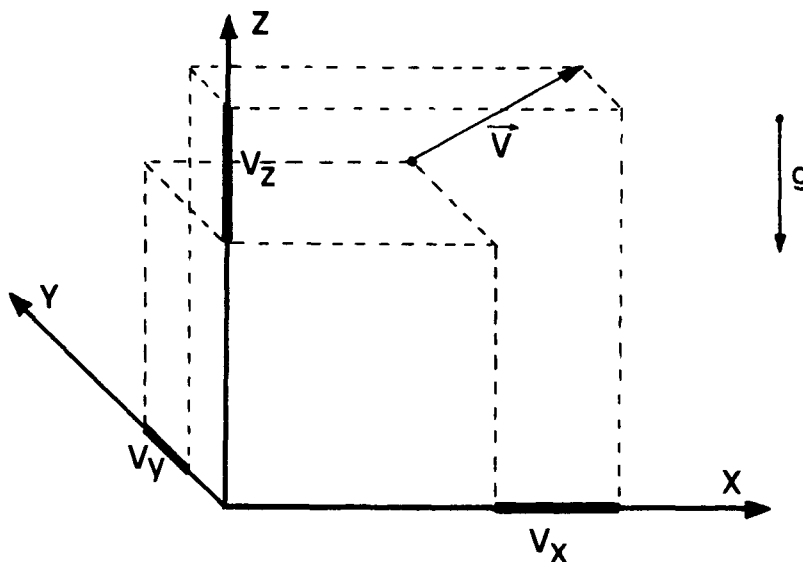


Figure I-6.

3.b. L'équation de conservation de la quantité de mouvement.

Nous considérons l'approximation classique de Boussinesq : les coefficients phénoménologiques sont supposés constants (viscosité, diffusivité thermique, densité) à l'exception de la densité dans le terme de la force extérieure, puisque c'est précisément les

différences de densité qui rendent cette force agissante.

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = - \sum_{i=x,y,z} V_i \frac{\partial V_x}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 V_x \quad (\text{I-7})$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t} = - \sum_{i=x,y,z} V_i \frac{\partial V_y}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 V_y \quad (\text{I-8})$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} = - \sum_{i=x,y,z} V_i \frac{\partial V_z}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 V_z + \frac{\rho}{\rho_0} g \quad (\text{I-9})$$

avec
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Dans ces équations, p est la pression, ν la viscosité cinématique, ρ la densité et ρ_0 la densité de référence à une température T_0 . Ces équations de base doivent donc être complétées par une équation d'état pour ρ . Pour les liquides, on a l'habitude de prendre la loi linéaire :

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha (T - T_0)] \quad (\text{I-10})$$

où α est le coefficient d'expansion volumique.

3.c. L'équation de conservation de l'énergie.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = - \sum_{i=x,y,z} V_i \frac{\partial T}{\partial x_i} + \kappa \nabla^2 T \quad (\text{I-11})$$

où κ est la diffusivité thermique, reliée à la conductibilité thermique λ , à la densité ρ_0 et à la chaleur spécifique C_v par la relation :

$$\kappa = \frac{\lambda}{\rho_0 C_v} \quad (\text{I-12})$$

Comme d'habitude, on ne tient pas compte d'un terme de dissipation visqueuse, négligeable pour les fluides considérés dans ce travail.

3.d. La conservation de la masse pour les espèces chimiques individuelles.

Dans le chapitre V, nous examinerons une couche fluide à deux constituants sujette à la thermodiffusion. Dès lors, nous utiliserons les équations précédentes complétées par la conservation de la masse des espèces chimiques individuelles, en tenant compte de l'effet de thermodiffusion.

$$\frac{\partial N}{\partial t} = - \sum_i v_i \frac{\partial N}{\partial x_i} + D \nabla^2 N + \sum_i D_T \frac{\partial}{\partial x_i} \left[N (1-N) \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] \quad (\text{I-13})$$

où N est la fraction massique d'un des constituants. D est le coefficient de diffusion isotherme et D_T le coefficient de thermodiffusion. De plus, on doit utiliser une équation d'état plus complète pour ρ , tenant compte d'un coefficient d'expansion lié à la fraction massique. Pour les liquides, on a l'habitude de prendre la loi linéaire :

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha (T - T_0) + \beta (N - N^{in})] \quad (\text{I-14})$$

Une valeur positive de β implique donc que le titre massique N est celui du constituant le plus dense de la solution. D'autre part, en l'absence de mouvements convectifs, mais en présence d'un gradient de température, le signe de D_T/D détermine le sens de migration des espèces chimiques (de Groot [14]).

3.e. Les conditions aux limites.

L'intégration des équations différentielles précédentes requiert la connaissance de conditions aux limites, que nous prendrons le plus conformément possible aux situations expérimentales réalisées plus tard.

Du point de vue des conditions thermiques, la température peut être fixée à une valeur constante si on désire modéliser une paroi thermostatisée. Par contre, si on veut plutôt rendre compte d'une paroi isolante, on adoptera une condition de flux de chaleur nul à travers cette limite, soit donc :

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{I-15})$$

On pourrait également envisager une condition de transfert de chaleur par échange de Newton (Bird *et al.* [15]) avec une ambiance à température fixée, par exemple un gaz à la température T_{gaz} . Le flux de chaleur normal à travers une interface en contact avec une telle ambiance s'écrit alors

$$J_i = -\lambda \left[\frac{\partial T}{\partial x_i} \right] = h_N (T - T_{\text{gaz}}) \quad (\text{I-16})$$

où h_N est appelé le coefficient de transfert de Newton.

Pour les conditions mécaniques sur les vitesses (voir par exemple Chandrasekhar [16]), on écrit lorsque le fluide est confiné entre des limites imperméables, que les composantes du vecteur vitesse normales à ces limites y sont nulles. Du point de vue des composantes du vecteur vitesse parallèles aux limites et des forces tangentielles qui s'y appliquent, nous distinguerons trois cas :

- 1) Des bords rigides, pour lesquels aucun glissement n'est possible et donc pour lesquels les composantes du vecteur vitesse parallèles aux bords sont également nulles.
- 2) Des bords libres sur lesquels aucune force tangentielle n'agit, impliquant donc pour une limite horizontale indéformable ($z = \text{constante}$, $V_z = 0$) que :

$$\frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\partial V_y}{\partial z} = 0 \quad (\text{I-17})$$

- 3) Des bords soumis à des forces tangentielles dues à la non-uniformité de la tension superficielle σ (dépendant de la température et du titre massique par exemple). La conservation de la quantité de mouvement devient alors, pour une surface horizontale indéformable :

$$\mu \frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial N} \frac{\partial N}{\partial x} \quad (\text{I-18})$$

Lorsqu'on considère l'interface séparant deux milieux liquides (1) et (2), on a alors, comme Levich [17] et Landau *et al.* [18] le proposent :

$$\mu^{(1)} \frac{\partial V_x^{(1)}}{\partial z} - \mu^{(2)} \frac{\partial V_x^{(2)}}{\partial z} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (\text{I-19})$$

Ces deux dernières conditions sont fondamentales dans le présent travail. Des conditions aux bords plus complexes existent, qui peuvent tenir compte d'autres effets tels que la déformation de la surface, une viscosité de surface, une élasticité de surface,.... De telles conditions introduisent un nombre plus important de paramètres, qu'il n'est pas toujours aisé de déterminer expérimentalement.

Dans les cas où l'on considère un mélange soumis à l'effet de thermodiffusion, on doit tenir compte de conditions sur la fraction massique :

Aux bords, le flux de thermodiffusion est nul et pour une couche d'épaisseur h soumise à une différence de température ΔT , on a (voir Platten et al. par exemple [13]) :

$$-\rho_0 D \frac{\partial N}{\partial x_i} - \rho_0 D_T N (1-N) \left(\frac{-\Delta T}{h}\right) = 0 \quad (\text{I-20})$$

3.f. La formulation des équations en termes de vorticité et de fonction de courant.

Puisque nous étudierons théoriquement la convection dans des situations bidimensionnelles (la composante V_y du vecteur vitesse ainsi que les dérivées de toutes les variables suivant la direction y ne seront pas considérées), il est commode d'introduire les variables fonction de courant (notée Ψ) et vorticité (notée Φ). Ces variables sont définies par les relations :

$$V_x = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad V_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \Phi = \nabla^2 \Psi \quad (\text{I-21})$$

A l'aide de ces notations, l'équation de continuité (I-6) est automatiquement satisfaite et les équations bidimensionnelles de Navier-Stokes deviennent, par élimination de la pression et pour un liquide de composition chimique homogène :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial(\Psi, \Phi)}{\partial(x, z)} + \nu \nabla^2 \Phi - g \alpha \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{I-22})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial(\Psi, T)}{\partial(x, z)} + \kappa \nabla^2 T \quad (\text{I-23})$$

$$\Phi = \nabla^2 \Psi \quad (\text{I-24})$$

avec

$$\frac{\partial(A, B)}{\partial(x, z)} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial B}{\partial x}$$

Les conditions aux bords (I-17) et (I-18) impliquant les vitesses se récrivent comme suit :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \Phi = 0 \quad (\text{I-25})$$

$$\mu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (\text{I-26})$$

3.g. La réduction sans dimension des variables.

Le processus menant à rendre sans dimension les variables possède le double avantage de :

- i) diminuer le nombre de paramètres du problème en introduisant des groupements des paramètres phénoménologiques.
- ii) faire correspondre des expériences apparemment totalement différentes, grâce à la définition d'échelles ou d'unités "universelles".

Une longueur caractéristique d , par exemple la hauteur h d'une cavité contenant du liquide, sert d'unité de référence pour définir des coordonnées non-dimensionnelles. Pour le temps, les vitesses, la fonction de courant et la vorticité, on utilise des facteurs combinant la viscosité et la longueur de référence. Pour la température, l'unité de référence est l'écart de température ΔT imposé comme contrainte ou paramètre de contrôle. De plus, lors de la réduction de la température, on lui soustrait la valeur moyenne de la température du liquide $\langle T \rangle$, de telle sorte que les températures réduites sont comprises entre -0.5 et 0.5 .

La table I-1 résume les unités choisies comme références.

A l'aide de ces nouvelles unités, on peut récrire les équations (I-22) et (I-23) :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial(\Psi, \Phi)}{\partial(x, z)} + \nabla^2 \Phi - \frac{Ra}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{I-27})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial(\Psi, T)}{\partial(x, z)} + \frac{1}{Pr} \nabla^2 T \quad (\text{I-28})$$

Table I-1.

Grandeur	Symbole	Unité de référence
coordonnée	x ou z	d
temps	t	d^2/ν
vitesse	V_x ou V_z	ν/d
fonction de courant	Ψ	ν
vorticité	Φ	ν/d^2
température	T	ΔT

Ces transformations ont fait apparaître des groupements ou nombres sans dimension :

Le nombre de Rayleigh :
$$Ra = \frac{g \alpha \Delta T d^3}{\kappa \nu} \quad (I-29)$$

Le nombre de Prandtl :
$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad (I-30)$$

Par ailleurs, le même processus de réduction effectué sur les conditions aux bords (I-16) et (I-18) fait apparaître deux autres nombres sans dimension :

Le nombre de Marangoni :
$$Ma = \frac{- \left[\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right] \Delta T d}{\rho \kappa \nu} \quad (I-31)$$

Le nombre de Biot :
$$Bi = \frac{h_N d}{\lambda} \quad (I-32)$$

On prend souvent comme hypothèse que $\partial\sigma/\partial T$ est constant. On verra plus tard que lorsque ce n'est pas le cas, on doit utiliser des nombres de Marangoni différents, tenant compte de la façon dont la tension superficielle dépend de la température.

Pour caractériser l'apport de la convection au transfert de chaleur, on utilise un nombre de Nusselt Nu, défini par la moyenne du flux de chaleur normal à une paroi, divisé par le flux qui existerait à l'état purement conductif.

4. Bibliographie.

- [1] Levich, V.G., Krylov, V.S. : "Surface tension-driven phenomena", in Annual review of Fluid Mechanics (1969).
- [2] Scriven, L.E., Sternling, C.V. : "The Marangoni effects", Nature, 187, pp 186-188 (1960).
- [3] Thomson, J. : "On certain curious motions observable at the surfaces of wine and other alcoholic liquors", Phil. Mag., ser. 4, 10, p330 (1855).
- [4] Van der Mensbrugge, G.L., Mém. Couronnés L'Acad. Roy. Belg., 34 (1869).
- [5] Marangoni, C.G.M., Ann. Phys. (Poggendorff), 143, 337 (1871).
- [6] Bénard, H. : "Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en régime permanent", Annales de chimie et de physique, 23, pp 62-144 (1901).
- [7] Pearson, J.R.A. : "On convection cells induced by surface tension", Journal of Fluid Mechanics, 4, pp 489-500 (1958).
- [8] Rayleigh, Lord, Scientific Papers, Vol.6, p432 Cambridge University Press (1916).
- [9] Block, M. : "Surface tension as the cause of Bénard cells and surface deformation in a liquid film", Nature, 183, pp 650-651 (1956).
- [10] Nield, D.A. : "Surface tension and buoyancy effects in cellular convection", Journal of Fluid Mechanics, 20, pp 341-351 (1964).
- [11] Schwabe, D. : "Surface-Tension-Driven Flow in Crystal Growth Melts", in Crystals 11, pp 75-112, Springer-Verlag (1988).
- [12] Limbourg-Fontaine, M.Cl., Pétré, G., Legros, J.C. : "TEXUS 8 experiment : effects of a surface tension minimum on thermocapillary convection", PhysicoChemical Hydrodynamics 6(3), pp 301-310 (1985).

Chapitre II.

Convection thermocapillaire dans le système eau–heptanol.

1. Introduction.

La tension superficielle σ est le plus couramment une fonction monotone décroissante de la température. De ce fait, les mouvements provoqués par un gradient de température en surface vont des régions de basse tension superficielle vers les régions de haute tension superficielle, donc du chaud vers le froid. Ces mouvements de surface se font alors dans le même sens que les mouvements thermogravitationnels (lorsque bien sûr la densité est une fonction décroissante de la température).

Il existe cependant un certain nombre de cas pour lesquels la tension superficielle augmente avec la température. Les forces tangentielles en surface sont alors orientées en sens inverse, du froid vers le chaud. Par exemple, certaines céramiques MnO–SiO₂ ont un tel comportement dans la gamme de température 1300 °C – 1600 °C, et pour des pourcentages en SiO₂ supérieurs à 30 % (King [1], voir la figure II-1).

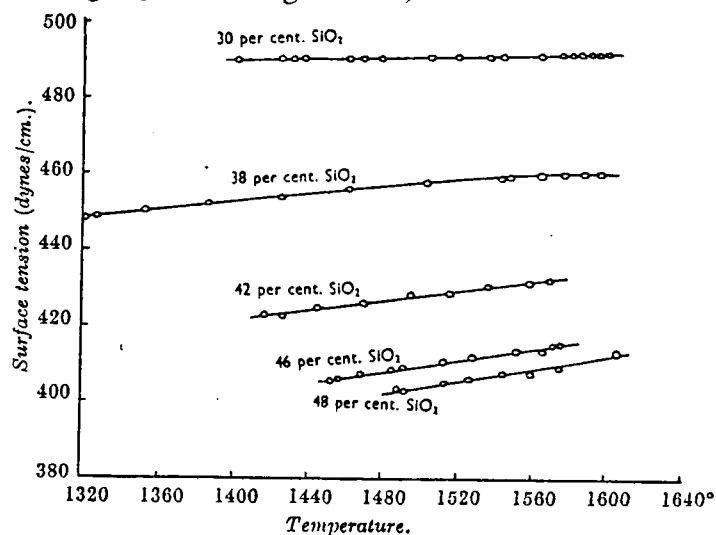


Figure II-1.

Tension superficielle du système MnO–SiO₂ en fonction de la température et pour des compositions différentes.

Il semble d'ailleurs que ce soit une règle générale, pour les systèmes binaires contenant SiO_2 : le coefficient de température de la tension superficielle ($\partial\sigma/\partial T$) augmente avec le pourcentage de silicate, devenant donc positif à partir d'une certaine composition (Elliot *et al.* [2], voir la figure II-2). Etant donné l'importance des écoulements entre les pores des céramiques, et leur interaction avec les processus chimiques, les propriétés de tension superficielle sont très importantes dans la fabrication des céramiques.

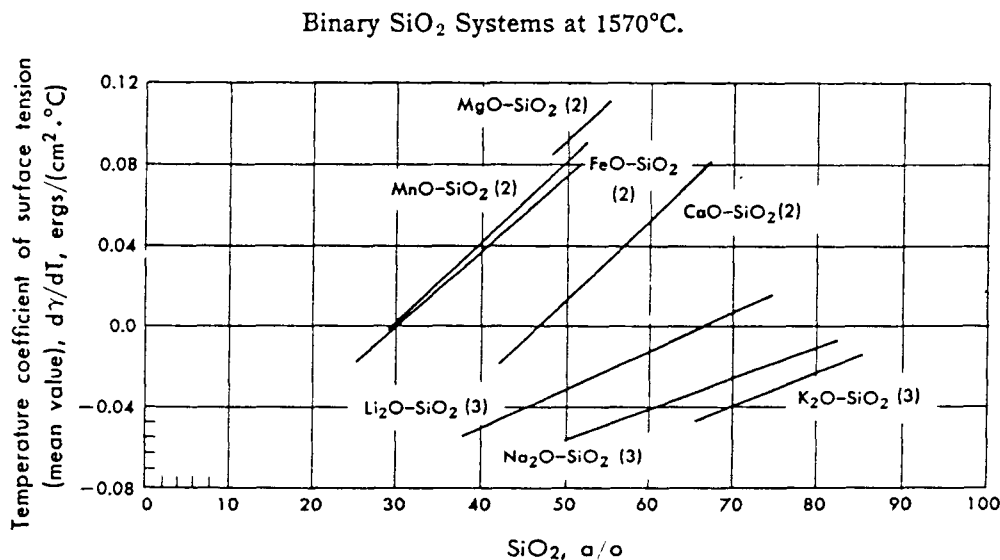


Figure II-2.

Coefficient $\partial\sigma/\partial T$ en fonction de la composition
en SiO_2 pour plusieurs systèmes binaires à 1370 °C.

Un certain nombre d'alliages liquides, comme Ag-Pb, Cu-Pb, Ag-Sn, Al-Sn, dans la gamme de température 600-1000 K, ont également un coefficient $\partial\sigma/\partial T$ positif ou parfois nul à certaines températures (Desré *et al.* [3]). Cela pourrait être très intéressant pour des expériences de cristallisation en microgravité. Il n'est cependant pas aisé d'effectuer des études d'écoulements dans de tels fluides, à de si hautes températures (Camel *et al.* [4]).

Heureusement, il existe d'autres types de solutions pour lesquelles on peut avoir $\partial\sigma/\partial T > 0$, mais à des températures proches de la température ambiante. C'est le cas de solutions aqueuses de chlorure de dodécylammonium (Motomura *et al.* [5]). C'est également le cas de beaucoup de solutions aqueuses d'alcools à longues chaînes (plus de 4 atomes de carbone). En particulier, pour ces solutions, la tension superficielle présente une allure parabolique en fonction de la température, comme on peut l'observer sur la figure II-3 (Vochten *et al.* [6], Pétré *et al.* [7]). Notons que les concentrations en alcool ont été ajustées de telle manière que toutes les courbes $\sigma(T)$ passent par la même valeur à 15°C.

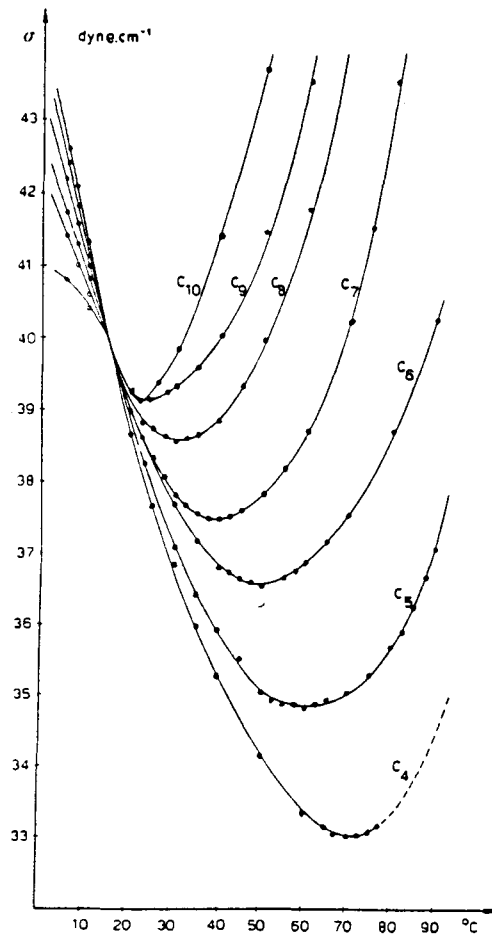


Figure II-3.

Tension superficielle en fonction de la température
pour des solutions aqueuses d'alcools à chaînes linéaires.

La figure II-4 montre la tension superficielle d'une solution de n-heptanol de concentration $6.3 \cdot 10^{-3}$ mole/litre (Limbourg [8]). Dans ce cas, le minimum de σ est atteint à une température d'environ 40 °C. Les données expérimentales peuvent être approchées par une loi empirique parabolique. On obtient alors dans le cas de cette concentration en n-heptanol :

$$\sigma = 45.79 - 0.29 T + 3.80 \cdot 10^{-3} T^2 \quad (\text{II-1})$$

où σ est exprimée en mN m⁻¹ et T en °C.

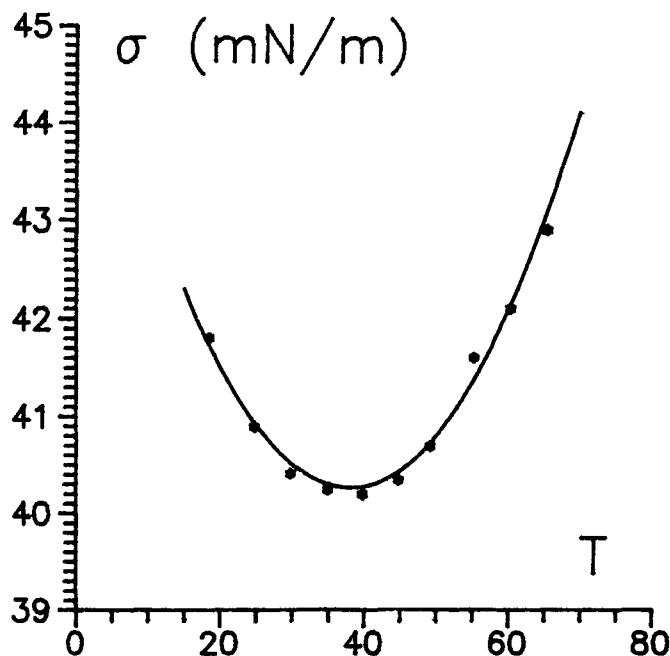


Figure II-4.

Tension superficielle d'une solution aqueuse
 $6.3 \cdot 10^{-3}$ mole/litre de n-heptanol dans l'eau.

On réalise facilement l'importance d'un tel système pour étudier expérimentalement les mouvements convectifs de fluides caractérisés par des $\partial\sigma/\partial T$ positifs, puisqu'il est facile de travailler à une température voisine de 50 °C. De plus, ces solutions sont transparentes et permettent l'usage de méthodes optiques pour observer et mesurer les mouvements convectifs.

Une première étude qualitative (Pétre *et al.* [9]) a permis de montrer que l'existence du minimum de tension superficielle, mise en évidence par des mesures d'équilibre de σ , est confirmée dans des conditions dynamiques, où la surface est constamment renouvelée par un apport convectif de solution en provenance du coeur de phase. Suivant la température moyenne $\langle T \rangle$ de ces expériences (au delà ou en deçà de la température du minimum), les mouvements en surface peuvent être inversés : du froid vers le chaud pour $\langle T \rangle > 40$ °C et du chaud vers le froid pour $\langle T \rangle < 40$ °C.

Une seconde étude utilisant le même système eau-heptanol (Limbourg-Fontaine *et al.* [10]) fut effectuée durant le vol de la fusée sonde TEXUS 8, permettant un environnement de microgravité de près de 6 minutes (avec une accélération résiduelle maximale d'environ 10000 fois inférieure à l'accélération de la gravité terrestre). La solution était contenue dans une cavité de 30 mm de largeur (voir figure II-5). La distance séparant les faces transparentes avant et arrière de cette cellule de mesure était de 10 mm. La hauteur de la couche fluide valait approximativement 8 mm. Des petites barres triangulaires en téflon étaient incrustées dans les parois latérales. Leur rôle était de stabiliser la forme du ménisque dans les expériences pratiquées en apesanteur. Une différence de température ΔT de 20 K (côté froid à

46 °C et côté chaud à 66 °C) était imposée entre les deux parois latérales. En imposant un aussi grand ΔT , les expérimentateurs évitaient ainsi les problèmes de contamination, les quelques substances tensio-actives initialement présentes en surface étant ensuite littéralement balayées de la surface (Levich [11]).

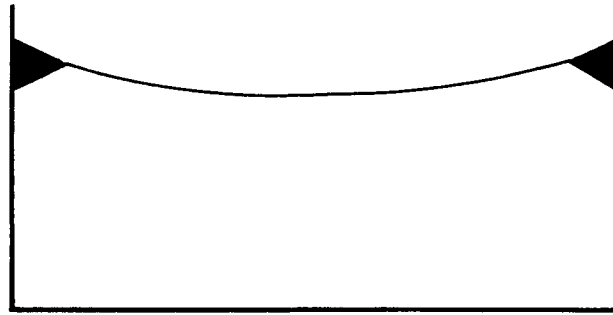


Figure II-5.

Schéma de la cellule de mesure
utilisée lors du vol TEXUS 8.

Comme la température était partout supérieure à 40 °C (la température du minimum de σ), l'expérience révéla un mouvement en surface du froid vers le chaud, avec un retour du fluide dans le fond de la cavité. Cela est suggéré à partir du trajet d'une particule traçante particulière (une bille de latex d'environ 100 μm de diamètre). Les positions successives de cette particule sont représentées à la figure II-6. La vitesse maximale observée en surface était de l'ordre de 0.8 mm/s.

Les conditions expérimentales n'ont certainement pas permis d'atteindre un état convectif stationnaire, vu la durée très courte de l'expérience (242 secondes de microgravité après le remplissage de la cellule de mesure). Celle-ci fut donc répétée sur terre (Limbourg-Fontaine *et al.* [10]), dans des conditions thermiques du même ordre (côté froid à 45 °C et côté chaud à 60 °C). Les trajets suivis par quelques particules traçantes (figure II-7) suggèrent l'existence de deux cellules convectives superposées; la cellule convective supérieure est provoquée par les forces de tension superficielle (tout comme en apesanteur) avec un mouvement en surface du froid vers le chaud, et un retour du fluide juste en dessous de la surface. La cellule inférieure est due aux forces thermogravitationnelles : le liquide réchauffé, donc moins dense, tend à monter le long de la paroi chaude. A l'opposé, le liquide refroidi et plus dense descend près du bord froid. On remarque aussi la présence de vortex près des bords latéraux, liés probablement à une instabilité. Les mouvements sont très complexes et ne sont d'ailleurs pas bien compris.

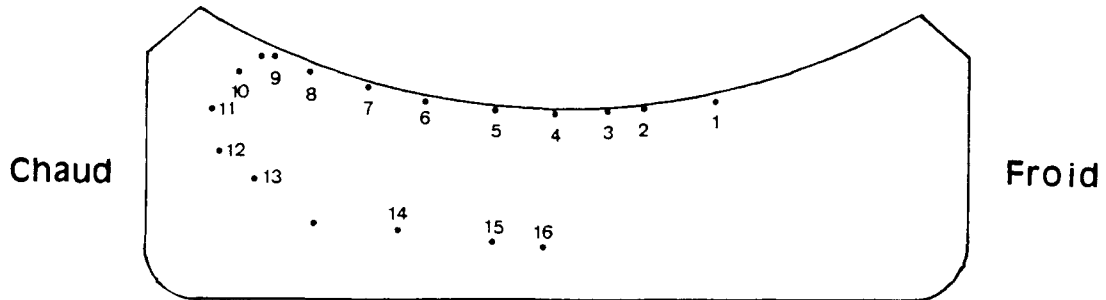


Figure II-6.

Relevés successifs de la position d'une particule traçante au cours de l'expérience convective du vol TEXUS 8.

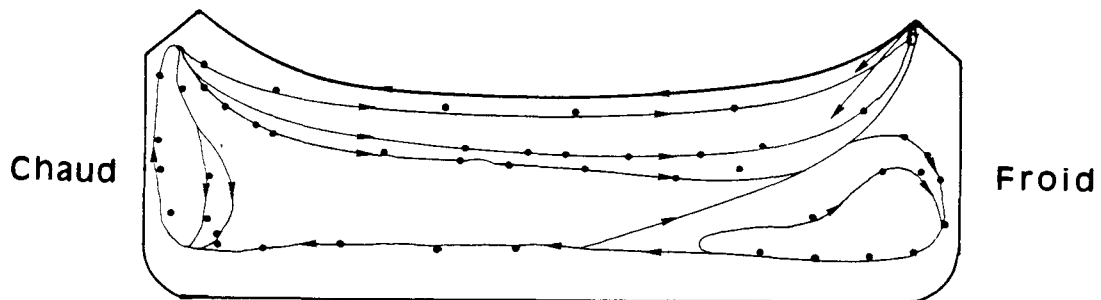


Figure II-7.

Trajets suivis par des particules traçantes dans une expérience sur terre avec une solution eau-heptanol.

En dehors de l'intérêt d'effectuer des expériences en microgravité dans des conditions où $\partial\sigma/\partial T$ est positif, le simple fait d'obtenir des cellules convectives superposées et contrarotatives, dues à des causes différentes, est remarquable. Nous avons donc porté notre attention sur le problème. Mais, puisque les expériences réalisées précédemment étaient peu quantitatives, nous avons tout d'abord décidé de recommencer une étude expérimentale sur terre, en utilisant une technique de mesure plus précise pour décrire le champ de vitesse.

2. Expériences à épaisseur de liquide constante.

2.a. La technique de mesure.

La technique utilisée est la vélocimétrie laser-Doppler, choisie pour ses deux principales qualités : c'est une méthode non-perturbative (car basée sur l'utilisation d'une sonde optique) qui permet une détermination précise des composantes de vitesse. Les détails concernant l'utilisation de cette technique et l'équipement utilisé pour ce travail sont rassemblés à l'annexe B. Notons simplement ici que notre équipement permet de mesurer n'importe quelle composante de vitesse, y compris son signe, perpendiculairement à l'axe optique du vélocimètre (soit donc dans les expériences qui seront décrites et suivant nos conventions toute combinaison de V_X et V_Z). Les vitesses que nous pouvons mesurer vont du $\mu\text{m/s}$ au m/s . Cette technique permet d'obtenir des résultats quantitatifs nettement meilleurs que ceux obtenus par des procédés tels que les repérages et les suivis de particules traçantes sur des clichés photographiques successifs, comme ceux utilisés pour établir les figures II-6 et II-7. D'autant que ces particules, de tailles relativement importantes ($100 \mu\text{m}$) pour être décelables sur les clichés, peuvent entraîner facilement une contamination de la surface. De plus, pour éviter les inconvénients liés à leur sédimentation, on est obligé d'agiter régulièrement le liquide (donc de perturber l'écoulement). En vélocimétrie laser-Doppler, on doit parfois, suivant l'origine et la pureté du fluide, utiliser un ensemencement à l'aide de très petites particules sphériques en latex (d'environ $0.9 \mu\text{m}$ de diamètre) destinées à diffuser la lumière. Dans des conditions normales, la quantité de ces particules est extrêmement limitée et nous n'avons jamais constaté d'effet sur les mouvements en surface, ni en coeur de phase. Souvent même, l'ensemencement naturel est suffisant.

2.b. Profils $V_x(Z)$.

La cavité utilisée pour nos expériences est celle qui a été employée pour les expériences TEXUS 8* (Limboung-Fontaine *et al.* [10]); un schéma en a été donné à la figure II-5. Rappelons que la largeur entre les parois chaude et froide est de 30 mm , et la distance entre les faces transparentes avant et arrière de 10 mm . Dans cette cellule de mesure, le liquide étudié est introduit au moyen d'une seringue, et un dispositif de fermeture permet de limiter

*

Nous remercions le Dr. Legros (U.L.B.) pour le prêt de la cellule de mesure.

l'évaporation de la solution. Les deux parois latérales sont thermostatisées au moyen de bains d'eau thermorégulés. La précision de régulation des températures est toujours de l'ordre de cinq centièmes de degré. Notons ici que toutes nos expériences seront présentées avec la convention que le bord froid est à droite, tandis que le bord chaud est à gauche. Le gradient $\partial T/\partial x$ est donc positif.

L'ensemble de l'appareillage est placé sur un dispositif de translation, alors que le vélocimètre demeure fixe. La translation permet de localiser la sonde optique de mesure aux coordonnées désirées à l'intérieur de la cellule expérimentale. Le dispositif primitif (à trois axes), de fonctionnement manuel, possédait une précision de 0.1 mm, tandis qu'ultérieurement, le laboratoire a été équipé d'un dispositif motorisé sur deux axes, d'une précision de 10 microns.

La solution aqueuse d'heptanol utilisée avait une concentration de $6.3 \cdot 10^{-3}$ mole/litre. Les mesures de tension superficielle concernant cette solution ont été présentées à la figure II-4, tandis qu'une approximation par une fonction parabolique en est donnée par l'éq. (II-1).

Dans une première expérience, l'eau de thermostatisation du bord froid était à la température $T_{\text{froid}} = 49.35$ °C, et la température correspondante pour le côté chaud valait $T_{\text{chaud}} = 54.1$ °C, soit un écart $\Delta T = 4.75$ K. Nous avons mesuré la composante horizontale de la vitesse en fonction de la hauteur le long de la médiane verticale de la cavité parallélépipédique. L'épaisseur de la couche fluide à cet endroit était 8.7 mm (voir figure II-8).

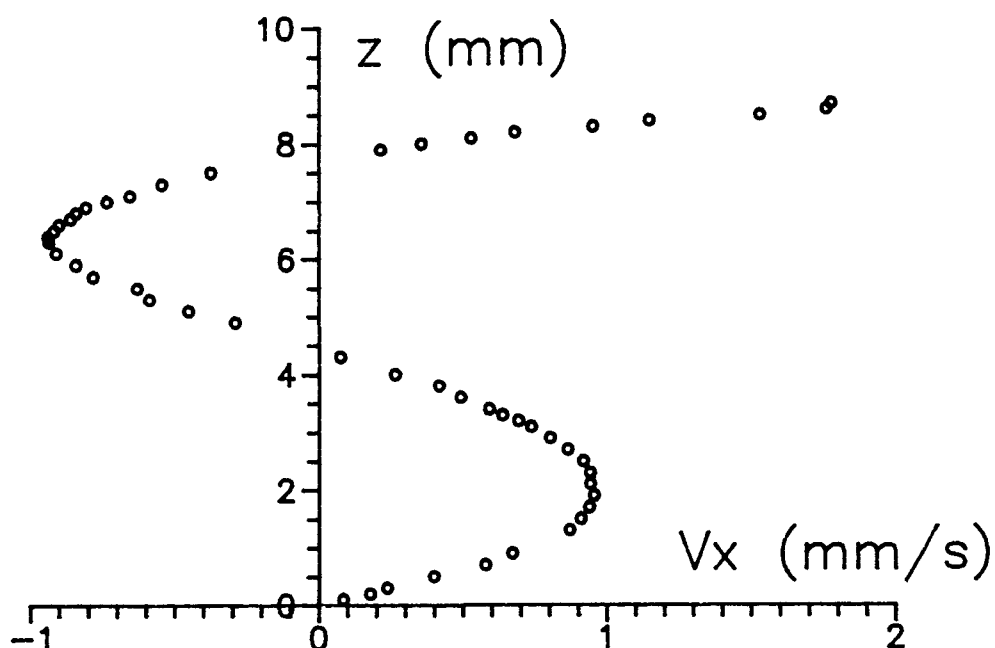


Figure II-8.

Profil de la vitesse horizontale en fonction de la hauteur, pour une solution aqueuse d'heptanol $6.3 \cdot 10^{-3}$ mole/litre; $T_{\text{froid}} = 49.35$ °C, $T_{\text{chaud}} = 54.1$ °C.

On observe clairement une vitesse positive et grande en surface (+1.78 mm/s), dirigée du froid vers le chaud, ce qui est attendu puisqu'à la température moyenne de l'expérience, $\partial\sigma/\partial T$ est positif. La pente $\partial V_x/\partial z$ est bien entendu non nulle, ce qui est caractéristique de l'action des forces capillaires. Un peu en dessous de la surface, on observe un retour de liquide ($V_x < 0$) vers le côté froid, mais la vitesse extrême de ce lobe (-0.94 mm/s) est de moitié inférieure à la vitesse en surface. Un second lobe, avec une vitesse extrême positive du même ordre (+0.96 mm/s), crée une circulation en bas de la cavité du froid vers le chaud. L'interprétation de ce profil est schématisée à la figure II-9.

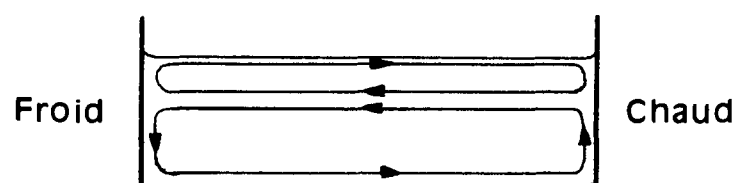


Figure II-9.

Interprétation des mouvements convectifs à partir
du profil $V_x(z)$ de la figure II-8.

Conformément aux visualisations de Limbourg-Fontaine *et al.* [10], il doit y avoir deux cellules convectives superposées. La première, d'épaisseur fine, est due à la capillarité. La seconde, plus épaisse, est due aux forces volumiques de la thermogravitation. La vélocimétrie laser-Doppler ne permet malheureusement pas d'obtenir une vue complète de la structure convective. Cependant, pour une expérience, nous avons effectué un relevé des composantes V_x et V_z de la vitesse en un grand nombre de points de la cavité. Nous avons pu de la sorte reconstituer une carte donnant le vecteur vitesse en de nombreux points, caractérisé chaque fois par une flèche orientée dans la direction de l'écoulement, et de longueur proportionnelle à la vitesse du fluide. Cette carte est présentée à la figure II-10. Les conditions de cette expérience étaient : épaisseur de liquide $d = 8.3$ mm, $T_{\text{froid}} = 50.5$ °C, $T_{\text{chaud}} = 52.7$ °C. On constate une fois de plus la superposition des deux cellules convectives contrarotatives.

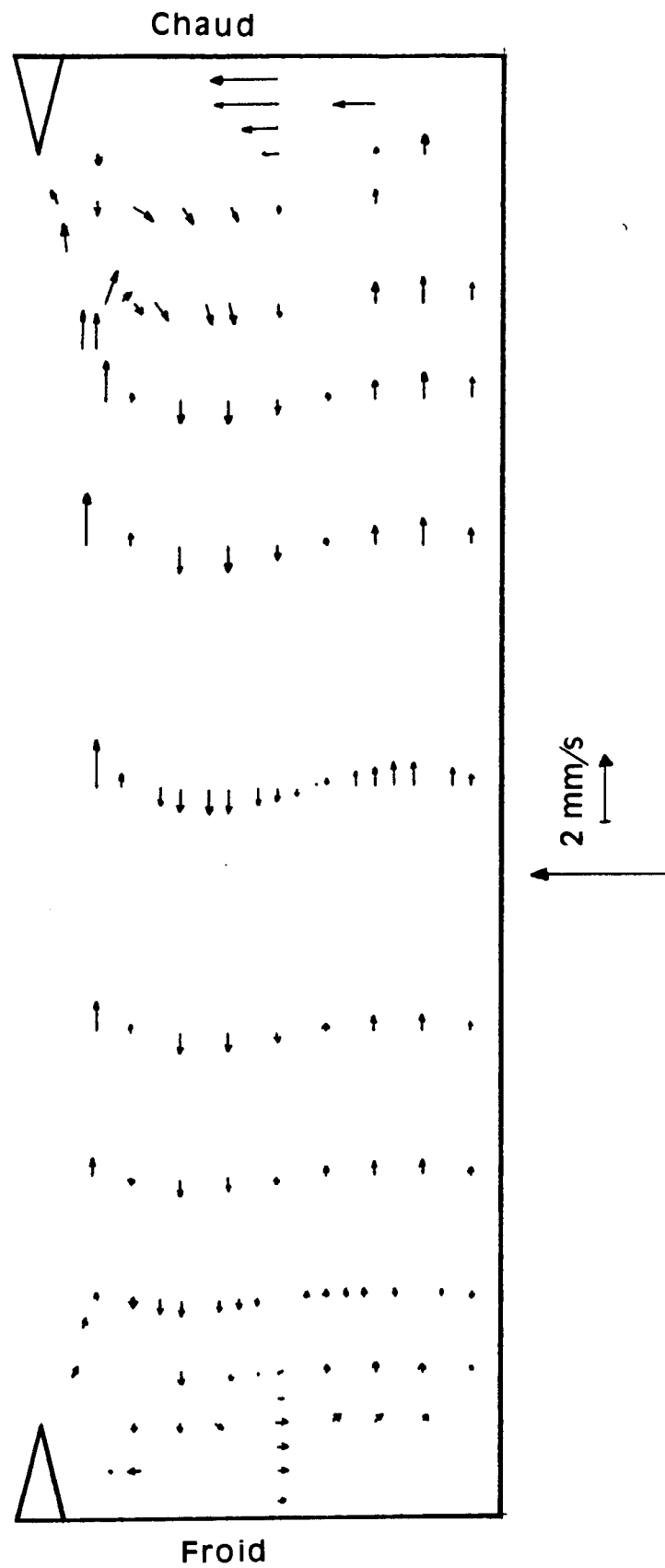


Figure II-10.

Carte du champ de vitesse complet, pour
 $d = 8.3 \text{ mm}$, $T_{\text{froid}} = 50.5 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_{\text{chaud}} = 52.7 \text{ }^\circ\text{C}$.

Dans une autre expérience, nous avons à nouveau mesuré le profil $V_x(z)$. L'épaisseur de liquide était pratiquement inchangée ($d = 8.6$ mm), mais les températures ont été modifiées : $T_{\text{froid}} = 44.4$ °C (au lieu de 49.35 °C) et $T_{\text{chaud}} = 54.15$ °C (presque inchangée). La différence $\Delta T = 9.75$ K est donc environ double du ΔT de la première expérience. Le profil de la vitesse horizontale sur la médiane verticale (figure II-11) a la même forme que le profil de la figure II-8 obtenu pour $\Delta T = 4.75$ K.

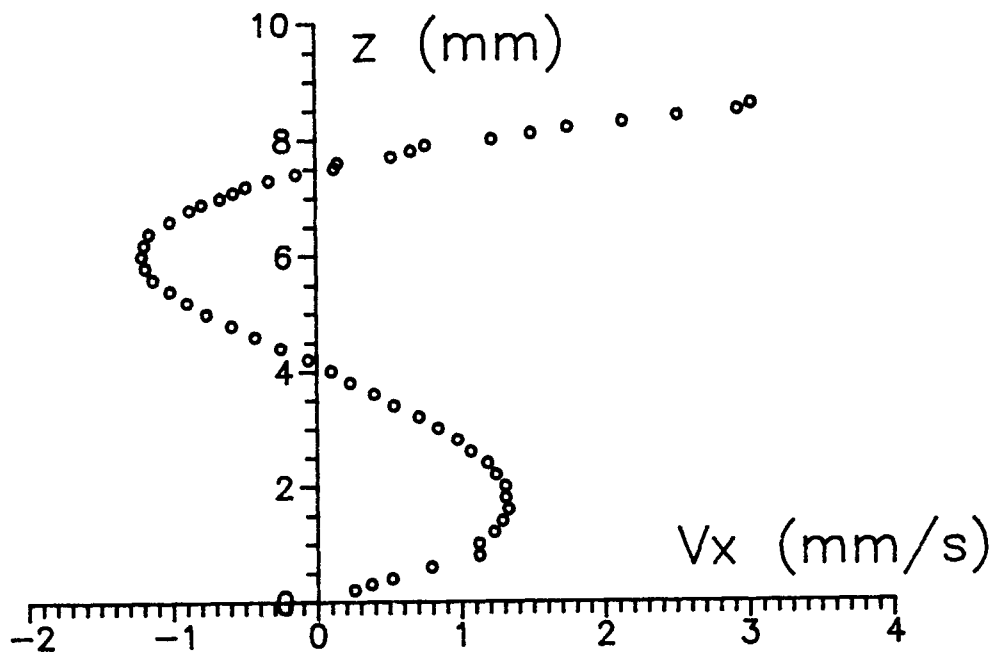


Figure II-11.

Profil de la vitesse horizontale en fonction de la hauteur,

pour une solution d'heptanol $6.3 \cdot 10^{-3}$ mole/litre;

$T_{\text{froid}} = 44.4$ °C, $T_{\text{chaud}} = 54.15$ °C.

Les vitesses sont toutes plus grandes. Cependant, on constate que la vitesse en surface (+3.03 mm/s) n'a pas doublé, alors que la cause apparente (la différence de température ΔT) l'est : la vitesse n'est pas proportionnelle à la différence de température, pour la raison suivante : la cause directe des mouvements capillaires est le gradient de tension superficielle $\partial\sigma/\partial x$. Si ce gradient est proportionnel à ΔT , il est cependant lié à $\partial\sigma/\partial T$, et celui-ci n'est pas constant dans nos expériences puisque la température moyenne a changé et que la tension superficielle σ en fonction de la température présente une courbure importante. Il est possible de vérifier cette hypothèse en faisant varier la température moyenne.

2.c. Vitesse en surface en fonction de ΔT et $\langle T \rangle$.

Nous avons effectué quelques mesures de la vitesse en surface en gardant la différence de température constante : $\Delta T = 4.7$ K, mais en changeant la température moyenne $\langle T \rangle$, définie par :

$$\langle T \rangle = \frac{T_{\text{froid}} + T_{\text{chaud}}}{2} \quad (\text{II-2})$$

Les valeurs mesurées de V_x^{surf} sont données dans la table II-1. On remarque immédiatement que la vitesse en surface n'est pas constante; elle varie presque du simple au double, alors que la différence de température ΔT a été maintenue constante dans les quatre déterminations. La variation de V_x^{surf} est donc due au changement de la température moyenne et de la conséquence de ce changement sur le gradient de tension en surface. La question est donc maintenant de déterminer si ces vitesses sont proportionnelles au gradient moyen de tension superficielle $\Delta\sigma$:

$$V_x^{\text{surf}} \stackrel{(?)}{\div} \left\langle \frac{\partial\sigma}{\partial X} \right\rangle \div \left[\frac{\partial\sigma}{\partial T} \right]_{\langle T \rangle} \Delta T = \langle \Delta\sigma \rangle \quad (\text{II-3})$$

$\langle \Delta\sigma \rangle$ peut être estimé à partir de l'équation empirique (II-1) pour $\sigma(T)$. Il est donné pour chaque mesure dans la table II-1.

Table II-1.
Influence de $\langle T \rangle$ et $\Delta\sigma$ sur la vitesse en surface,
à ΔT constant (4.7 K).

$\langle T \rangle$ (°C)	V_x^{surf} (mm/s)	$\langle \Delta\sigma \rangle$ (mN/m)	$V_x^{\text{surf}} / \langle \Delta\sigma \rangle$
50.05	-1.53	0.422	-3.62
51.73	-1.78	0.482	-3.68
54.05	-2.30	0.565	-4.06
57.05	-2.81	0.672	-4.17

On constate que $\langle \Delta\sigma \rangle$ varie effectivement beaucoup, et on voit par contre que le rapport $V_x^{\text{surf}} / \langle \Delta\sigma \rangle$ est peu modifié (15 %). C'est donc un indice important pour croire que la vitesse

en surface est proportionnelle à $\langle \Delta\sigma \rangle$. Les quatre essais présentés ci-dessus constituant un ensemble trop faible de résultats, nous avons recommencé une série d'expériences (une cinquantaine), pour lesquelles nous avons imposé des différences de températures de 0.5 K jusqu'à 15 K, en travaillant à des températures moyennes comprises entre 45 °C et 60 °C. La figure II-12 donne les vitesses en surface en fonction de $\langle \Delta\sigma \rangle$.

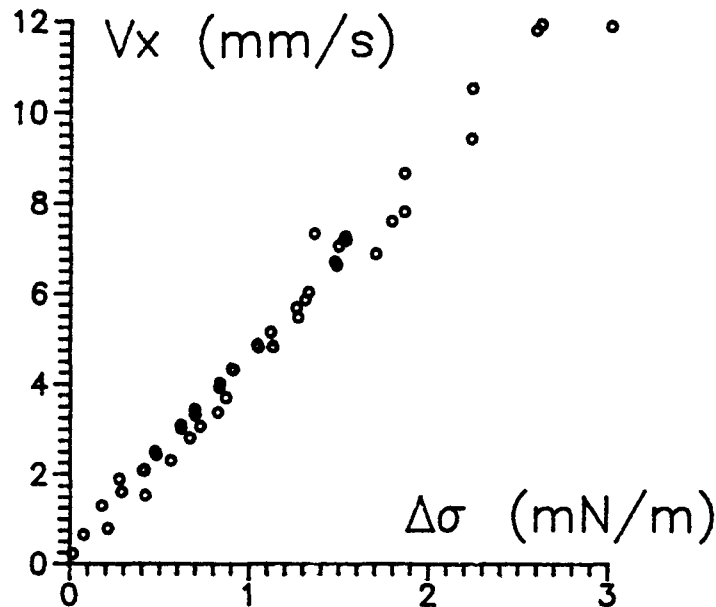


Figure II-12.

Vitesses en surface en fonction de $\langle \Delta\sigma \rangle$
pour différents $\langle T \rangle$ et ΔT .

On observe empiriquement une relation "linéaire" entre V_x^{surf} (l'effet) et $\langle \Delta\sigma \rangle$ (la cause présumée). Néanmoins cette conclusion est établie à partir d'un ensemble d'expériences effectuées avec la même épaisseur de liquide, pour laquelle on a toujours observé deux cellules convectives superposées.

Plutôt que d'entamer un très grand nombre d'expériences systématiques où on modifierait ΔT , $\langle T \rangle$ et l'épaisseur h , on se rend compte qu'une approche théorique est indispensable à ce stade, et qu'on ne peut se contenter de la simple relation phénoménologique $V_x^{\text{surf}} \propto \langle \Delta\sigma \rangle$, que nous n'avons vérifiée que pour une seule épaisseur.

Cependant, nous avons déjà montré que la technique de vélocimétrie laser-Doppler était tout à fait appropriée pour une telle étude expérimentale, y compris surtout pour les mesures des vitesses en surface. Les données acquises par une telle technique sont nettement plus précises que celles obtenues par les méthodes classiques de visualisation et nous n'avons pas eu de problèmes importants de contamination.

3. Simulations numériques.

3.a. Introduction.

Nous désirions effectuer un certain nombre de simulations numériques exploratoires afin de prédire les types de mouvements convectifs que l'on peut obtenir dans les situations expérimentales. L'espoir était même d'obtenir des simulations permettant des comparaisons quantitatives avec les expériences.

Nous n'avions pas la prétention de développer des techniques de résolution des équations aux dérivées partielles non-linéaires, ni de nouvelles méthodes numériques. De plus, les moyens de calcul dont nous disposons sont relativement modestes. Comme d'autre part l'intégration numérique des équations de Navier-Stokes fait l'objet depuis longtemps de très nombreux travaux, nous avons opté pour l'utilisation d'une méthode numérique classique, largement connue, et nous l'avons adaptée à notre problème précis. Il s'agit d'une méthode de différences finies, dont les détails sont donnés à l'annexe A. Nous en faisons une description dans le paragraphe suivant.

3.b. Le modèle numérique.

Les équations utilisées sont les équations bidimensionnelles de Navier-Stokes et de conservation de l'énergie, rendues non-dimensionnelles et écrites en termes de vorticité Φ et de fonction de courant Ψ (voir chapitre I, §3). Nous les rappelons ici :

$$V_X = \frac{\partial \Psi}{\partial Z}, \quad V_Z = -\frac{\partial \Psi}{\partial X} \quad (\text{II-4})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial(\Psi, \Phi)}{\partial(X, Z)} + \nabla^2 \Phi - \frac{Ra}{Pr} \frac{\partial T}{\partial X} \quad (\text{II-5})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial(\Psi, T)}{\partial(X, Z)} + \frac{1}{Pr} \nabla^2 T \quad (\text{II-6})$$

$$\Phi = \nabla^2 \Psi \quad (\text{II-7})$$

avec
$$\frac{\partial(A, B)}{\partial(X, Z)} = \frac{\partial A}{\partial X} \frac{\partial B}{\partial Z} - \frac{\partial A}{\partial Z} \frac{\partial B}{\partial X}$$

où Ra et Pr sont les nombres sans dimensions de Rayleigh et de Prandtl :

$$Ra = \frac{g \alpha \Delta T d^3}{\kappa \nu} \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa}$$

où d est la longueur de référence utilisée pour définir les coordonnées adimensionnelles. Ces équations, comme toutes les équations aux dérivées partielles, requièrent des conditions aux bords. A cause des termes non-linéaires et des conditions réalistes que nous utilisons pour correspondre aux expériences, il n'existe pas de résolution analytique et les équations nécessitent donc un traitement numérique. L'approximation que nous utilisons est basée sur des différences finies au second ordre, en utilisant les grandeurs Φ , Ψ et T discrétisées sur un maillage rectangulaire équidistant. Au cours de l'intégration temporelle, nous utilisons la méthode semi-implicite des directions alternées pour construire des systèmes d'équations linéaires tridiagonaux, faciles à résoudre.

Les conditions aux bords utilisées sont décrites au chapitre I, §3. Leurs versions en termes de différences finies sont données à l'annexe A. Nous allons cependant examiner les conditions aux limites qui concernent la surface supérieure, dont les propriétés sont primordiales dans notre travail.

Du point de vue thermique, la surface supérieure est en contact avec une phase gazeuse à une température donnée et on peut considérer un échange de chaleur entre ces deux phases, suivant par exemple la loi de Newton (éq. (I-16)). Cette condition introduit le nombre sans dimension de Biot : $Bi = h_N d / \lambda$, qui caractérise les échanges thermiques entre les deux phases. On peut se demander si cette loi est suffisante, ou s'il ne faut pas tenir compte d'un transfert thermique convectif. De toute façon, comme on ne connaît pas les coefficients de transfert de Newton, mais qu'on suppose qu'ils sont petits, on mettra partout $Bi = 0$ (surface isolante).

Notons ici que nous ne considérons pas non plus dans notre modèle le transfert de masse à travers la phase gazeuse. En effet, on pourrait tenir compte d'une évaporation partielle d'alcool près du bord chaud, suivie d'une condensation du côté froid.

Du point de vue mécanique, la condition qui tient compte de l'effet thermocapillaire s'écrit, en terme de fonction de courant :

$$\mu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{II-8})$$

La version adimensionnelle la plus largement répandue de cette condition suppose que $\partial \sigma / \partial T$ est constant et s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} = \text{Ma} \frac{\partial T}{\partial X} \quad (\text{II-9})$$

où Ma est le nombre de Marangoni : $\text{Ma} = \frac{- \left[\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right] \Delta T d}{\rho \kappa v}$, qui suppose que $\partial \sigma / \partial T$ est constant. Comme nous désirons particulièrement prédire les mouvements convectifs dans le cas précis où la tension superficielle n'est pas une fonction linéaire, mais plutôt parabolique de la température, nous devons utiliser une variante de la condition (II-9). Si on adopte une loi empirique parabolique pour la tension superficielle :

$$\sigma = a T^2 + b T + c \quad (\text{II-10})$$

et en n'oubliant pas que la température réduite est définie par $(T - \langle T \rangle) / \Delta T$, alors, la condition (II-8) devient

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} = \frac{M2}{Pr} T \frac{\partial T}{\partial X} - \frac{M1}{Pr} \frac{\partial T}{\partial X} \quad (\text{II-11})$$

M1 et M2 étant deux nombres sans dimensions définis par :

$$M2 = \frac{2 a \Delta T^2 d}{\rho \kappa v} \quad \text{et} \quad M1 = \frac{-(b + 2 a \langle T \rangle) \Delta T d}{\rho \kappa v} \quad (\text{II-12})$$

M2 est directement lié à la courbure de la parabole : si $M2 > 0$, alors la parabole possède un minimum. Lorsque $a = 0$, M2 est nul et M1 devient formellement identique au nombre de Marangoni habituel Ma. M2 est un nombre dépendant des paramètres du fluide, de ΔT et de la longueur de référence d. La définition de M1 est telle qu'il dépend en plus de la température moyenne de l'expérience. Suivant les valeurs de T_{froid} et T_{chaud} , différentes valeurs de M1 sont à utiliser, comme le montrent les schémas de la figure II-13. Si $M1 \gg M2/2$, alors T_{froid} et T_{chaud} sont inférieures à la température du minimum de σ . Si $M1 = M2/2$, alors T_{chaud} vaut justement la température du minimum de σ . Si $M1 = 0$, T_{froid} et T_{chaud} sont situées symétriquement de part et d'autre du minimum. Pour les M1 négatifs, on a les cas symétriques.

Par conséquent, les situations intéressantes à regarder, si on désire étudier l'influence du minimum de tension superficielle, sont celles pour lesquelles M1 n'est pas trop grand comparé à M2, et même $-M2/2 < M1 < M2/2$ si on désire que σ soit minimum quelque part en surface.

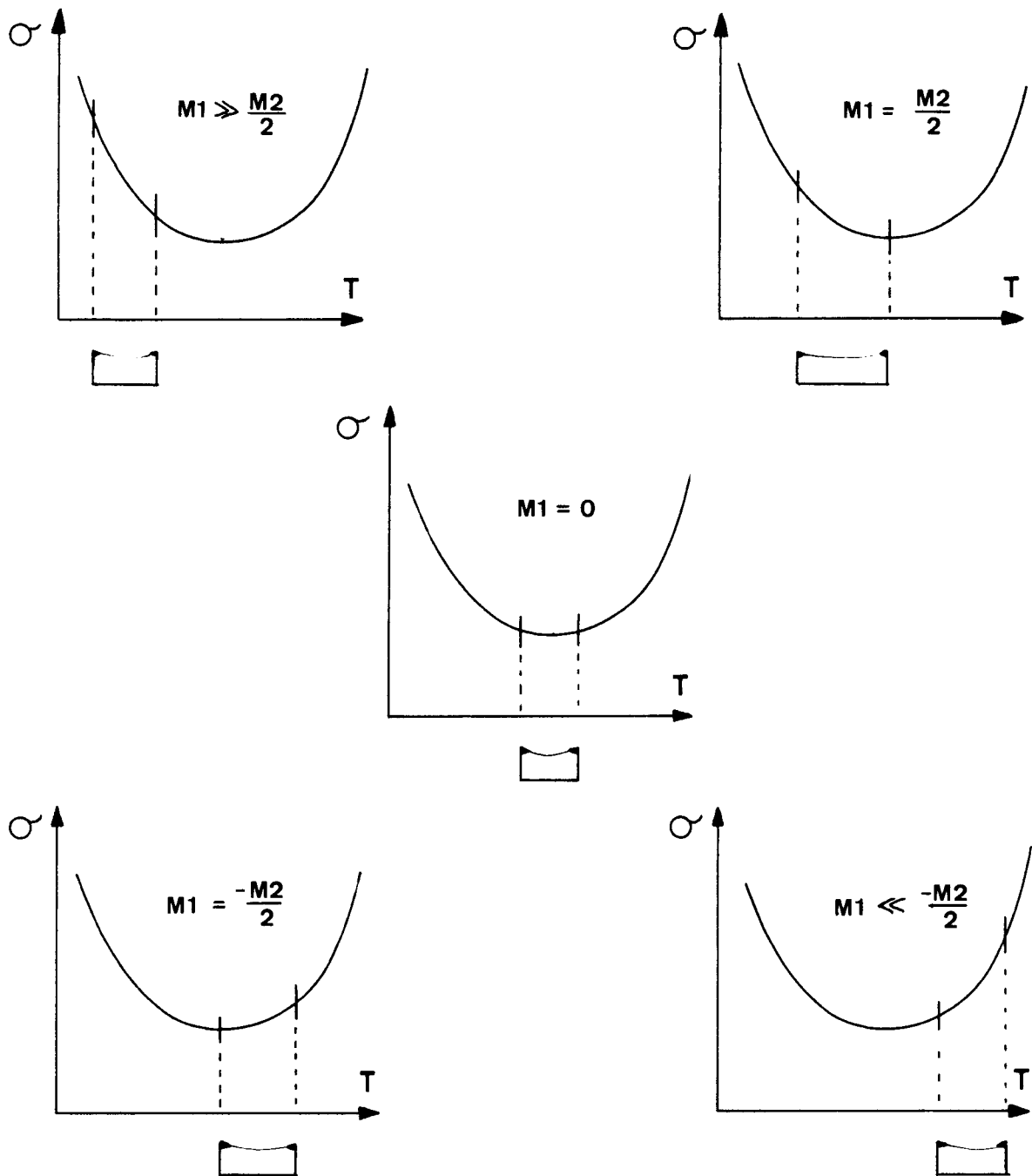


Figure II-13.

Schéma des différentes possibilités
pour les nombres M_1 et M_2 .

Lorsqu'on désire caractériser un flux de chaleur, on utilise un nombre de Nusselt Nu , défini comme le rapport du flux de chaleur total et du flux purement conductif. Ici, nous avons pris comme convention de calculer Nu le long de la paroi froide. Dans une cavité

rectangulaire de hauteur h et de largeur l , notre définition particulière de Nu sera :

$$Nu = \frac{l}{h} \int_0^{h/l} \left[\frac{\partial T}{\partial X} \right]_{X=0} dZ \quad (\text{II-13})$$

On utilisera aussi le rapport d'aspect A , défini comme le rapport de la largeur de la cavité et de sa hauteur : $A = l/h$.

Avant de passer à l'utilisation de notre modèle, rappelons-en quelques hypothèses importantes :

- c'est un modèle bidimensionnel.
- la surface est supposée plane et non déformable.
- on suppose qu'il n'y a pas de transfert massique en phase gazeuse.

3.c. Validation du code numérique.

Etant donné que nous avons entièrement écrit nous-mêmes le code numérique (en FORTRAN), nous avons cherché à vérifier les résultats que produisait ce programme. Nous avons pour cela utilisé le "Benchmark" défini par De Vahl-Davis *et al.* [12]. Le problème posé est celui de la convection stationnaire de l'air dans une cavité carrée (cas bidimensionnel) à quatre parois rigides, à $Pr = 0.71$, $Ra = 10^3, 10^4, \dots$. La définition précise du problème en a fait un test particulièrement utilisé dans les simulations de convection naturelle, puisqu'une trentaine d'équipes internationales ont soumis leurs solutions, en utilisant de nombreuses méthodes numériques différentes. Notre solution est donnée à l'annexe A. Celle-ci est conforme aux résultats donnés par De Vahl-Davis [13]. Il n'existe cependant pas de "benchmark" équivalent pour la convection thermocapillaire.

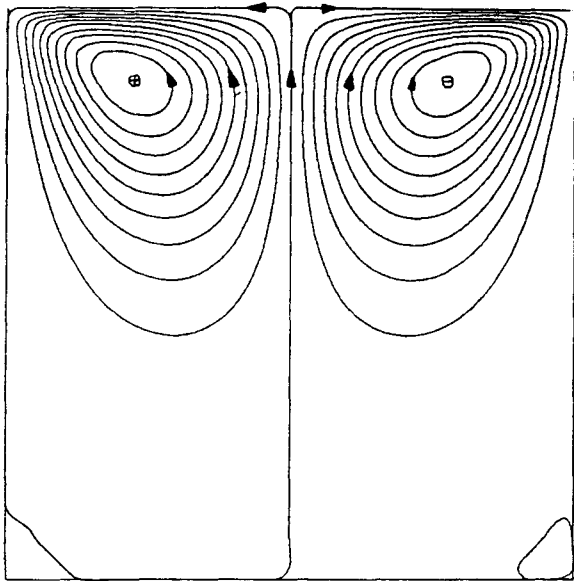
3.d. Simulations à faibles nombres Ra , $M1$ et $M2$.

Le premier but des simulations numériques est de prédire les types de mouvements convectifs possibles auxquels on peut s'attendre dans les expériences, ou d'étayer les conclusions des expériences déjà effectuées par des comparaisons qualitatives. Pour cela, il n'est pas nécessaire de fixer les nombres sans dimensions à des valeurs correspondant aux expériences réalisées ou réalisables. De plus, en utilisant des petites valeurs pour Ra , $M1$ et $M2$, les simulations numériques sont plus rapides.

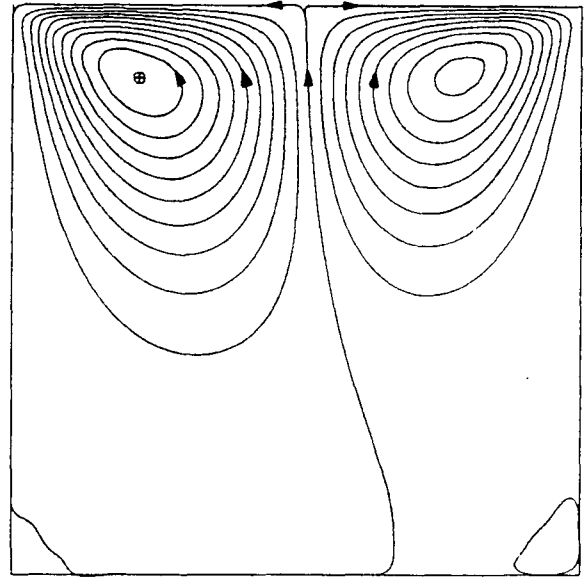
Les quelques simulations décrites ci-après ont été effectuées avec $Pr = 7$, correspondant aux propriétés des solutions aqueuses fortement diluées, à température ambiante, et en considérant comme isolants le bord inférieur rigide et la surface supérieure. La longueur de référence d utilisée pour les cavités non carrées est la largeur l de la cavité. Nous avons essayé des maillages de discrétisation de T , Φ et Ψ composés de 41, 51, 61 ou 71 lignes dans chaque direction. Les valeurs des vitesses n'étant pas modifiées de plus de 1 %, le maillage à 41 x 41 lignes fut choisi, pour sa précision suffisante et son économie au point de vue des calculs numériques.

Nous considérons dans une première série des simulations pour lesquelles le rôle de la gravité est négligé ($Ra = 0$, conditions de microgravité). La figure II-14 expose les lignes de courant de quatre simulations dans une cavité carrée : $M2$ est fixé à 1000 tandis que $M1$ prend successivement les valeurs 0, 20, 100 et 500. Les lignes de courant données sont séparées de la même différence $\Delta\Psi$, qui vaut le dixième de la valeur (absolue) maximale de Ψ . La première simulation (figure II-14.a) correspond donc à une situation exactement symétrique pour laquelle la température moyenne vaut justement la température du minimum de tension superficielle. On observe côte-à-côte deux cellules contrarotatives avec un mouvement ascensionnel au centre et une "ouverture" de la surface. $\Psi_{\max} = 0.108$, et le transport de chaleur est très faible ($Nu = 1.025$). Ensuite $M1$ augmente, ce qui correspond à une diminution de la température moyenne du liquide. Dès lors, la cellule convective de droite, pour laquelle le fluide en surface est localement tel que $\partial\sigma/\partial T$ est positif, diminue en taille ainsi qu'en amplitude des vitesses. En même temps, l'amplitude dans la cellule "froide" augmente quelque peu ((b): $\Psi_{\max} = 0.118$, $Nu = 1.029$; (c): $\Psi_{\max} = 0.157$, $Nu = 1.063$). Les figures II-14.b et II-14.c démontrent parfaitement ce comportement. Lorsque $M1 = M2/2 = 500$, le bord chaud est exactement à la température du minimum de tension superficielle. Il n'existe plus alors deux cellules, le seul mouvement permis en surface allant "classiquement" du bord chaud vers le bord froid (figure II-14.d). L'existence du minimum de tension se manifeste cependant encore en observant que la vitesse en surface est très faible du côté chaud, mais qu'elle augmente très fortement lorsqu'on se rapproche du bord froid (les lignes de courant y sont plus rapprochées). La convection et le transport de chaleur sont plus intenses que pour les cas 14.a, 14.b et 14.c ($\Psi_{\max} = 0.370$ et $Nu = 1.45$). La succession des états convectifs, de 14.a à 14.d correspond qualitativement à une partie d'une expérience effectuée lors du vol de la fusée sonde TEXUS 18 (Limbourg-Fontaine *et al.* [14]). Au cours de cette expérience, effectuée avec une solution d'heptanol semblable à celle utilisée lors du vol TEXUS 8, ΔT était maintenue constante, mais $\langle T \rangle$ augmentait continuellement : $\langle T \rangle$ était d'abord inférieure à la température du minimum de σ , et on observait alors une cellule convective avec un mouvement en surface dirigé du chaud vers le froid; ensuite, au fur et à mesure que $\langle T \rangle$ augmentait, une seconde cellule de sens de rotation opposé apparaissait du

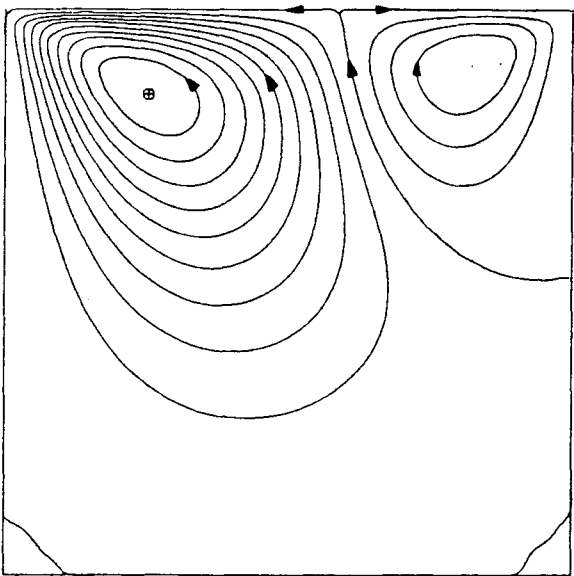
côté chaud, avec quelque part en surface "l'ouverture" de celle-ci; enfin, la cellule de départ disparaissait, ne laissant plus qu'un mouvement en surface dirigé du froid vers le chaud.



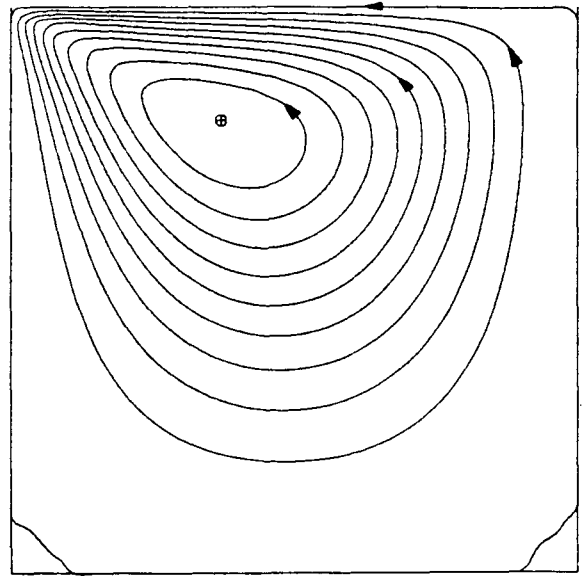
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure II-14.

$Ra = 0$; $Pr = 7$; $A = 1$; $M2 = 1000$

- (a): $M1 = 0$, $\Psi_{\max} = 0.108$, $Nu = 1.025$;
 (b): $M1 = 20$, $\Psi_{\max} = 0.118$, $Nu = 1.029$;
 (c): $M1 = 100$, $\Psi_{\max} = 0.157$, $Nu = 1.063$;
 (d): $M1 = 500$, $\Psi_{\max} = 0.37$, $Nu = 1.45$.

La figure II-15 montre l'influence du rapport d'aspect $A = \text{largeur}/\text{hauteur}$ sur le cas particulier $M2 = 1000$, $M1 = 100$ ($Ra=0$ et $Pr=7$ pour rappel). Les quatre simulations présentées correspondent à des expériences pour lesquelles on maintiendrait constant les températures latérales et la largeur, mais pour lesquelles l'épaisseur de liquide varierait. Avec des cavités plus hautes que larges (cas $A = 1/2$ et $A = 1/3$, figures II-15.a et b), les deux cellules convectives demeurent presque inchangées, tant en amplitude qu'en taille réelle, même si les dimensions "relatives" diminuent, dû au fait que les cavités sont toujours représentées sous forme carrée. Donc, les forces superficielles créent des cellules convectives qui sont pratiquement indifférentes à la position exacte du fond de la cavité si ce fond est suffisamment bas. Au contraire, pour des cavités plus larges que hautes (cas $A = 1.33$ et $A = 2$, figures II-15.c et d), l'influence du fond rigide de la cavité sur la vitesse en surface devient prépondérante et les vitesses tendent à se ralentir. Cela apparaît clairement dans la table II-2 qui montre que la valeur maximale de la fonction de courant diminue de façon monotone avec $1/A$ (lorsque la hauteur diminue).

Table II-2.

Effet du rapport d'aspect sur Nu et Ψ_{\max}
 $Ra = 0$, $Pr = 7$, $M1 = 100$, $M2 = 1000$.

A	$ \Psi_{\max} $	Nu
0.33	0.172	1.014
0.5	0.164	1.027
1.	0.157	1.063
1.33	0.155	1.084
2.	0.148	1.107
3.33	0.110	1.098
5	0.070	1.045
10	0.023	1.003

Par contre, on observe que le nombre de Nusselt est maximum pour une valeur particulière de A (approximativement 2). En effet, pour les cavités hautes, seule la partie supérieure apporte une contribution importante au transport convectif de la chaleur, puisque c'est là que se produisent les mouvements thermocapillaires; à l'opposé, les cavités trop basses entraînant une convection réduite, on n'y observe pas non plus de transport important de la chaleur par convection.

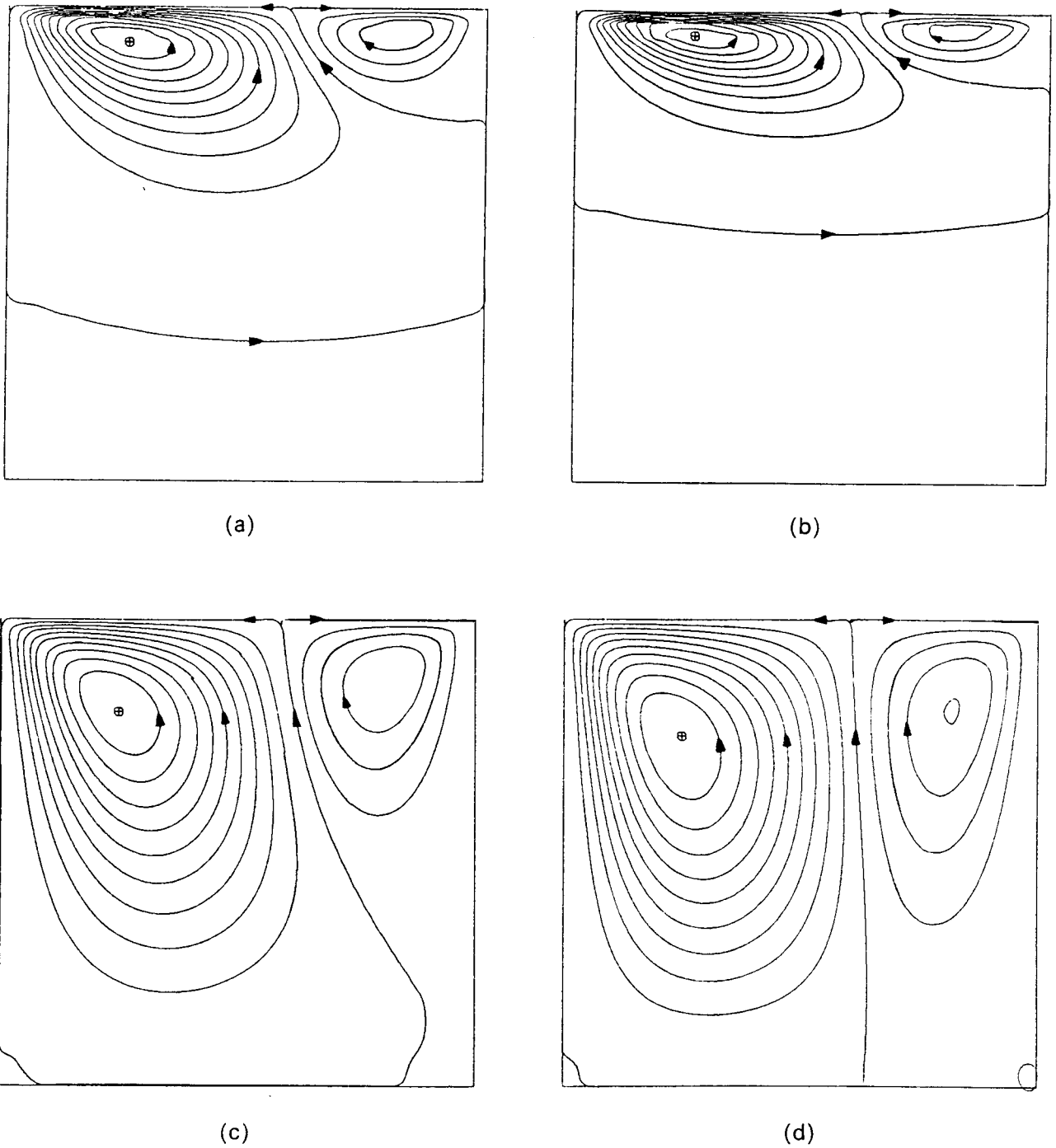


Figure II-15.

Influence du rapport d'aspect sur les lignes de courant.

$Ra = 0$, $Pr = 7$, $M1 = 100$, $M2 = 1000$;

(a): $A = 1/2$, $\Psi_{\max} = 0.164$, $Nu = 1.027$;

(b): $A = 1/3$, $\Psi_{\max} = 0.172$, $Nu = 1.014$;

(c): $A = 1.33$, $\Psi_{\max} = 0.155$, $Nu = 1.084$;

(d): $A = 2$, $\Psi_{\max} = 0.148$, $Nu = 1.107$.

Nous allons maintenant donner une deuxième série de simulations dans lesquelles on tient compte de l'effet de la gravité ($Ra \neq 0$). Lorsque les forces de pesanteur agissent seules sur le fluide, celui-ci monte le long du bord chaud, et descend près du bord froid (dans le cas habituel où la densité du fluide décroît avec la température). A la figure II-16, nous montrons un cas pour lequel les forces de tension en surface et de sustentation en coeur de phase agissent dans le même sens, avec une tension superficielle linéaire en fonction de la température ($M1 > 0$, $M2 = 0$). $M1$ est cependant très petit ($M1 = 250$) et les forces de tension superficielle agissent peu vis-à-vis des forces de gravité. Les lignes de courant sont grossièrement symétriques par rapport au centre de la cavité.

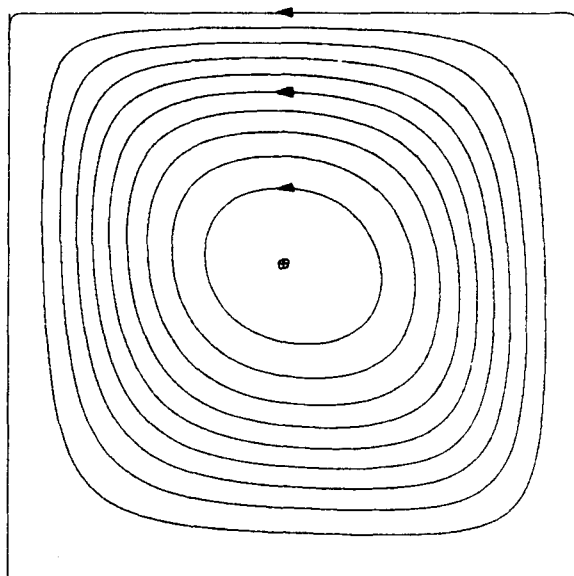


Figure II-16.

Lignes de courant :

$$Ra = 7000, Pr = 7, A = 1, M1 = 250, M2 = 0.$$

$$\Psi_{\max} = 0.697, Nu = 2.25.$$

Lorsque les forces de gravité deviennent moins importantes en comparaison des forces de surface (en augmentant $M1$ à 5000), les mouvements convectifs sont nettement plus importants en surface qu'en coeur de phase (voir figure II-17). Ce type de convection dominé par les forces de tension superficielle ressemble à la convection qui a été observée en microgravité lors du vol TEXUS 8 (figure II-6).

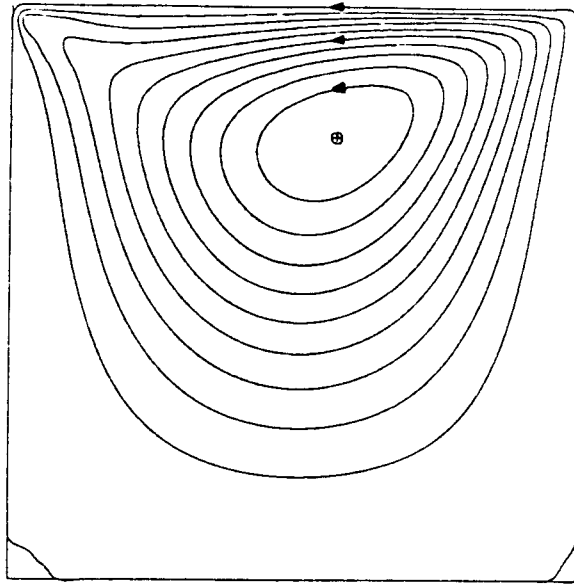


Figure II-17.

Lignes de courant :

$$Ra = 7000, Pr = 7, A = 1, M1 = 5000, M2 = 0.$$

$$\Psi_{\max} = 2.08, Nu = 3.21.$$

Lorsque par contre $M1$ est négatif, avec $M2$ toujours nul (c'est-à-dire σ augmentant linéairement avec T), les forces de tension agissent du froid vers le chaud en surface. Un élément de fluide proche de la surface arrive donc près du bord chaud et ne peut alors que descendre. Cependant, comme la gravité continue à agir, du fluide réchauffé remonte du fond le long du bord chaud, et à cause de ces deux effets combinés, deux cellules convectives superposées sont produites (voir figure II-18). Cette simulation est en concordance avec les expériences montrées au §2. Remarquons cependant que pour les valeurs considérées de Ra et $M1$, l'amplitude de la convection dans la cellule inférieure due à la gravité est typiquement dix fois plus petite que dans la cellule de surface.

On peut aussi considérer un cas pour lequel la température moyenne est celle du minimum de tension superficielle, et également pour lequel la gravité agit. Dans ce cas, une cellule convective thermogravitationnelle tend à se créer dans l'ensemble de la cavité. Naturellement, elle inclut dans ses mouvements la région de la surface pour laquelle $\partial\sigma/\partial T$ est négatif. On obtient alors une forme assez particulière de convection, comme en atteste la figure II-19.

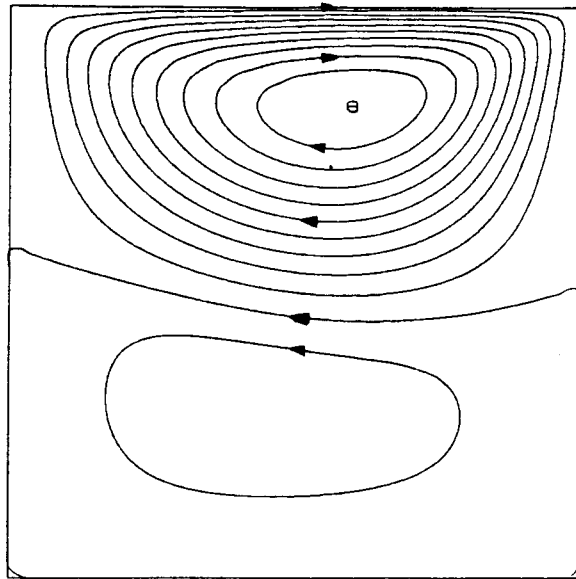


Figure II-18.

Lignes de courant :

$Ra = 700, Pr = 7, A = 1, M1 = -200, M2 = 0.$

$\Psi_{\max} = 0.193, Nu = 1.11.$

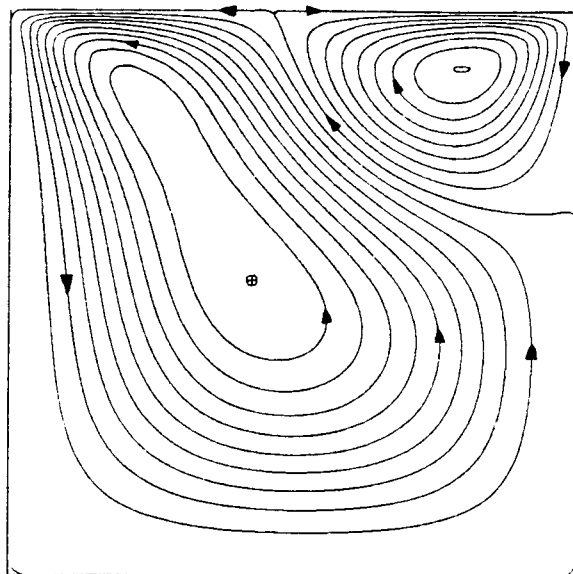


Figure II-19.

Lignes de courant :

$Ra = 700, Pr = 7, A = 1, M1 = 0, M2 = 1000.$

$\Psi_{\max} = 0.119, Nu = 1.080.$

Une première constatation s'impose après ces simulations : tout ce que nous venons de décrire n'a jamais surpris notre bon sens. L'effet du rapport d'aspect, de $M1$ par rapport à $M2$, l'effet de la gravité apparaissent naturels. L'avantage des simulations à ce stade est de quantifier le bon sens.

Remarquons que les simulations effectuées avec $Ra = 0$ et $|M1| \ll M2/2$ (avec par conséquent la température du minimum de tension superficielle comprise entre les deux températures extrêmes auxquelles est soumise la cavité) sont telles que les vitesses sont faibles et que le flux de chaleur est diminué. C'est un résultat attendu puisque les $\partial\sigma/\partial T$ locaux sont petits et que des vitesses opposées existent en surface. Cela montre l'intérêt d'effectuer des expériences en microgravité à des températures proches du minimum, dans les cas où on désire diminuer les vitesses convectives, pour des raisons technologiques (cristallisation de métaux ou semi-conducteurs par exemple). De telles expériences font l'objet de plusieurs études et projets en science des matériaux sous gravité réduite.

3.e. Tentatives de simulations d'expériences réelles.

Après une approche essentiellement qualitative, nous avons tenté d'utiliser notre modèle pour effectuer des comparaisons quantitatives avec les expériences de TEXUS 8. Cependant, les expériences spatiales font l'objet d'une longue préparation : les appareillages et liquides doivent être placés dans la fusée plusieurs jours avant son lancement, et une contamination par agents tensio-actifs divers est possible. Comme l'expérience ne peut être réalisée qu'une seule fois, il est nécessaire d'imposer de grands ΔT , afin d'être sûr que les mouvements en surface balayeront ces molécules indésirables. Par conséquent, les nombres Ra , $M1$ et $M2$ correspondant à de telles expériences sont de l'ordre de 10^5 - 10^6 . Les simulations montrées jusqu'ici sont faites avec des nombres de l'ordre de 10^3 , ce qui correspond grossièrement à des cavités carrées de 1 cm de côté soumises à un ΔT d'environ 0.1 K. Malheureusement, les calculs que nous avons entamés en vue d'atteindre des valeurs de 10^5 ont conduit à des instabilités numériques.

Comme nous ne désirons pas à ce stade augmenter les possibilités de notre code numérique et que la puissance de calcul dont nous disposons (IBM 9370) est limitée, nous nous sommes tournés vers une autre approche du problème : tenter des calculs analytiques, même avec des hypothèses restrictives, qui nous libèrent de problèmes numériques et qui pourraient rester valables quelle que soit la différence de température, du moins en dessous de points critiques d'instabilités.

4. Modèle analytique.

4.a. but.

Etant donné que le modèle numérique ne permet pas des comparaisons avec des expériences réelles, à cause d'instabilités numériques, nous désirons nous libérer de cette approche de type numérique. D'autre part, les équations de Navier-Stokes et de conservation de l'énergie sont non-linéaires, et une résolution analytique est souvent impossible lorsqu'on impose des conditions aux bords réalistes. Nous pouvons cependant écrire des conditions moins réalistes, mais qui rendront possible une solution analytique, en espérant que cette solution soit tout de même applicable, du moins localement, à des cas réels. Pour cela, on va considérer une cavité d'extension horizontale infinie avec les sources latérales de chaleur rejetées à l'infini (voir Figure II-20). De plus, on supposera qu'il n'y a pas de composante verticale de la vitesse ($V_z = 0$) et que la composante horizontale V_x ne dépend que de la hauteur. C'est une limite classique connue sous le nom de limite de Hadley [15]. Les équations deviennent alors linéaires et il n'y a plus de difficultés pour les résoudre analytiquement. On peut espérer qu'un tel modèle décrira correctement le champ de vitesse dans le centre d'une longue cavité réelle, du moins pour des valeurs modérées du paramètre de contrôle : $\partial T / \partial x$. Etant donné ces hypothèses, il ne sera pas possible de tenir compte d'une tension superficielle non-linéaire en fonction de la température, et par conséquent, on ne pourra pas étudier l'influence d'un paramètre dû à la non-linéarité de σ , tel que M2. Cependant, on pourra considérer les deux cas où σ augmente ou diminue avec T ($Ma < 0$ et $Ma > 0$).

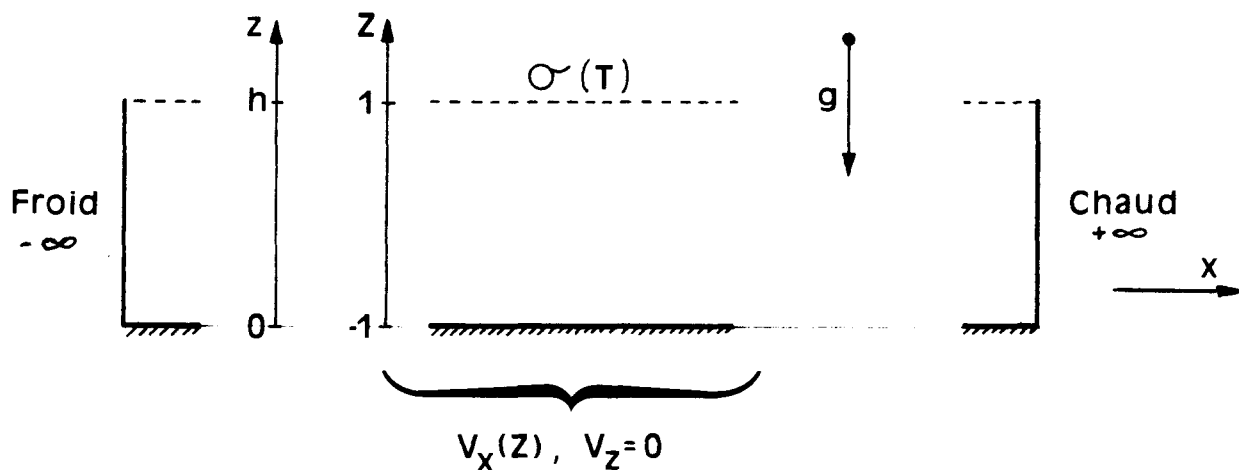


Figure II-20.

Hypothèses du modèle analytique.

4.b. Le calcul; la solution générale.

Une première hypothèse importante du modèle est introduite en considérant qu'il n'y a pas de composante verticale de vitesse et que la composante horizontale de vitesse est la même en toute position horizontale x

$$V_z = 0 \quad , \quad V_x = V_x(z) \quad (\text{II-14})$$

On considère que la densité du liquide dépend linéairement de la température, et que la viscosité est constante. Sous ces conditions, les équations de continuité, de Navier-Stokes et d'énergie (I-6 à I-11) deviennent :

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = 0 \quad (\text{II-15})$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \quad (\text{II-16})$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho(T) g \quad (\text{II-17})$$

$$0 = -V_x \frac{\partial T}{\partial x} + \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II-18})$$

En éliminant la pression entre les éq. (II-16) et (II-17) (en dérivant (II-16) par rapport à z , (II-17) par rapport à x , et en soustrayant) et en utilisant l'équation d'état (I-10) pour la densité, on obtient :

$$\mu \frac{\partial^3 V_x}{\partial z^3} = \rho_0 \alpha g \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{II-19})$$

Sous les hypothèses énoncées précédemment (V_x fonction de z seulement), on conclut que $\partial T / \partial x = F(z)$, où, pour l'instant, $F(z)$ est une fonction inconnue de z . La température T est donc une fonction linéaire de x :

$$T(x,z) = F(z) x + G(z) \quad (\text{II-20})$$

En substituant dans (II-18), on obtient que F est une fonction linéaire de z , puisque $\partial^2 F / \partial z^2$ doit être nul pour éliminer la dépendance en x .

$$T(x,z) = (A_T + B_T z) x + G(z) \quad (\text{II-21})$$

On introduit maintenant une hypothèse supplémentaire, assez naturelle compte tenu des expériences : le gradient de température horizontal est le même à toute hauteur z et est non nul (par convention on le considérera positif).

$$B_T = 0 \quad \text{et} \quad A_T > 0 \quad (\text{II-22})$$

On utilisera dans la suite indifféremment A_T ou l'écriture explicite du gradient de température : $(\partial T / \partial x)$. L'équation (II-19) devient

$$\mu \frac{\partial^3 V_x}{\partial z^3} = \rho_0 \alpha g A_T \quad (\text{II-23})$$

en intégrant trois fois par rapport à z , on trouve le profil horizontal de vitesse :

$$V_x = \frac{g}{\mu} \rho_0 \alpha A_T \left[\frac{z^3}{3!} + C_1 \frac{z^2}{2!} + C_2 z + C_3 \right] \quad (\text{II-24})$$

Les trois constantes d'intégration C_1 , C_2 et C_3 doivent être déterminées par les conditions suivantes:

1) La couche liquide est limitée en bas ($z = 0$) par un bord rigide, c'est à dire que la vitesse s'y annule :

$$V_x(0) = 0 \quad (\text{II-25})$$

2) On impose une condition de flux nul à travers toute surface verticale :

$$\int_0^h V_x(z) dz = 0 \quad (\text{II-26})$$

3) On écrit la conservation de la quantité de mouvement à la surface (voir éq. (I-18))

$$\mu \frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{en} \quad z = h \quad (\text{II-27})$$

A l'aide de ces conditions, on peut trouver l'expression analytique de $V_x(z)$, mais pour des raisons de commodité, on introduit une coordonnée verticale réduite (non dimensionnelle) Z , définie par

$$Z = \frac{2z}{h} - 1 \quad (\text{II-28})$$

de telle sorte que $Z = -1$ en $z = 0$ et $Z = +1$ en $z = h$. Le profil $V_x(Z)$ s'écrit alors, avec $-1 < Z < +1$:

$$V_x(Z) = U^* \left[\frac{Z^3}{6} - \frac{(1-3k)}{8} Z^2 - \frac{(1-k)}{4} Z + \frac{(1-3k)}{24} \right] \quad (\text{II-29})$$

avec

$$U^* = \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right] \frac{g \alpha (h/2)^3}{\nu} \quad (\text{II-30})$$

et

$$k = \frac{\partial \sigma / \partial T}{\rho_0 \alpha g (h/2)^2} \quad (\text{II-31})$$

Ce profil V_x est conforme aux résultats d'autres auteurs (Kirdyashkin [16]).
k peut être écrit plus explicitement sous la forme du rapport

$$k = -4 \text{Ma} / \text{Ra} \quad (\text{II-32})$$

où Ma est le nombre de Marangoni et Ra le nombre de Rayleigh, tels qu'ils ont été définis par (I-29) et (I-31), avec la longueur de référence d étant égale à la hauteur h. Remarquons que le gradient de température n'apparaît pas dans k, mais est seulement inclus dans le facteur constant U^* : il n'affectera donc pas l'allure de ce profil de vitesse de base. Néanmoins il est évident que si on s'intéresse à la stabilité du profil (II-29), on devra inévitablement inclure $\partial T / \partial x$ dans la définition d'un nombre de Reynolds. Ce nombre k mesure l'importance des forces surfaciques liées au gradient de tension superficielle par rapport aux forces volumiques liées à la dilatation du fluide.

4.c. Analyse du profil $V_x(Z)$.

Nous focaliserons tout d'abord notre attention sur les valeurs limites du paramètre k avant d'examiner le cas général.

$k = 0$: la surface supérieure est libre, sans tension tangentielle (le nombre de Marangoni $Ma = 0$). Le profil de vitesse devient

$$V_x(Z) = \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right] \frac{g \alpha (h/2)^3}{\nu} \frac{1}{24} (4Z^3 - 3Z^2 - 6Z + 1) \quad (\text{II-33})$$

ou

$$V_x(Z) = \frac{U^*}{24} (4Z^3 - 3Z^2 - 6Z + 1) \quad (\text{II-34})$$

Cette expression s'annule au fond de la cavité (en $Z = -1$) et à la hauteur $Z = (7 - \sqrt{33})/8 \simeq 0.157$, possède un maximum en $Z = -1/2$ et un minimum en $Z = 1$ (voir la figure II-21).

Limite $k \rightarrow -\infty$ ($Ma > 0$ ou $\partial\sigma/\partial T < 0$ et $Ra = 0$). Cette limite correspond aux cas où la thermogravitation n'agit pas et où les forces thermocapillaires induisent des mouvements du chaud vers le froid à la surface, ou plutôt des zones de basse tension superficielle vers les zones de haute tension superficielle.

$$V_x(Z) = \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right] \frac{1}{\rho_0} \frac{1}{\nu} \frac{1}{8} (3Z^2 + 2Z - 1) \quad (\text{II-35})$$

Cette expression correspond à la solution avec "flux de retour" analysée par Smith et Davis [17] dans leur étude de stabilité de la convection thermocapillaire seule. Les zéros de vitesse sont situés aux hauteurs $Z = -1$ et $Z = 1/3$ tandis qu'on observe un maximum en $Z = -1/3$. $|V_x|$ atteint sa plus grande valeur en surface ($Z = 1$) sans que $\partial V_x / \partial Z$ ne soit nul, puisque c'est la cause des mouvements (voir également la représentation de ce profil à la figure II-21).

Limite $k \rightarrow \infty$ ($Ma < 0$ ou $\partial\sigma/\partial T > 0$ et $Ra = 0$). C'est en fait la même situation que le cas $k \rightarrow -\infty$, excepté un changement de sens des mouvements (et par conséquent du signe de V_x), qui sont dirigés du froid vers le chaud en surface, mais toujours des régions de basse tension superficielle vers les régions de haute tension superficielle, puisque $\partial\sigma/\partial T$ a changé de signe.

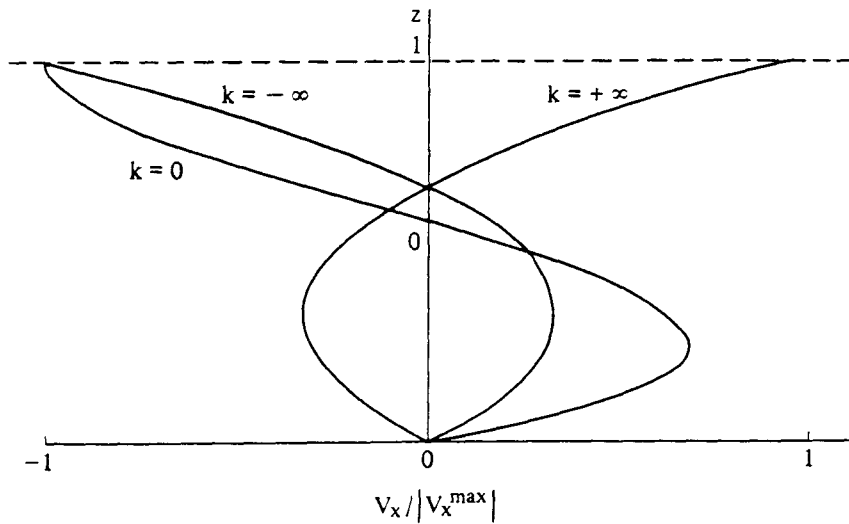


Figure II-21.

Profil de vitesse II-29, pour les trois cas limites $k = 0$, $k = \infty$ et $k = -\infty$.

Cas général. Le profil de vitesse $V_x(Z)$ est représenté pour différentes valeurs de k à la figure II-22. La valeur de la vitesse à la surface est donnée par

$$V_x^{\text{Surface}} = U^* \left[\frac{3k - 1}{6} \right] \quad (\text{II-36})$$

Tant que k est négatif, les forces de tension superficielle agissent pour produire un mouvement en surface dans la même direction que le mouvement thermogravitationnel caractérisé par $k = 0$ (voir courbes a et b). Pour des valeurs positives de k ($\partial\sigma/\partial T > 0$) la vitesse en surface demeure positive pour autant que k reste inférieur à $1/3$: les forces de tension de surface sont orientées du froid vers le chaud, mais en tenant compte des mouvements thermogravitationnels importants (puisque k est petit en valeur absolue), le mouvement résultant des deux forces opposées est encore dirigé du chaud vers le froid. Pour la valeur $k = 1/3$, l'équilibre entre les forces surfacique et gravifique est réalisé à la surface : on a donc une stagnation complète comme si la limite supérieure de la cavité était remplacée par un bord rigide, et le profil de vitesse est symétrique :

$$V_x = \frac{U^*}{6} (Z + 1) Z (Z - 1) \quad \text{si } k = 1/3 \quad (\text{II-37})$$

Si $k > 1/3$, les forces de tension superficielle deviennent suffisamment importantes pour dominer les forces de gravité et les mouvements vont du froid vers le chaud en surface. Les

positions des extrema et des zéros du profil de vitesse peuvent être déterminées trivialement par l'étude des racines de trinômes du second degré. Ces positions migrent vers le bord inférieur lorsque k augmente. Pour la valeur précise $k = 1$, deux zéros et un extremum coïncident, de sorte que le lobe inférieur de vitesses positives disparaît. Donc, pour les valeurs de k comprises entre $1/3$ et 1 , les convections de Marangoni et gravitationnelle sont en compétition et on observe par conséquent deux "cellules" convectives superposées. La cellule inférieure (due à la pesanteur) disparaît lorsque k dépasse l'unité. Si k vaut précisément 1 , alors la pente $\partial V_x / \partial Z$ est nulle au bord inférieur.

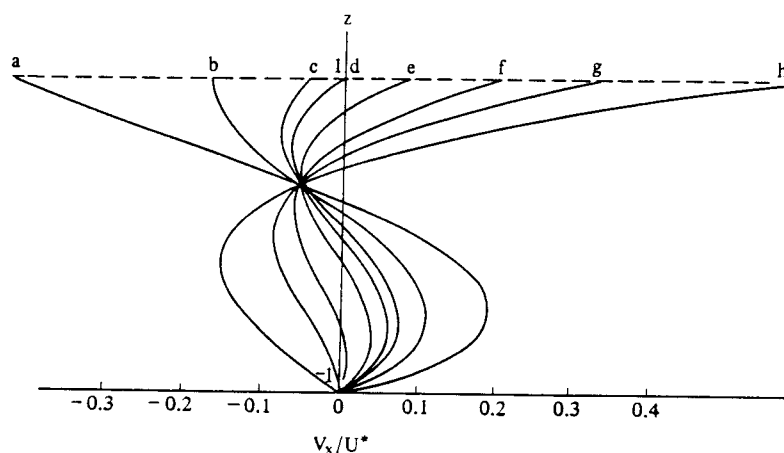


Figure II-22.

Profil de vitesse II-29, pour différentes valeurs de k :

$k = -0.5$ (a); 0 (b); 0.25 (c); $1/3$ (d); 0.5 (e); 0.75 (f); 1 (g); 1.5 (h).

Il est à noter que, les équations étant linéarisées dans cette théorie, le profil de vitesse est toujours la somme de deux contributions (données par les éq. (II-34), (II-35)). Il est donc très facile de rechercher les valeurs de k qui seront telles que l'apport d'un mode de convection (thermogravitationnel ou thermocapillaire) soit négligeable vis-à-vis de l'autre. Si on utilise la vitesse en surface (éq. (II-36)) comme valeur de comparaison, on constate que la thermogravitation contribue pour moins de 5% si $|k|$ excède 6.66 et moins de 10% si $|k|$ excède 3.33. L'apport de la thermocapillarité est par contre inférieur à 5% si $|k|$ est plus petit que $1/60$ et inférieur à 10% si $|k| < 1/30$. Plutôt que de considérer la vitesse en surface comme critère de référence, on peut considérer les contributions thermogravitationnelle et thermocapillaire au flux massique dans une direction, c'est à dire comparer

$$\left| \frac{1}{24} \int_{-1}^{0.157} (4 Z^3 - 3 Z^2 - 6 Z + 1) dZ \right| \quad (II-38)$$

à

$$\left| \frac{k}{g} \int_{-1}^{1/3} (3Z^2 + 2Z - 1) dZ \right| \quad (\text{II-39})$$

ou, après calcul, 1 à 1.70958*k, alors que lorsqu'on examine la vitesse en surface, on compare 1 à 3*k. Le critère massique est donc plus favorable à la thermogravitation; cette dernière contribue pour moins de 5% à l'écoulement si |k| est supérieur à 11.7 et pour moins de 10% si |k| est supérieur à 5.85. A l'opposé, ce critère rend l'apport de la thermocapillarité inférieur à 5% dès que |k| < 0.0292 et inférieur à 10% si |k| < 0.0585.

Ces limites, calculées suivant des critères différents, permettent d'estimer si une expérience est telle qu'un des modes de convection (en particulier celui lié à la gravité) pourra être virtuellement négligé. Une discussion dimensionnelle de ces limites sera effectuée dans la conclusion partielle présentée au §4.e., mais avant cela, nous désirons compléter les informations sur le modèle en donnant l'expression analytique de la température.

4.d. Dérivation du profil de température $T(x,z) = A_T x + G(Z)$.

Bien que nous ne déterminons pas expérimentalement de profil de température, parce que nous ne sommes pas équipés pour effectuer des mesures optiques (par interférométrie différentielle par exemple) du champ de température et que nous ne désirons pas introduire de sonde matérielle (thermocouples,...) dans la couche liquide (problème de perturbation mécanique et de contamination), nous allons cependant pour être complet déterminer le profil de température $T(x,z)$.

L'équation de conservation de l'énergie (II-18) peut être réécrite sous forme intégrée :

$$A_T \int_0^h V_x dz = \kappa \left[\frac{\partial T}{\partial z} \right]_0^h \quad (\text{II-40})$$

Etant donné la condition (II-26) du bilan de matière à travers tout plan vertical, les deux membres de (II-40) sont nuls. Par conséquent, on en déduit que les flux de chaleur verticaux à travers les parois $z = 0$ ($Z = -1$) et $z = h$ ($Z = 1$) sont égaux. En intégrant deux fois l'équation (II-18), on obtient l'expression de $G(Z)$, la dépendance en Z de la température :

$$G(Z) = A_T^2 (h/2)^2 \frac{1}{24} \frac{g \alpha (h/2)^3}{\kappa \nu} \left[\frac{Z^5}{5} - \frac{(1-3k)}{4} Z^4 \right]$$

$$- (1-k) Z^3 + \frac{(1-3k)}{2} Z^2 + C_1 Z + C_2] \quad (II-41)$$

Les deux constantes d'intégration C_1 et C_2 dépendent des conditions aux limites. Si on considère des limites isolantes ($\partial G/\partial Z = 0$ en $Z = -1$ et $Z = 1$), on trouve $C_1 = 2 - 3k$. La constante indépendante C_2 peut être arbitrairement fixée à zéro, soit en redéfinissant une nouvelle échelle de température avec un zéro différent, soit en définissant les coordonnées de telle manière que $T(0,0) = 0$. Avec cette condition thermique, la figure II-23 donne l'allure de cette fonction $G(Z)$ pour différentes valeurs de k .

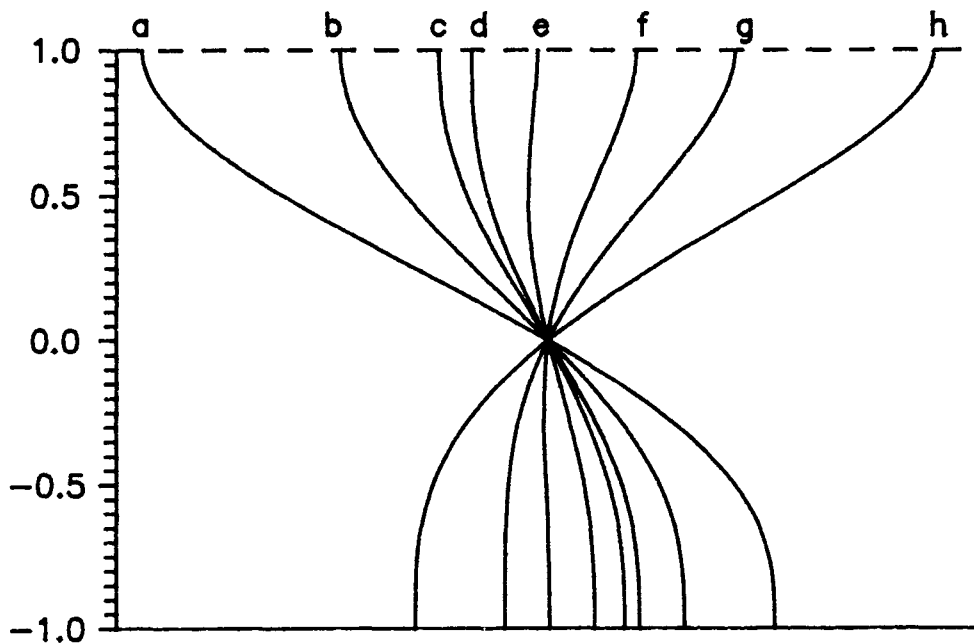


Figure II-23.

Allure de la fonction $G(Z)$ pour différentes valeurs de k .

$k = -0.5$ (a); 0 (b); 0.25 (c); $1/3$ (d); 0.5 (e); 0.75 (f); 1 (g); 1.5 (h).

Il est à noter que ces courbes sont également liées à la forme des isothermes, puisque les abscisses $x(Z)$ sont telles que

$$T_{iso} = A_T x(Z) + G(Z) \quad (II-42)$$

où T_{iso} est la température d'une isotherme particulière. Donc, l'allure des isothermes est une fonction linéaire du profil $G(Z)$.

$$x(Z) = \frac{T_{iso} - G(Z)}{A_T} \quad (II-43)$$

4.e. Conclusion.

Le présent modèle nous indique que le gradient de température n'intervient que comme facteur dans l'expression générale de V_x . La forme du profil $V_x(Z)$ est uniquement déterminée par la valeur du paramètre k , contenant les propriétés de dilatation du fluide, la variation de la tension superficielle avec la température, l'épaisseur de liquide, et l'accélération du champ de gravité :

$$k = \frac{\partial\sigma/\partial T}{\rho_o \alpha g (h/2)^2}$$

L'analyse du profil suggère différents régimes suivant les valeurs de k :

- i) $k < 0$: Une cellule convective dans le sens des mouvements thermogravitationnels, auxquels s'ajoutent les forces de tension superficielle ($\partial\sigma/\partial T < 0$).
- ii) $0 < k < 1/3$: Toujours une seule cellule dans le sens des mouvements thermogravitationnels, les forces de tension superficielle s'opposent à ces mouvements ($\partial\sigma/\partial T > 0$); mais ne sont pas suffisantes pour créer en surface le mouvement du froid vers le chaud, des bas σ vers les grands σ .
- iii) $1/3 < k < 1$: Deux cellules contrarotatives superposées sont observées. La cellule supérieure est provoquée par les forces de tension superficielle, avec un mouvement en surface du froid vers le chaud. La cellule inférieure est la cellule thermogravitationnelle, toujours présente. Son importance diminue lorsque k tend vers 1.
- iv) $k > 1$: Une seule cellule convective due à la tension superficielle et de sens inverse des forces thermogravitationnelles.

Si on veut obtenir par l'expérience ces différents régimes, il faudra donc faire varier la hauteur de liquide, et non pas ΔT comme nous l'avons fait au paragraphe 3.

D'autre part, si on souhaite effectuer des expériences dans des conditions où la gravité ne joue qu'un rôle négligeable, en vue d'applications en science des matériaux sous gravité réduite, il faudra prendre le nombre k suffisamment grand. On y voit que la partie indépendante des propriétés du fluide est le produit $g h^2$. Une expérience pratiquée en environnement de microgravité est en fait toujours soumise aux forces gravifiques résiduelles, caractérisées par une accélération résiduelle de l'ordre de $10^{-4} g_o$, où g_o est l'accélération du

champ terrestre. Dès lors, une expérience dans ces conditions avec une épaisseur de fluide de 1 cm devrait être équivalente à une autre expérience effectuée sur terre dans une couche de 100 μm . Mais, est-il nécessaire d'avoir des couches aussi fines pour pouvoir négliger les effets thermogravitationnels sur terre ? La réponse a en fait été donnée dans l'analyse du paragraphe 4.c. Nous y avons déterminé, selon deux critères différents, que l'action de la gravité était négligeable vis-à-vis des forces de tension superficielle dès que $|k|$ était de l'ordre de 5 à 10. Une expérience spatiale, telle que celle du vol TEXUS 8, décrite en §1, a été effectuée dans des conditions pour lesquelles k est de l'ordre de 5000. Mais étant donné les méthodes expérimentales utilisées, il est pratiquement sûr qu'on ne pouvait pas voir une différence entre cette expérience et une autre où k aurait été fixé à 10. On peut trouver beaucoup de fluides ayant un $\partial\sigma/\partial T$ de l'ordre $-0.1 \text{ mN m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ et $\partial\rho/\partial T$ de l'ordre de 10^{-3} K^{-1} . **Une couche de deux millimètres (ou parfois un peu plus) d'un tel fluide permet donc d'effectuer sur terre l'équivalent des expériences de microgravité.** Pour ces épaisseurs de fluide, les mesures par vélocimétrie sont encore possibles, puisque dans notre cas, l'épaisseur de la sonde optique est de 90 μm , plus de vingt fois inférieure à l'épaisseur d'une telle couche. C'est un résultat très intéressant de ce modèle, d'avoir pu quantifier les conditions dans lesquelles on est virtuellement en environnement de microgravité. Il n'est pas nécessaire d'aller dans l'espace où $k = 5000$, alors qu'il est possible d'atteindre $k = 10$ sur terre et que $k = 10$ ou $k = 5000$ produisent les mêmes résultats quant au profil stationnaire (II-29).

N'oublions cependant pas que l'influence de la gravité sur l'instabilité pourrait rendre ces conditions non valides. Cependant personne n'a encore fait une telle étude de la stabilité du profil stationnaire. Si cette étude prévoyait qu'il faille $|k| > 1000$ pour pouvoir négliger la gravité, on serait contraint de projeter des expériences sur terre dans des couches liquides de l'ordre de 0.2 mm d'épaisseur, dans lesquelles il n'est plus évident d'utiliser la technique de vélocimétrie laser-Doppler. Vu les difficultés, l'utilisation d'un environnement de microgravité, avec des couches liquides de l'ordre de quelques millimètres d'épaisseur, pourrait paraître mieux approprié.

Plutôt que d'entreprendre une étude de la stabilité du profil stationnaire, on pourrait entreprendre un ensemble d'expériences à grand $\partial T/\partial x$ et se contenter d'observer éventuellement des instabilités dans des conditions terrestres. Mais avant tout nous allons décrire les expériences suggérées par l'étude du profil (II-29).

5. Expériences à ΔT constant et épaisseur variable; comparaison avec le modèle analytique.

5.a. Les expériences.

Nous avons étudié le profil de vitesse horizontale $V_x(z)$ sur la médiane verticale en fonction de l'épaisseur de liquide. La cellule de mesure et la concentration de la solution d'heptanol utilisées sont les mêmes que pour les expériences présentées au paragraphe 2. Les températures de thermostatisation sont respectivement 49.5 °C pour le côté froid et 54.5 °C pour le côté chaud, soit une température moyenne de 52.1 °C et $\Delta T = 5$ K.

Voici, suivant les différentes épaisseurs, les résultats de ces mesures.

- h = 14 mm.

Le profil $V_x(z)$ de la figure II-24 révèle l'existence d'une seule cellule convective avec un mouvement du chaud vers le froid près de la surface et du froid vers le chaud près du bord inférieur. Ce profil diffère du mouvement thermogravitationnel pur (voir figure II-21, cas $k=0$) pour lequel on aurait $\partial V_x / \partial z = 0$ en surface. On constate en effet une réduction substantielle de la vitesse en surface, due à l'effet Marangoni. Le mouvement en surface demeure cependant dans le sens imposé par la thermogravitation.

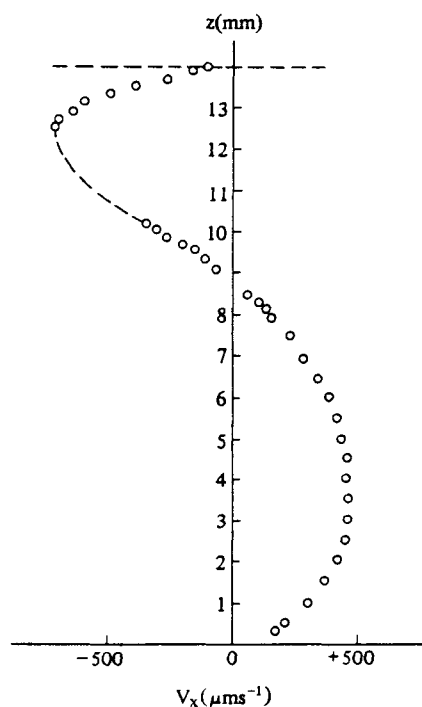


Figure II-24.

Profil $V_x(z)$, h = 14 mm.

- h = 10.2 mm.

Avec cette légère diminution de l'épaisseur de liquide, les forces superficielles surpassent maintenant les forces de sustentation et on observe un mouvement en surface dirigé vers le côté chaud (voir la figure II-25). Cela implique la coexistence de deux cellules convectives contrarotatives. Dans le cas présent, la cellule supérieure (induite par la thermocapillarité) est peu épaisse (un sixième de l'épaisseur totale) et la vitesse en surface est inférieure à ce qu'on peut observer en coeur de phase.

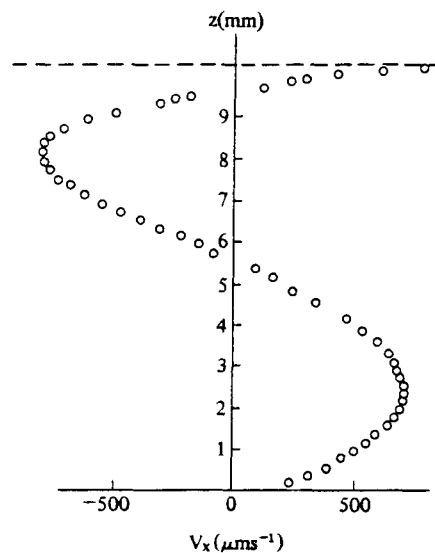


Figure II-25.

Profil $V_x(z)$, $h = 10.2$ mm.

- h = 7.4 mm.

- h = 6 mm.

Ces deux cas sont des prolongations du cas $h = 10.2$ mm. On augmente la convection thermocapillaire relativement à la thermogravitation en diminuant l'épaisseur. Les vitesses en surface deviennent plus importantes par rapport aux vitesses mesurées en coeur de phase. De plus, l'épaisseur de la cellule induite par la gravité est fortement réduite (voir les figures II-26 et II-27).

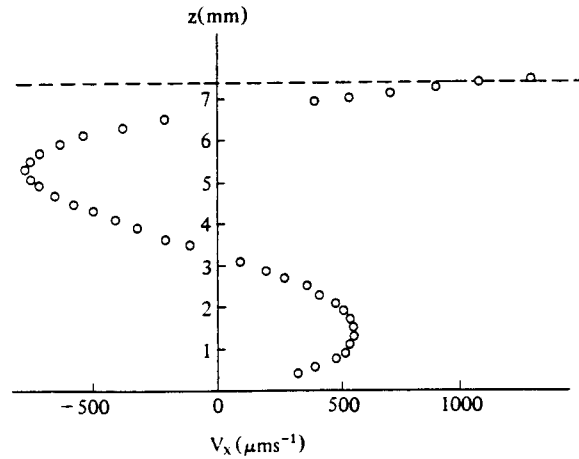


Figure II-26.
Profil $V_x(z)$, $h = 7.4$ mm.

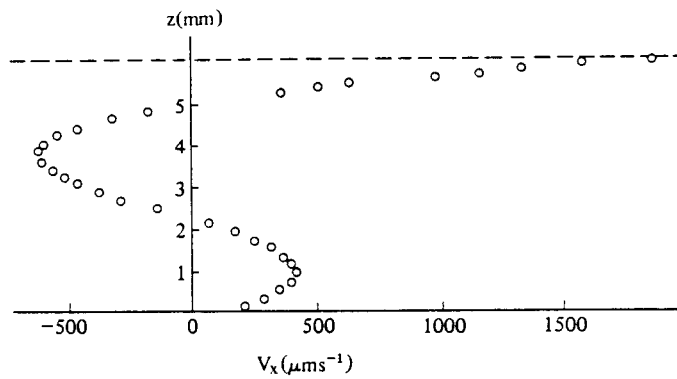


Figure II-27.
Profil $V_x(z)$, $h = 6$ mm.

$- h = 4.9$ mm.

Avec une couche liquide encore plus fine, on n'observe plus qu'une seule cellule convective induite par la tension superficielle. La cellule thermogravitationnelle a disparu (il n'y a pas de V_x positifs en bas de la cavité sur la figure II-28). Néanmoins, l'influence de la gravité se fait toujours ressentir : c'est démontré par l'observation expérimentale que $\partial V_x / \partial z$ est approximativement nul en bas de la couche. Puisque la paroi inférieure est rigide, cette constatation ne peut être expliquée que par le fait que $k \simeq 1$, (voir figure II-22, cas $k = 1$).

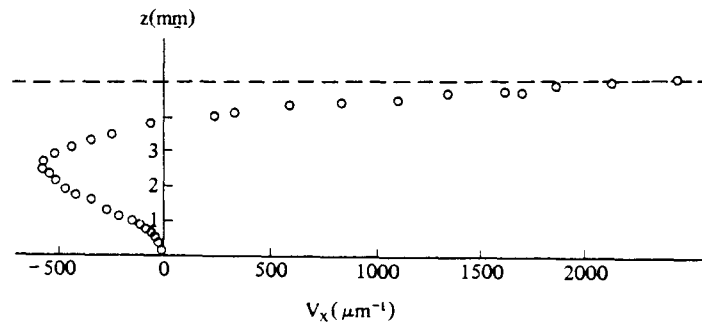


Figure II-28.
 Profil $V_x(z)$, $h = 4.9$ mm.

$-h = 3.3$ mm.

Cette fois, on ne peut plus déceler aucun effet dû à la gravité à partir du profil de vitesse de la figure II-29. La seule cause apparente des mouvements de convection est la tension superficielle. La vitesse en surface est beaucoup plus grande qu'en coeur de phase.

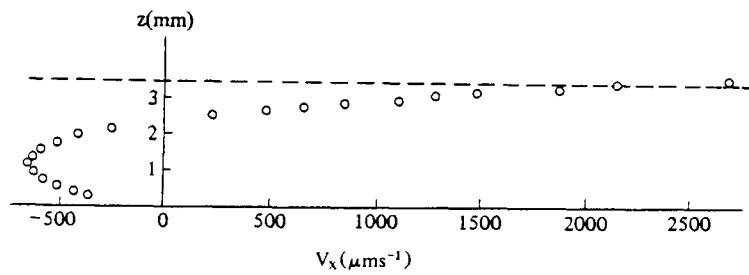


Figure II-29.
 Profil $V_x(z)$, $h = 3.3$ mm.

Pour mieux comparer les vitesses, les six expériences sont regroupées sur le même graphique, à la figure II-30, en utilisant évidemment une ordonnée verticale réduite. On constate que la vitesse en surface n'a cessé d'augmenter alors qu'on diminuait l'épaisseur de la solution.

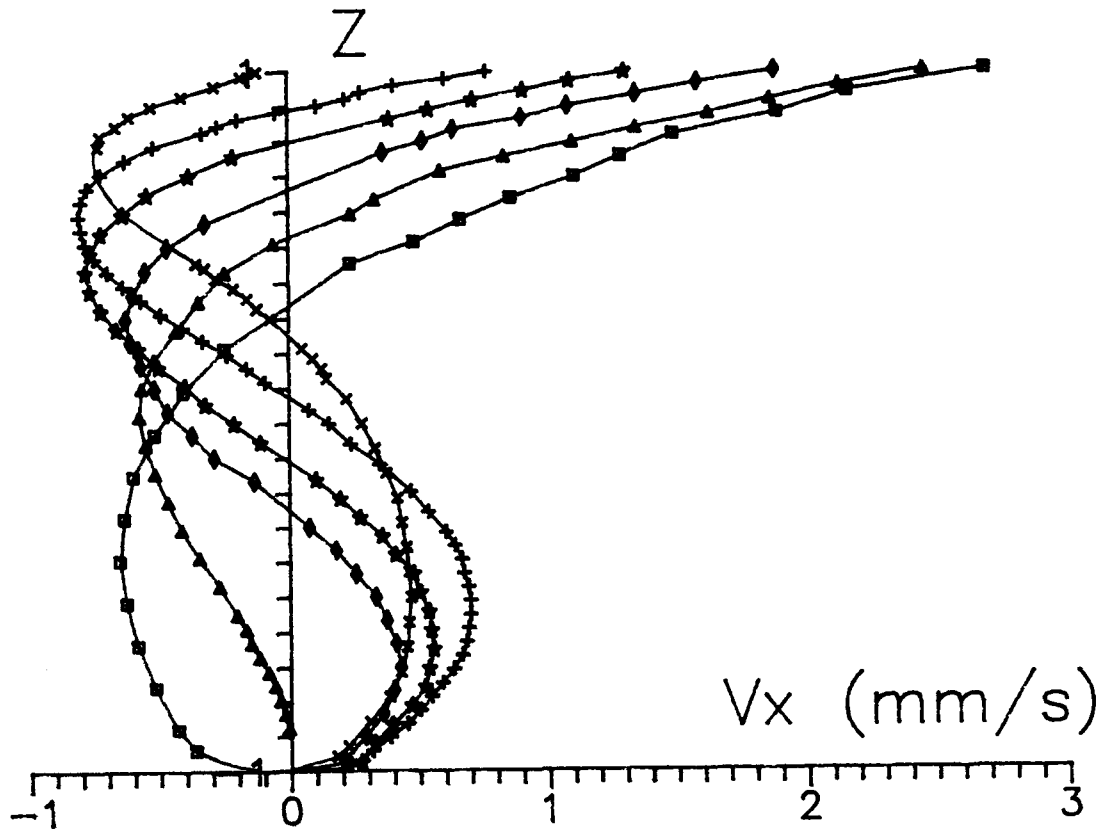


Figure II-30.

Profils $V_x(Z)$ des six expériences.

Notons que pour les deux dernières expériences ($h = 4.9$ mm et $h = 3.3$ mm), deux petits vortex existent dans les coins inférieurs de la cavité, comme le montre le schéma de la figure II-31. Ils pourraient être dûs à la gravité, ou être des vortex secondaires induits par la cellule thermocapillaire. Un relevé expérimental démontrant l'existence de ces deux vortex est donné à la figure II-32. Il montre $V_x(x)$ 0.6 mm au-dessus du fond de la cavité contenant 4.4 mm de liquide (une épaisseur comprise entre 4.9 et 3.3 mm). On constate effectivement que V_x est positif à proximité des bords latéraux, tandis qu'il est négatif dans la partie centrale.

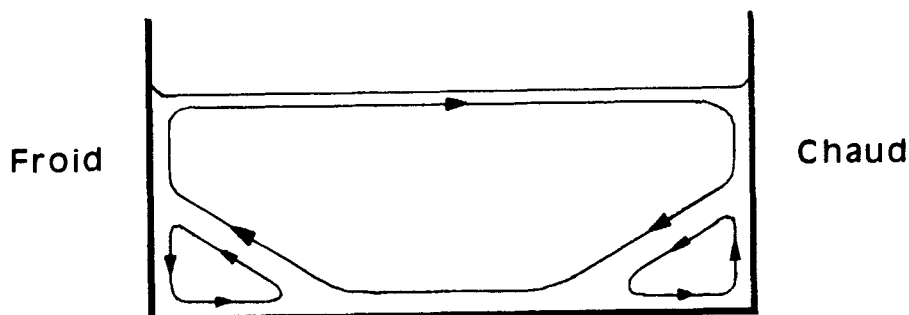


Figure II-31.

Schéma d'une couche de faible épaisseur avec deux vortex.

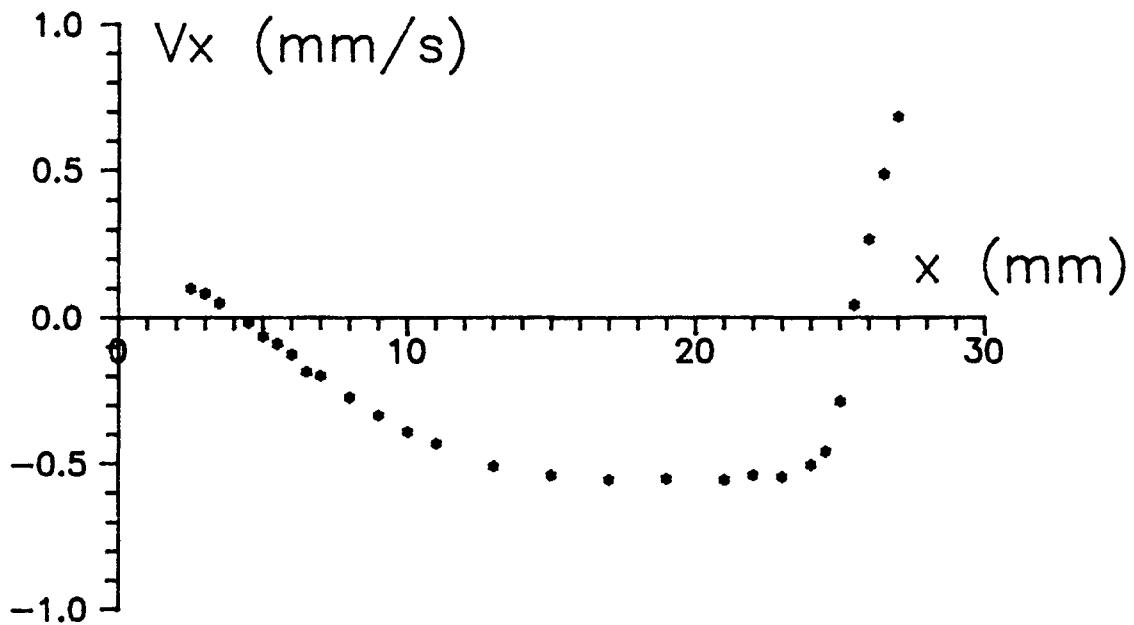


Figure II-32.

Profil $V_x(x)$ 0.6 mm au-dessus du bord inférieur.
 $h = 4.4$ mm, $\Delta T = 5.25$ K, $\langle T \rangle = 52.0^\circ\text{C}$

5.b. Discussion.

Nous avons essayé de faire correspondre le profil $V_x(Z)$ de l'équation II-29 aux profils expérimentaux. La table II-3 fournit les meilleurs k obtenus (qui minimisent l'écart entre les profils théorique et expérimental) et les valeurs du rapport $-4Ma/Ra$ évaluées à partir des propriétés physiques de la solution utilisée. Ces résultats sont aussi portés en graphique à la figure II-33. On observe une assez forte différence entre les valeurs déterminées expérimentalement de k et celles calculées pour $-4Ma/Ra$ (à partir des données physiques sur la solution). On a cependant une relation presque linéaire entre ces deux variables.

Table II-3.

h (mm)	k	$-4Ma/Ra$
14	0.227	0.453
10.2	0.402	0.884
7.4	0.497	1.62
6.0	0.599	2.47
4.9	0.92	3.70
3.3	3.24	8.15

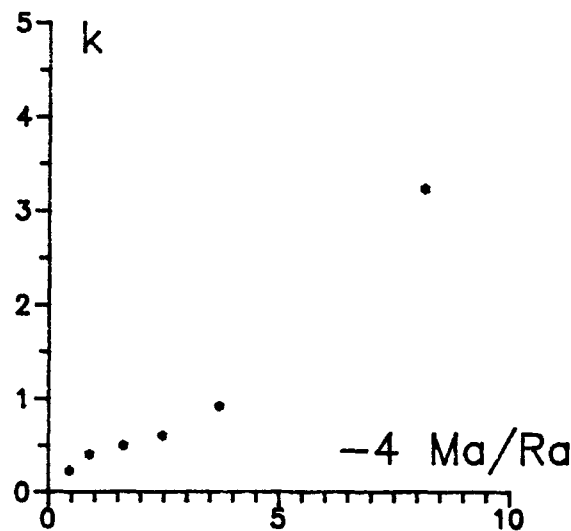


Figure II-33.

Graphique des valeurs de k calculées à partir des profils $V_x(z)$, en fonction des rapports $-4 Ma/Ra$.

Les 6 profils de vitesses des figures II-24 à II-29 sont en excellent accord, du point de vue qualitatif, avec le modèle théorique exposé précédemment. On observe effectivement les différents régimes convectifs prévus lors de l'analyse du modèle analytique, au fur et à mesure que l'épaisseur diminue. Il n'y a malheureusement pas d'accord quantitatif sur les valeurs de k , pour de multiples raisons possibles :

- i) Il est difficile de déterminer $\partial\sigma/\partial T$ au point de mesure. Parce que $\sigma(T)$ n'est pas linéaire, que par conséquent $\partial\sigma/\partial T$ est fonction de la température et la distribution de température en surface. Par exemple, à $49.5\text{ }^\circ\text{C}$ (T_{froid}), $\partial\sigma/\partial T = 0.086\text{ mN/m}$, et à $54.5\text{ }^\circ\text{C}$ (T_{chaud}), $\partial\sigma/\partial T = 0.124\text{ mN/m}$, soit une différence d'environ 40 %. On se contente alors de la valeur de $\partial\sigma/\partial T$ à $\langle T \rangle$. D'autre part, les données sur la tension superficielle ont été obtenues par des méthodes de mesure d'équilibre. Dans nos expériences, les conditions dynamiques (la surface de liquide est constamment renouvelée) pourraient modifier $\partial\sigma/\partial T$, parce que σ dépend peut-être du temps. Defay *et al.* [18] ont déjà relevé une dépendance temporelle significative dans des solutions de décanol.
- ii) Le rapport d'aspect n'est pas infini; il est même variable entre les différentes expériences (de 2 à 10). Près des bords, le fluide doit se retourner, il y a donc une certaine zone pour laquelle $V_z \neq 0$, contrairement à l'hypothèse du modèle.
- iii) $V_x(x)$ n'est pas constante, contrairement à ce que prévoit le modèle. Au cours d'une expérience dans une couche de 8.7 mm avec $\Delta T = 4.75\text{ K}$ et $\langle T \rangle = 51.7\text{ }^\circ\text{C}$, nous avons mesuré V_x le long de la surface (voir figure II-34).

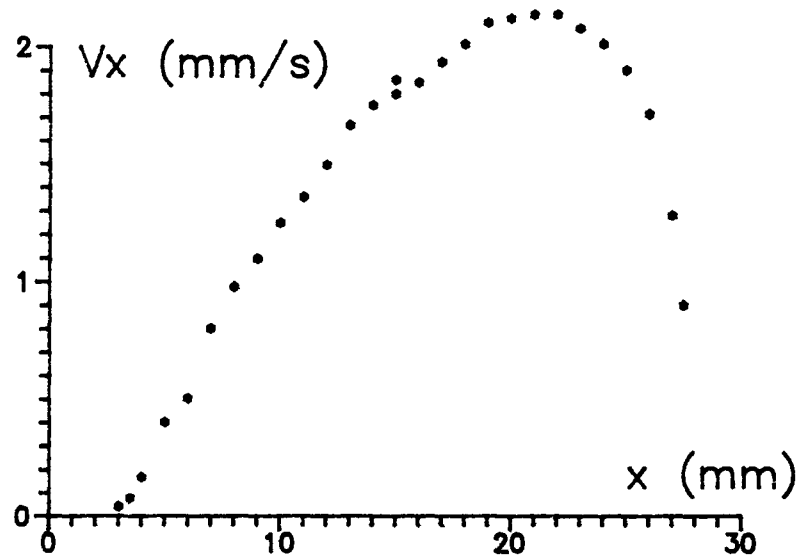


Figure II-34.

$$V_x(x); h = 8.7 \text{ mm}, \Delta T = 4.75 \text{ K}, \langle T \rangle = 51.7 \text{ }^\circ\text{C}.$$

On constate même l'absence d'un palier avec une valeur constante de V_x dans une région centrale de la surface. On remarque aussi que la courbe n'est pas symétrique.

- iv) La surface n'est pas plane dans les expériences, à cause de l'effet de ménisque près des bords.
- v) Les mouvements sont certainement tridimensionnels. Non seulement d'une part parce que V_x dépend de y puisque les faces avant et arrière ralentissent l'écoulement, mais aussi parce qu'on peut avoir $V_y \neq 0$. Une composante V_y existe certainement si les faces avant et arrière en verre ne sont pas parfaitement isolantes, entraînant que $\partial T / \partial y \neq 0$. D'après les résultats expérimentaux, on constate que la condition II-26 de bilan de matière n'est pas vérifiée, et qu'il faudrait écrire, si on veut modéliser des expériences que :

$$\iint V_x(x,y,z) dz dy = 0 \quad (\text{II-44})$$

Quoiqu'il en soit, il y a surtout un résultat expérimental important dans l'expérience effectuée sur une couche de 3.3 mm de solution d'heptanol. **Vu le profil correspondant de $V_x(z)$, on peut considérer que le rôle de la gravité terrestre peut y être négligé.** On peut sur ce cas précis tester quelques-unes des 5 hypothèses énoncées précédemment comme causes plausibles du désaccord; en particulier les hypothèses ii) et iii) peuvent être levées par une simulation numérique dans une cavité rectangulaire avec $V_z \neq 0$ et $V_x = V_x(x,z)$. C'est l'objet des deux paragraphes suivants.

6. Comparaison entre le modèle numérique et le modèle analytique.

6.a. Introduction.

Parmi les raisons qui ne permettent pas une comparaison quantitative entre les expériences et le modèle analytique, nous avons relevé l'effet des bords et la méconnaissance de la distribution de température en surface. Près des bords chaud et froid imperméables, le liquide est contraint de monter ou de descendre, pour se "retourner". Il existe par conséquent une région proche des bords où V_z est non nul. Le modèle analytique unidimensionnel n'y sera certainement pas applicable, puisqu'une des hypothèses importantes est l'existence d'un écoulement parallèle, avec $V_z = 0$. Une question importante est de savoir jusqu'à quelle distance se fait sentir l'influence des bords, et si on peut éventuellement négliger leur présence. Pour observer dans la région centrale d'une cavité un profil $V_x(Z)$ cubique comme le prévoit l'équation II-29, faut-il un rapport d'aspect de 2, 4, 10, 100 ?

Le modèle analytique suppose aussi que le gradient horizontal de température $\partial T/\partial x$ est constant : c'est le paramètre de contrôle. Ici aussi, on se doute que dans les conditions expérimentales, cette hypothèse n'est certainement pas vérifiée dans toute la cavité, mais tout au plus dans une région centrale. C'est un effet indirect des bords latéraux près desquels les isothermes ne peuvent être parallèles.

Des simulations numériques avec le modèle bidimensionnel vont nous permettre d'investiguer ces effets, puisque le modèle tient compte des effets des bords et qu'on fixe les nombres Ra et Ma, ce qui équivaut à imposer ΔT dans les expériences.

6.b. Les simulations numériques.

La plupart des simulations présentées dans ce paragraphe ont été effectuées dans des rectangles de rapport d'aspect $A = 4$. Le maillage utilisé pour les différences finies est composé de 129 lignes verticales et de 33 lignes horizontales. Le nombre de Prandtl Pr est fixé à 4 (ce qui est valable notamment pour l'eau aux environs de 50 °C), la limite inférieure de la cavité est considérée comme conductrice de la chaleur, et le nombre de Marangoni M2 lié à la courbure de $\sigma(T)$ est nul, puisque le modèle analytique ne tient compte que d'une tension superficielle linéairement liée à la température. On ne considère plus alors que le seul nombre de Marangoni $Ma = M1$.

Comme on effectue des comparaisons de profils $V_x(Z)$ issus des simulations numériques avec le profil cubique prévu par le modèle analytique (éq. II-29), on réécrit celui-ci en terme

de vitesse réduite et en fonction de la coordonnée verticale réduite Z' ($Z' = 0$ en bas de la cavité et $Z' = 1$ en surface). On a alors :

$$V_x(Z') = \left[\frac{\partial T}{\partial X} \right]_{\text{réduit}} \left[\frac{Ra}{Pr} \frac{1}{48} (8Z'^3 - 15Z'^2 + 6Z') - \frac{Ma}{Pr} \frac{1}{4} (3Z'^2 - 2Z') \right] \quad (\text{II-45})$$

Lors des comparaisons, la valeur du gradient de température $(\partial T / \partial X)_{\text{réduit}}$ est calculée en surface à partir des températures obtenues par les calculs de différences finies.

Comme nous désirons effectuer des comparaisons avec le modèle unidimensionnel, on doit faire varier k , soit le rapport $-4Ma/Ra$. Nous avons arbitrairement fixé Ra à 400 et modifié Ma entre les valeurs 400 et -400 (k varie donc entre -4 et 4). Les figures II-35 à II-44 donnent les lignes de courant et les isothermes obtenues par simulation, avec les valeurs successives suivantes pour Ma : 400, 100, 25, 0, -33 , -40 , -50 , -75 , -100 , -400 . Chacune de ces figures donne aussi le profil $V_x(Z)$ sur la médiane verticale au centre de la cavité; le profil analytique calculé par l'équation II-45 est chaque fois superposé au profil numérique. Des informations quantitatives concernant ces expériences sont regroupées dans la table II-4.

Table II-4.

Simulations à $Ra = 400$, $Pr = 4$, $A = 4$.

Valeurs de $|\Psi_{\max}|$, V_x^{surf} et $\partial T / \partial X$ en fonction de Ma .

Ma	k	$ \Psi_{\max} $	V_x^{surf} en $X=2$	$(\partial T / \partial X)$ en surface et en $X=2$
400	-4.	0.742	-4.44	0.164
100	-1.	0.338	-1.776	0.210
25	-0.25	0.189	-0.857	0.230
0	0.	0.135	-0.507	0.239
-33	0.33	0.066	-0.0065	0.248
-40	0.4	0.052	0.103	0.249
-50	0.5	0.035	0.260	0.250
-75	0.75	0.057	0.642	0.248
-100	1.	0.110	1.000	0.243
-400	4.	0.569	3.805	0.171

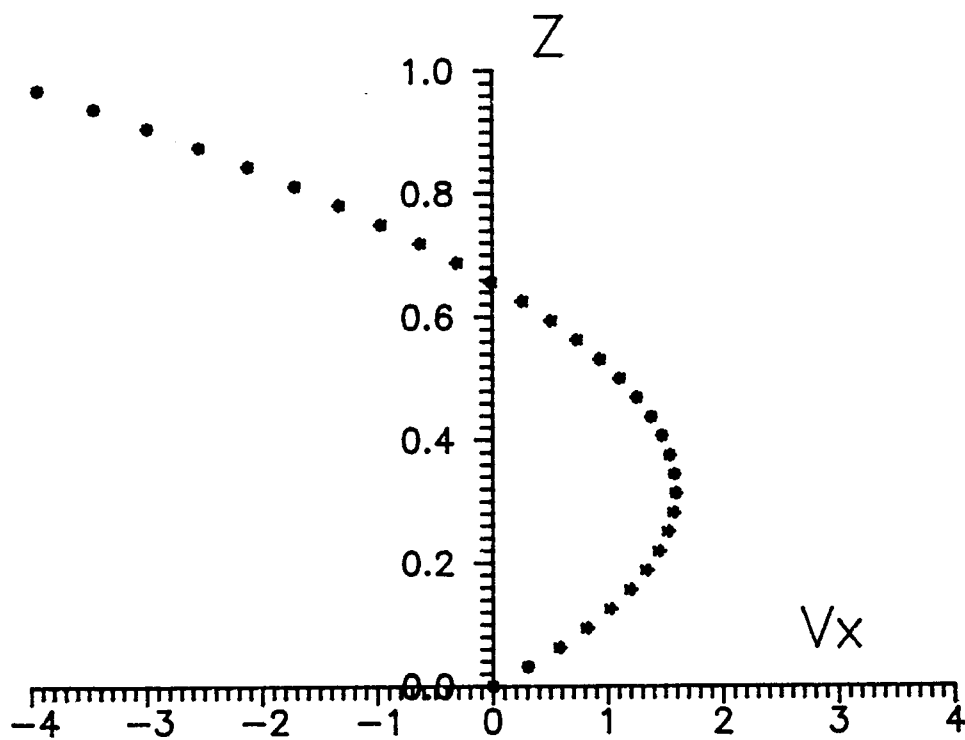
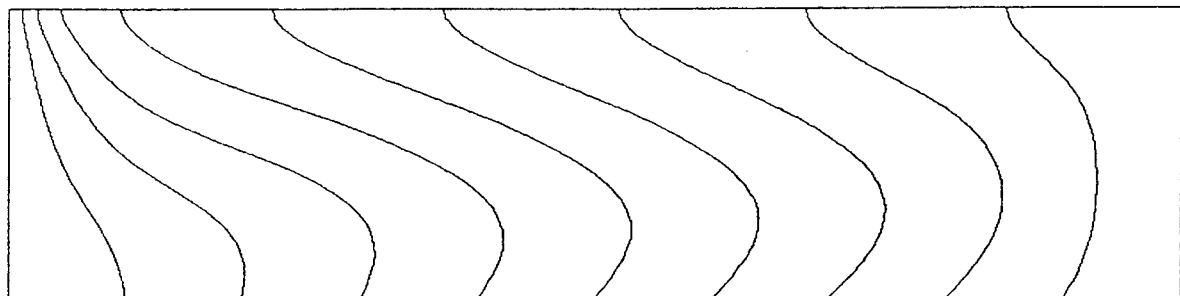
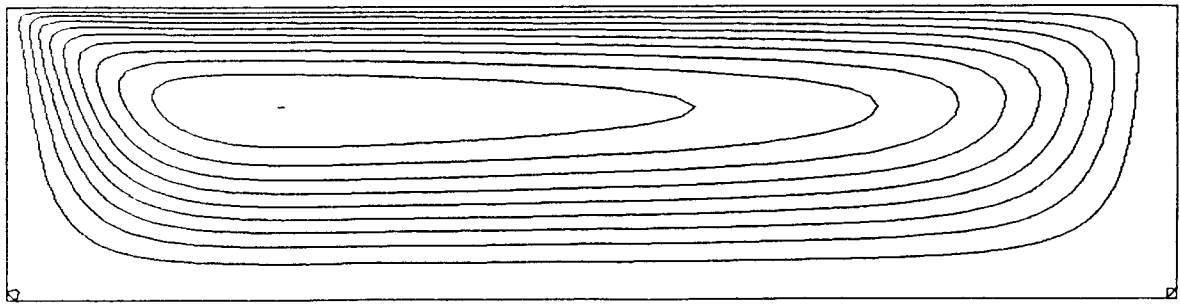


Figure II-35.

$Ra = 400, Ma = 400, Pr = 4, A = 4.$

Lignes de courant, isothermes et profil $V_x(Z)$

(+ : numérique; x : analytique).

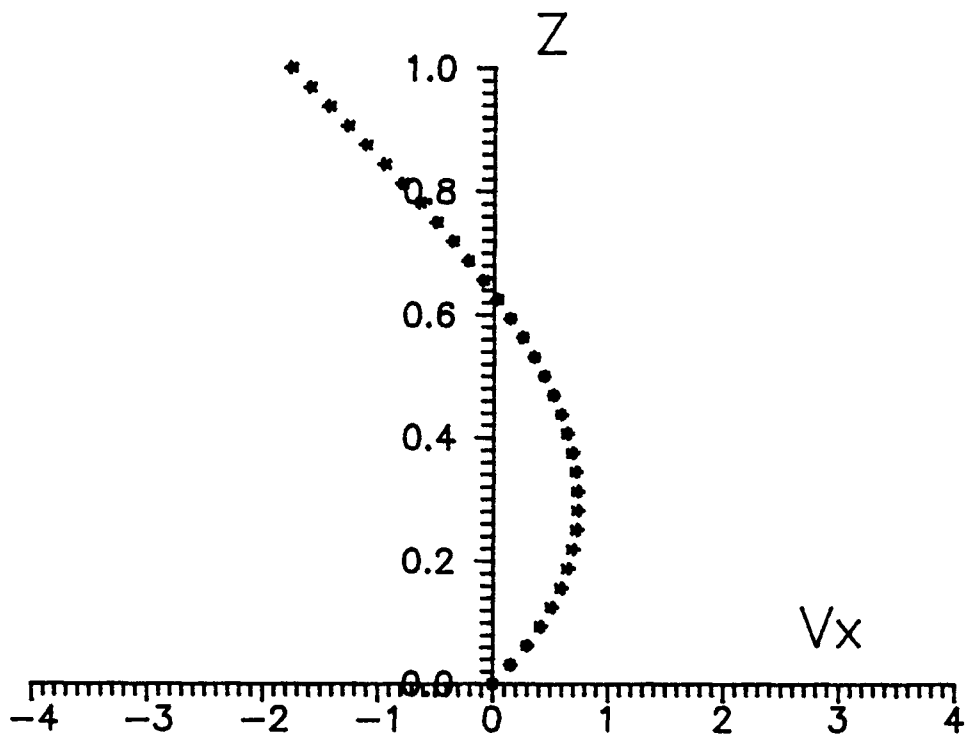
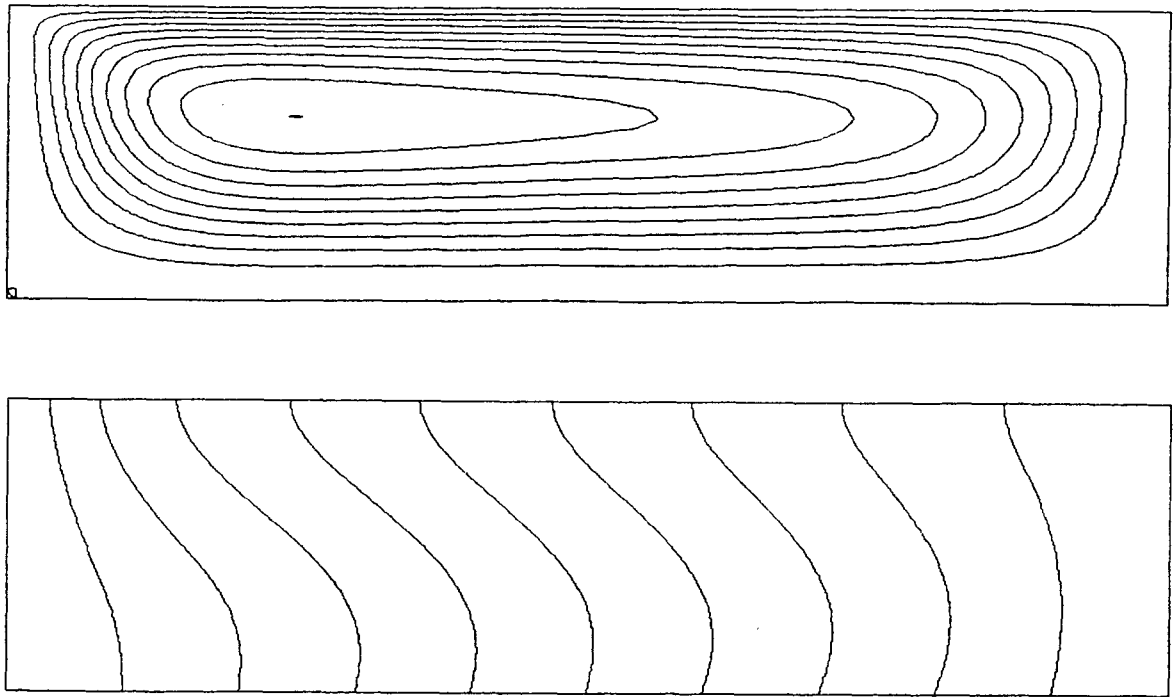


Figure II-36.

$Ra = 400$, $Ma = 100$, $Pr = 4$, $A = 4$.

Lignes de courant, isothermes et profil $V_x(Z)$

(+ : numérique; x : analytique).

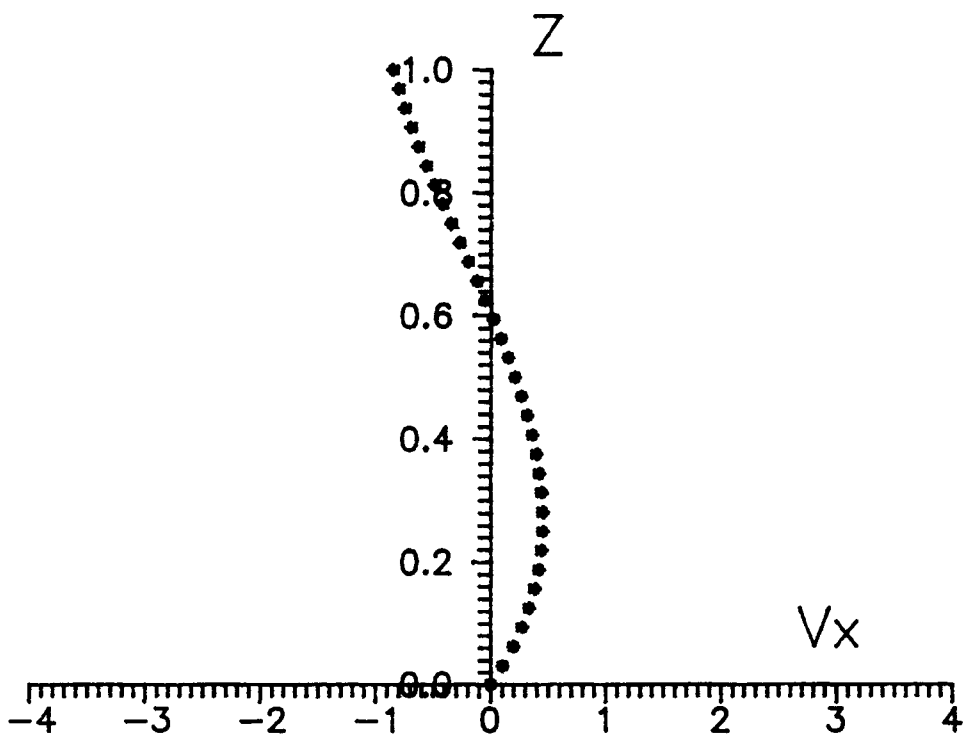
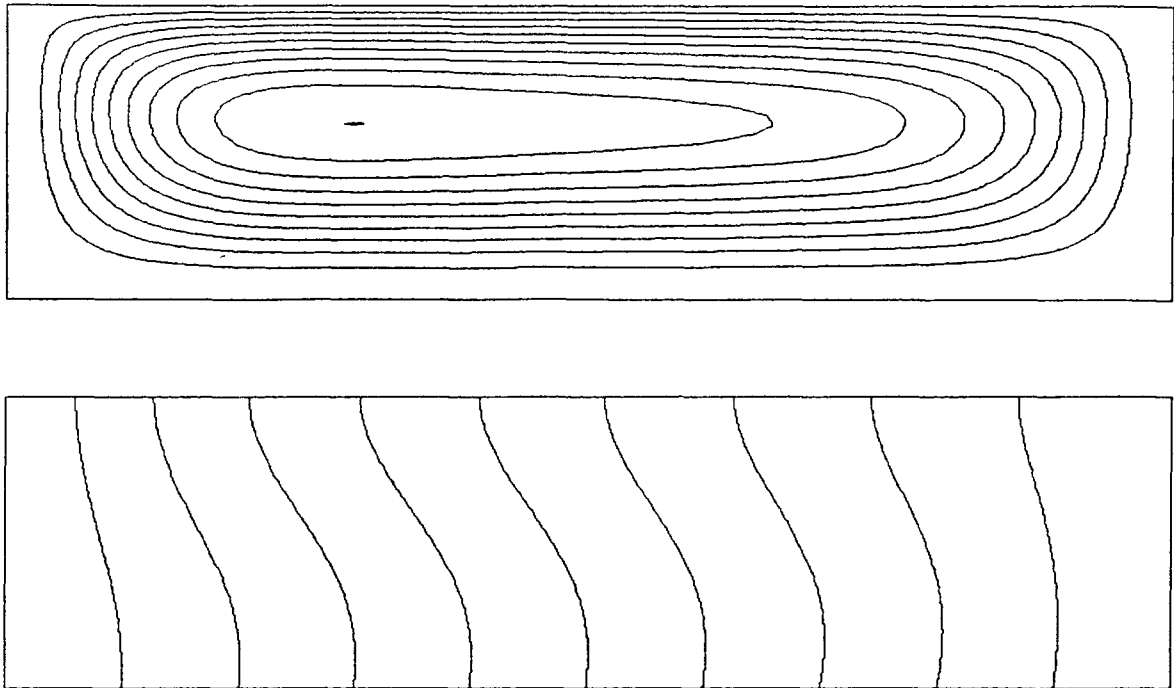


Figure II-37.

$Ra = 400$, $Ma = 25$, $Pr = 4$, $A = 4$.

Lignes de courant, isothermes et profil $V_x(Z)$

(+ : numérique; x : analytique).

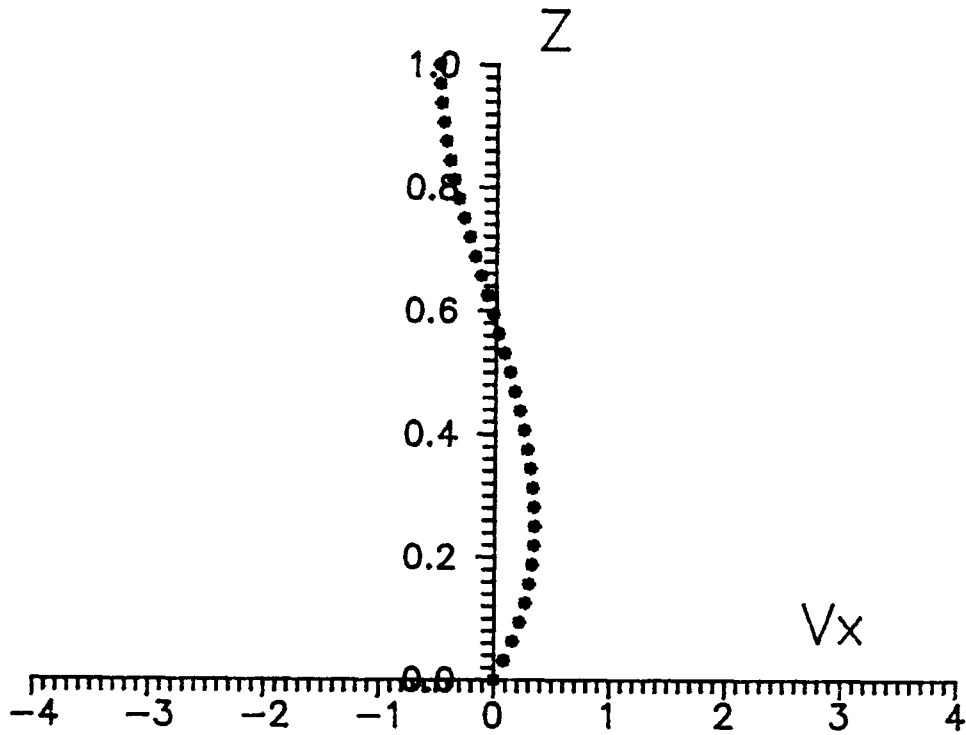
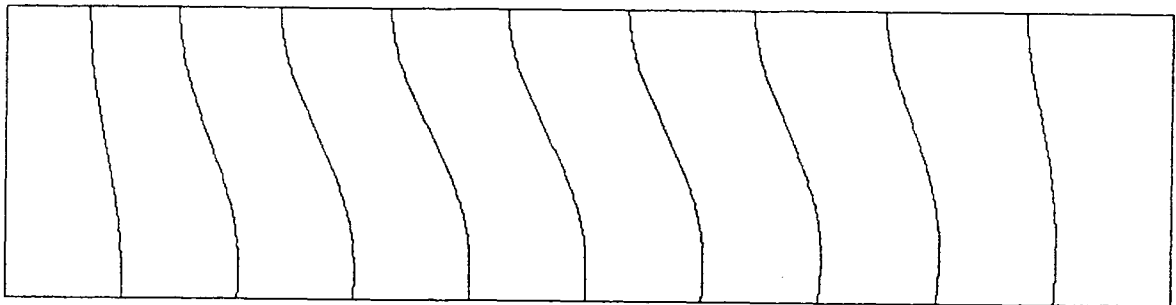
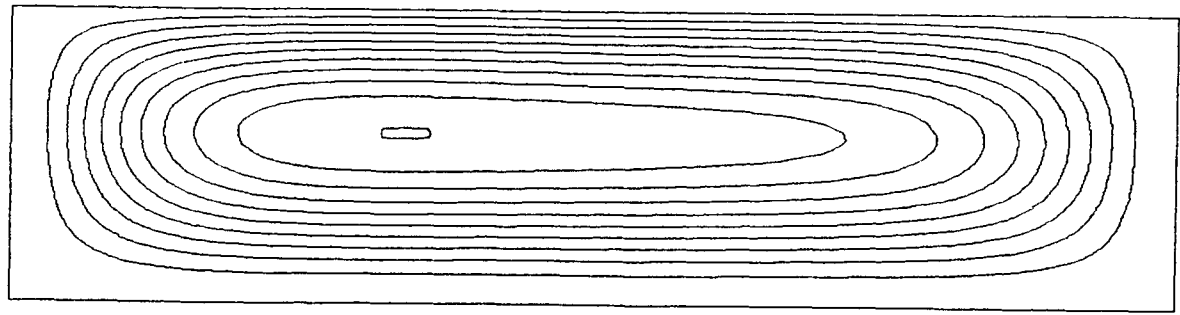


Figure II-38.

$Ra = 400, Ma = 0, Pr = 4, A = 4.$

Lignes de courant, isothermes et profil $V_x(Z)$

(+ : numérique; x : analytique).

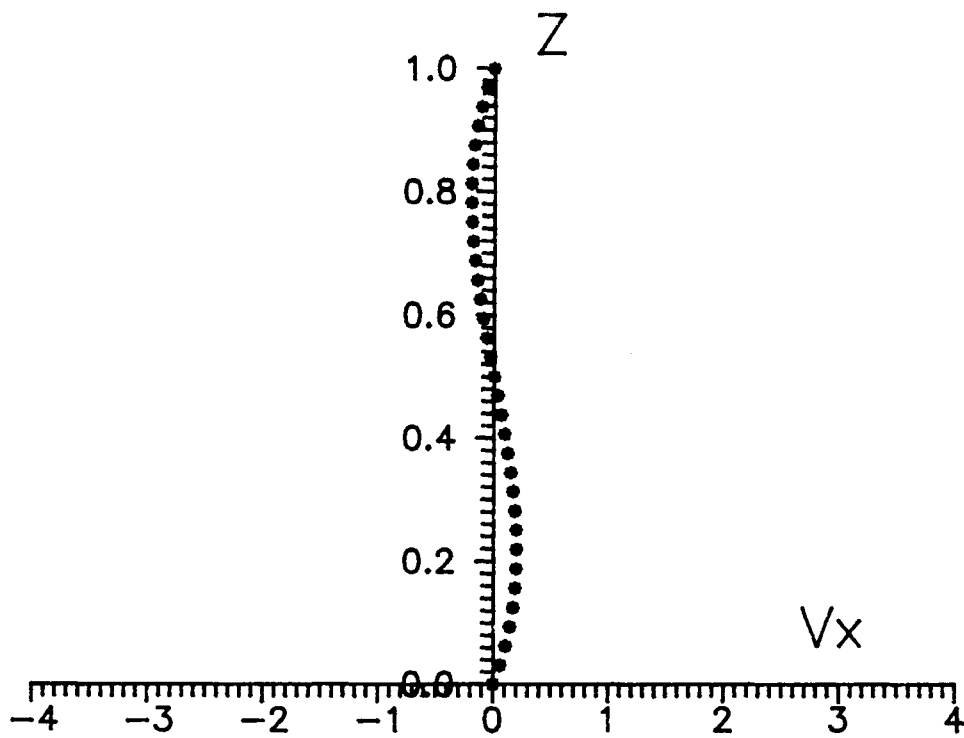
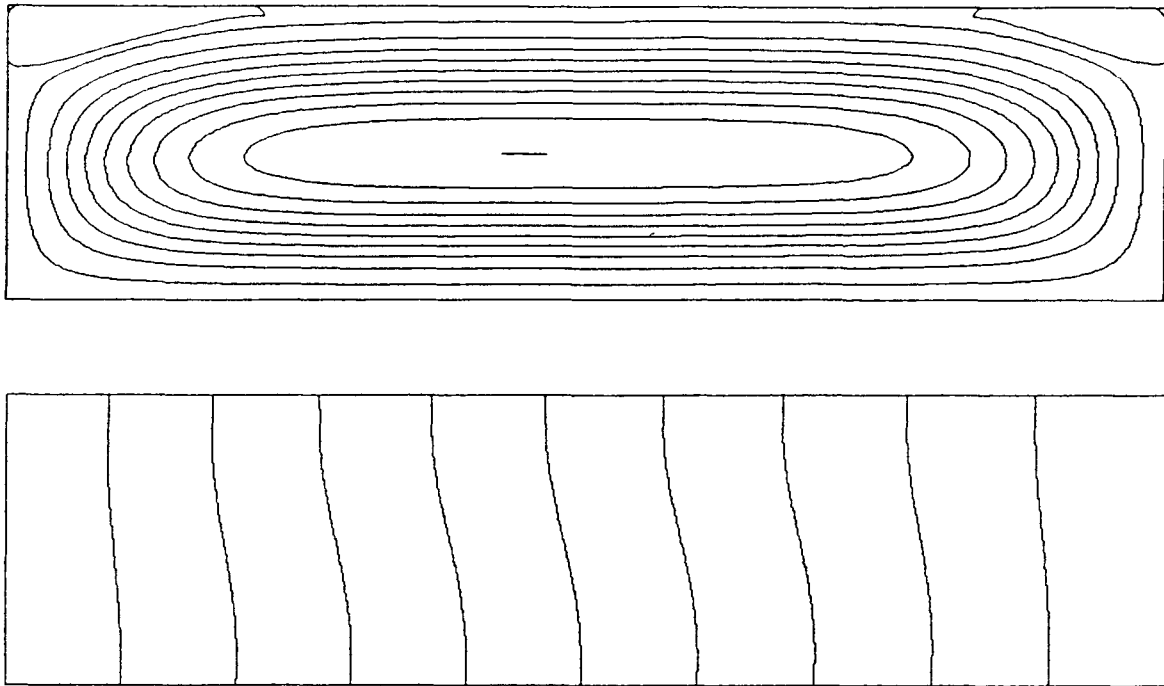


Figure II-39.

$Ra = 400, Ma = -33, Pr = 4, A = 4.$

Lignes de courant, isothermes et profil $V_x(Z)$

(+ : numérique; x : analytique).

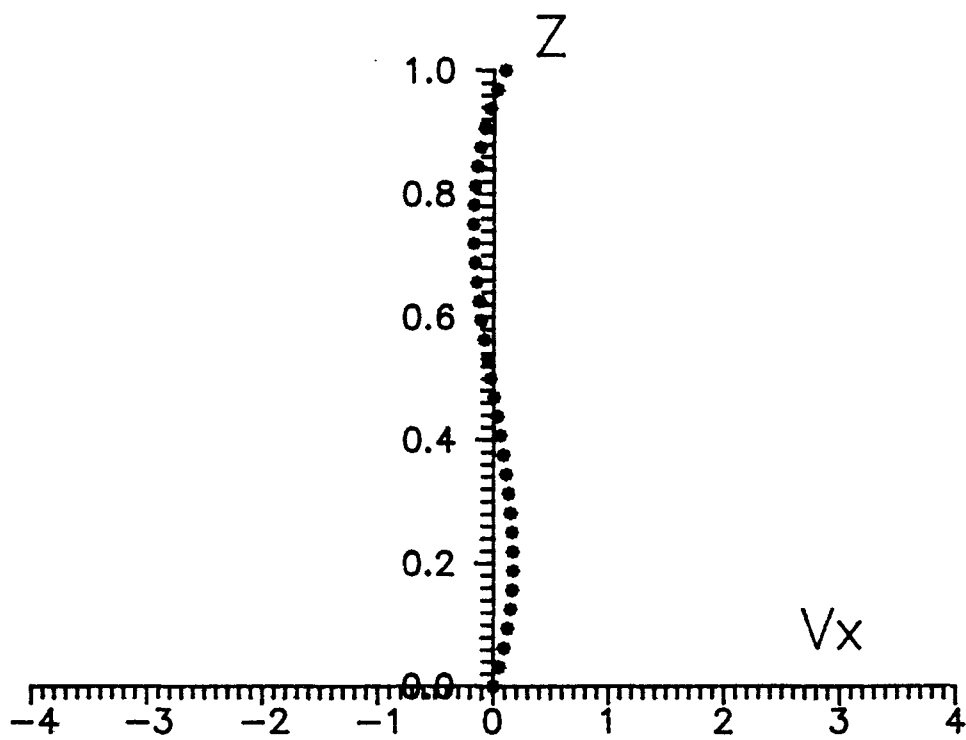
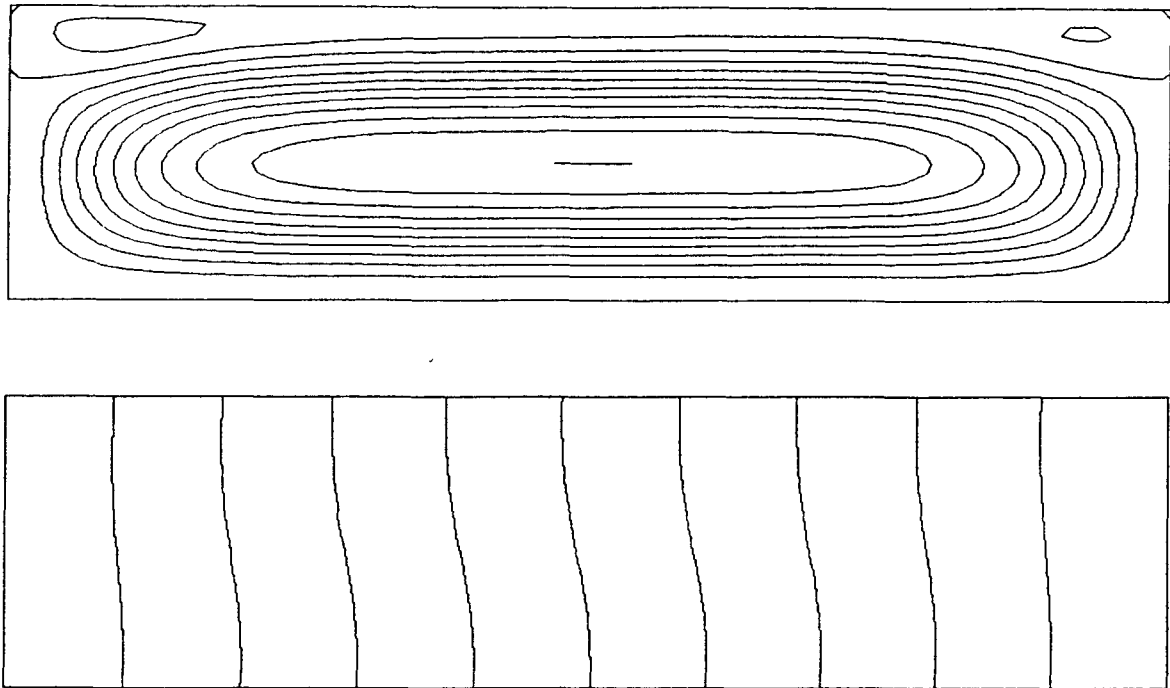


Figure II-40.

$Ra = 400$, $Ma = -40$, $Pr = 4$, $A = 4$.

Lignes de courant, isothermes et profil $V_x(Z)$

(+ : numérique; x : analytique).

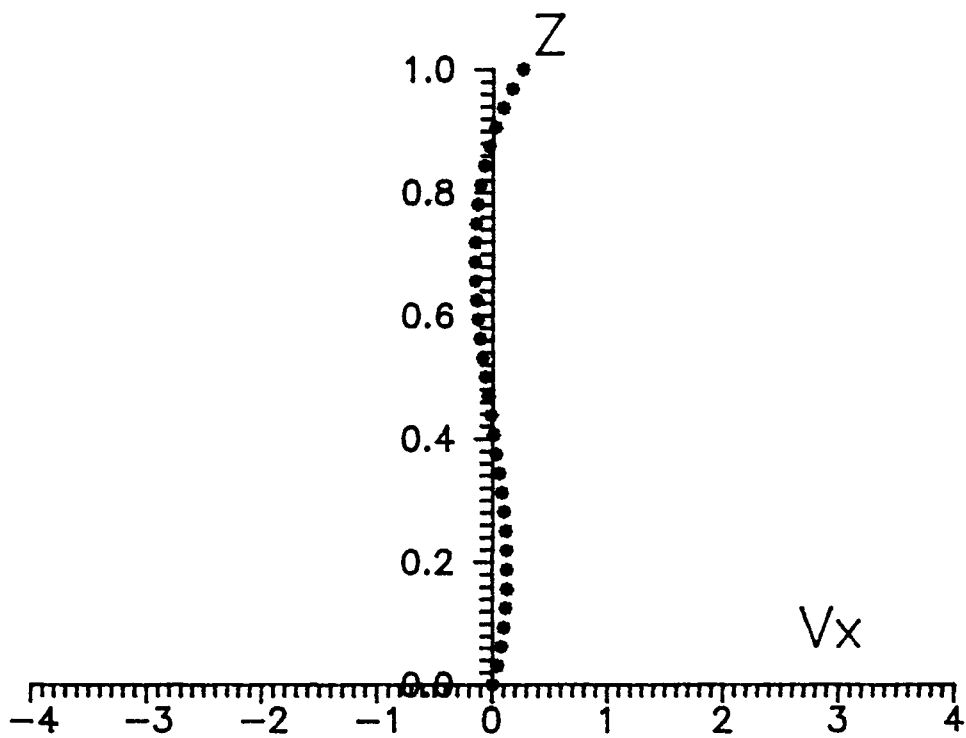
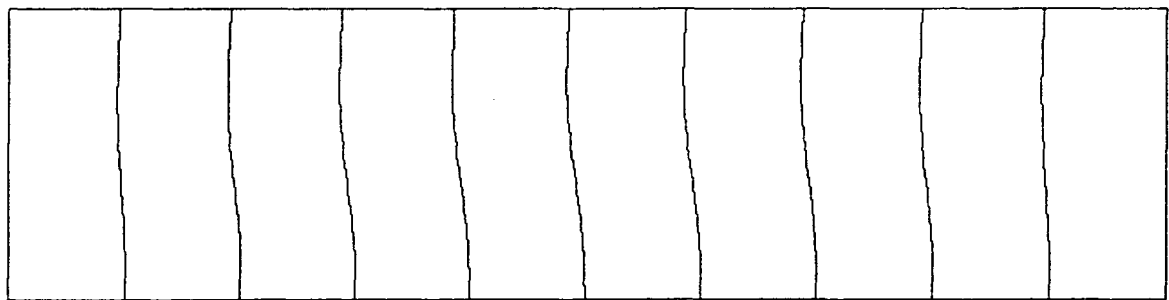
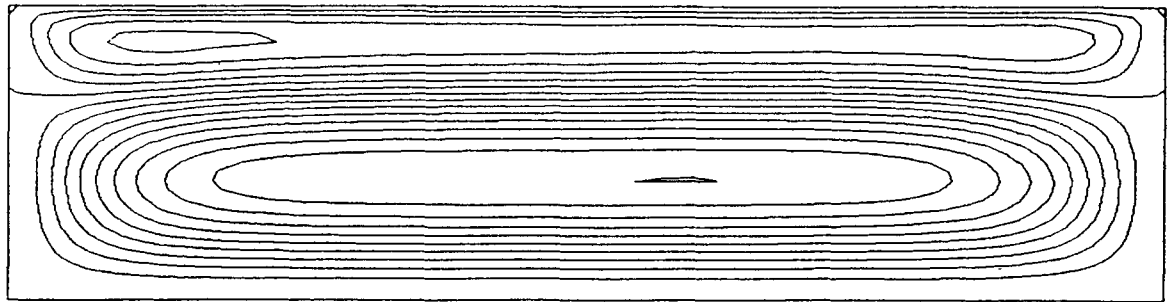


Figure II-41.

$Ra = 400$, $Ma = -50$, $Pr = 4$, $A = 4$.

Lignes de courant, isothermes et profil $V_x(Z)$

(+ : numérique; x : analytique).

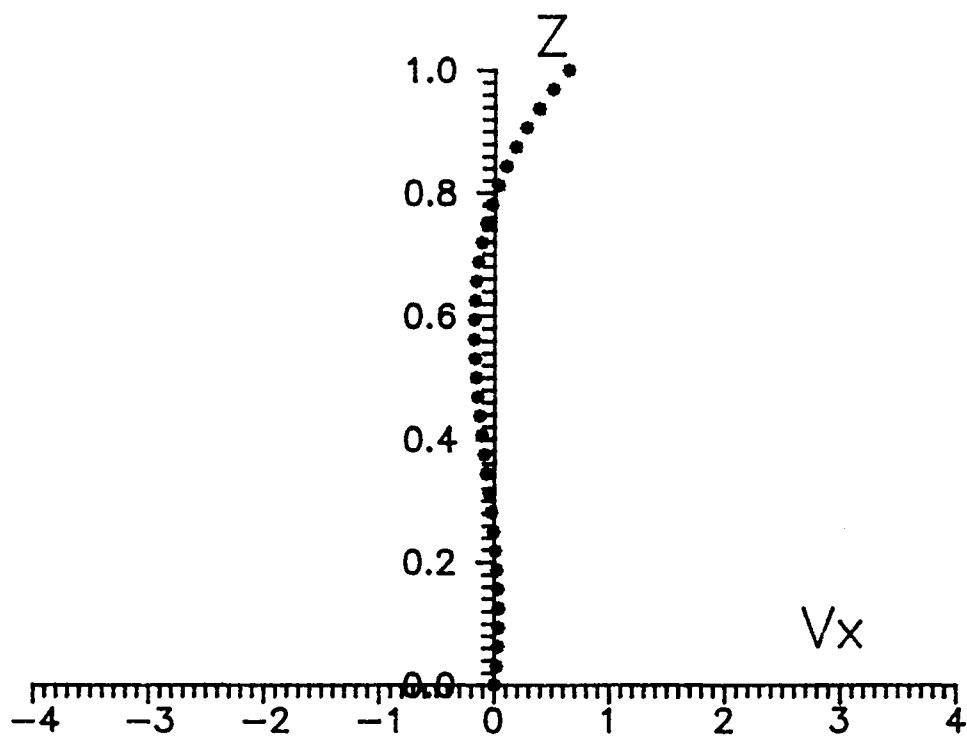
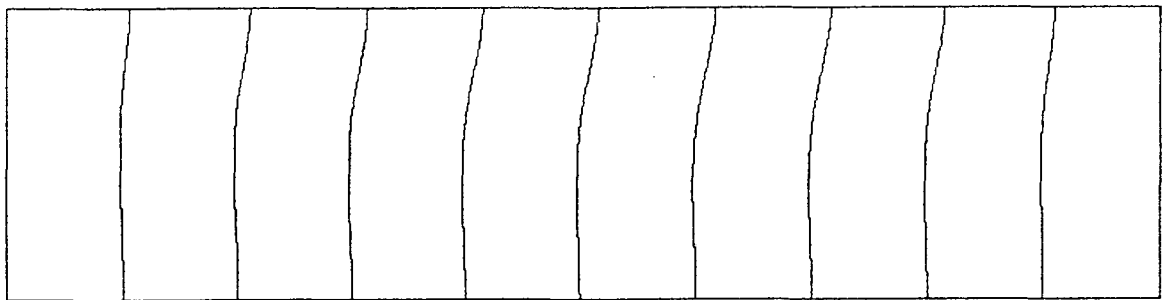
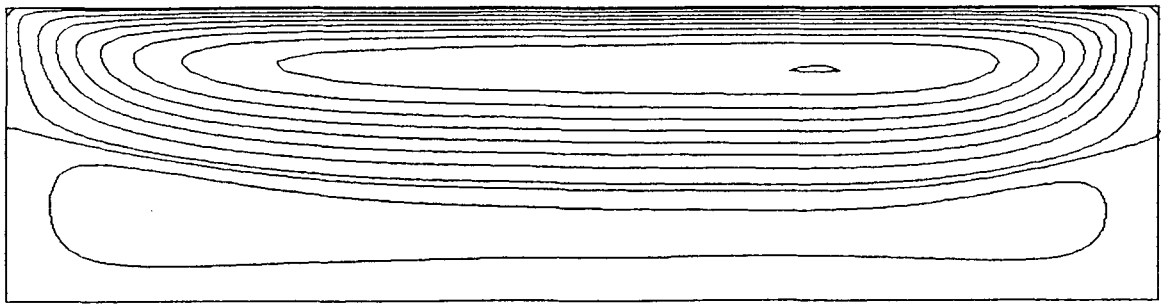


Figure II-42.

$Ra = 400$, $Ma = -75$, $Pr = 4$, $A = 4$.

Lignes de courant, isothermes et profil $V_x(Z)$

(+ : numérique; x : analytique).

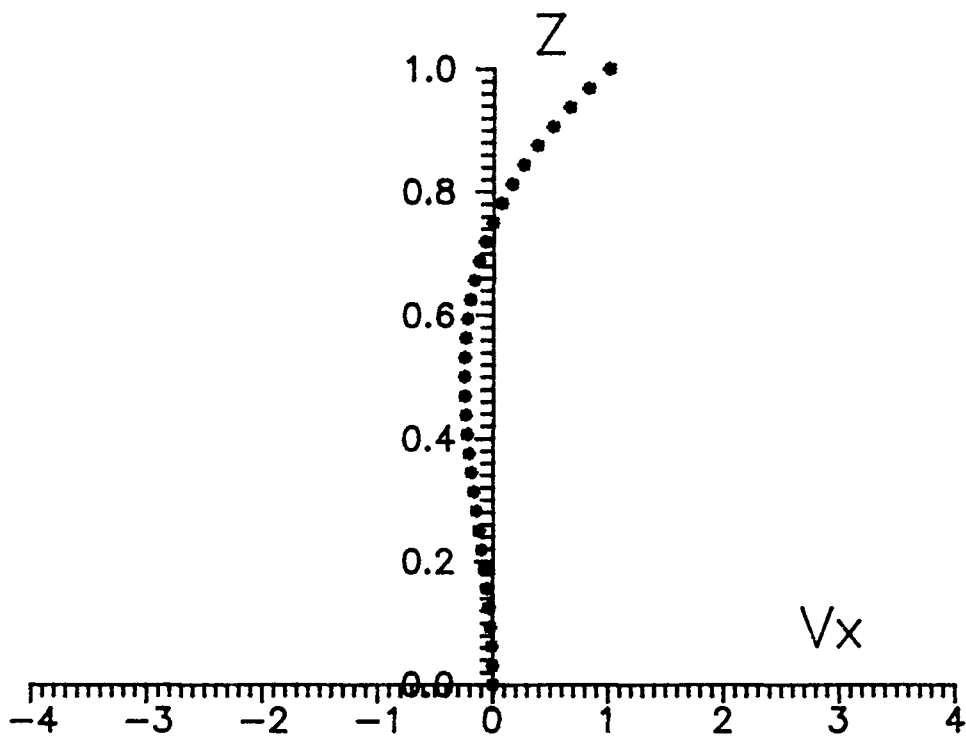
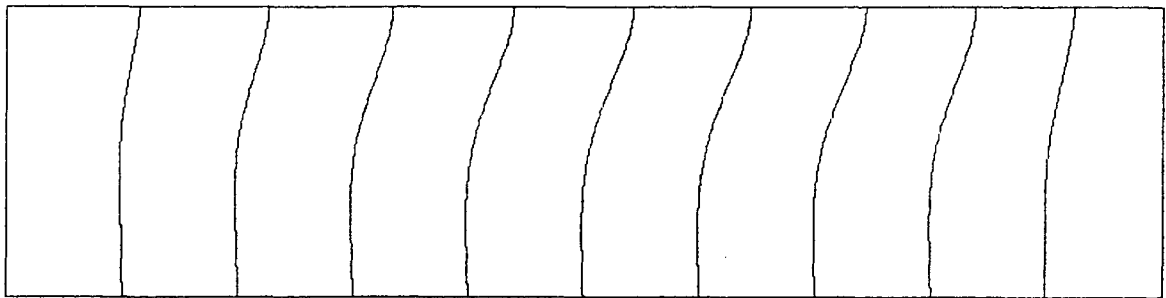
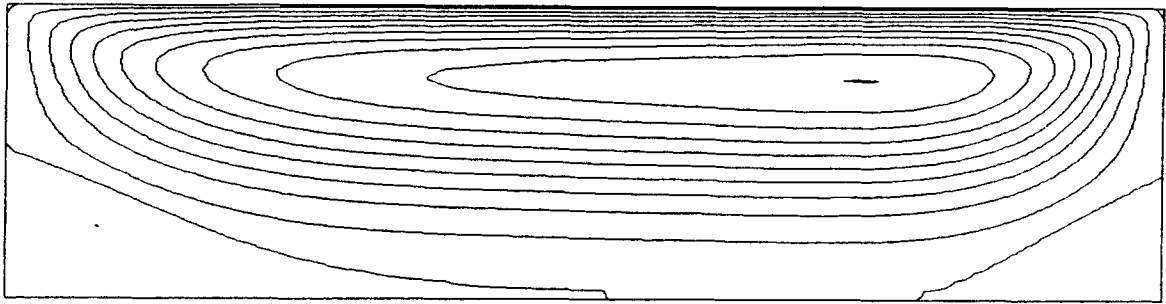


Figure II-43.

$Ra = 400$, $Ma = -100$, $Pr = 4$, $A = 4$.

Lignes de courant, isothermes et profil $V_x(Z)$

(+ : numérique; x : analytique).

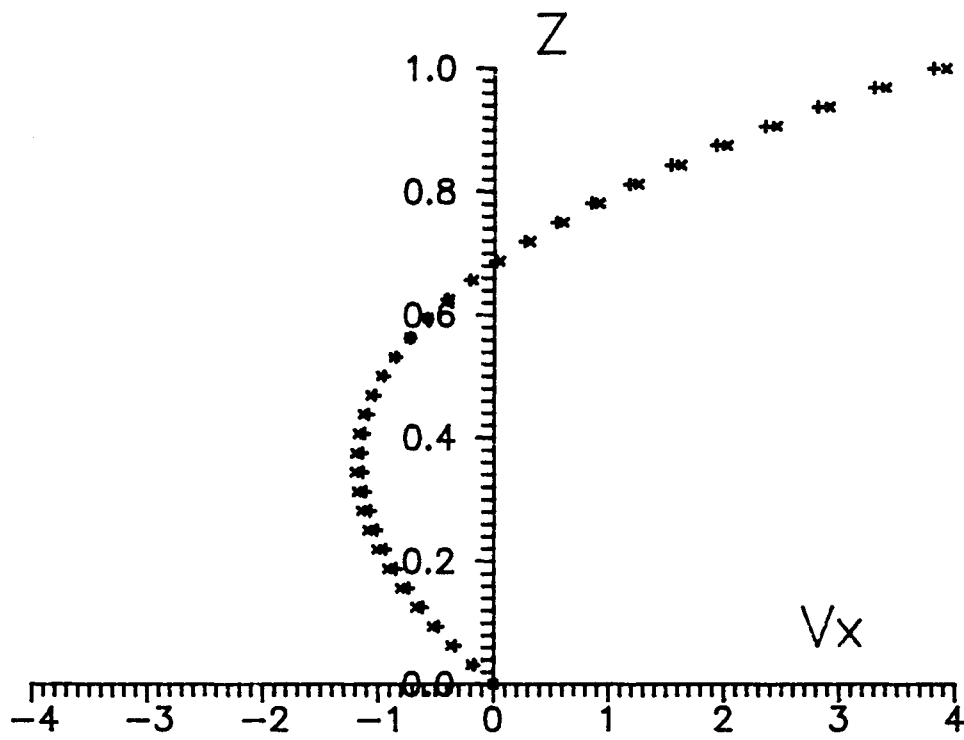
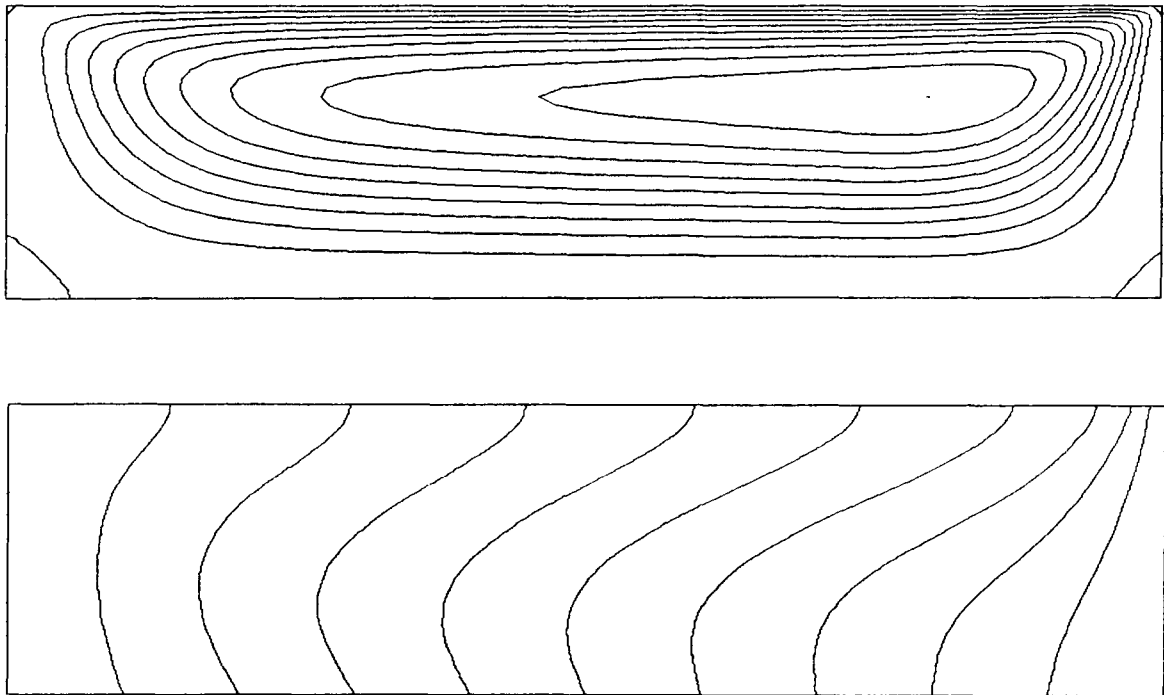


Figure II-44.

$Ra = 400$, $Ma = -400$, $Pr = 4$, $A = 4$.

Lignes de courant, isothermes et profil $V_x(Z)$

(+ : numérique; x : analytique).

Dans les deux premières simulations (figures II-35, $k = -4$ et II-36, $k = -1$), l'effet thermocapillaire agit dans le même sens que la thermogravitation, et on observe une seule cellule convective. Les lignes de courant sont presque horizontales dans la partie centrale de la cavité. La vitesse en surface est très élevée par rapport aux vitesses atteintes en coeur de phase, ce qui indique que l'effet thermocapillaire domine. Cet effet provoque un transport convectif de chaleur important ($Nu = 3.257$ et 1.669 respectivement). Les isothermes sont d'ailleurs fortement déformées.

Pour les deux simulations suivantes (figures II-37, $k = -0.25$ et II-38, $k = 0$), la thermocapillarité joue un rôle faible ou nul. Pour $k = 0$, on observe effectivement que $\partial V_x / \partial Z = 0$ en surface, vu l'absence de tension tangentielle. Les isothermes sont moins déformées et Nu est plus petit (respectivement 1.279 et 1.172). Comme la thermogravitation est dominante, on remarque que les lignes de courant sont moins serrées près de la surface et que la position de $|\Psi_{\max}|$ est plus basse (Z vaut 0.594 dans les deux cas, contre $Z = 0.656$ et $Z = 0.625$ pour $Ma = 400$ et 100).

Pour des nombres de Marangoni négatifs, les forces de tension superficielle tendent à créer un mouvement dirigé du froid vers le chaud, à l'encontre des mouvements thermogravitationnels. Néanmoins, le modèle analytique a montré qu'il fallait dépasser un seuil ($k = 1/3$) pour qu'une cellule contrarotative puisse apparaître en surface. Les simulations apportent une nuance à cette analyse. Pour la simulation à $Ma = -33$ ($k \simeq 1/3$), le profil $V_x(Z)$ s'annule en surface, ce qui nous indique effectivement qu'on est au seuil de la création d'une cellule contrarotative. Cependant, on observe déjà, près des bords latéraux et en surface, des vortex contrarotatifs dûs aux forces de tension superficielle et apparus là où la vitesse V_x est petite, à cause du retournement du fluide. De ce fait, les mouvements en surface, dirigés du froid vers le chaud, y sont moins inhibés par la thermogravitation. C'est un premier effet de bord important que nous constatons : l'existence de vortex qui ne sont pas permis par le modèle unidimensionnel. Lorsque $Ma = -40$ (figure II-40, $k = -0.4$), une cellule contrarotative mince existe en surface, mais son épaisseur est plus importante près des bords, où subsistent deux vortex inclus dans la cellule de surface. La convection reste donc encore fortement influencée par les effets de bord.

A de plus hautes valeurs de Ma ($Ma = -50$, figure II-41 et $Ma = -75$, figure II-42), ces vortex fusionnent progressivement, et hormis le retournement du fluide dans chaque cellule convective, les effets de bord ne sont pas visibles. La cellule thermogravitationnelle est de plus en plus réduite en taille, et aussi du point de vue des vitesses.

Pour la valeur $Ma = -100$ ($k = 1$, figure II-43), on ne devrait plus observer de cellule

convective thermogravitationnelle. Effectivement, le profil $V_x(Z)$ est tout-à-fait conforme aux prévisions du modèle analytique, avec $\partial V_x / \partial Z = 0$ à la limite inférieure. Cependant, ici aussi, on constate un effet de bord important, avec deux vortex qui demeurent dans les coins inférieurs. Les mouvements de la cellule due à la thermocapillarité, ralentis par les bords, ne peuvent empêcher complètement les mouvements thermogravitationnels.

Lorsque $Ma = -400$ (figure II-44), le nombre $k = 4$, et la convection thermocapillaire domine. Il suffit pour s'en persuader de comparer cette simulation avec celle pour laquelle Ma est opposé ($Ma = 400$, figure II-35). Dans un des cas la thermogravitation s'ajoute à la thermocapillarité, tandis que dans l'autre cas, elle s'y oppose. Mais pourtant, le champ de vitesse obtenu par ces deux simulations est fort proche, et les lignes de courant ainsi que les isothermes sont symétriques. La thermogravitation est pratiquement négligeable vis-à-vis de la thermocapillarité.

Pour une des simulations ($Ra = 400$, $Ma = 100$), nous avons comparé les profils $V_x(Z)$ analytiques et numériques à d'autres abscisses que $X = 2$ (le milieu de la cavité). La figure II-45 donne ce même profil aux abscisses 0.5, 1, 3 et 3.5. On constate une concordance parfaite des deux types de profils dans la zone centrale de la cavité, entre $X = 1$ et $X = 3$. Par contre, près des bords, les vitesses obtenues par le modèle numérique sont sensiblement plus faibles que celles prédites par le modèle analytique, ce qui peut être interprété comme un effet de ralentissement dû aux bords latéraux.

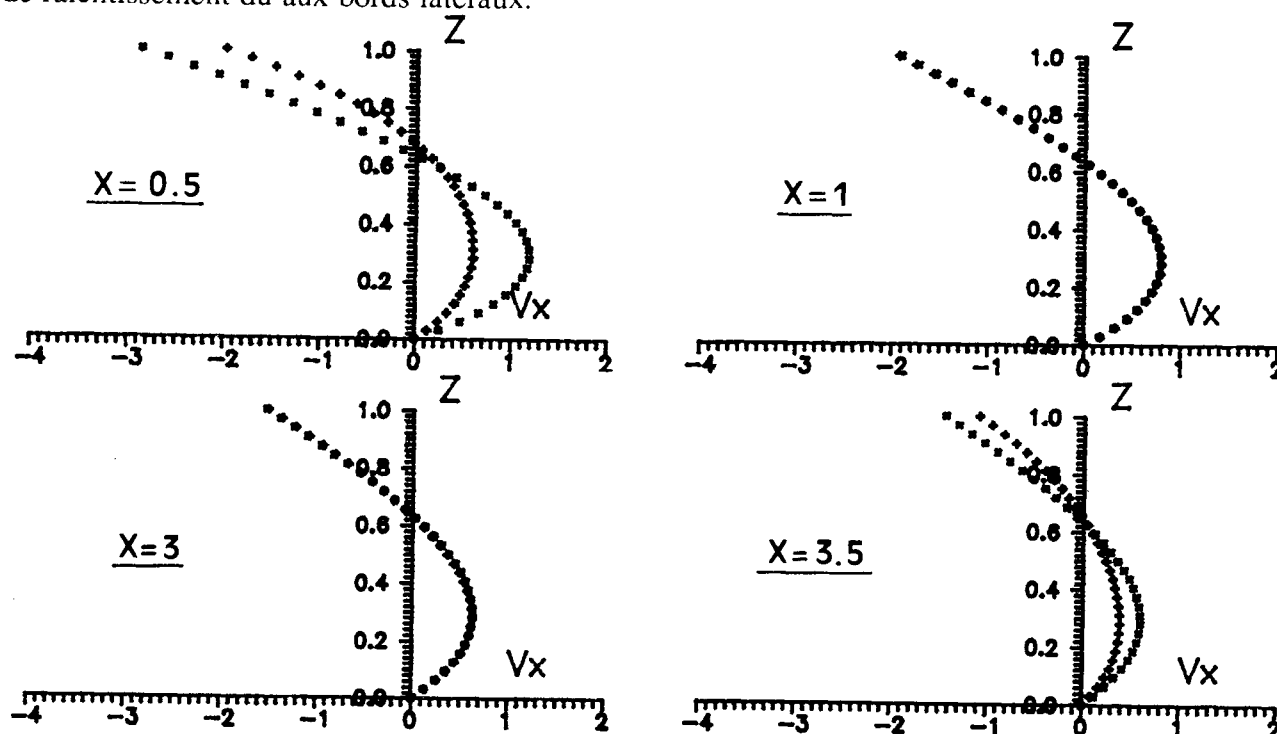


Figure II-45.

Profils $V_x(Z)$ en $X = 0.5, 1, 3, 3.5$.

6.c. Conclusion.

Les simulations numériques qu'on vient de voir sont à de nombreux points de vue en accord avec le modèle analytique unidimensionnel.

- i) On observe pour $k < 0$ une seule cellule convective, avec la thermocapillarité qui renforce voire domine le mouvement thermogravitationnel.
- ii) Pour $k = 0.33 \simeq 1/3$, la vitesse en surface, dans la partie centrale de la cavité est pratiquement nulle.
- iii) Pour $1/3 < k < 1$, deux cellules convectives superposées coexistent.
- iv) Pour $k = 1$, $\partial V_x / \partial Z \simeq 0$ au bord inférieur, dans la partie centrale de la cavité.
- v) Pour $k > 1$, la thermocapillarité domine, empêchant les mouvements thermogravitationnels.

Cependant, cet accord est à tempérer par les effets de bord. En effet, si la concordance apparaît comme parfaite pour le profil $V_x(Z)$ sur la médiane verticale, on observe par contre un désaccord près des bords. On se doutait bien que le retournement du fluide près des bords, avec V_z non nul, introduirait un désaccord quantitatif avec le modèle infini unidimensionnel. Pour la valeur particulière $k = -1$, et à $Ra = 400$ par exemple, l'influence des bords se fait ressentir sur une longueur qui est de l'ordre de l'épaisseur de la couche liquide, tandis que la région centrale (de $X = 1$ à $X = 3$) correspond bien au modèle analytique.

En conclusion, comme le modèle analytique et le modèle numérique avec toutes les hypothèses introduites ($\partial\sigma/\partial T = \text{Cste}$) collent dans le centre de l'appareil, le désaccord entre le modèle analytique et les expériences effectuées au centre de la cavité n'est pas imputable aux effets de bord. Parmi les autres hypothèse, il y a $\partial\sigma/\partial T \neq \text{Cste}$ qui est examinée au paragraphe suivant.

7. Comparaison entre le modèle numérique et les expériences à h variable.

7.a. Introduction.

Le modèle numérique, tout comme le modèle analytique, rend compte des différents régimes convectifs observés expérimentalement. Il y a un accord qualitatif en ce qui concerne le nombre de cellules convectives, leur sens de rotation et la forme des profils $V_x(Z)$.

Pour effectuer une comparaison quantitative, nous nous sommes placés dans les conditions les plus favorables du point de vue numérique : nous avons choisi de simuler l'expérience pour laquelle l'épaisseur de liquide était la plus faible, soit 3.3 mm. En effet, Ra et Ma (ou $M1$ et $M2$) sont respectivement proportionnels à h^3 et à h , et les simulations numériques sont d'autant plus facilement réalisables que les nombres sans dimensions sont petits. Dans ce cas, on aura Ra et Ma de l'ordre de 10^4 alors que les tentatives infructueuses du § II.3.e. correspondaient à Ra et Ma de l'ordre de 10^6 .

7.b. La simulation pour $h = 3.3$ mm.

Vu les données expérimentales concernant l'expérience avec $h = 3.3$ mm (voir §5.a. et les propriétés des solutions d'heptanol données à l'annexe C), nous avons calculé les valeurs des nombres sans dimension à utiliser. On obtient $Ra = 9500$, $Pr = 3.5$, $M1 = -20250$, $M2 = 6900$, $A = 9.1$.

Pour ce genre de simulation, une intégration à partir d'une condition initiale de repos aboutit inévitablement à une divergence numérique. Pour éviter ce problème, il est nécessaire d'adopter une stratégie plus progressive en n'imposant pas d'emblée les nombres sans dimension qu'on désire atteindre.

Voici, à titre d'exemple, la stratégie qui a été utilisée pour la présente simulation : Les premières simulations ont été effectuées avec un maillage 65×33 , et les nombres $Ra = 500$, $Pr = 3.5$, $M1 = -500$, $M2 = 0$ et $A = 2$. Ensuite, les nombres Ra et $M1$ ont été augmentés progressivement (d'environ 20 % à chaque modification) en reprenant pour chaque calcul le résultat du calcul précédent comme condition initiale. Nous avons enfin fixé Ra , $M1$ et $M2$ à leurs valeurs définitives (9500, -20500 et 6900). A ce stade, nous avons commencé à augmenter la taille de la cavité simulée en modifiant A : de 2, nous sommes passés successivement à 2.2, 2.5, 3, 4, 6 et 7. Pour cette valeur $A = 7$, nous avons constaté une divergence numérique. Nous avons attribué ce problème à un manque de définition du maillage dans la direction horizontale. Par conséquent, nous avons repris le résultat obtenu

avec $A = 4$ et redéfini le maillage pour passer de 65×33 à 129×33 , soit une résolution double dans la direction horizontale. Nous avons alors repris les augmentations graduelles de A pour aboutir à la valeur finale $A = 9.1$. Les lignes de courant de cette simulation sont données à la figure II-46.

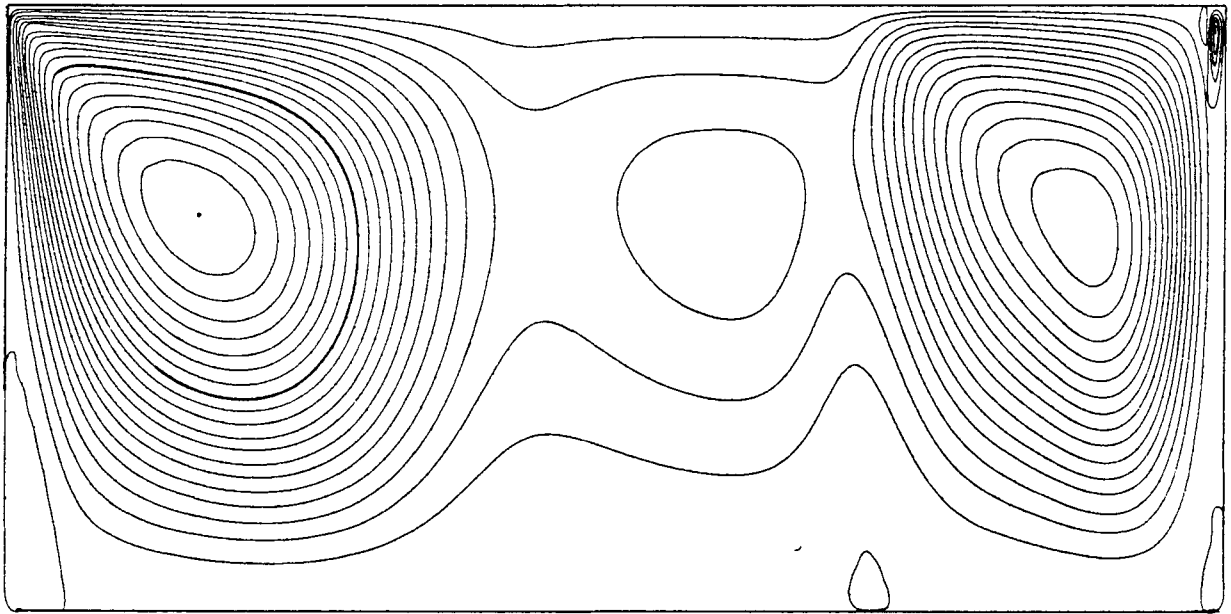


Figure II-46.

Lignes de courant de la simulation numérique d'une couche de solution d'heptanol de 3.3 mm.

$Ra = 9500$, $Pr = 3.5$, $M1 = -20250$, $M2 = 6900$, $A = 9.1$.

On remarque immédiatement le caractère multicellulaire de la convection : 3 cellules convectives sont présentes. Les plus grandes vitesses sont atteintes dans les cellules situées près des bords. Par contre, on remarque que la cellule centrale comporte peu de lignes de courant, les vitesses y sont plus faibles. Puisque dans l'expérience nous avons mesuré $V_x(z)$ sur la médiane verticale, nous avons calculé le même profil à partir de la simulation numérique., en utilisant le facteur v/d pour rendre les vitesses dimensionnelles ($v/d = 162.4 \mu\text{m/s}$). Ce profil numérique et le profil expérimental, sont représentés à la figure II-47.

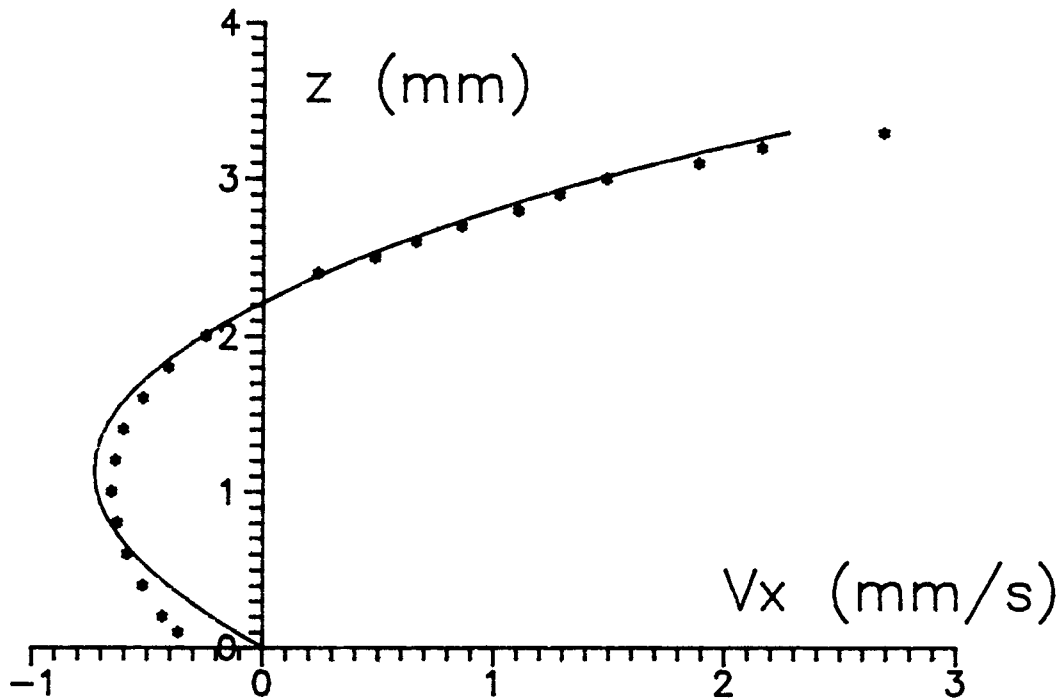


Figure II-47.

Profils $V_x(Z)$ numérique et expérimental.

7.c. Discussion.

L'accord entre le profil numérique et le profil mesuré expérimentalement semble bon : l'erreur sur les vitesses en surface et en cœur de phase est de l'ordre de 15 % au maximum. Au vu des lignes de courant présentées à la figure II-46 pour ce cas concret, on comprend le désaccord entre le modèle unidimensionnel analytique et l'expérience, puisque ce modèle analytique tout au mieux ne peut décrire qu'un mouvement monocellulaire. Ici, nous semblons avoir dépassé un point critique au delà duquel le mouvement de base monocellulaire s'est modifié par la superposition d'un mouvement plus ou moins spatialement périodique et d'amplitude finie.

Nous avons alors tenté d'effectuer d'autres simulations numériques en augmentant l'épaisseur de la couche, en vue d'effectuer des comparaisons avec les expériences effectuées dans des couches de liquide plus épaisses. Les simulations ont alors montré que la vitesse en surface augmentait quand on passait de $h = 3.3$ mm à $h = 4.9$ mm. Or, dans les expériences, nous avons constaté par contre que la vitesse en surface diminuait lorsque h augmentait. Le numérique et l'expérimental évoluent donc de manière contraire, et il se peut que l'accord quantitatif que nous avons obtenu pour $h = 3.3$ mm soit tout à fait fortuit. On peut obtenir par un modèle théorique (numérique ou analytique) la vitesse en surface en fonction de l'épaisseur

(courbe a sur la figure II-48); l'expérience permet aussi de relever $V_x^{\text{surf}}(h)$ (courbe b de la figure II-48). Ces deux fonctions sont en désaccord; il se peut que nous ayons effectué une simulation "chanceuse" à $h = 3.3$ mm pour laquelle théorie et expérience donnent justement le même résultat (voir figure II-48).

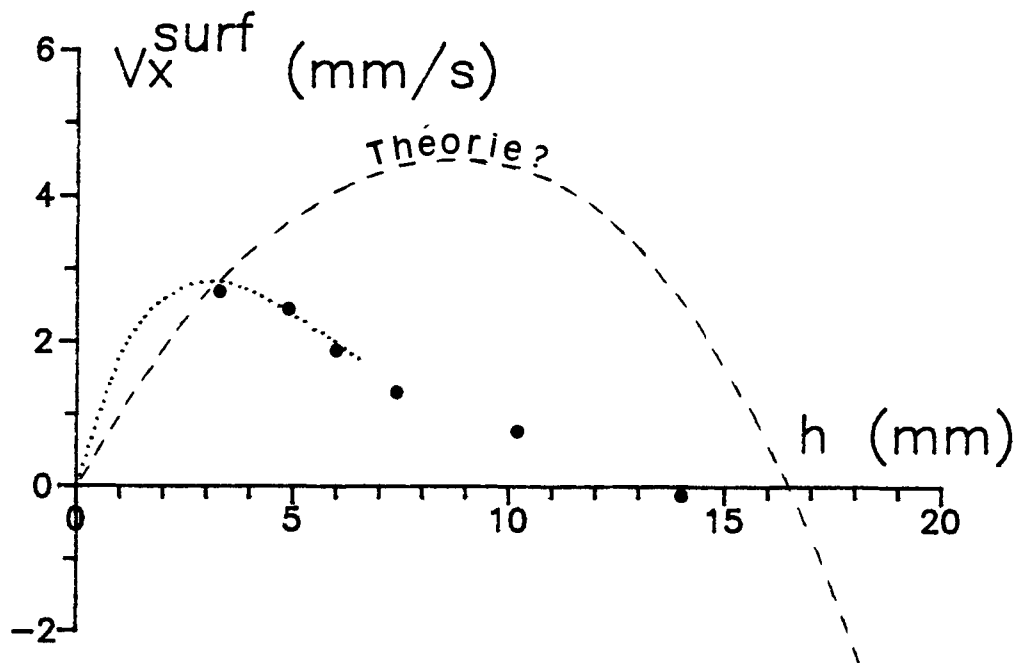


Figure II-48.

$V_x^{\text{surf}}(h)$ expérimental et théorique (schématiquement).

Notons cependant que la valeur h pour laquelle les vitesses s'annulent en surface n'est pas trop mal déterminée : expérimentalement, cette valeur est proche de 14 mm, tandis que le rapport $-4Ma/Ra$ vaut $1/3$ lorsque $h = 16.4$ mm.

7.d. Conclusion.

Hormis le cas fortuit présenté, un accord quantitatif entre les simulations numériques et les expériences n'est pas obtenu. Les raisons qui subsistent sont :

- i) l'existence d'un ménisque (on est loin de pouvoir modéliser numériquement des surfaces courbées).
- ii) La convection devrait être mieux décrite par un modèle tridimensionnel (mais c'est impossible sur les ordinateurs dont nous disposons).

- iii) Les valeurs numériques de M_1 et M_2 introduites dans les simulations peuvent ne pas correspondre aux cas expérimentaux, parce que la tension superficielle dans les conditions dynamiques est peut-être sensiblement différente de celle mesurée par des méthodes statiques.

Dès lors il semble, si on désire obtenir un accord quantitatif entre modèle et expérience, qu'il faille commencer par un cas plus simple : la convection thermocapillaire et thermogravitationnelle dans un fluide pur dont la tension superficielle est donc linéairement décroissante en fonction de la température.

Les simulations tentées à des fins de comparaison ont tout de même leur utilité : elles nous ont montré qu'une convection multicellulaire pouvait être soupçonnée. Cela nous suggère de mesurer $V_x(x)$ en surface ou $V_z(x)$ sur une ligne horizontale dans les expériences.

Avant de clore ce chapitre sur la convection dans une solution d'heptanol, nous désirons faire état de mesures de convection oscillante.

8. Oscillations.

Dans de nombreux problèmes d'hydrodynamique, on sait que les solutions stationnaires proches de l'équilibre ne sont pas indéfiniment stables. Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle (ΔT dans nos expériences), on peut observer des transitions successives entre éventuellement plusieurs types d'états stationnaires (avec structure spatiale par exemple), trouver des états oscillants au cours du temps, atteindre le chaos (la turbulence).

Il n'existe pas actuellement de théorie de stabilité (même linéaire) concernant la convection thermocapillaire et thermogravitationnelle, même dans une cavité de dimension infinie. La seule théorie existante ne tient compte que de l'effet thermocapillaire (Smith et Davis [17]). En l'absence de proposition théorique, nous avons voulu effectuer quelques essais de détection de la convection oscillante.

Nous avons effectué cette investigation dans une couche de solution d'heptanol de 8.7 mm, que nous avons soumise à une différence de température de plus en plus grande. A la température moyenne $\langle T \rangle = 55$ °C, nous n'avons pas détecté d'oscillations pour $\Delta T = 18.7$ K. Par contre, pour $\Delta T = 20.5$ K, nous avons relevé des oscillations de la vitesse en surface. Quelques-unes de ces oscillations ont été enregistrées. La figure II-49 montre une carte

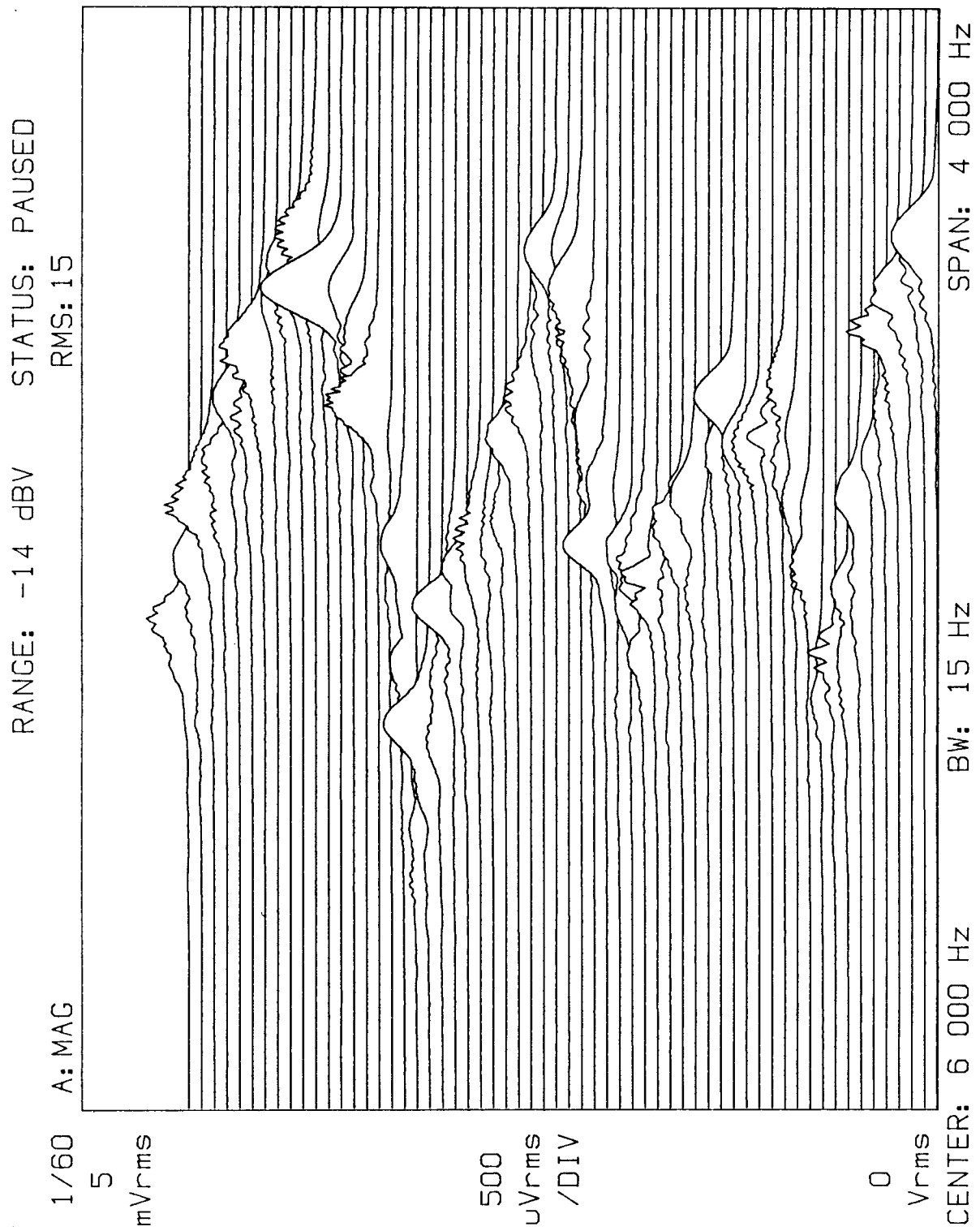


Figure II-49.
Transformées de Fourier successives, montrant une oscillation temporelle de la vitesse en surface.

constituée de 60 transformées de Fourier successives du signal du vélocimètre, prises à des intervalles temporels de 0.45 secondes. On observe clairement que le pic extremum de ces transformées, dont la fréquence est proportionnelle à la vitesse, oscille au cours du temps entre environ 4500 Hz (≈ 8 mm/s) et 7000 Hz (≈ 12 mm/s). La période est de 8 secondes environ. Le même type d'oscillations a également été observé pour $\Delta T = 22.4$ K, mais avec cette fois une période allongée (25 secondes environ), la vitesse en surface oscillant entre ≈ 11 mm/s et ≈ 15 mm/s.

Une étude approfondie des oscillations serait très intéressante s'il est possible d'effectuer des comparaisons au moins qualitatives avec une théorie. Les oscillations sont-elles liées à l'existence de cellules contrarotatives superposées? Comment les périodes dépendent-elles de ΔT , de h ? Quelle est l'influence de l'existence d'un minimum de tension superficielle? Quel est le rôle du nombre de Prandtl? Quelle est l'influence du rapport d'aspect, de l'existence des bords latéraux?

Il n'est même pas envisageable de répondre à ces questions en effectuant des simulations numériques. D'une part parce que les nombres Ra et Ma sont très grands (de l'ordre de 10^5), d'autre part parce que le nombre de simulations à effectuer est énorme.

Néanmoins, l'expérience que nous avons effectuée a permis de donner un ordre de grandeur des périodes auxquelles on peut s'attendre, et de déterminer approximativement un seuil critique (à ≈ 2 K près), qui pourrait servir de test si une théorie de stabilité est élaborée. Notons que nous avons vérifié la reproductibilité du passage de l'état stationnaire à l'état oscillant.

9. Bibliographie.

- [1] King, T.B.: "The surface tension and structure of silicate slags", *Journal of the Society of Glass Technology*, 35 (1951).
- [2] Elliot, J., Gleiser, M., Ramakrishna, V. : "Thermochemistry for steelmaking" (Vol II, thermodynamic and transport properties), Addison-Wesley (1960).
- [3] Desré, P.J., Joud, J.C. : "surface tension temperature coefficient of liquid alloys and definition of a "zero-Marangoni number alloy" for cristallisation experiment in microgravity environment", *Acta Astronautica*, 8, 407 (1981).
- [4] Camel, D., Favier, J.J., Dupouy, M.D., Le Maguet, R.: "Microgravité et solidification dendritique à faible vitesse". *Proceedings of the 6th European Symposium on Material Sciences under Microgravity Conditions*, Bordeaux, ESA SP-256 (1987).
- [5] Motomura, K., Iwagana, S.I., Hayma, Y., Uргу, S., Matuura, R.: "Thermodynamics studies on adsorption at interfaces – IV. Dodecylammonium chloride at water-air interface", *J. Colloid Interface Sci.*, 80, 32 (1981).
- [6] Vochten, R., Pétré, G.: "Study of the heat of irreversible adsorption at the air-solution interface", *J. Colloid Interface Sci.*, 42, 320 (1973).
- [7] Pétré, G., Limbourg-Fontaine, M-Cl., Legros, J.C.: "Study of the surface tension minimum of aqueous alcohol solutions and movements at the interface air/solution". *Proceedings of the 4th European Symposium on Material Science under Microgravity*, Madrid, ESA SP-191 (1983).
- [8] Limbourg-Fontaine, M-Cl., communication privée (1985).
- [9] Pétré, G., Azouni, M.A.: "Experimental evidence for the minimum of surface tension with temperature at aqueous alcohol solutions/air interface". *J. Colloid Interface Sci.*, 98, 261 (1984).
- [10] Limbourg-Fontaine, M.Cl., Pétré, G., Legros, J.C.: "TEXUS 8 experiment : effects of a surface tension minimum on thermocapillary convection". *PhysicoChemical Hydrodynamics* 6(3), 301-310 (1985).

- [11] Levich, V.G.: Physico Chemical Hydrodynamics, chapitre VII, pp 390-391 Prentice-Hall (1962).
- [12] De Vahl Davis, G., Jones, I.P.: "Natural convection in a square cavity : a comparison exercise". *Int. J. for Num. Meth. in Fluids*, 3, 227-248 (1983).
- [13] De Vahl Davis, G.: "Natural convection of air in a square cavity : a Bench Mark numerical solution". *Int. J. for Num. Meth. in Fluids*, 3, 249-264 (1983).
- [14] Limbourg, M.C., Georis, Ph. : "Marangoni convection around a surface tension minimum", *Proc. of the VIIth European Symposium on Materials and Fluid Sciences in Microgravity*, ESA SP-295 (1989).
- [15] Hadley : "The cause of the general trade winds", *Phil. Trans.* (1735).
- [16] Kirdyashkin, A.G. : "Thermogravitational and thermocapillary flows in a horizontal liquid layer under the conditions of a horizontal temperature gradient", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 27(8), pp 1205-1218 (1984).
- [17] Smith, M.K., Davis, S.H.: "Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers. Part 1. Convective instabilities". *Journal of Fluid Mechanics*, 132, 119-144 (1983).
- [18] Defay, R., Pétré, G.: "Dynamic surface tension", in *Surface & Colloid Science*, 3 (1981).

Voir aussi :

Villers, D., Platten, J.K. : "Marangoni convection in systems presenting a minimum in surface tension", *PhysicoChemical Hydrodynamics*, 6(4), pp 435-451

Villers, D., Platten, J.K. : "Separation of Marangoni convection from gravitational convection in earth experiments", *PhysicoChemical Hydrodynamics*, 8(2), pp 173-183 (1987).

Platten, J.K., Villers, D. : "On thermocapillary flows in containers with differentially heated side walls", *proceedings of the NATO-ASI "Physicochemical Hydrodynamics, Interfacial phenomena"*, Ed. M.G. Velarde, Plenum Press (1988).

Villers, D., Platten, J.K. : "Thermocapillary convection when surface tension increases with temperature : comparison between numerical simulations and experimental results by LDV", in *Numerical Methods in laminar and turbulent flow. Volume 5, part 2*, pp 1268-1279. Ed. C. Taylor, W.G. Habashi, M.M. Hafez. Pineridge Press (1987).

Chapitre III.

Convection thermocapillaire dans l'eau.

1. Introduction.

Nous savons tous que l'eau, malgré son abondance, est un liquide peu commun. Egalement du point de vue de ses propriétés de surface, l'eau possède une tension plus élevée ($\approx 73 \text{ mN/m}$) que la plupart des liquides organiques (de l'ordre de 20 à 40 mN/m). La dépendance de σ envers la température est également plus grande : $\partial\sigma/\partial T$ vaut environ $-0.15 \text{ mN m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ pour l'eau, tandis que la majorité des liquides organiques ont un $\partial\sigma/\partial T$ d'environ $-0.10 \text{ mN m}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Comme de plus le coefficient de dilatation de l'eau est faible, surtout à basse température, on pourrait penser que l'eau est un excellent candidat comme liquide de travail lorsqu'on désire étudier l'effet Marangoni en minimisant les effets thermogravitationnels. Cependant, les caractéristiques de l'eau sont telles que la moindre substance tensio-active a des conséquences désastreuses, même à de très petites concentrations, comparables aux taux d'impuretés organiques souvent présentes dans l'eau (même distillée). Dès la moindre adsorption de tels contaminants, on constate généralement une réduction de la tension superficielle et de $\partial\sigma/\partial T$, donc des vitesses thermocapillaires. En plus, la "viscosité de surface" de la couche monomoléculaire adsorbée conduit rapidement à bloquer tout mouvement en surface. Il est alors très difficile de créer des mouvements thermocapillaires, même avec des ΔT importants. A titre d'exemple, la figure III-1 montre un comportement habituel : une décroissance exponentielle de V_x^{surf} sur des temps très courts qui ne permettent pas de relever un profil de vitesse complet. Il n'existe donc à notre connaissance aucune étude de la convection thermocapillaire dans l'eau. Dès lors, nous avons tenté de réaliser des expériences de convection thermocapillaire dans l'eau par vélocimétrie laser-doppler, qui paraît être une méthode appropriée.

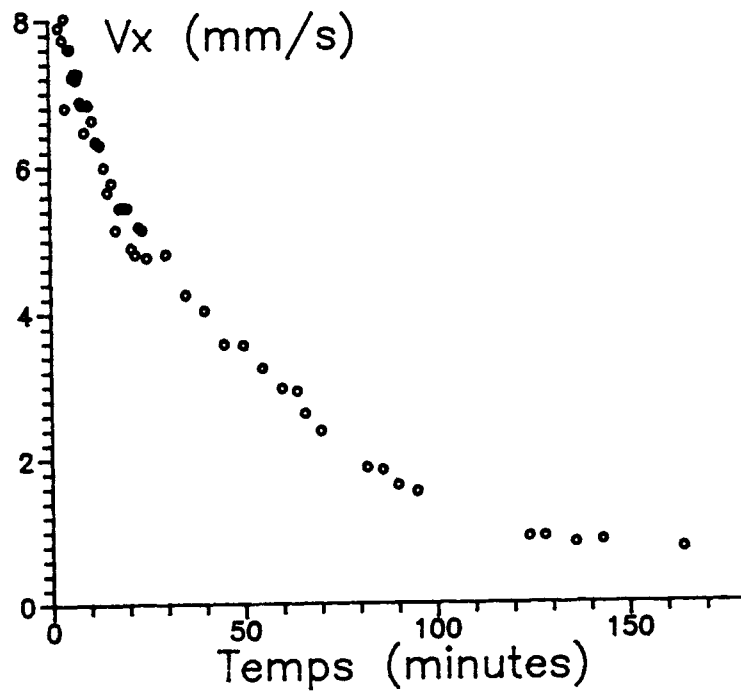


Figure II-1.

Diminution au cours du temps de la vitesse en surface,
par l'effet polluant d'un agent tensio - actif.

Nous y sommes parvenus, en utilisant de l'eau courante, suffisamment exempte d'impuretés organiques (à cause probablement des débits énormes, l'eau étant prélevée après ≈ 12 heures d'écoulement). Des précautions élémentaires devaient tout de même être prises pour éviter les contaminants : la cellule d'étude (la même que celle qui a été utilisée avec les solutions d'heptanol) était rincée abondamment durant une nuit, après un nettoyage préalable à la vapeur d'eau et toutes les manipulations étaient effectuées à l'aide de gants neufs en coton. Dans ces conditions, la surface demeurait propre parfois plusieurs heures (3 ou 4, parfois plus), ce qui est suffisant pour procéder aux relevés des vitesses.

2. Les expériences.

La figure III-2 montre $V_x(z)$ en $x = 15$ mm (la médiane verticale de la cavité), pour une couche de 7.8 mm d'eau.

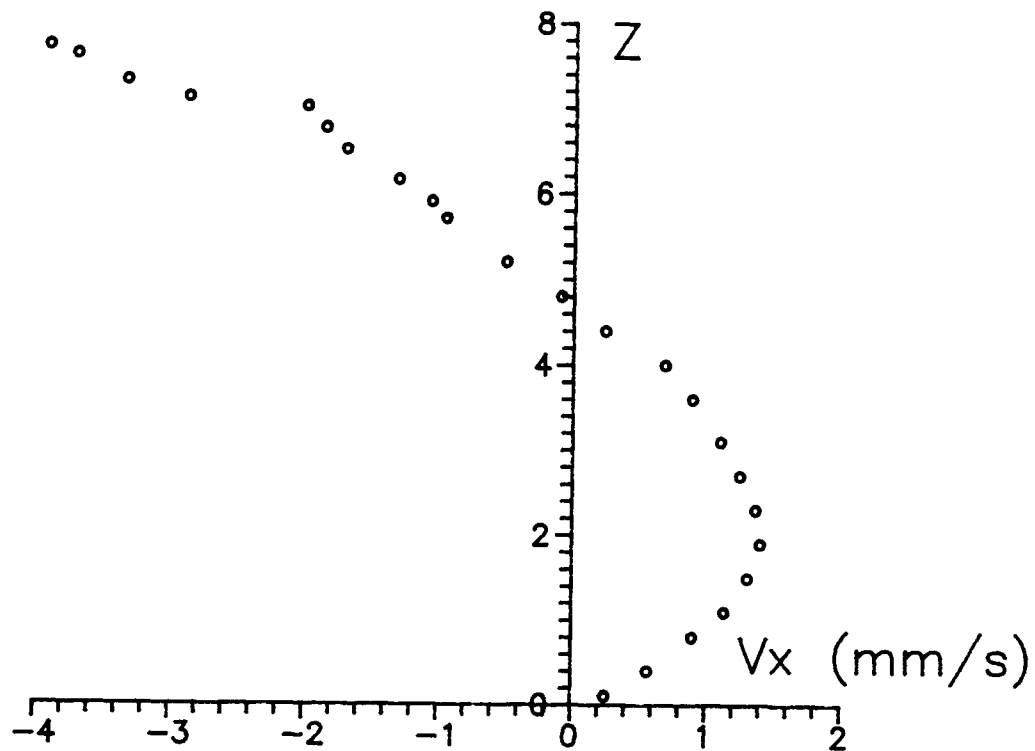


Figure III-2.

Eau, $h = 7.8$ mm, $V_x(z)$ en $x = 15$ mm.

Ce profil peut être confronté au profil de vitesse cubique prédit par le modèle analytique du chapitre II. On y constate la grande importance de l'effet thermocapillaire, puisque la vitesse en surface vaut approximativement 4 mm s^{-1} , et qu'elle est beaucoup plus grande que celle mesurée en coeur de phase (typiquement 1.3 mm s^{-1} au maximum). La valeur du paramètre k qui minimise l'écart entre l'expérience et l'expression analytique de V_x (voir éq. II-29) est $k = -1.50$, alors que la valeur de $-4Ma/Ra$ calculée à partir des propriétés physiques de l'eau est de -3.83 . Cette différence peut être imputée aux raisons données au chapitre II, §5.b., mais exclut à première vue les problèmes liés à la tension superficielle dynamique par rapport à la tension superficielle d'équilibre.

Après cette expérience pratiquée dans une couche de 7.8 mm d'épaisseur d'eau, un second profil $V_x(z)$ a été mesuré environ 12 heures après le premier. On y remarque (voir figure III-3) que la vitesse en surface est cette fois plus petite qu'en coeur de phase. Ce ralentissement est caractéristique d'une pollution de l'eau par un agent tensio-actif provenant probablement de l'air ambiant, qui s'est manifestée seulement 12 heures après le début de l'expérience, alors que le profil de la figure III-2 a été relevé après quelques minutes.

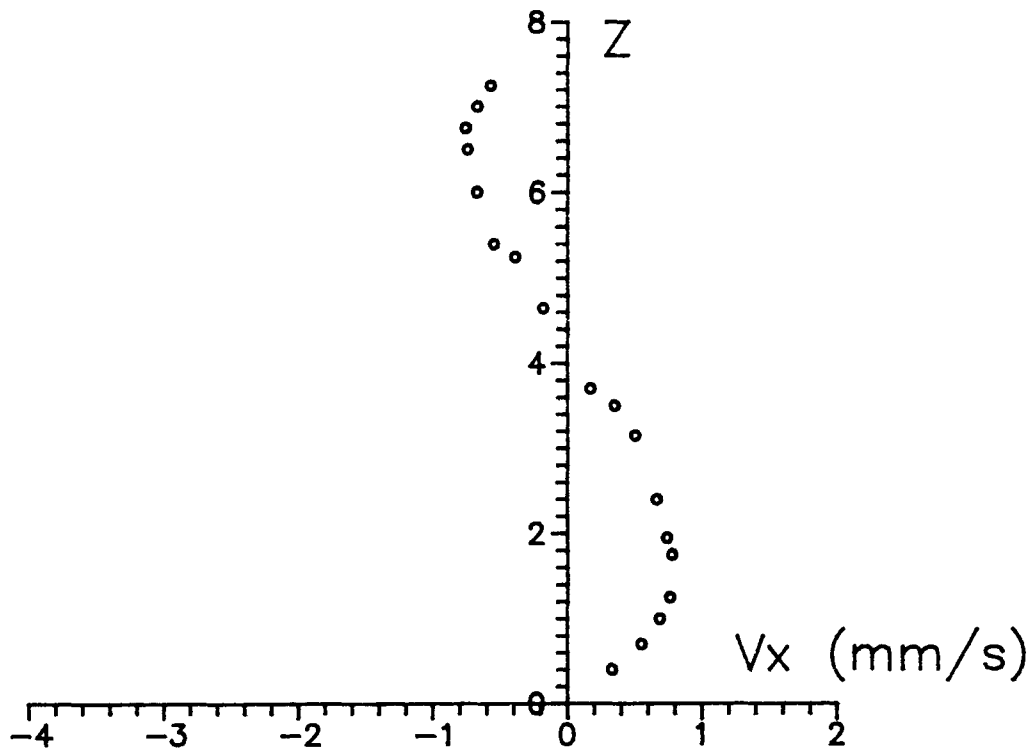


Figure III-3.

Profil $V_x(z)$ après 12 heures.

Effet d'une contamination par un agent tensio-actif.

Enfin, nous avons mesuré la vitesse horizontale le long de la surface, pour différentes épaisseurs d'eau. Les quatre graphiques de la figure III-4 ont tous une caractéristique commune : $-V_x(x)$ est maximum près du bord chaud (l'origine des mouvements en surface) et vaut toujours approximativement 10 mm/s. De plus, un second maximum existe, dont la position et la valeur de la vitesse diffèrent. Cela suggère l'existence de deux cellules convectives. La table III-1 reprend pour ces quatre expériences l'épaisseur d'eau, le rapport d'aspect correspondant, la distance entre les deux maxima de vitesse et cette même distance rendue non-dimensionnelle en utilisant l'épaisseur d'eau comme unité de longueur de référence. On constate dans ces quatre cas que la distance non dimensionnelle entre les deux maxima est du même ordre de grandeur (2.1 - 2.5).

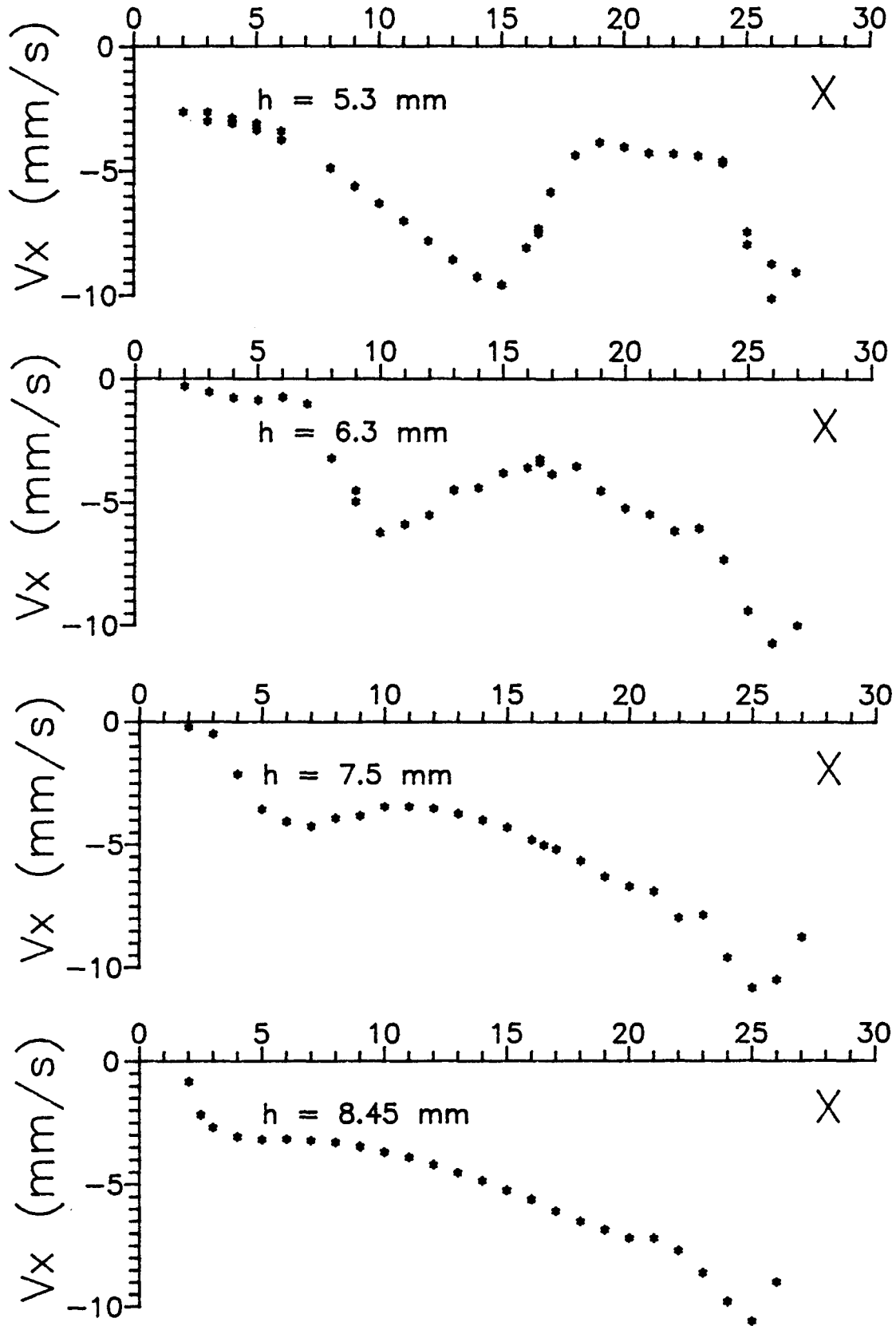


Figure III-4.

Profils $V_x(x)$ le long de la surface pour différentes épaisseurs d'eau.

Table III-1.
Présence de plusieurs cellules convectives :

h (mm)	30 mm/h = A	Distance λ entre deux maxima (mm)	Distance λ/h
5.3	5.66	11	2.08
6.3	4.76	16	2.54
7.5	4.00	18	2.40
8.45	3.55	20	2.37

En termes d'une théorie linéaire de la stabilité (mais qui n'a pas été faite), cela suggère l'existence d'une longueur d'onde critique λ^{crit} (réduite par la hauteur). Comme la couche n'est pas infinie, quand h augmente, la taille de la cellule proche du bord chaud, liée à λ^{crit} , augmenterait. Cette cellule repousserait alors la cellule proche du bord froid, jusqu'à la supprimer. Cela n'est qu'une hypothèse, mais nous y reviendrons au chapitre suivant consacré à la convection thermocapillaire dans l'acétone, où ces instabilités sont étudiées plus en détail. La crédibilité de cette hypothèse est renforcée par la mesure de $V_z(x)$ en $z = 5.9$ mm, pour une couche de 7.8 mm d'épaisseur (figure III-5). On y observe deux zones importantes de vitesse descendante.

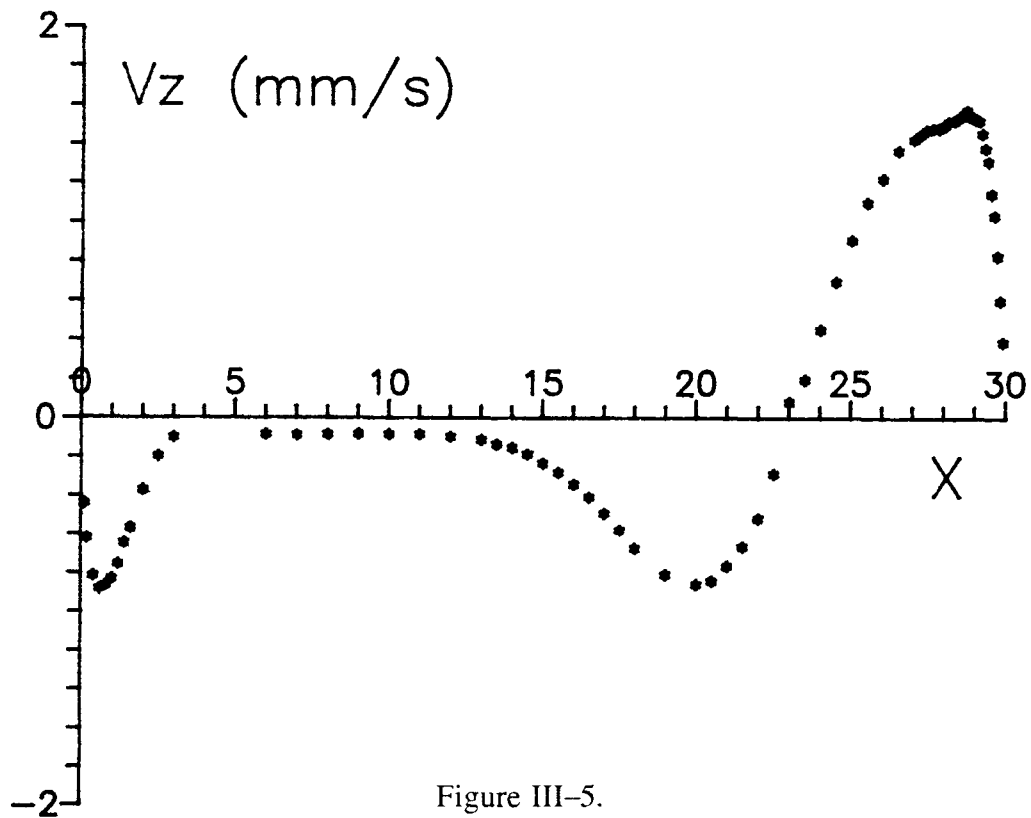


Figure III-5.
Eau, $h = 7.8$ mm, $V_z(x)$ en $z = 5.9$ mm.

3. Conclusion.

Nous avons pour la première fois observé et mesuré la convection thermocapillaire dans l'eau pure, grâce à un soin extrême lors de la préparation des expériences. Mais malgré ces soins, il arrive souvent que la surface de l'eau soit contaminée dès le début, et de toute façon elle le devient après plusieurs heures, ce qui exclut des expériences de longue durée. Pour cette raison, nous croyons qu'il est préférable de travailler avec des fluides moins sujets aux pollutions que l'eau, même si on est obligé d'utiliser des couches liquides plus fines pour obtenir des k identiques.

4. Bibliographie.

Platten, J.K., Villers, D. : "On thermocapillary flows in containers with differentially heated side walls", Proc. of the NATO-ASI on Physicochemical Hydrodynamics : Interfacial Phenomena, La Rabida, 1986, Ed. M.G. Velarde, Plenum Press (1988).

Chapitre IV.

Convection thermocapillaire dans l'acétone.

1. Introduction.

L'acétone s'est révélé un bon liquide pour étudier expérimentalement la convection thermocapillaire, grâce à de multiples avantages conjugués :

- i) C'est un liquide transparent, qui permet donc l'usage de la vélocimétrie laser-Doppler comme technique de mesure du champ de vitesse.
- ii) Nous avons constaté que l'acétone était peu sujet à des problèmes de contamination par des agents tensio-actifs, grâce probablement à ses qualités de solvant. Il est possible d'observer des mouvements thermocapillaires pour de petits gradients de température, sans que la surface ne reste "bloquée" par des impuretés (par exemple $\Delta T \simeq 0.5$ K appliqué sur une distance de 30 mm suffit à provoquer des mouvements).
- iii) Le nombre de Prandtl de l'acétone n'est pas trop grand : on estime que $Pr \simeq 4.24$ à $\langle T \rangle = 20$ °C. Cette valeur est favorable à nos simulations numériques, parce que le temps de calcul croît avec Pr.
- iv) Nous avons vu (§II.4.c.) que pour une valeur de $|k| > 5$, la convection thermogravitationnelle devenait négligeable vis-à-vis de la convection thermocapillaire (elle modifie alors de moins de 10 % les profils $V_x(Z)$). Comme on peut estimer que $-(\partial\sigma/\partial T)/\rho\kappa\nu \simeq 38.10^3 \text{ cm}^{-1} \text{ K}^{-1}$ et $g\alpha/\kappa\nu \simeq 344.10^3 \text{ cm}^{-3} \text{ K}^{-1}$ à $\langle T \rangle = 20$ °C, la valeur $k = -5$ est atteinte pour une couche d'acétone de 3.0 mm d'épaisseur, ce qui permet encore des mesures aisées par vélocimétrie, puisque la sonde optique a une "épaisseur" de 90 μm .

Dans l'acétone, il est donc possible d'effectuer des expériences pour lesquelles les nombres Ra et Ma sont de l'ordre de 10^4 ou moins. Des simulations numériques sont dans ce

cas réalisables, sans problème d'instabilités numériques, et des comparaisons quantitatives avec les résultats expérimentaux sont envisageables.

Par contre, il est nécessaire de s'entourer de précautions pour éviter des problèmes liés à l'évaporation, étant donné que l'acétone est relativement volatile à température ambiante (sa tension de vapeur vaut alors environ 200 torrs).

2. Expériences, cas stationnaires.

2.a. La cellule de mesure.

La cellule de mesure utilisée pour ces expériences est représentée à la figure IV-1. Les parois latérales et inférieure en acier délimitent une cavité de même dimensions latérales que précédemment, à savoir 30 mm de largeur. Les faces avant et arrière sont en verre et distantes de 10 mm. Le gradient de température horizontal est imposé au moyen de blocs de thermostatisation en cuivre, avec circulation d'eau. La température du bord froid était fixée à une valeur d'environ 19 °C à 20 °C, tandis que la température moyenne des expériences était comprise entre 20 °C et 24 °C. Les différences de température entre les bords froid et chaud sont mesurées au moyen de thermocouples placés contre les faces intérieures de la cavité, avant ou après les mesures des vitesses. Un bloc de Teflon coulisse dans la cavité et permet d'éviter les problèmes liés à l'évaporation de l'acétone, en limitant au minimum la hauteur de la phase gazeuse surmontant le liquide.

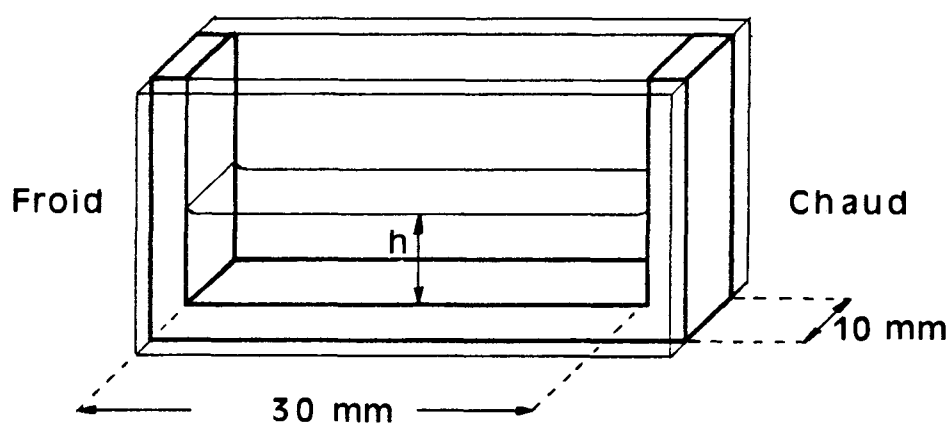


Figure IV-1.

Schéma de la cellule expérimentale utilisée.

2.b. Convection à très bas Ra et Ma.

Nous avons d'abord voulu réaliser des expériences caractérisées par des nombres Ra et Ma très petits. Dans ces conditions, on espère obtenir des états convectifs de base monocellulaires, répondant dans la partie centrale de la cavité aux hypothèses du modèle analytique et permettant aussi des simulations numériques. Pour atteindre des petits Ra et Ma, nous devons travailler dans des petites épaisseurs de liquide soumises à des petits ΔT . Les figures IV-2, IV-3 et IV-4 donnent trois profils $V_x(z)$ mesurés sur la médiane verticale de la cavité, dans les trois conditions suivantes : $h = 1.75$ mm, $\Delta T = 1.2$ K; $h = 2.5$ mm, $\Delta T = 0.8$ K; $h = 2.5$ mm, $\Delta T = 1.2$ K.

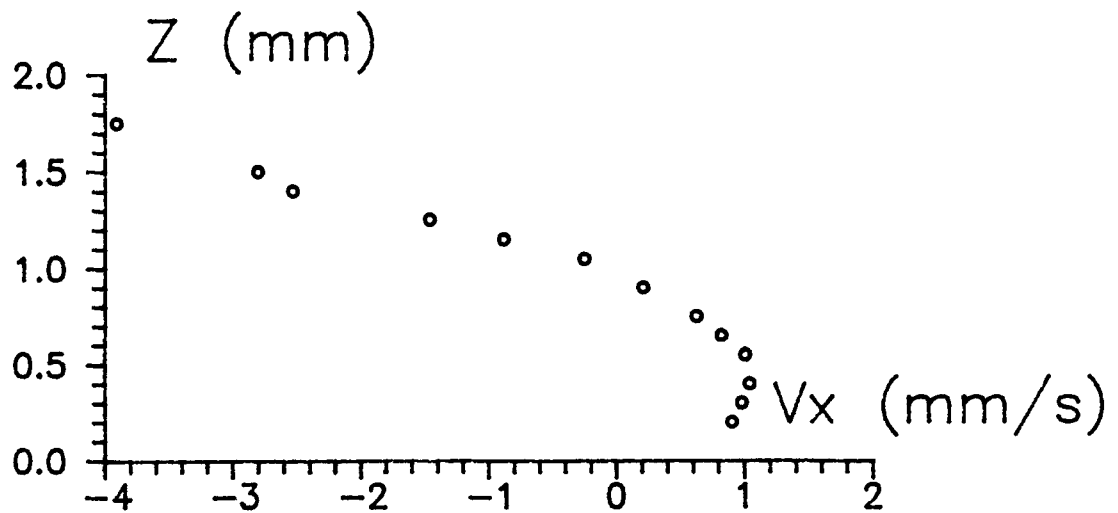


Figure IV-2.

Profil $V_x(z)$ sur la médiane verticale.
 $h = 1.75$ mm, $\Delta T = 1.2$ K.

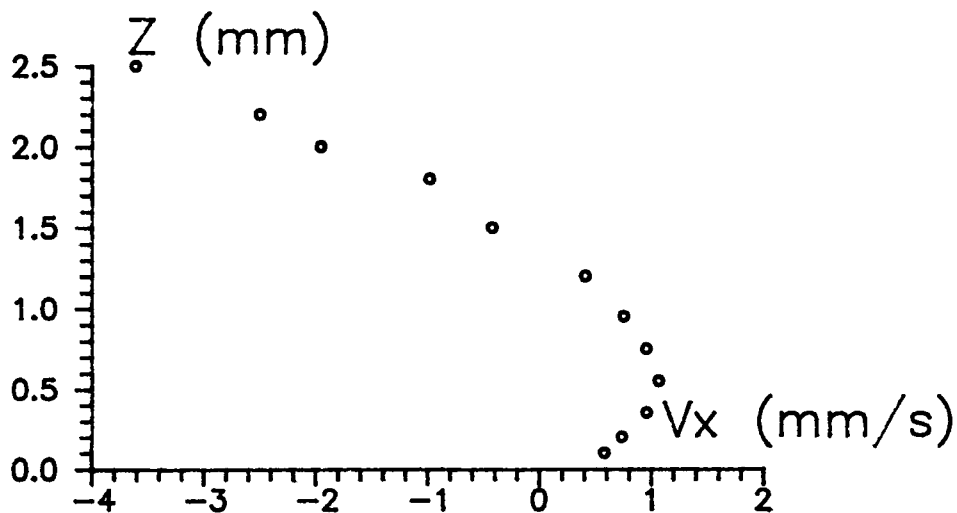


Figure IV-3.

Profil $V_x(z)$ sur la médiane verticale.
 $h = 2.5$ mm, $\Delta T = 0.8$ K.

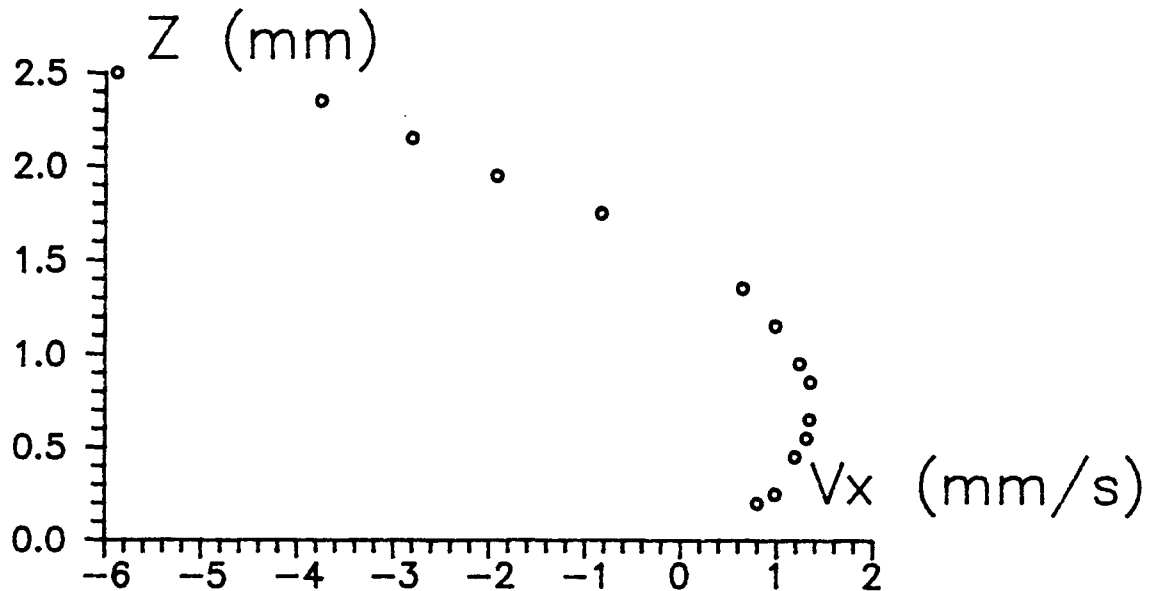


Figure IV-4.

Profil $V_x(z)$ sur la médiane verticale.

$h = 2.5 \text{ mm}$, $\Delta T = 1.2 \text{ K}$.

Considérons la vitesse en surface V_x^{surf} pour chacun de ces trois profils. Entre le premier et le troisième, seule l'épaisseur d'acétone a été modifiée et on constate que le rapport des V_x^{surf} ($-5.88/-3.91 = 1.48$) est dans le rapport des épaisseurs ($2.5/1.75 = 1.43$). Ceci est en accord avec le modèle analytique qui prédit que les vitesses sont proportionnelles à l'épaisseur h et à ΔT lorsque la thermocapillarité domine (c'est le cas ici : $k = -7.07$ pour $h = 2.5 \text{ mm}$ et $k = -14.4$ pour $h = 1.75 \text{ mm}$). Entre les deuxième et troisième profils, seul ΔT change. Le rapport des V_x^{surf} ($-5.88/-3.61 = 1.63$) est également approximativement dans le même rapport que les différences de température ($1.2/0.8 = 1.5$). Nous donnerons au §3.b. une raison possible de ce léger désaccord.

2.c. Convection multicellulaire.

Nous considérons dans ce paragraphe une expérience effectuée dans une couche de 2.5 mm soumise à $\Delta T = 1.6 \text{ K}$, double du ΔT de l'expérience montrée à la figure IV-3. La figure IV-5 présente le profil $V_x(z)$ mesuré sur la médiane verticale. On observe immédiatement que la vitesse en surface (-5.31 mm/s) n'est pas double de la vitesse obtenue pour $\Delta T = 0.8 \text{ K}$ (-3.61 mm/s), et est même inférieure à la vitesse en surface obtenue pour $\Delta T = 1.2 \text{ K}$ (-5.88 mm/s). Il semble donc que cette expérience à $\Delta T = 1.6 \text{ K}$ ne soit pas un "prolongement" des expériences à $\Delta T = 0.8 \text{ K}$ et 1.2 K . Dès lors nous avons mesuré d'autres profils de vitesse.

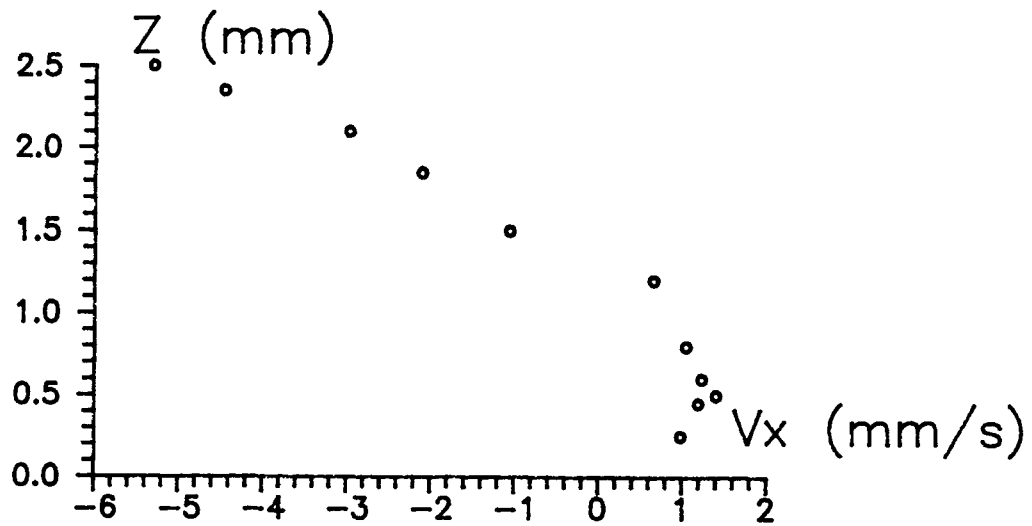


Figure IV-5.

Profil $V_x(z)$ sur la médiane verticale.

$h = 2.5 \text{ mm}$, $\Delta T = 1.6 \text{ K}$.

Les figures IV-6 et IV-7 donnent la vitesse verticale $V_z(x)$ le long d'une ligne horizontale (à $z = 1.35 \text{ mm}$ au dessus du fond de la cavité) et la vitesse horizontale $V_x(x)$ le long de la surface.

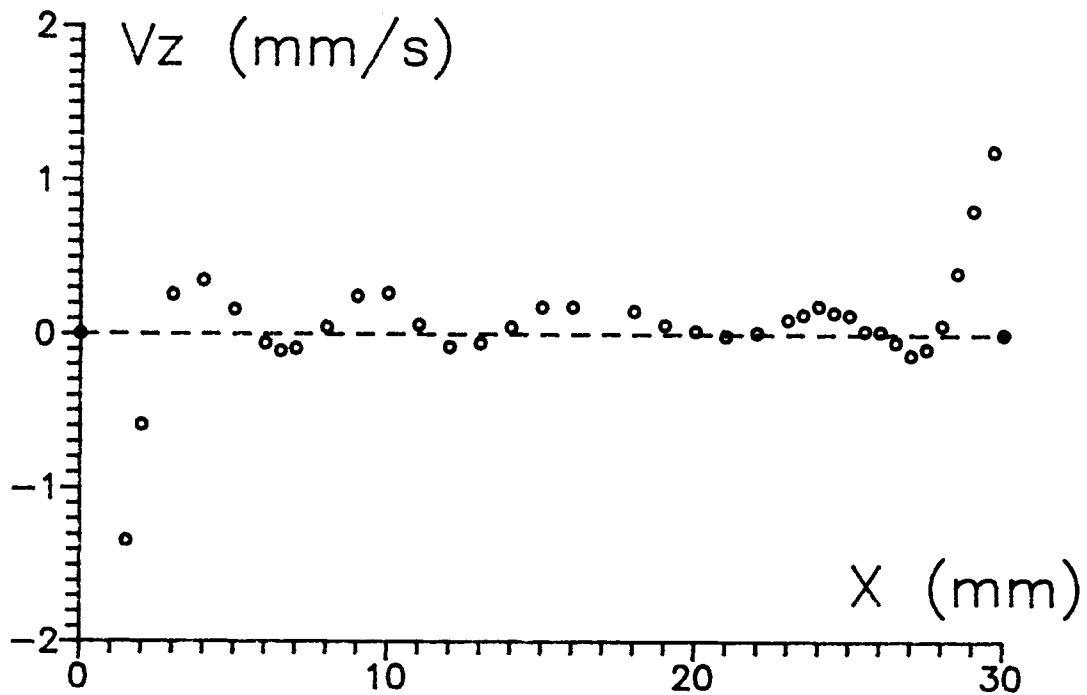


Figure IV-6.

Profil $V_z(x)$ en $z = 1.35 \text{ mm}$.

$h = 2.5 \text{ mm}$, $\Delta T = 1.6 \text{ K}$.

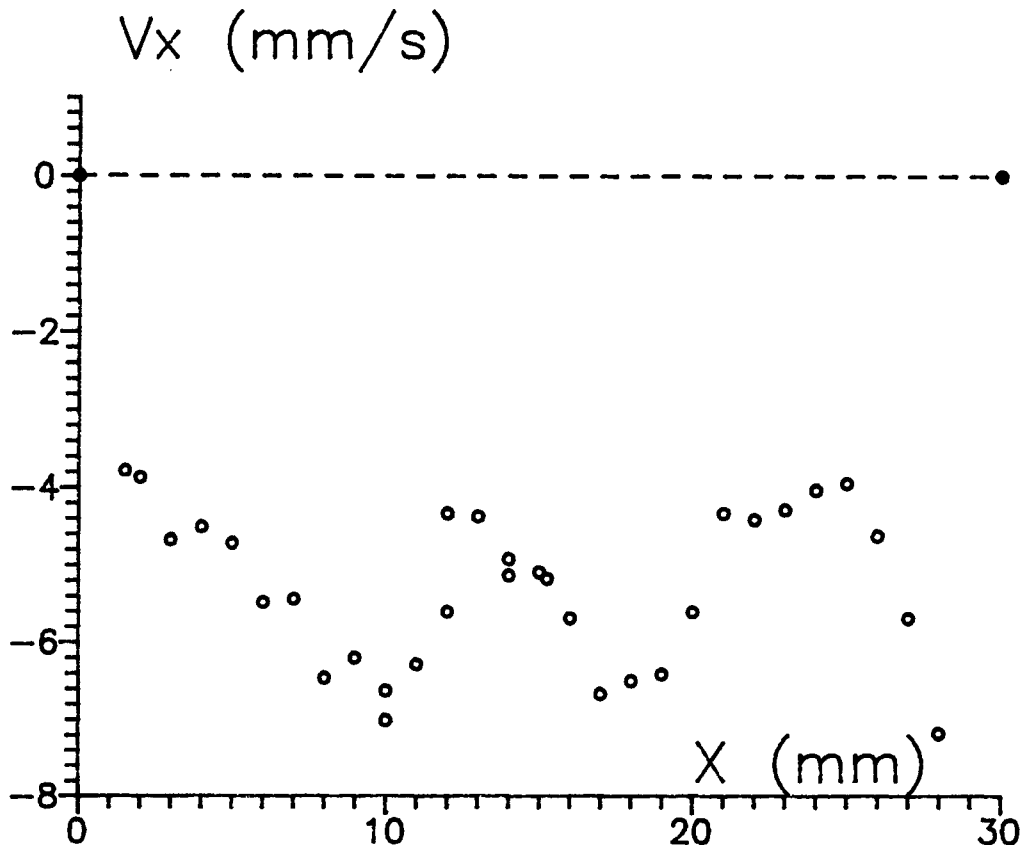


Figure IV-7.

Profil $V_x(x)$ le long de la surface.

$h = 2.5$ mm, $\Delta T = 1.6$ K.

On remarque que l'hypothèse fondamentale du modèle analytique $V_z = 0$ n'est plus du tout respectée dans la partie centrale de la cavité. On sait qu'à cause des effets de bord, le liquide monte près du bord chaud et descend près du bord froid (avec des vitesses supérieures au mm/s), mais on observe aussi dans la région centrale une alternance de liquide ascendant et descendant, avec des vitesses relativement importantes (de l'ordre du cinquième de celles qui sont mesurées près des bords). La figure IV-7 nous indique que les mouvements en surface vont toujours du côté chaud vers le côté froid, mais que la vitesse varie fortement dans la région centrale entre 4 et 7 mm/s. C'est une constatation que nous avons déjà faite lors des mesures effectuées dans l'eau (voir chapitre III). Ici aussi, nous sommes amenés à la conclusion que la convection est multicellulaire. Il existe une grande cellule de convection, mais au sein de celle-ci il doit exister cinq vortex, comme le montre schématiquement la figure IV-8. La figure IV-6 nous montre que les maxima des vitesses ascendantes sont séparés d'une distance comprise entre 6 et 7 mm, c'est-à-dire en unité adimensionnelle entre 2.4 et 2.8 (le facteur de réduction d est l'épaisseur $h = 2.5$ mm). Cette estimation d'une

"longueur d'onde" expérimentale est en accord avec la longueur d'onde critique prédite par Smith et Davis [1] dans leur étude linéaire de stabilité; nous y reviendrons plus loin. Ces propositions de "largeurs" des vortex est en accord avec les distances entre maxima mesurées pour l'eau. Nous souhaitons maintenant confirmer cette interprétation des résultats expérimentaux par des simulations numériques.

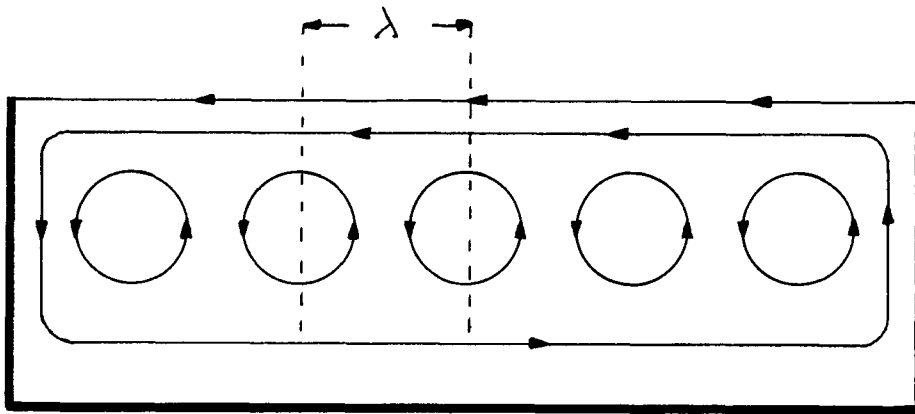


Figure IV-8.

Représentation schématique de lignes de courant compatibles avec les profils de vitesse IV-5 à IV-7.

3. Comparaison avec des simulations numériques.

3.a. Simulations à bas Ra et Ma, régimes monocellulaire et multicellulaire.

Le but de ces simulations est de détecter des instabilités du profil de base, et de trouver de nouveaux états stationnaires, qu'on soupçonne être multicellulaires, et qui pourraient correspondre aux expériences. Du point de vue numérique, les augmentations de Ra et Ma nous contraignent à utiliser une discrétisation numérique plus fine. Partant d'une grille rectangulaire composée de 33 lignes horizontales et de 129 lignes verticales, des simulations sont par la suite effectuées avec un maillage 65×257 (notamment pour $Ma \geq 8000$), afin d'éviter les instabilités et divergences purement numériques.

Avec $Pr = 4$, un rapport d'aspect $A = 4$, des nombres $Ra = 4000$ et $Ma = 1000$, on observe une convection monocellulaire, avec des lignes de courant parallèles et horizontales dans la partie centrale de la cavité (voir figure IV-9). On a un accord quantitatif satisfaisant avec le modèle analytique unidimensionnel du §II.4., dans la région centrale de la cavité, comme en atteste le profil de vitesse horizontale (numérique et analytique) sur la médiane verticale; ceci à la condition, rappelons-le, d'introduire dans le profil analytique (II-44) le gradient $\partial T/\partial X$ en surface obtenu par la simulation.

Une seconde simulation effectuée à $Ra = 8000$ et $Ma = 2000$ montre encore un régime monocellulaire (voir figure IV-10) pour lequel les lignes de courant ne sont pas tellement différentes du cas précédent. Cependant, d'après les isothermes, $\partial T/\partial X$ varie d'un facteur 4 entre la surface et le bord inférieur. Dès lors, sur le plan de la comparaison avec le modèle unidimensionnel, on constate que les profils numérique et analytique sur la médiane verticale ne peuvent plus être mis en concordance.

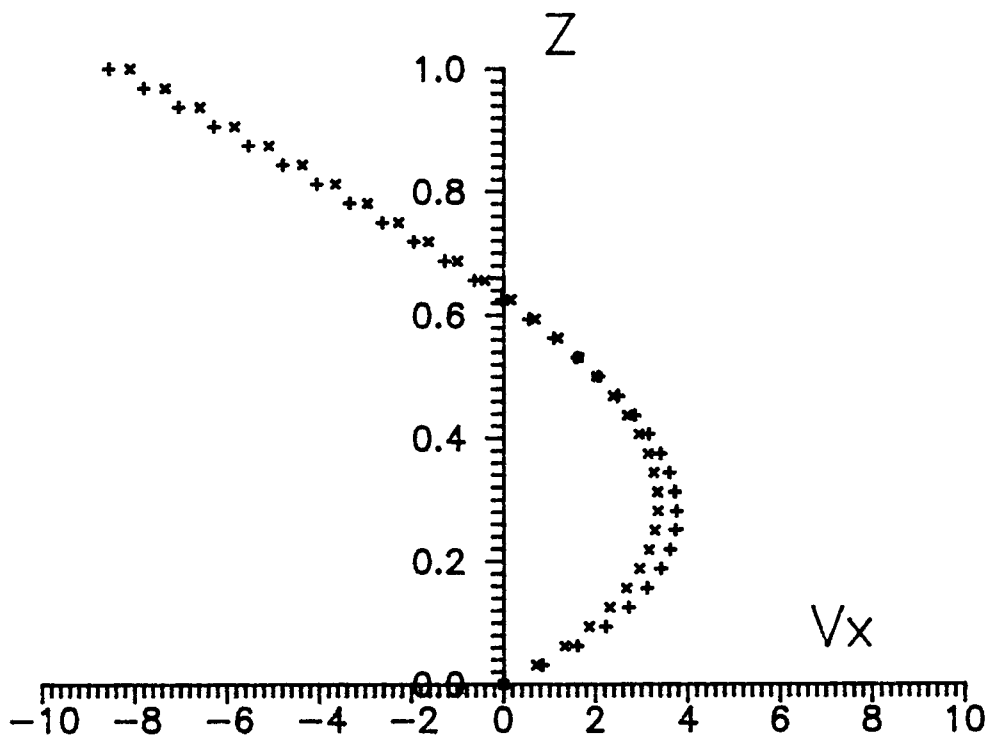
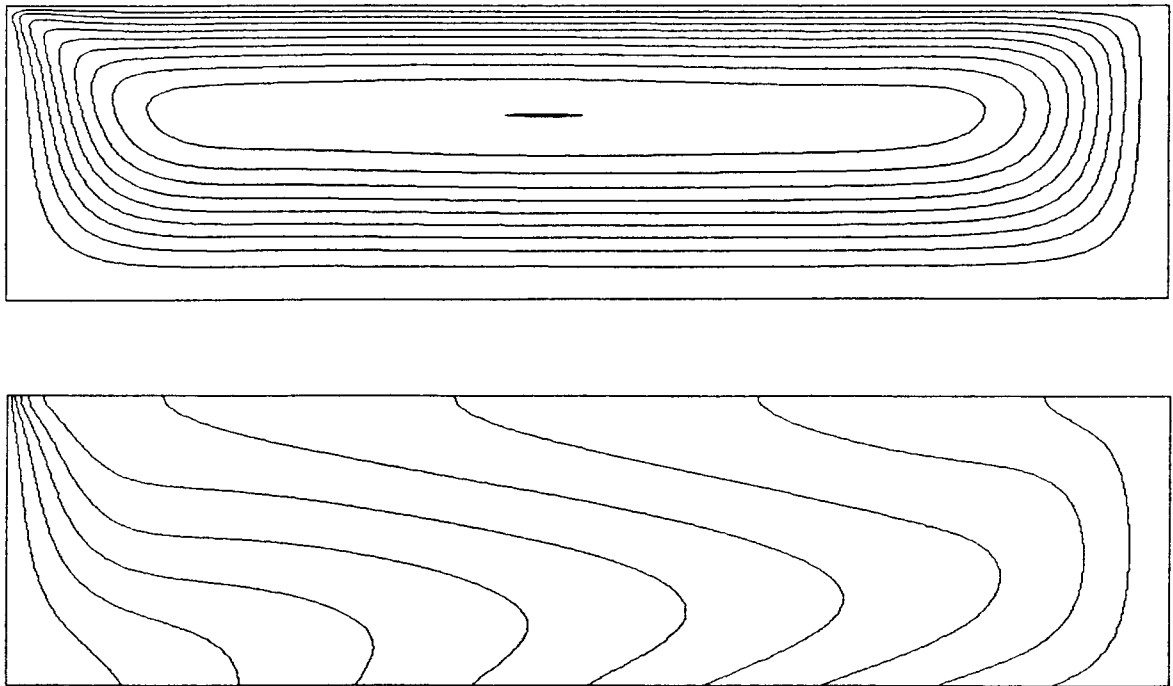


Figure IV-9.

Ra=4000; Ma=1000, lignes de courant, isothermes
 et profils $V_x(Z)$ analytique et
 numérique sur la médiane verticale
 (+ : numérique; x : analytique).

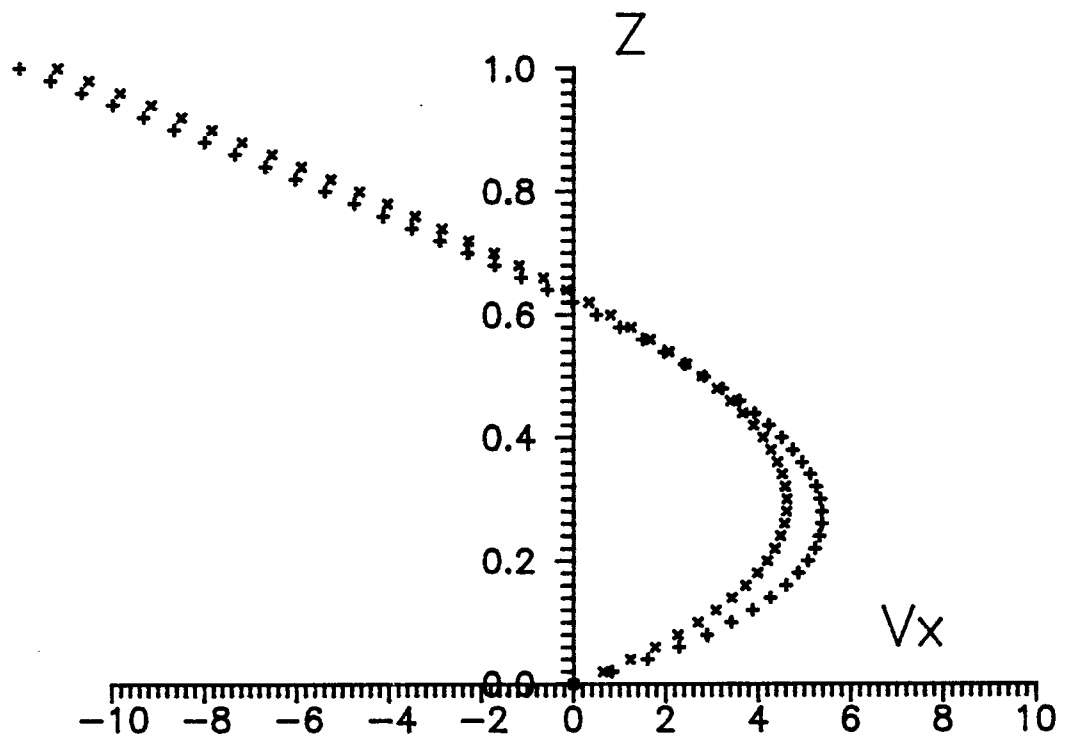


Figure IV-10.

Ra=8000; Ma=2000, lignes de courant, isothermes
 et profils $V_x(Z)$ analytique
 et numérique sur la médiane verticale
 (+ : numérique; x : analytique).

Il semble donc que lorsque les paramètres Ra et Ma augmentent, l'écoulement de base monocellulaire se modifie progressivement. Ceci est confirmé par des simulations effectuées à $Ra = 0$, pour lesquelles on augmente graduellement les forces thermocapillaires : $Ma = 1000$, puis 2000, 3000 et 4000. Les lignes de courant et les isothermes résultant de ces calculs sont donnés aux figures IV-11 à IV-14. Dans les deux premiers cas, le type de convection est monocellulaire, mais la position du maximum de la fonction de courant Ψ_{\max} migre en direction de la paroi chaude (voir les valeurs précises des positions dans la table IV-1). A partir de $Ma = 3000$, et donc aussi pour $Ma = 4000$, on voit que Ψ_{\max} est situé à proximité du bord chaud (à environ 0.7 unité), et une "perturbation" (d'amplitude finie) apparaît sous la forme de deux cellules convectives de même sens de rotation, incluses dans la cellule de base. ces deux cellules superposées à la cellule de base sont également détectables à partir de deux profils de vitesse :

- i) la vitesse horizontale le long de la surface (figure IV-15) qui possède deux maxima correspondant aux deux cellules nouvelles.
- ii) la vitesse verticale le long de la médiane horizontale de la cavité (figure IV-16), caractérisée par l'alternance de liquide ascendant et descendant.

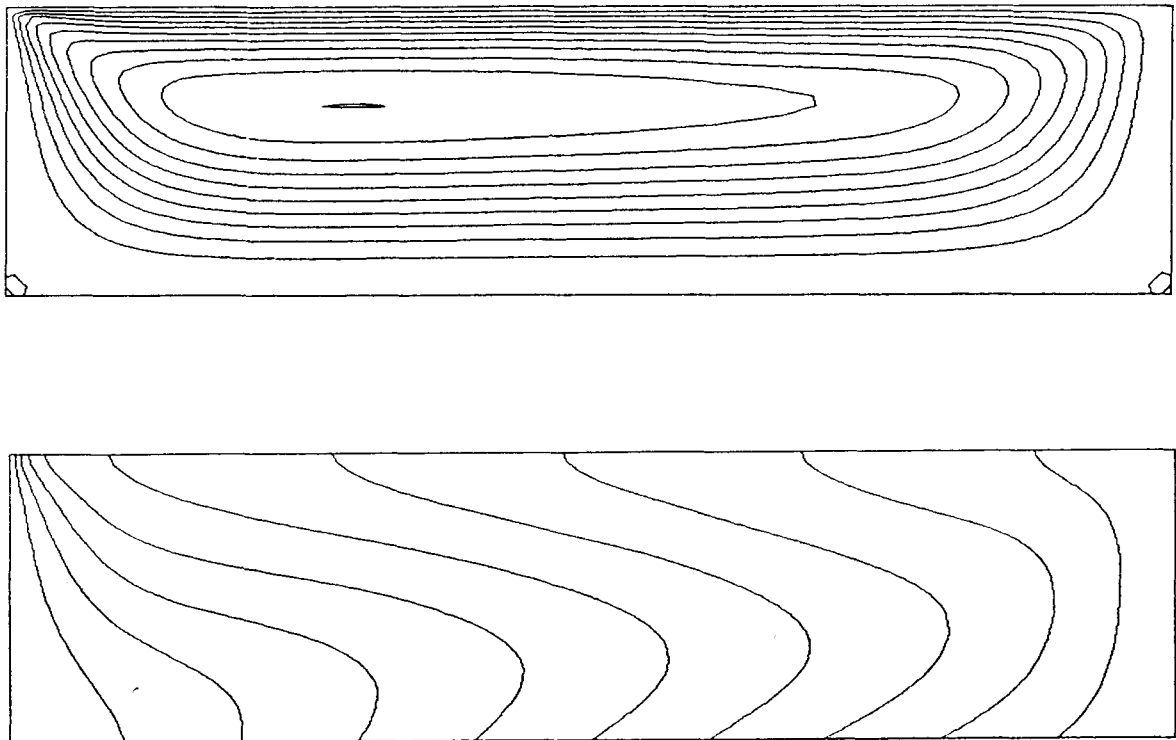


Figure IV-11.

$Ra = 0$, $Ma = 1000$, lignes de courant et isothermes.

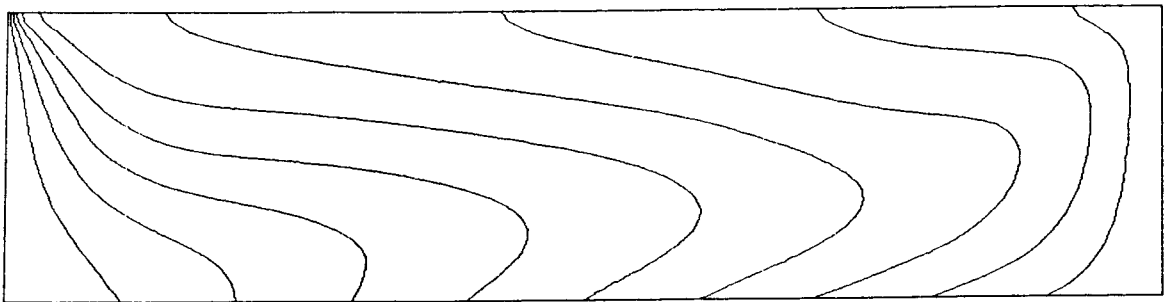
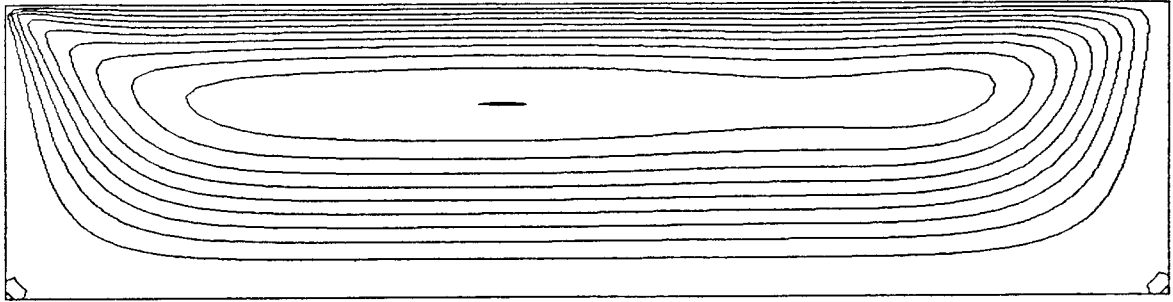


Figure IV-12.

$Ra = 0$, $Ma = 2000$, lignes de courant et isothermes.

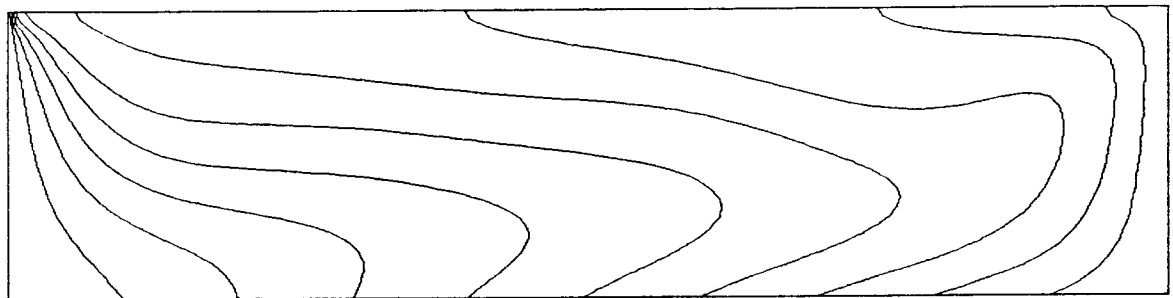
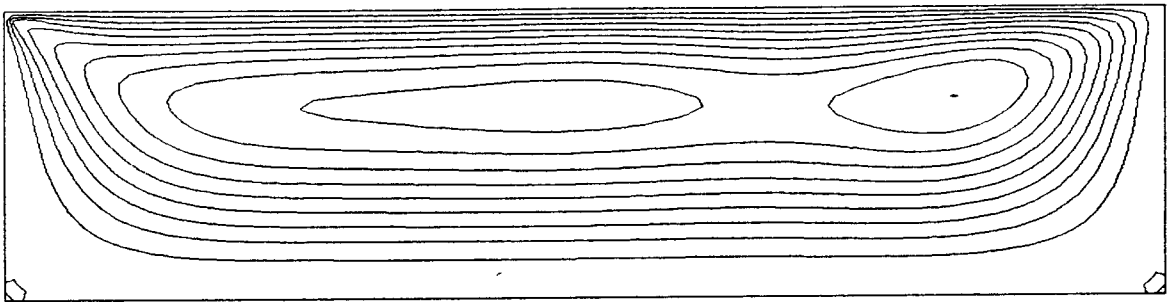


Figure IV-13.

$Ra = 0$, $Ma = 3000$, lignes de courant et isothermes.

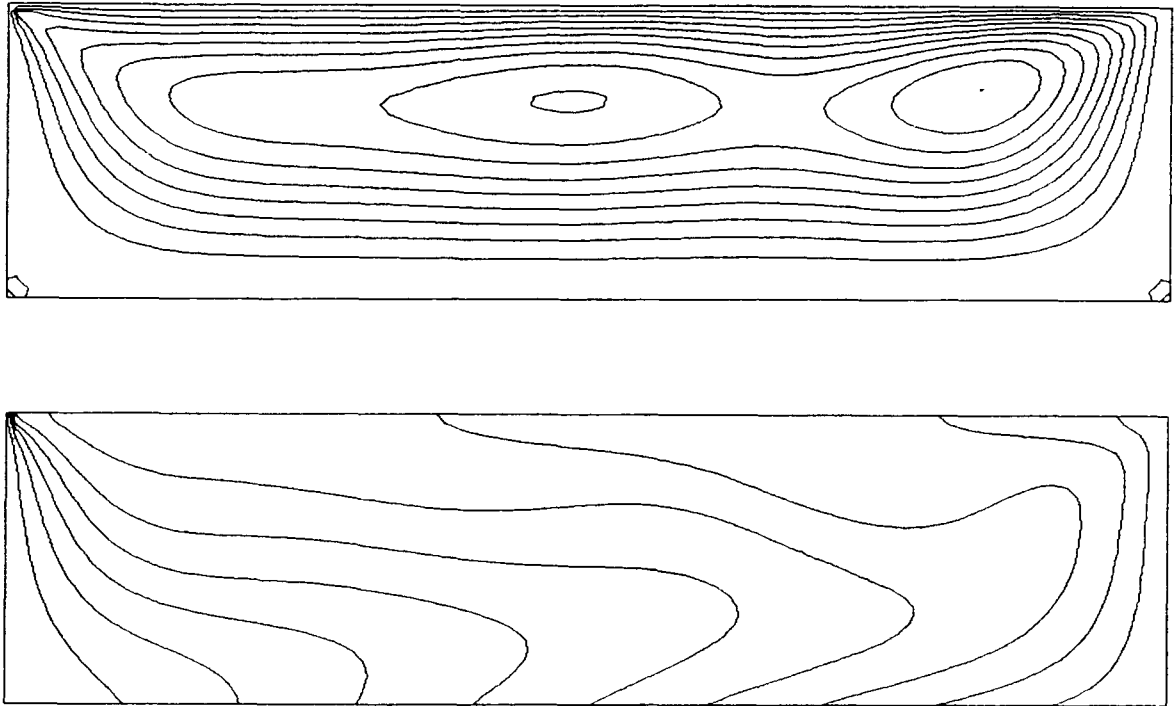


Figure IV-14.

$Ra = 0$, $Ma = 4000$, lignes de courant et isothermes.

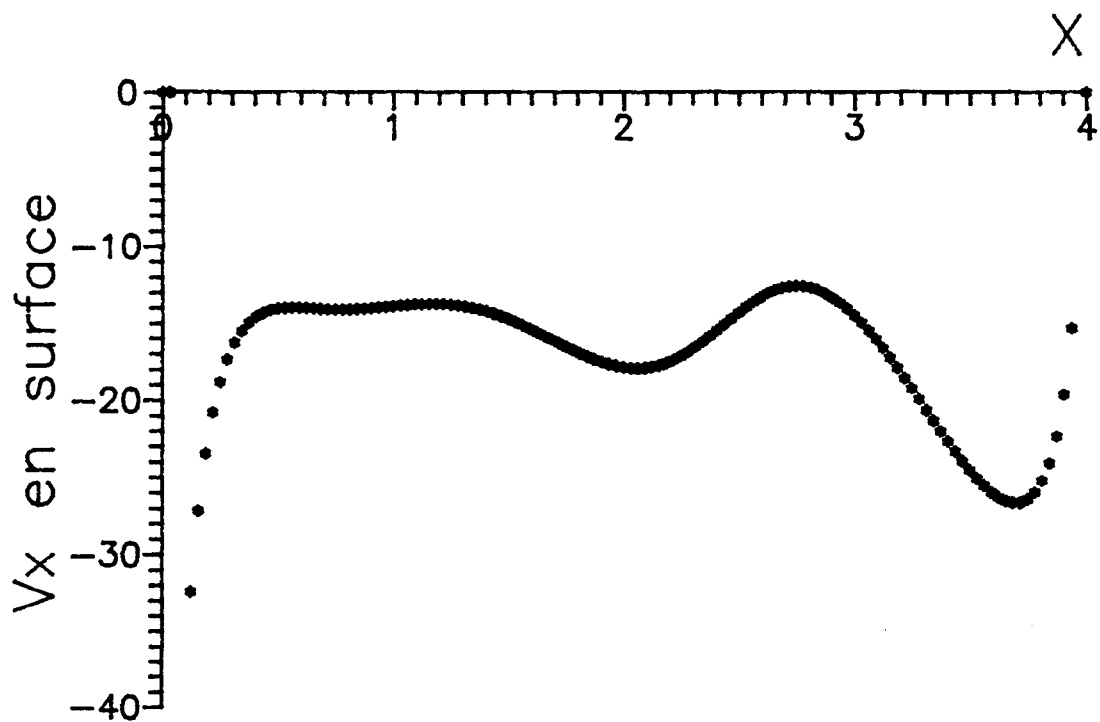


Figure IV-15.

$Ra = 0$, $Ma = 4000$, vitesse horizontale le long de la surface.

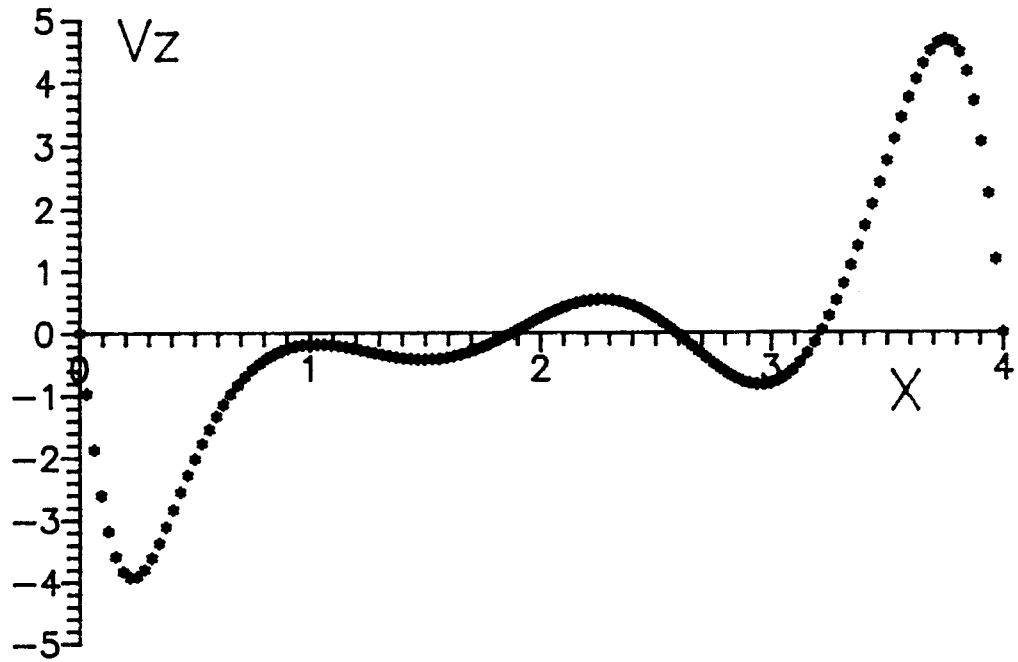


Figure IV-16.

Ra = 0, Ma = 4000, vitesse verticale
le long de la médiane horizontale.

Table IV-1.

A	Ra	Ma	Nombre de cellules	Ψ_{\max}	Position de Ψ_{\max}	
					X	Z
4	4000	1000	1	1.554	1.875	0.625
4	8000	2000	1	2.363	3.25	0.641
4	0	1000	1	1.172	1.188	0.656
4	0	2000	1	1.692	1.719	0.656
4	0	3000	2	2.186	3.281	0.688
4	0	4000	2	2.752	3.344	0.719
4	1000	1000	1	1.274	1.313	0.656
4	4000	4000	2	3.193	3.313	0.688
4	6000	6000	2	4.79	3.220	0.680
6	0	8000	3	5.99	4.852	0.672
4	0	8000	2	6.18	3.219	0.688
3	0	8000	2	6.67	2.156	0.656
2	0	8000	1	6.70	1.016	0.656

L'effet d'une augmentation des forces thermogravitationnelles, cumulées aux forces thermocapillaires, conduit également à l'apparition d'un régime convectif à deux cellules, comme en témoignent les simulations à $Ra = Ma = 1000$, $Ra = Ma = 4000$, $Ra = Ma = 6000$. Quoique le seuil d'apparition (la valeur d'un nombre de Marangoni critique) de ce nouvel état stationnaire n'ait pas été étudié, on pourrait supposer que la thermogravitation, lorsqu'elle agit dans le même sens que la thermocapillarité, favorise l'instabilité du profil de base monocellulaire.

Tout naturellement, on peut supposer que la taille des cellules convectives est peu variable : la longueur d'onde qui pourrait résulter d'une théorie de stabilité du profil de base devrait être une caractéristique du type de convection. Une telle théorie existe d'ailleurs pour la convection thermocapillaire seule dans une couche horizontale d'extension infinie (Smith et Davis [1]). Par conséquent, dans une couche d'extension horizontale finie, lors de l'instabilité de la cellule de base, on s'attend à ce que le nombre de cellules dans le nouvel état soit fonction de l'espace disponible pour les y mettre, donc fonction du rapport d'aspect A . Pour valider cette hypothèse, nous avons effectué des simulations dans des cavités de tailles différentes : les A utilisés étaient 2, 3, 4 et 6, le nombre Ra était nul et Ma fixé à 8000. On observe (voir figure IV-17 à IV-20) que le nombre de cellules est effectivement variable. Dans une cavité de rapport d'aspect $A = 2$, il est impossible de mettre plus d'une cellule, tandis que l'apparition d'une deuxième cellule est rendue possible dans des cavités de $A = 3$ et 4. Pour une cavité plus large encore ($A = 6$), une troisième cellule peut se créer. Donc, en fonction de ces quelques simulations, on peut prétendre que les cellules ont une largeur voisine de 2 fois leur hauteur. Ce résultat n'est pas en désaccord avec la théorie linéaire de Smith et Davis, qui calculent une longueur d'onde approximativement égale à 2.5 pour $Pr = 4$; d'autre part, c'est également en accord avec les longueurs estimées dans les expériences du chapitre III (voir table III-1 pour les distances mesurées dans l'eau) et dans celle effectuée dans l'acétone (figure IV-5 à IV-7). Comme cette dernière a été pratiquée avec une épaisseur fine et un petit ΔT , on peut espérer qu'une simulation numérique de l'expérience soit possible.

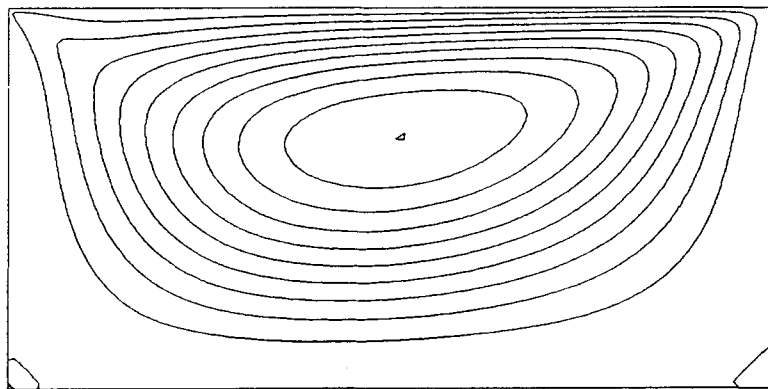


Figure IV-17.

$Ra = 0$, $Ma = 8000$, $A = 2$: lignes de courant.

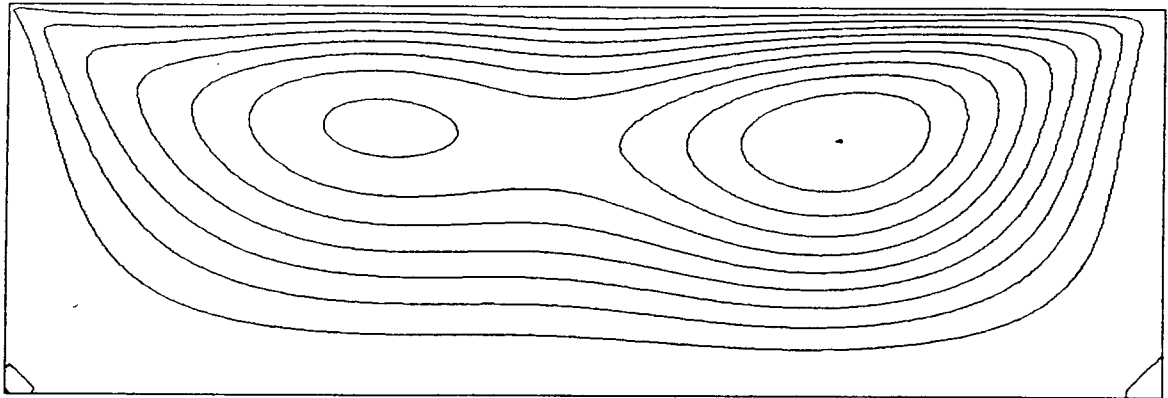


Figure IV-18.

$Ra = 0, Ma = 8000, A = 3$: lignes de courant.

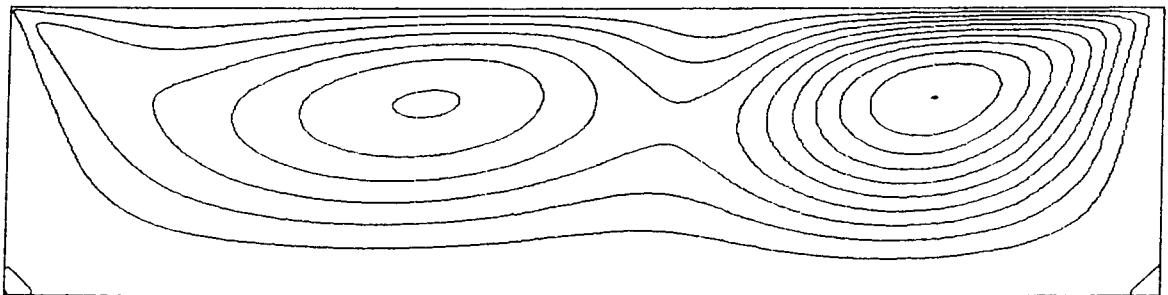


Figure IV-19.

$Ra = 0, Ma = 8000, A = 4$: lignes de courant.

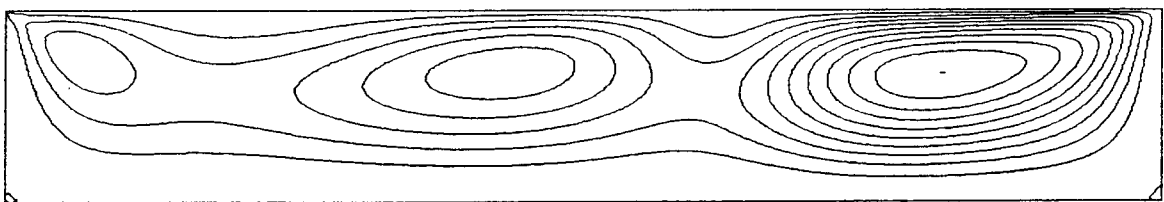


Figure IV-20.

$Ra = 0, Ma = 8000, A = 6$: lignes de courant.

3.b. Simulations des expériences réelles.

Nous avons effectué une première simulation dans les conditions de l'expérience présentée à la figure IV-3, c'est-à-dire $h = 2.5$ mm et $\Delta T = 0.8$ K. Les nombres sans dimension correspondant sont $Pr = 4.24$, $Ra = 4300$, $Ma = 7600$ et $A = 12$. Les lignes de courant et les isothermes de l'état stationnaire obtenu sont présentées à la figure IV-21. Le profil $V_x(z)$, converti sous forme dimensionnelle est donné à la figure IV-22. On remarque que la convection n'est déjà plus tout à fait monocellulaire (existence d'un très petit vortex près du côté chaud), mais dans la partie centrale, là où les mesures ont été faites, les lignes de courant sont parfaitement horizontales et parallèles entre elles (impliquant $V_z = 0$). Les vitesses prédites par la simulation sont en accord quantitatif avec les vitesses mesurées expérimentalement : -3.5 mm/s en surface contre -3.6 mm/s expérimentalement, et 1.15 mm/s comme vitesse maximale positive, alors que l'expérience donne 1.1 mm/s.

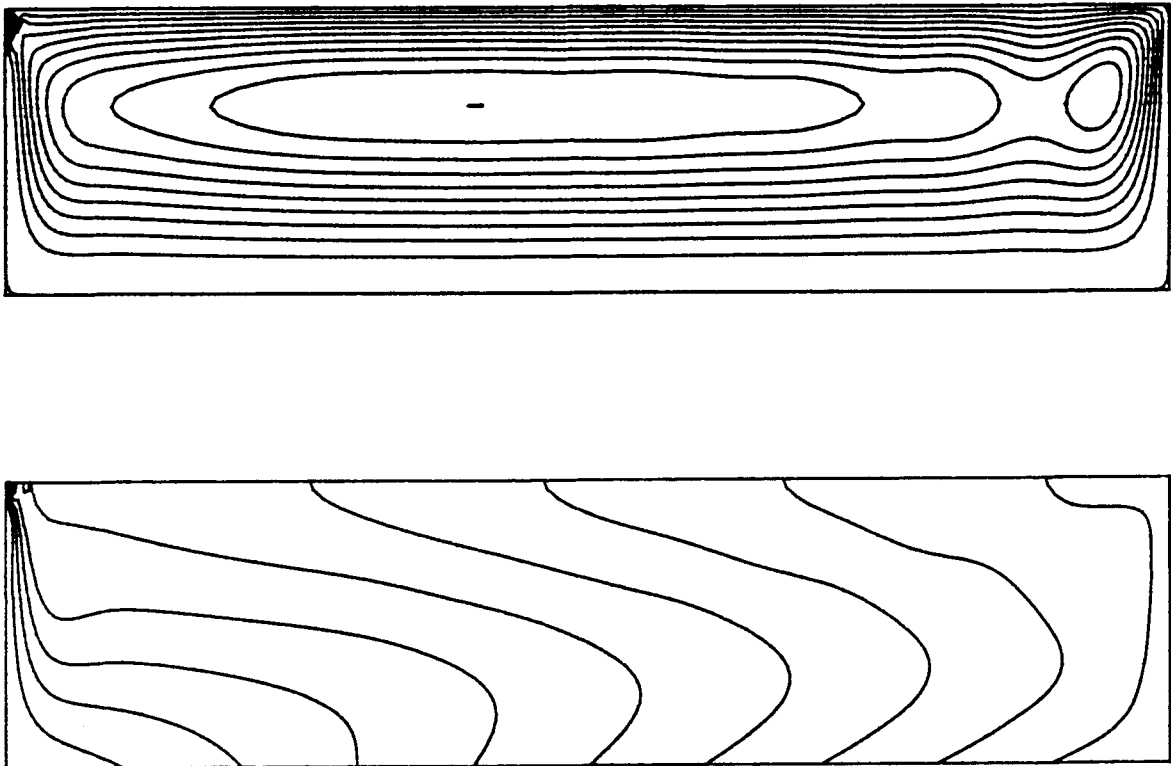


Figure IV-21.

Lignes de courant et isothermes d'une simulation à
 $Pr = 4.24$, $Ra = 4300$, $Ma = 7600$, $A = 12$.

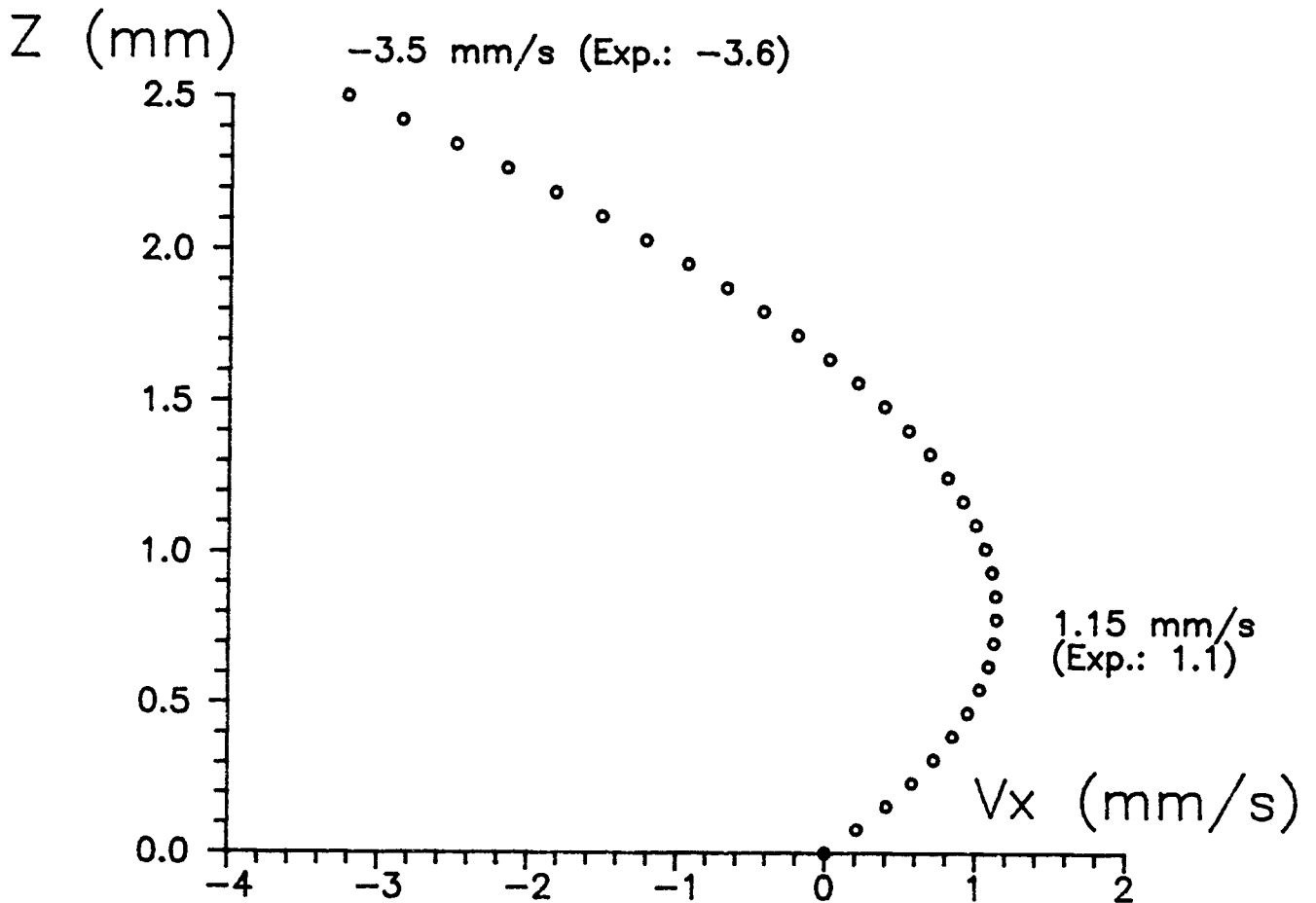


Figure IV-22.

Profil $V_x(z)$ dimensionnel sur la médiane verticale,
pour une simulation à $Pr = 4.24$, $Ra = 4300$, $Ma = 7600$, $A = 12$.

Nous avons effectué une seconde simulation, dans les conditions de l'expérience présentée au §2.c., avec $h = 2.5 \text{ mm}$ et $\Delta T = 1.6 \text{ K}$. Les nombres sans dimension correspondant sont $Pr = 4.24$, $Ra = 8600$, $Ma = 15200$ et $A = 12$. Dans ce cas, le maillage utilisé est une grille de 257×65 lignes. Comme de plus on est obligé d'utiliser des pas temporels petits, le temps de calcul nécessaire pour atteindre un état stationnaire est très long (typiquement quelques dizaines d'heures). Les lignes de courant et les isothermes de l'état stationnaire obtenu sont données à la figure IV-23. Les figures IV-24, IV-25 et IV-26 donnent les trois profils dimensionnels qui correspondent aux trois profils mesurés expérimentalement et montrés aux figures IV-5, IV-6 et IV-7.

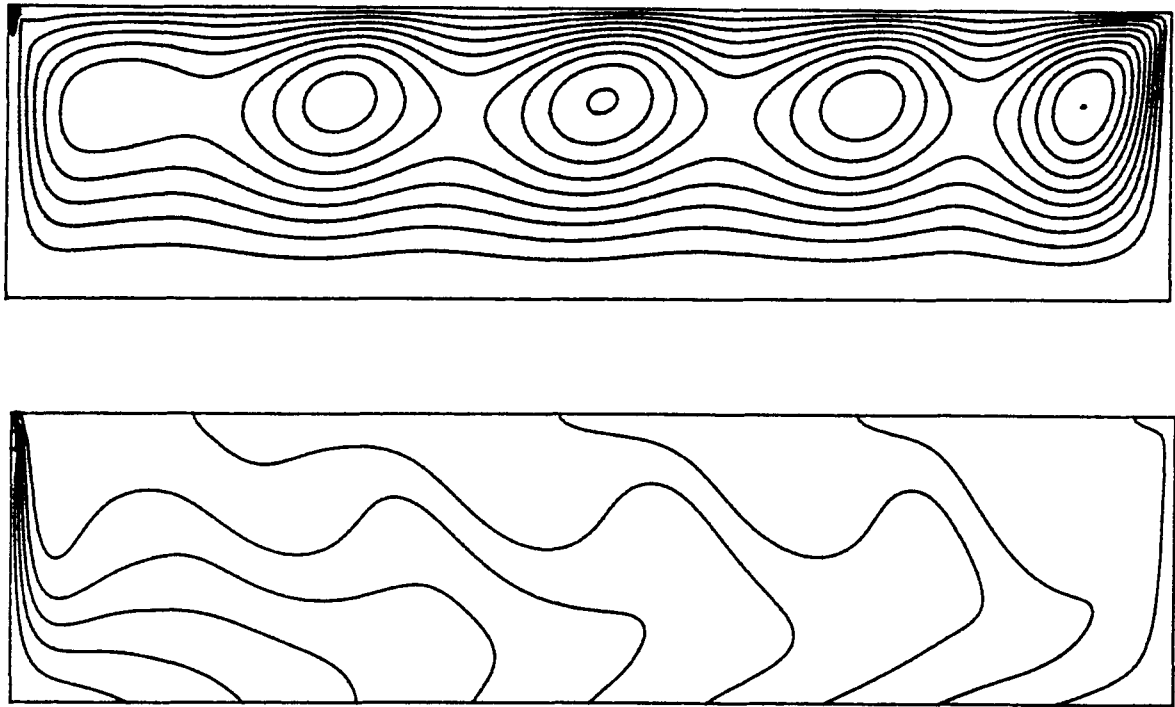


Figure IV-23.

Lignes de courant et isothermes d'une simulation à
 $Pr = 4.24$, $Ra = 8600$, $Ma = 15200$, $A = 12$.

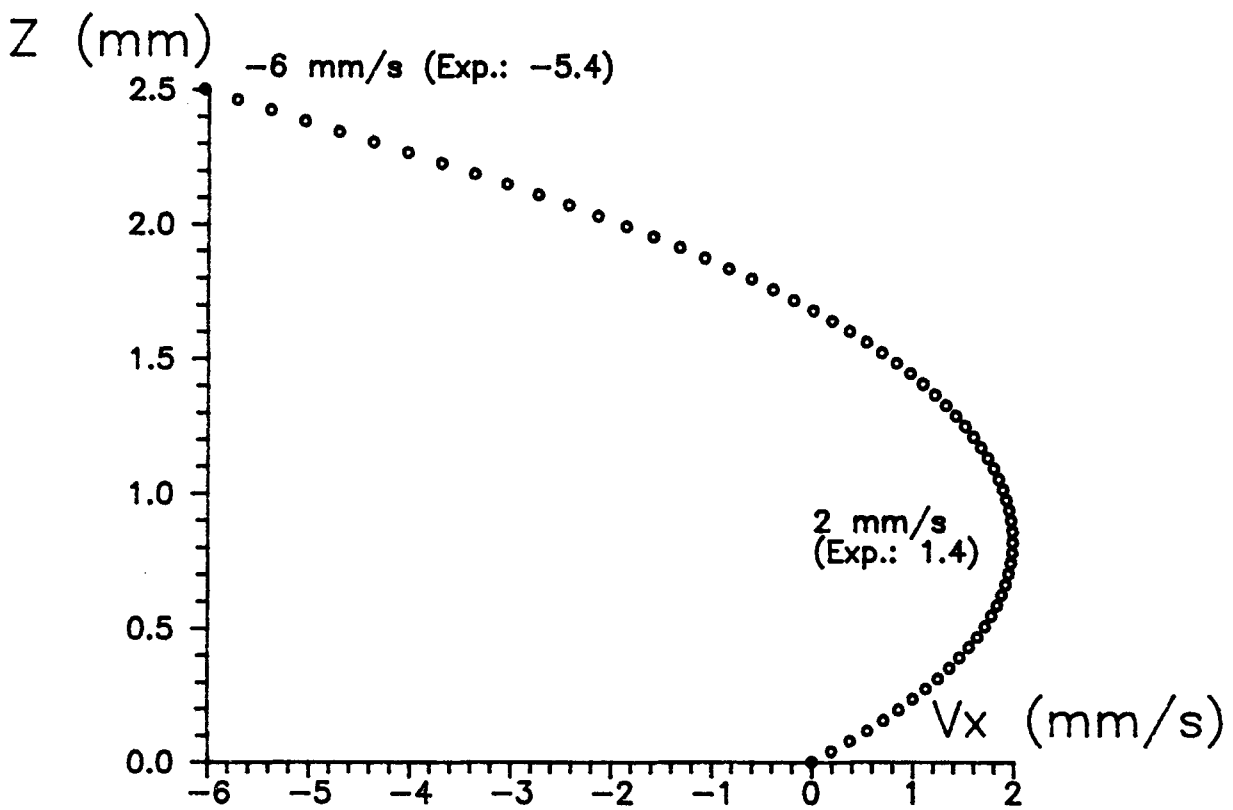


Figure IV-24.

Profil $V_x(z)$ dimensionnel sur la médiane verticale,
 pour une simulation à $Pr = 4.24$, $Ra = 8600$, $Ma = 15200$, $A = 12$.

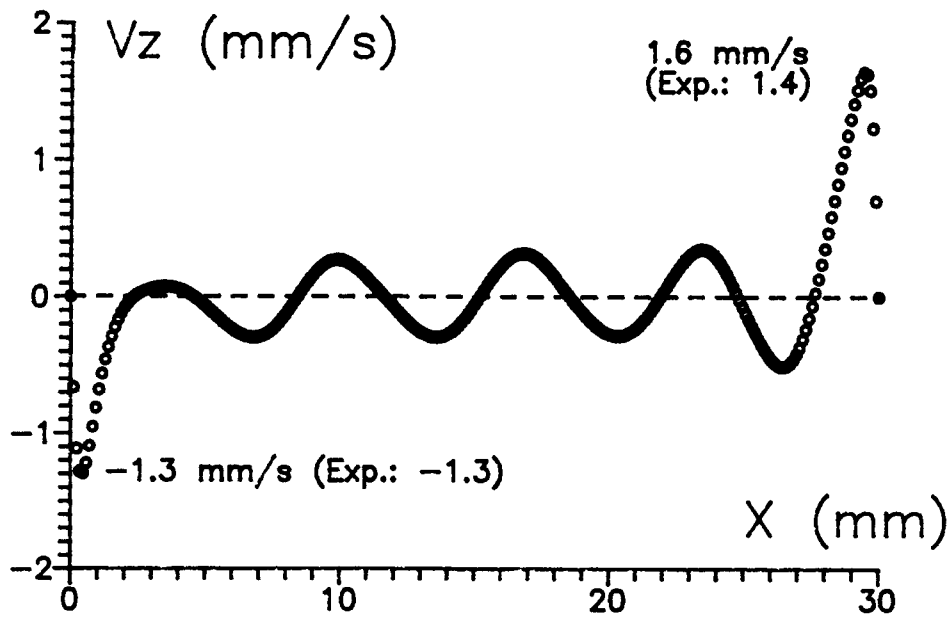


Figure IV-25.

Profil $V_z(x)$ dimensionnel le long d'une ligne horizontale, en $z = 1.35$ mm, pour une simulation à $Pr = 4.24$, $Ra = 8600$, $Ma = 15200$, $A = 12$.

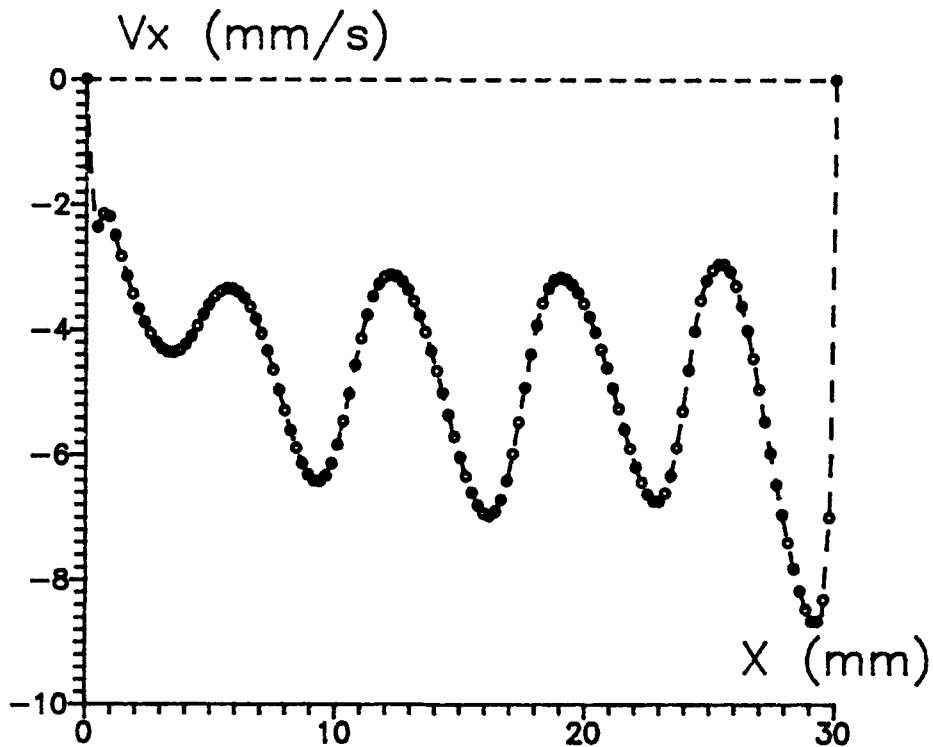


Figure IV-26.

Profil $V_x(x)$ dimensionnel le long de la surface, pour une simulation à $Pr = 4.24$, $Ra = 8600$, $Ma = 15200$, $A = 12$.

On remarque d'emblée le caractère multicellulaire des mouvements convectifs. Cinq vortex sont présents ; cela se voit à partir :

- i) des lignes de courant (4 vortex sont bien visibles, le cinquième ne se manifeste sur la figure que par un "étranglement");
- ii) de la vitesse verticale le long d'une ligne horizontale en $z = 1.35$ mm (avec cinq alternances de liquide descendant et ascendant),
- iii) de la vitesse horizontale le long de la surface (cinq maxima en valeurs absolues).

La comparaison n'est pas seulement valable qualitativement, par la prédiction du nombre correct de cellules. On observe également, tout comme dans le cas monocellulaire, un accord quantitatif qui n'est pas mauvais. La vitesse en surface sur la médiane verticale est de -6.0 mm/s dans la simulation, contre -5.31 mm/s mesurés. L'accord est cependant moins bon en coeur de phase, où la simulation prévoit 2 mm/s tandis que la mesure expérimentale est 1.4 mm/s. Pour le profil de la vitesse verticale le long de l'horizontale $z = 1.35$ mm, l'accord est surtout bon pour les plus grandes vitesses : le liquide du côté chaud monte à une vitesse prévue de 1.6 mm/s contre 1.4 mm/s dans l'expérience; du côté froid, la simulation fournit -1.3 mm/s comme dans l'expérience. Dans la partie centrale de la cavité, l'accord existe simplement pour l'ordre de grandeur des vitesses (inférieures à 0.5 mm/s) et les nombres de maxima, minima et zéros. Il en va de même pour le profil de vitesse horizontale le long de la surface. La simulation et l'expérience sont en accord pour l'ordre de grandeur de la vitesse en surface : elle oscille entre -3 mm/s et -7 mm/s, l'expérience fournissant -4 et -7 mm/s comme limites.

Nous pouvons conclure que le modèle numérique bidimensionnel utilisé permet une description qualitative et quantitative des expériences que nous avons effectuées, du moins dans les cas stationnaires. Les phénomènes thermocapillaires sont donc correctement modélisés par les conditions que nous avons écrites. Notons aussi que la faible distance entre les parois transparentes de la cavité (10 mm) favorise un écoulement avec $V_y = 0$, qui est de ce fait proche d'un modèle bidimensionnel tel que celui que nous utilisons.

4. Etude expérimentale de la convection oscillante.

4.a. Introduction.

Nous avons déjà expérimentalement montré qu'il existe une transition entre des états convectifs monocellulaires stationnaires et des états multicellulaires stationnaires, lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle ΔT . On peut supposer que si on augmente encore ΔT , ou l'épaisseur h , augmentant ainsi Ra et Ma , on observera une nouvelle transition vers des états à dépendance spatio-temporelle. De manière générale, les états dépendants du temps peuvent être simplement monopériodiques, ou composés de plusieurs fréquences, conduisant éventuellement à la turbulence. Nous désirons dans notre étude expérimentale détecter une transition entre les états multicellulaires déjà observés et des états oscillants.

4.b. Détection des oscillations.

Nous avons effectué plusieurs expériences en modifiant les paramètres h et ΔT , à la recherche d'états oscillants. Le premier essai se révéla difficile pour les deux raisons suivantes :

La vélocimétrie laser-Doppler ne permet qu'une mesure locale d'une composante de vitesse et nous n'avions aucune idée de l'endroit de la cavité où nous placer, ni de la composante à mesurer, pour que les oscillations soient suffisamment grandes pour être détectables.

Nous n'avions non plus aucune idée de l'ordre de grandeur des périodes des oscillations : la seconde, la minute,...?

Les premières détections d'oscillations ont montré que les périodes étaient de l'ordre d'une dizaine de secondes, et que les variations de vitesses les plus fortes étaient décelées en mesurant la composante horizontale de vitesse un peu en dessous de la surface (typiquement 1 mm). La figure IV-27 donne le détail de quelques oscillations enregistrées par l'analyseur de signaux. L'épaisseur h de la couche liquide pour cette expérience était 4.1 mm et $\Delta T = 3.4$ K. La sonde optique était positionnée 0.4 mm en dessous de la surface, sur la médiane verticale. La figure IV-27 est composée de 59 transformées de Fourier successives du signal, prises à des écarts temporels égaux (0.744 s ici). Chaque transformée de Fourier possède un pic (souvent assez large) correspondant à la vitesse au point de mesure. Cette largeur est due au fait que cette transformée de Fourier est elle-même une moyenne de 10

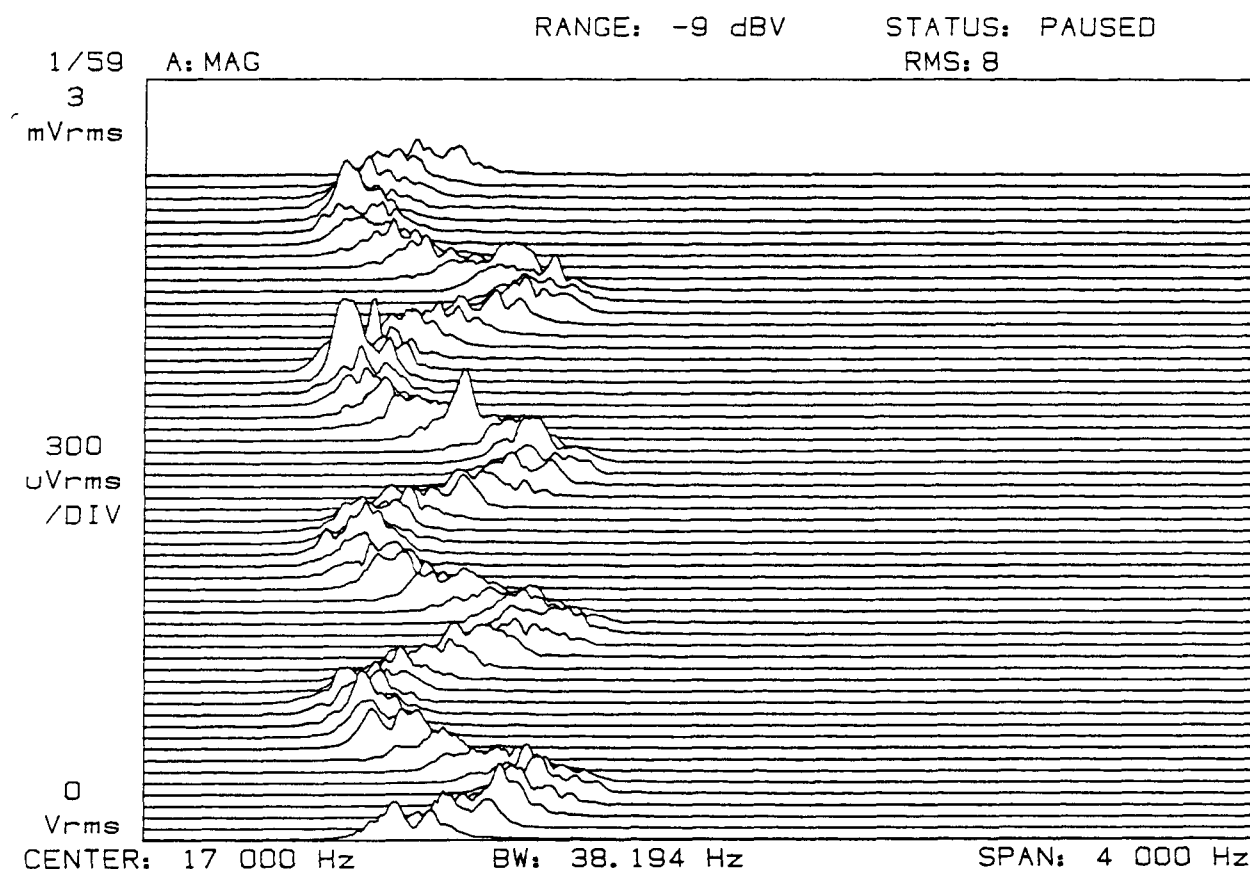


Figure IV-27.

Exemple de quelques oscillations de V_x en un point
de la cavité. $h = 4.1$ mm, $\Delta T = 3.4$ K.

transformées instantanées, en utilisant le menu "average" de l'analyseur de signaux. On observe clairement que le signal oscille entre -4300 Hz et -3600 Hz avec une période de 11 s. Puisque l'interfrange du volume de mesure vaut $1.7 \mu\text{m}$, la composante horizontale de vitesse oscille donc entre -7.31 mm/s et -6.12 mm/s. Lors de telles expériences, les oscillations sont observées durant des temps longs (plusieurs minutes) de manière à s'assurer qu'elles ne sont pas transitoires, et pour obtenir une valeur plus précise de la période.

Pour une expérience particulière ($h = 5.5$ mm et $\Delta T = 6.0$ K), nous avons relevé automatiquement les abscisses des transformées de Fourier effectuées par l'analyseur, équivalentes aux vitesses V_x instantanées 2 mm en dessous de la surface, sur la médiane verticale. Ces relevés ont été effectués approximativement toutes les 2 secondes durant plus de 800 secondes (voir figure IV-28.a.). La transformée de Fourier de $V_x(t)$ est donnée à la figure IV-28.b. Elle montre une fréquence dominante d'environ 0.1 Hz.

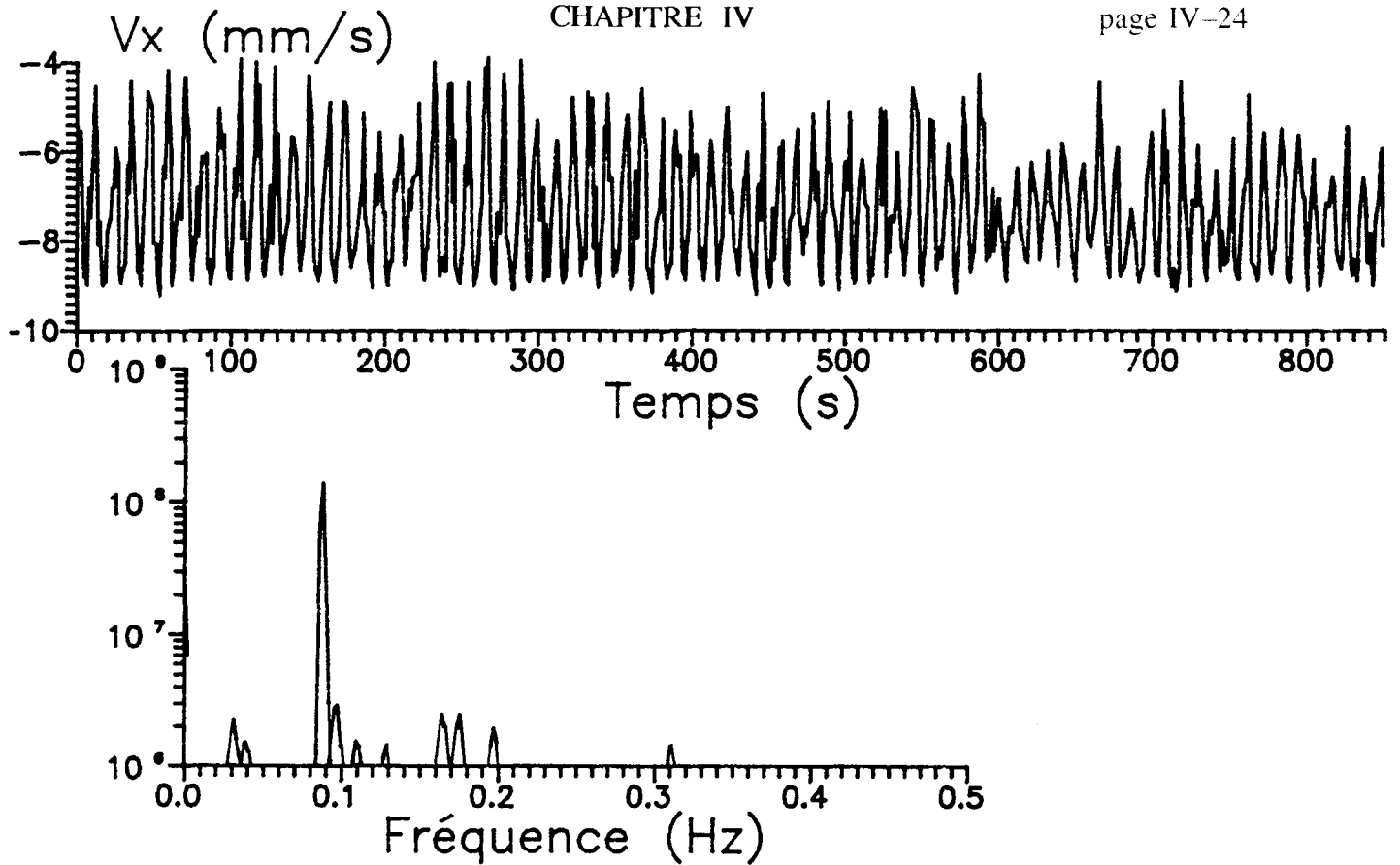


Figure IV-28.

Etude de V_x 2 mm en dessous de la surface, sur la médiane verticale. $h = 5.5$ mm, $\Delta T = 6.0$ K.

a : vitesse au cours du temps $V_x(t)$.

b : transformée de Fourier de $V_x(t)$.

4.c. Champ de vitesse pour $h = 3.3$ mm et $\Delta T = 4.1$ K.

Pour une épaisseur particulière ($h = 3.3$ mm) et une différence de température $\Delta T = 4.1$ K (pour lesquels on observe un état convectif oscillant avec une période 9.3 s), nous avons tenté de décrire le champ de vitesse global. Remarquons que la vélocimétrie est une méthode qui ne permet que des mesures locales de composantes de vitesse. Dès lors, nous ne pourrions pas savoir si les vitesses mesurées en deux points différents sont en phase ou non. Pour effectuer de telles corrélations, il faudrait utiliser une technique de mesure globale et instantanée, telle que la vélocimétrie par déplacement d'images de particules (Dudderar *et al.* [2]). La figure IV-29 présente le profil $V_x(z)$ le long de la médiane verticale; pour chaque hauteur, les vitesses minimale et maximale sont données. On constate que les amplitudes des oscillations sont importantes dans la partie supérieure de la couche liquide, là où se situe la principale cause des mouvements : la thermocapillarité. On remarque également que le profil moyen a une forme compatible avec le profil $V_x(z)$ cubique prédit par le modèle analytique.

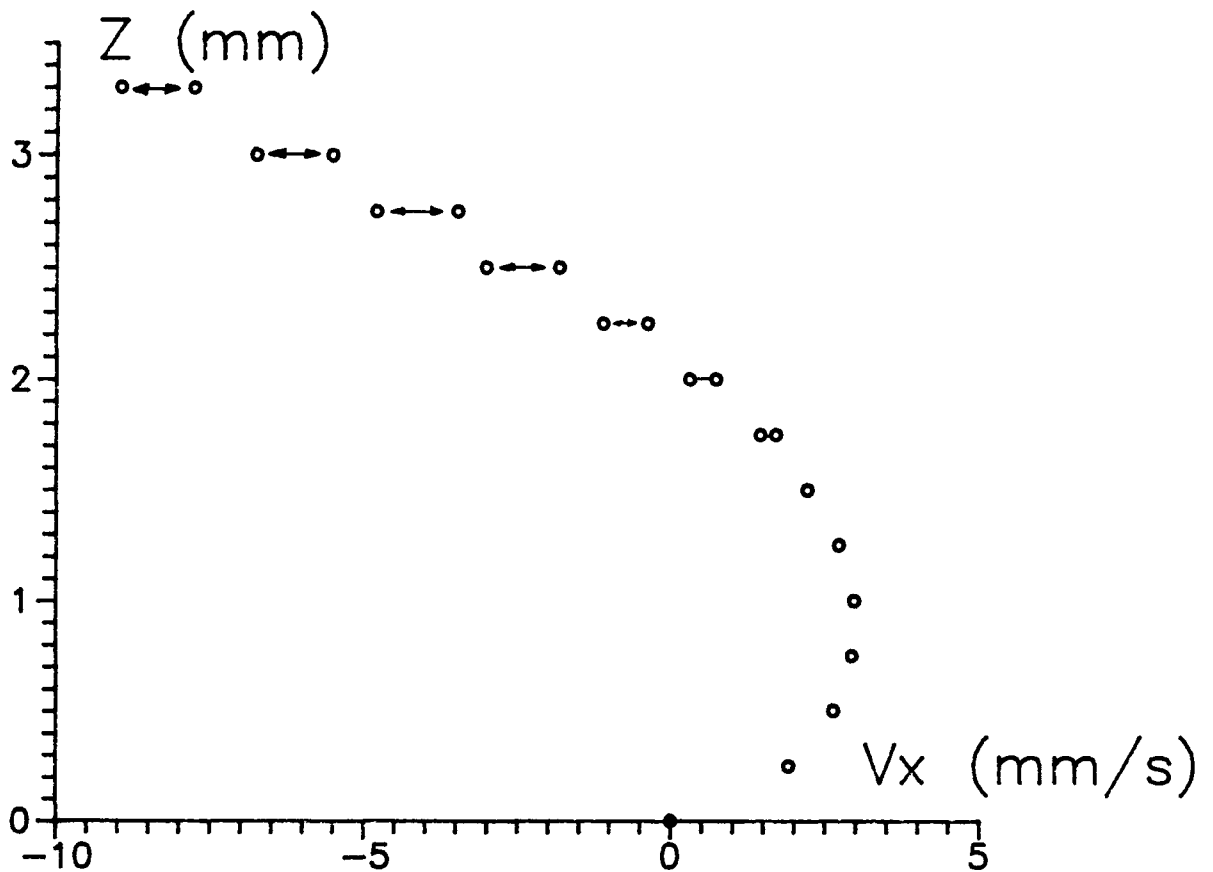


Figure IV-29.

Profil $V_x(z)$ le long de la médiane verticale.

$h = 3.3$ mm, $\Delta T = 4.1$ K; Valeurs extrêmes durant les oscillations.

Nous avons également mesuré le profil $V_x(x)$ le long de la surface (voir figure IV-30). Ici aussi les valeurs portées en graphique sont les valeurs extrêmes mesurées au cours des oscillations. On constate que les amplitudes des oscillations sont du même ordre de grandeur partout en surface, sauf du côté chaud où la vitesse est beaucoup plus importante. On regrette bien évidemment de ne pas savoir si ces oscillations sont en phase, ce qui permettrait de déterminer si la structure convective a la forme d'ondes mobiles comme des rouleaux convectifs qui se translatent. Si on considère un autre profil $V_z(x)$ le long d'une ligne horizontale à la hauteur $z = 2.5$ mm d'une cavité contenant 5.75 mm d'acétone soumis à $\Delta T = 6.0$ K (voir figure IV-31), on constate que la structure ne peut pas être constituée de rouleaux convectifs en translation. En effet, on devrait alors constater au cours du temps et en un endroit donné des V_z tantôt positifs et tantôt négatifs, donc une vitesse oscillant entre une valeur minimale négative et une valeur maximale positive. Ce n'est pas le cas, sauf en quelques endroits.

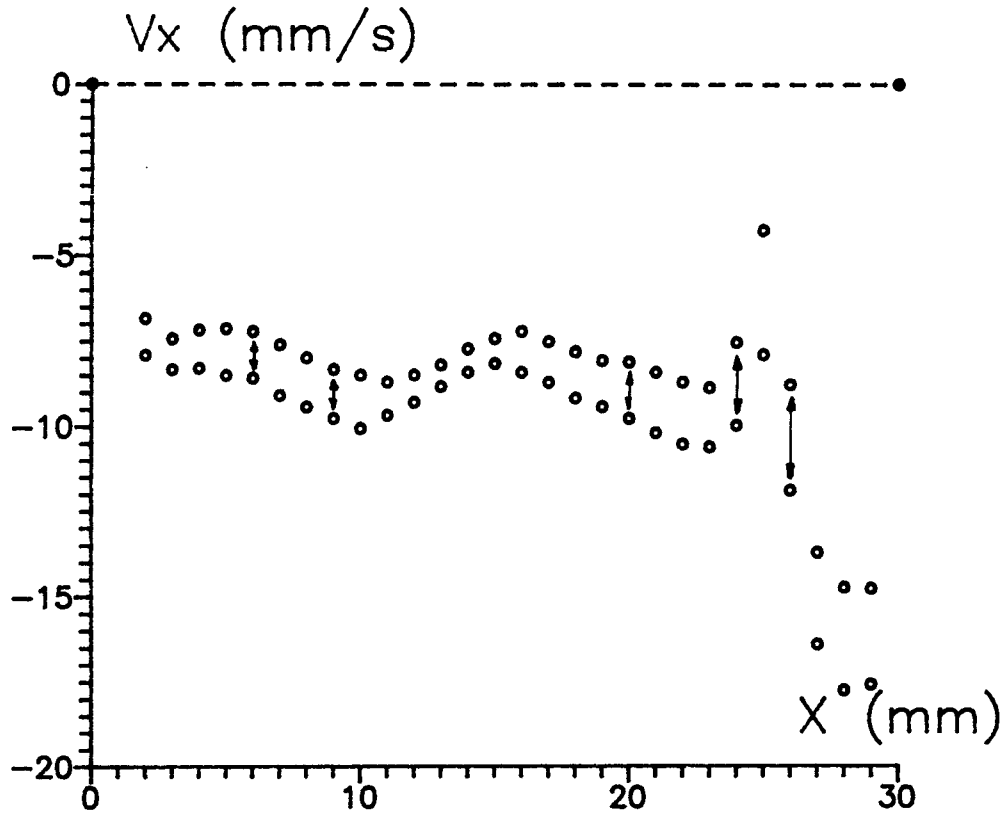


Figure IV-30.

Profil $V_x(x)$ le long de la surface. $h = 3.3$ mm,
 $\Delta T = 4.1$ K; Valeurs extrêmes durant les oscillations.

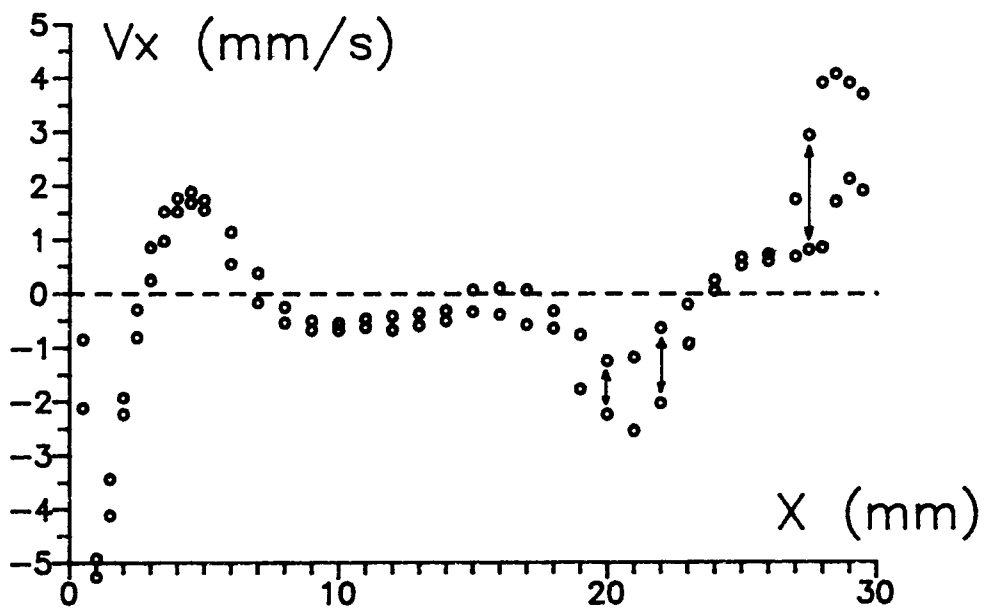


Figure IV-31.

Profil $V_z(x)$ le long d'une ligne horizontale en $z = 2.5$ mm
 $h = 5.75$ mm, $\Delta T = 6.0$ K. Valeurs extrêmes durant les oscillations.

4.d. Cas oscillants ou stationnaires en fonction de h et ΔT .

Nous avons effectué un grand nombre d'expériences en modifiant soit l'épaisseur de liquide, soit ΔT . Suivant les cas, nous avons obtenu des régimes stationnaires ou oscillants. La table IV-2 donne la liste des expériences pour lesquelles on n'a pas détecté d'oscillations, en calculant également les nombres Ma et Ra correspondants (la longueur de référence d est l'épaisseur h de la couche d'acétone). La table IV-3 reprend par contre tous les cas de convection oscillante, en précisant à chaque fois la période mesurée.

Table IV-2.

Cas de convection stationnaire dans l'acétone.
Epaisseur, ΔT , nombres Ra et Ma correspondants.

h (mm)	ΔT (K)	Ra	Ma
1.75	1.2	2212	7980
2.50	1.2	6450	11400
3.85	1.2	23557	17556
5.70	1.2	76448	25992
7.50	1.2	174150	34200
9.20	1.3	348229	45448
14.25	1.3	1294036	70395
2.50	1.6	7600	15200
2.50	2.4	12900	22800
2.50	4.7	25262	44650
2.50	9.0	48375	85500
7.00	4.5	530964	119700
7.50	2.9	420863	82650
7.50	4.3	624038	122550
7.50	5.6	812700	159600
7.50	7.7	1117463	219450
5.75	3.0	196193	65550
3.25	3.0	35427	37050
3.75	3.0	54422	42750
6.80	4.9	530007	126616
6.25	4.9	411523	116375
6.00	4.9	364090	111720
5.80	4.9	328881	107996
3.20	3.4	38325	41344
5.85	3.4	234156	75582
5.20	3.4	164455	67184
7.00	2.7	318578	71820
6.00	2.7	200621	61560
5.00	2.7	116100	51300
4.00	2.7	59443	41040
3.00	2.7	25078	30780
2.00	2.7	7430	20520

Table IV-3.

Cas de convection oscillante dans l'acétone.

Épaisseur, ΔT , nombres Ra et Ma correspondants, et période mesurée.

h (mm)	ΔT (K)	Ra	Ma	période (s)
6.00	9.0	668736	205200	13.9
5.60	9.0	543707	191520	13.6
5.60	9.0	543707	191520	13.6
5.90	6.0	423902	134520	13.0
5.50	6.0	343398	125400	12.0
5.60	6.0	362471	127680	12.5
4.85	3.0	117735	55290	13.0
4.25	3.0	79222	48450	10.5
4.60	3.0	100451	52440	11.5
3.15	4.9	52685	58653	8.0
3.00	4.9	45511	55860	7.0
2.45	4.9	24789	45619	5.6
2.25	4.9	19200	41895	6.6
2.15	4.9	16752	40033	7.0
1.90	4.9	11562	35378	5.5
1.70	4.9	8281	31654	5.1
1.35	4.9	4147	25137	4.7
3.85	4.9	96192	71687	8.5
4.50	4.9	153600	83790	10.1
5.50	4.9	280442	102410	13.5
5.00	4.9	210700	93100	11.0
5.60	4.9	296018	104272	13.7
4.20	3.4	86653	54264	11.4
4.10	3.4	80610	52972	11.2
3.95	3.4	72082	51034	11.0
3.75	3.4	61678	48450	9.4
3.55	3.4	52327	45866	10.0
3.40	3.4	45970	43928	9.8
3.75	3.9	70748	55575	9.4
3.55	3.9	60022	52611	9.2
3.15	3.9	41933	46683	8.5
2.75	3.9	27901	40755	8.0
3.30	4.1	50686	51414	9.3

4.e. Discussion.

A l'aide des tables IV-2 et IV-3, nous pouvons tenter de déterminer dans quelles conditions apparaissent les oscillations. On remarque que pour certains ΔT (par exemple en dessous de 3 K), on n'a jamais observé d'états oscillants, quelle que soit l'épaisseur h . Pour d'autres différences de température (par exemple pour $\Delta T = 3.4$ K), on constate qu'avec des

faibles épaisseurs de liquide (en dessous de 3.2 mm), la convection est stationnaire. Lorsque h augmente (à partir de 3.4 mm pour $\Delta T = 3.4$ K), les oscillations apparaissent, et la période croît avec l'épaisseur de liquide. Cependant, pour des couches de fluide encore plus épaisses, nous avons remarqué qu'on retourne à un régime stationnaire (pour $h = 5.2$ et 5.85 mm). Nous avons porté en graphique l'ensemble des mesures des tables IV-2 et IV-3 dans le plan $Ra-Ma$, en distinguant les cas stationnaires des cas oscillants (voir figure IV-32). Ce graphique suggère l'existence d'une courbe critique de séparation entre les deux types de comportement : stationnaire ou périodique. Cette courbe (le long de laquelle le rapport d'aspect est malheureusement variable) indique que lorsque la thermogravitation n'agit pas ($Ra = 0$), il existe un nombre de Marangoni critique Ma^{crit} (≈ 25000) à partir duquel on devrait observer des oscillations. On remarque également que l'effet de la gravité est stabilisant : lorsque Ra augmente, Ma^{crit} devient plus élevé.

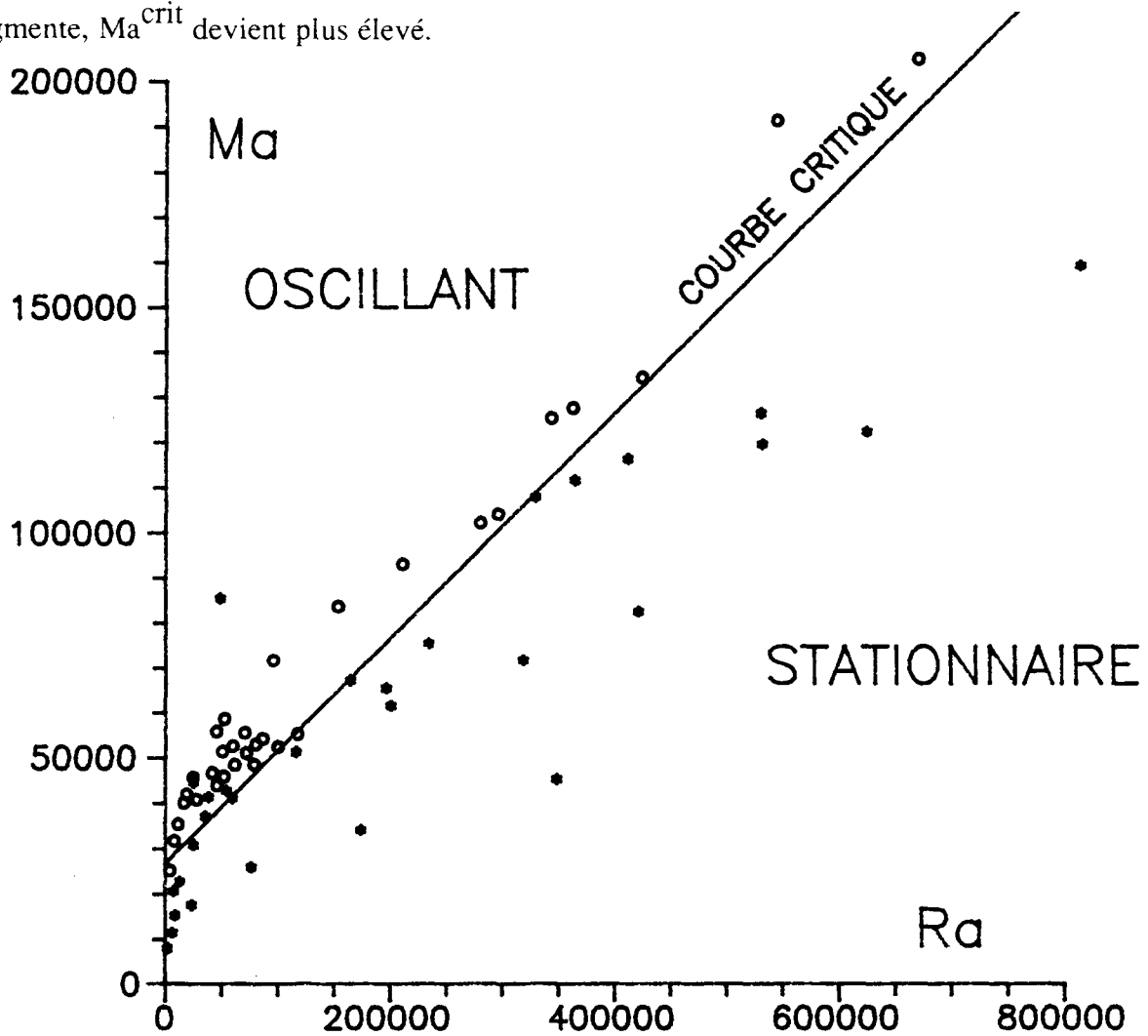


Figure IV-32.

Convection stationnaire et oscillante dans l'acétone.
Existence d'une courbe critique dans le plan $Ra-Ma$.
(* : cas stationnaires; o : cas oscillants).

On peut également examiner la manière dont varie la période en fonction de h et ΔT , ou de Ra et Ma . Nous remarquons empiriquement que cette période ne dépend pas beaucoup de ΔT , mais varie plus fortement avec l'épaisseur de liquide. Par exemple, avec une épaisseur de 1.35 mm et $\Delta T = 4.9$ K, on mesure une période de 4.7 s, tandis que pour une épaisseur différente $h = 5.6$ mm et le même ΔT , la période vaut 13.7 s. Pour cette même épaisseur, la période mesurée est 13.6 s pour $\Delta T = 9$ K et 13.7 s pour $\Delta T = 6$ K. La figure IV-33 donne la période rendue non-dimensionnelle (par l'échelle de temps h^2/ν) en fonction du rapport Ma/Ra , indépendant de ΔT . Ce graphique suggère qu'il pourrait y avoir une relation entre les deux variables. Evidemment on pourrait critiquer le choix de l'échelle de temps h^2/ν . Celle-ci a été prise en conformité avec le système de réduction utilisé dans les simulations numériques. On pourrait choisir une autre échelle de temps où $\partial\sigma/\partial T$ intervient. Il apparaît que la combinaison $-\rho \nu h/(\Delta T \partial\sigma/\partial T)$ possède effectivement la dimension d'un temps. Un ordre de grandeur de ce temps caractéristique pour $h = 5$ mm et $\Delta T = 5$ K est 2.5 millisecondes, qui n'a rien à voir avec l'ordre de grandeur des périodes mesurées. Par contre, h^2/ν pour $h = 5$ mm et $\Delta T = 5$ K est de l'ordre de 60 s, soit typiquement cinq fois la valeur observée.

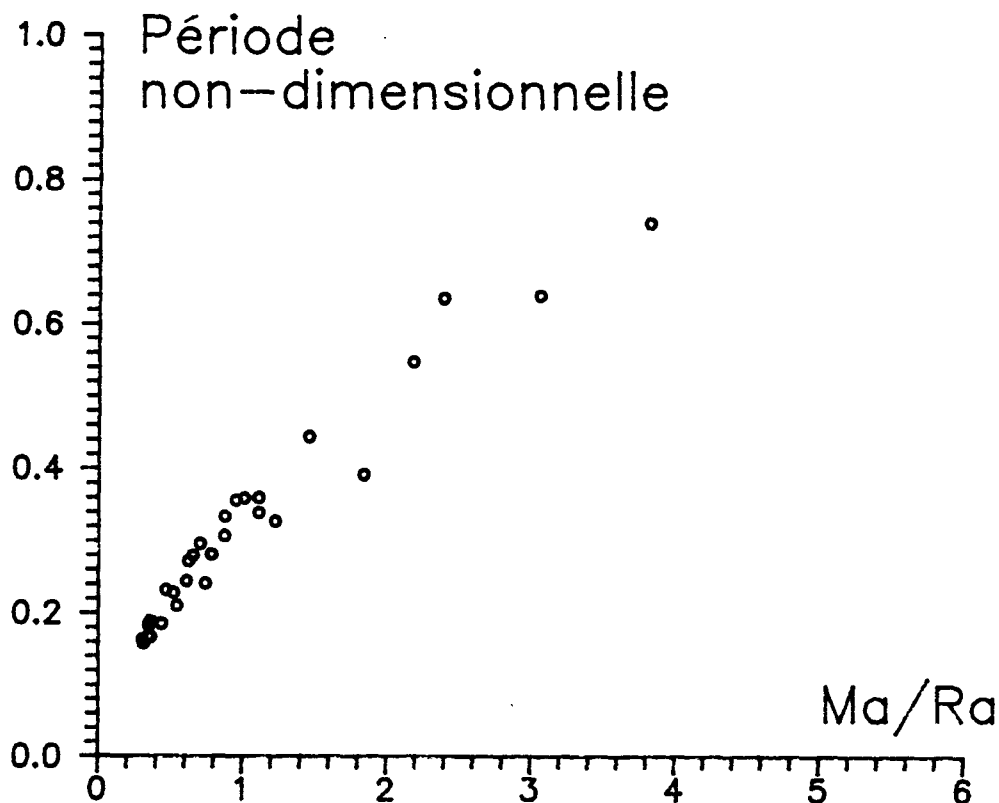


Figure IV-33.

Période adimensionnelle en fonction du rapport Ma/Ra
pour la convection oscillante dans l'acétone.

Cette étude expérimentale des oscillations dans l'acétone, dues conjointement à la thermocapillarité et à la thermogravitation, nous donne des ordres de grandeur des paramètres critiques : $Ma^{crit}(Ra)$, et des périodes observées. Il est souhaitable maintenant d'établir des comparaisons avec des études théoriques. Il n'existe malheureusement pas à ce jour d'étude de stabilité de la convection thermocapillaire couplée à la convection thermogravitationnelle dans des cavités d'extension finie ni même infinie. La seule étude existante concerne la thermocapillarité seule agissant dans une couche de fluide d'extension horizontale infinie (Smith et Davis [1]). Comme nous n'avons pas l'intention d'entreprendre une étude de stabilité, même linéaire, dans une cavité de dimension infinie, nous avons tenté d'effectuer une étude des oscillations au moyen de notre modèle numérique.

5. Validation du code numérique dans le cas de la convection oscillante.

L'étude numérique de la convection oscillante et de son seuil pour des cavités rectangulaires contenant des liquides à faible nombre de Prandtl, et soumises à l'action de la gravité, a fait l'objet d'une conférence internationale (GAMM-Workshop "Numerical simulation of oscillatory convection in low Pr fluids"), avec comme objectif la comparaison de méthodes numériques et l'établissement d'un "benchmark". C'était pour nous l'occasion de valider notre code dans une situation de convection oscillante.

La situation investiguée est décrite à la figure IV-34; elle trouve son origine dans des problèmes de croissance cristalline (Hurle *et al.* [3]). Un fluide à très bas nombre de Prandtl, voire zéro, contenu dans une cavité rectangulaire de rapport d'aspect 4, est soumis à un gradient horizontal de température, la limite supérieure du fluide étant libre. Les limites inférieure et supérieure sont considérées comme conductrices. On demandait de solutionner le problème pour $Pr=0.015$ et $Pr=0$, à des nombres de Rayleigh 600 (situation stationnaire), 900 (proche du seuil des oscillations) et 1200 (régime franchement oscillant).

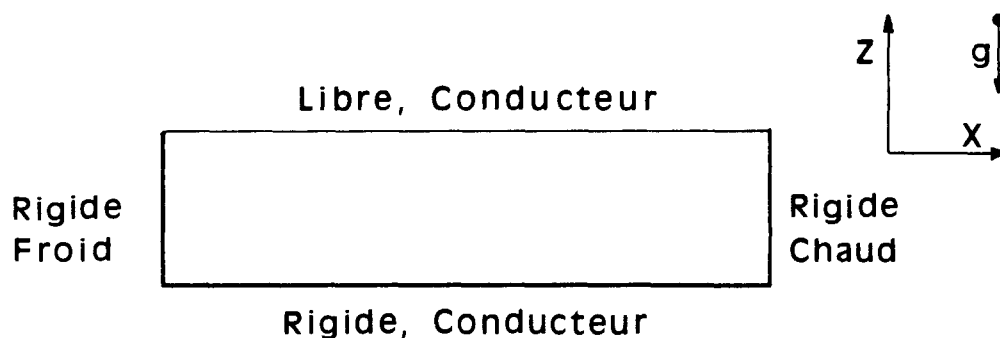


Figure IV-34.

Schéma du problème de la convection oscillante
dans un liquide à faible nombre de Prandtl.

Nos résultats, présentés à la conférence, sont en accord avec les résultats obtenus par tous les autres groupes scientifiques [4]. La figure IV-35 donne un exemple de convection oscillante étudiée à cette occasion ($Ra=1200$, $Pr=0.015$); la fréquence non-dimensionnelle vaut 17.2.

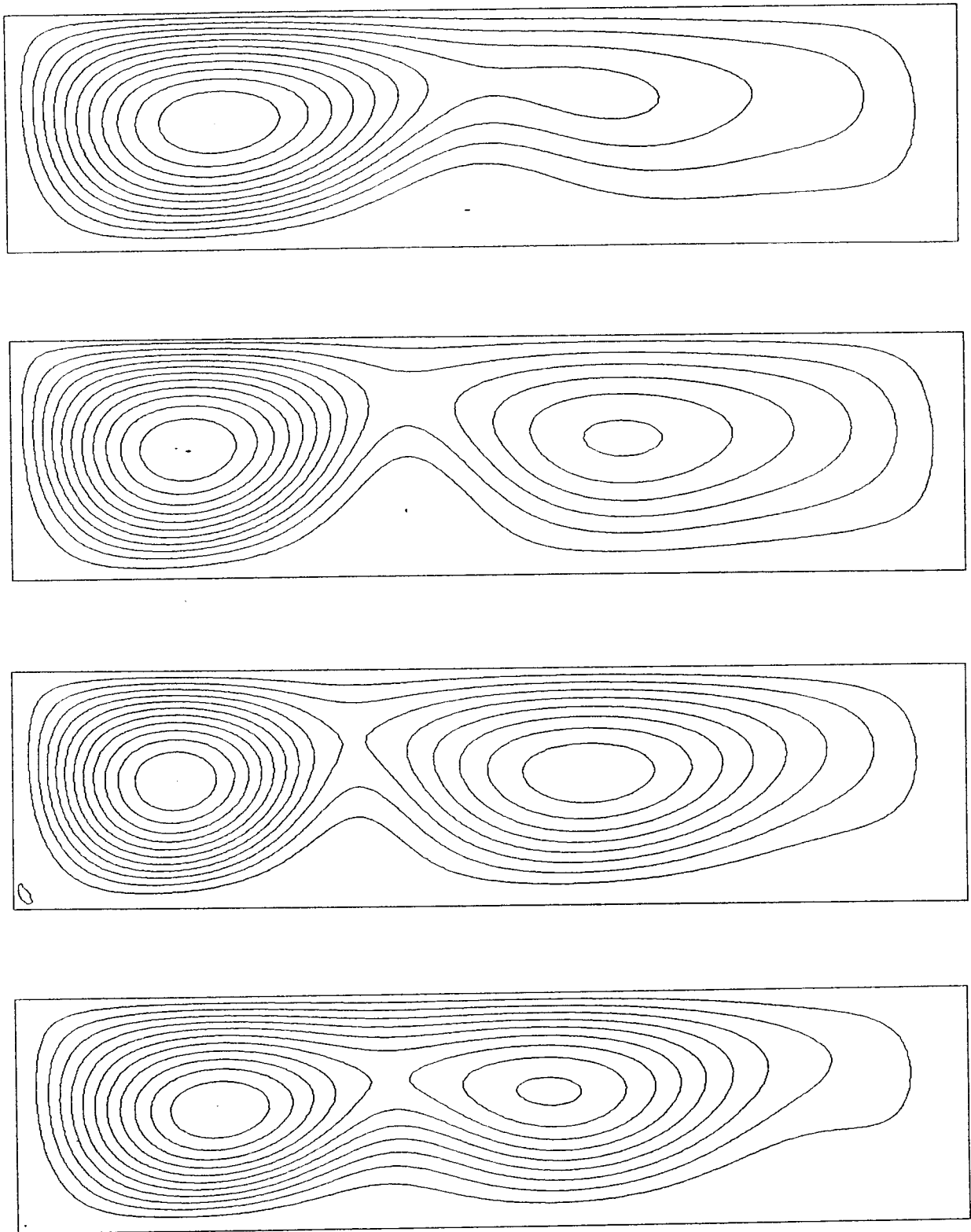


Figure IV-35.

Lignes de courant à 4 instants d'une période pour

 $Pr = 0.015$, $Ra = 1200$, $Ma = 0$.

Les valeurs des paramètres critiques (le nombre de Rayleigh critique et une fréquence nondimensionnelle critique) sont bien connues pour $Pr=0.015$, un rapport d'aspect $A=4$ et des limites inférieure et supérieure conductrices. Winters [5] indique par exemple (en convertissant dans nos notations) $Ra^{crit} = 886$, avec une période critique $\Pi^{crit} = 0.0780$. Connaissant ces valeurs, il était relativement facile de décrire l'influence de la thermocapillarité sur le seuil de transition vers les états oscillants (Villers *et al.* [6]). Nous nous sommes volontairement limités à considérer des valeurs du nombre de Marangoni correspondant à des situations expérimentales possibles, puisque l'intérêt d'une telle étude numérique réside dans une meilleure compréhension de la convection oscillante se produisant lors d'expériences de croissances cristallines de métaux ou semiconducteurs ($-(\partial\sigma/\partial T)/\rho\kappa\nu$ est souvent dans la gamme $10-100 \text{ K}^{-1} \text{ cm}^{-1}$). Les valeurs choisies pour Ma étaient $-20, 0, 20, 40, 100$ et 200 . Le seuil d'apparition des oscillations a été déterminé en intégrant numériquement durant des temps limités, et en observant si les oscillations s'amortissaient au cours du temps ou au contraire si elles se mettaient à croître. De cette manière, on a pu obtenir des valeurs approchées des paramètres critiques (reprises à la table IV-4).

Table IV-4.

Valeurs approximatives des paramètres critiques.

 $Pr = 0.015, A = 4$, effet de la thermocapillarité.

Ma	Ra^{crit}	Π^{crit}	$ \Psi_{max} ^{crit}$
-20	700	0.0968	55.6
0	825	0.0824	70.6
20	1050	0.0636	89.0
40	1250	0.0518	106.0
100	1900	0.0372	143.0
200	2700	0.0280	185.0

Les résultats présentés à la figure IV-36 montrent que les forces thermocapillaires stabilisent fortement l'écoulement stationnaire, puisque le nombre de Rayleigh critique pour l'apparition de la convection oscillante augmente avec le nombre de Marangoni. Ce résultat n'est évidemment pas à comparer avec les observations sur l'acétone, car $Pr = 0.015$ et les isothermes sont pratiquement parallèles aux bords latéraux, comme dans l'état conductif. C'est la suite d'un exercice numérique demandé à la communauté scientifique pour valider des méthodes numériques. Notre participation à ce travail nous donne entière confiance dans notre code à propos de son usage pour étudier des états convectifs oscillants.

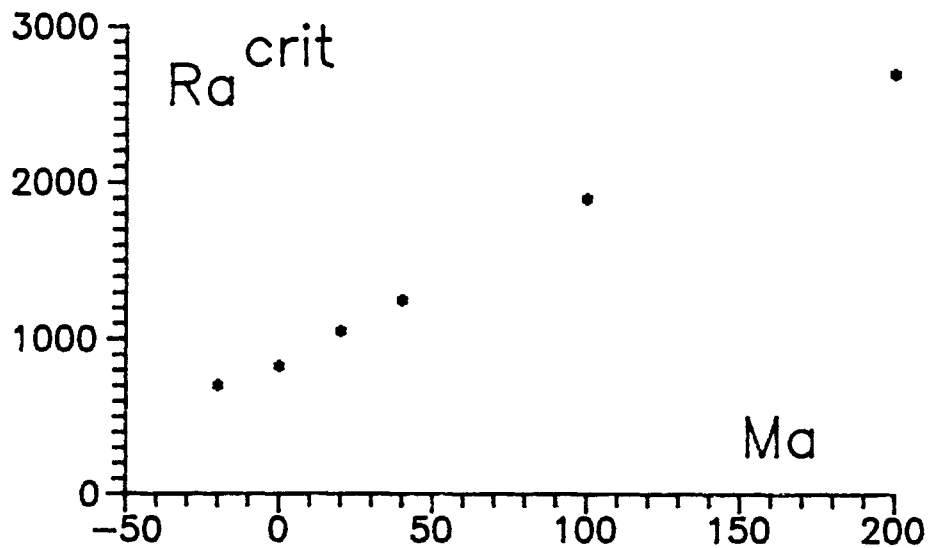


Figure IV-36.

Courbe de stabilité pour la limite de la convection oscillante

à $Pr = 0.015$: Ra^{crit} en fonction de Ma .

La figure IV-37 montre que les périodes critiques correspondantes décroissent en fonction de Ma . Le maximum de la fonction de courant au seuil de la convection oscillante augmente avec Ma , comme en témoigne la figure IV-38, démontrant que l'écoulement reste stationnaire avec des vitesses néanmoins beaucoup plus grandes, grâce à l'effet thermocapillaire.

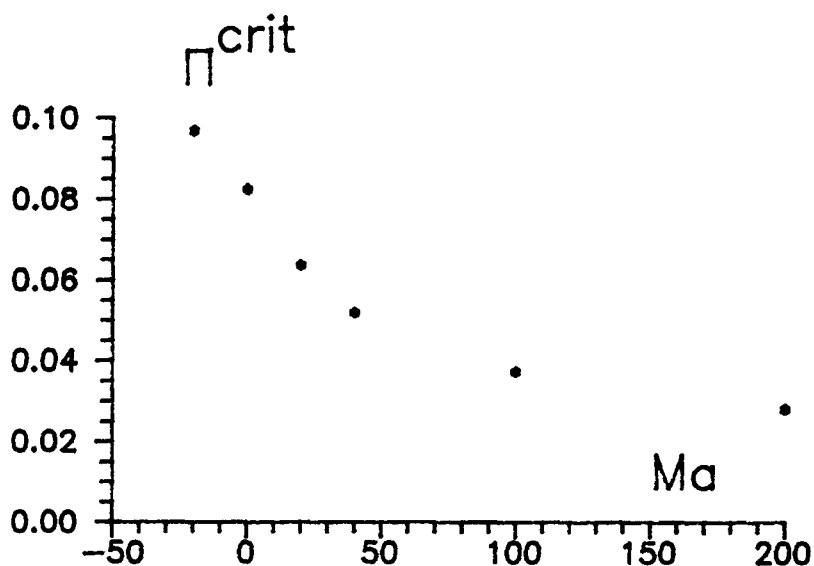


Figure IV-37.

Périodes critiques fonctions de Ma .

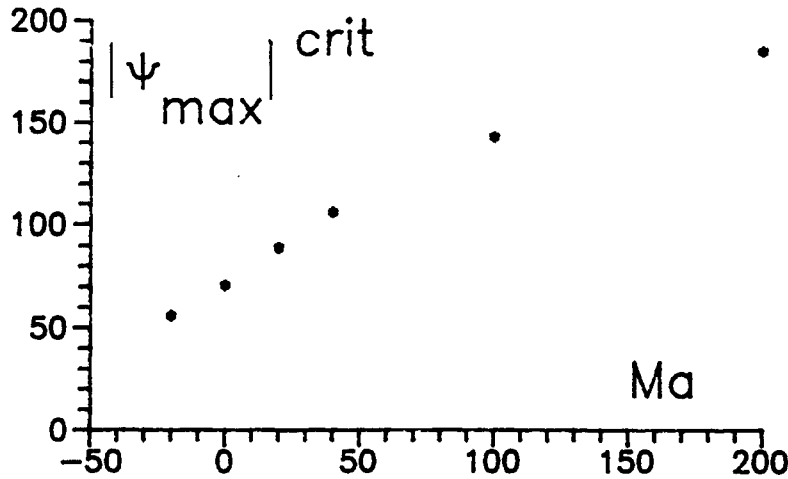


Figure IV-38.

$|\Psi_{\max}|^{\text{crit}}$ fonction de Ma.

Nous nous sommes également intéressés à décrire quelques caractéristiques d'états oscillants supercritiques pour $Ma = 40$ et $Ma = 200$. Dans les deux cas considérés, nous avons arbitrairement imposé pour Ra une valeur approximativement 30–40 % au delà de la valeur critique. Pour $Ma = 200$, le Ra^{crit} est environ 2700 et la figure IV-39 montre l'évolution de l'écoulement à quatre instants durant une oscillation à $Ra = 3600$. Le motif convectif, par rapport aux deux cellules observées lorsque $Ma = 0$, présente une troisième cellule près du bord chaud. Cette troisième cellule (qui existe déjà au seuil critique) oscille en amplitude et forme parfois une seule longue cellule avec la cellule centrale. L'amplitude de la cellule convective à proximité du bord froid demeure presque inchangée (moins de 5%) durant les oscillations. Ce motif convectif ressemble aux résultats obtenus par Crochet *et al.* [7] à des valeurs plus élevées de Ra , mais sans l'effet Marangoni. Pour le cas $Ma = 40$ (le Ra^{crit} vaut approximativement 1250), la figure IV-40 montre l'écoulement à $Ra = 1800$, et on observe que la troisième cellule n'est pas visible. Ce comportement peut être comparé avec ce qui se passe lorsque $Ma = 0$ (figure IV-41): on n'observe pas de changement significatif dans le régime convectif.

Par conséquent, on peut prétendre que l'effet thermocapillaire stabilise l'écoulement à $Pr = 0.015$; pour $Ma = 40$ il ne modifie pas fortement le type de circulation en comparaison avec le cas $Ma = 0$; au contraire, à $Ma = 200$ la convection durant un cycle est complètement différente. Ce résultat est confirmé par les travaux de Ben Hadid *et al.* [8].

Ce paragraphe a surtout permis de montrer que notre code numérique est adapté pour décrire des situations de convection oscillante, même si les calculs qui précèdent ont été effectués avec $Pr = 0.015$. Il n'y a aucune raison que le programme ne fonctionne pas correctement pour $Pr = 4$. On sait simplement que les calculs numériques seront plus longs, parce que l'ordre de grandeur de Pr est complètement différent.

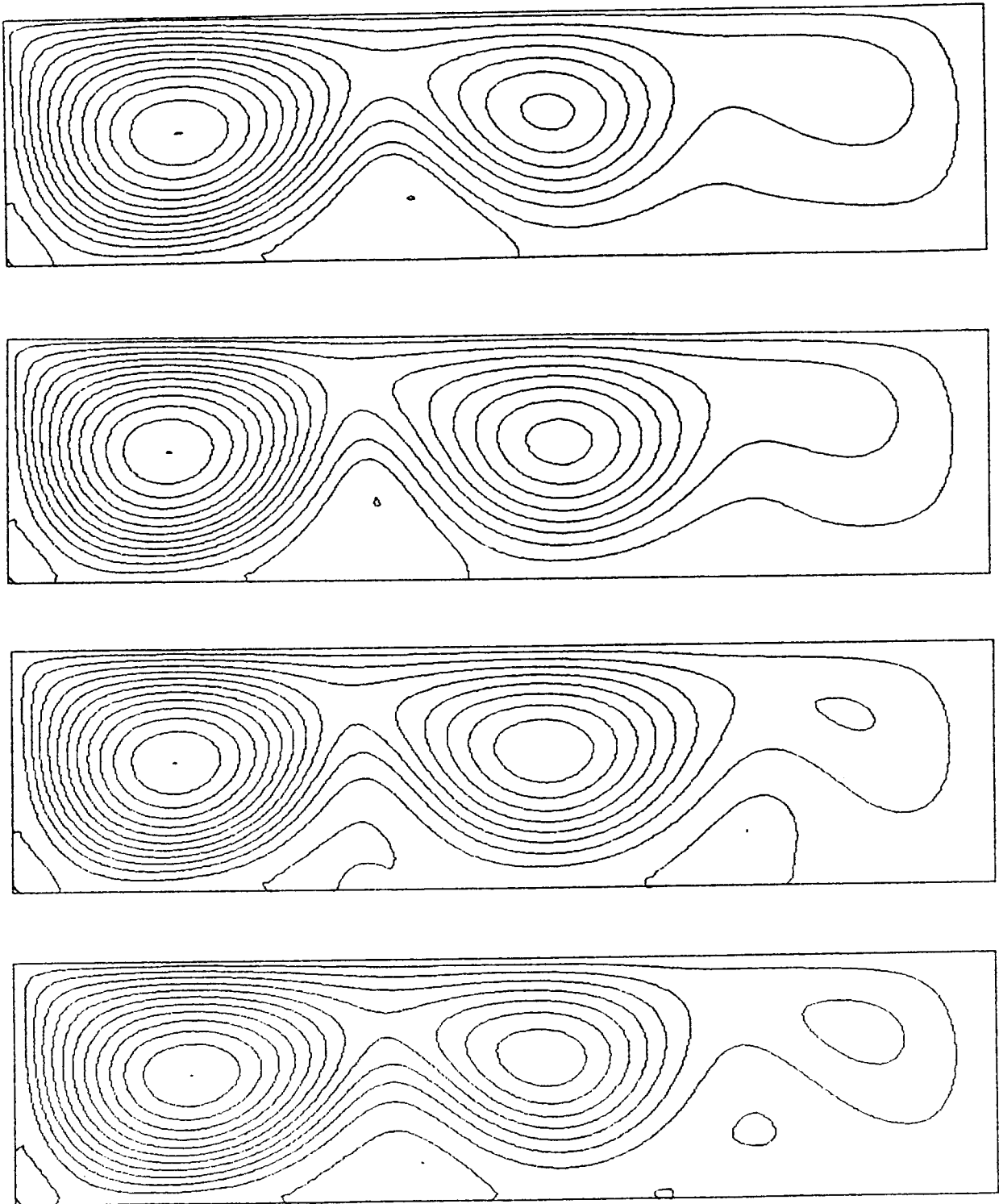


Figure IV-39

Lignes de courant aux instants $n\Pi/4$ ($n = 0,1,2,3$) durant une période Π de la convection oscillante pour $Ra = 3600$, $Ma = 200$, $A = 4$ and $Pr = 0.015$ ($\Pi = 0.024$); les quatre valeurs successives de $|\Psi_{\max}|^{\text{crit}}$ sont : 218., 209., 208. et 218.

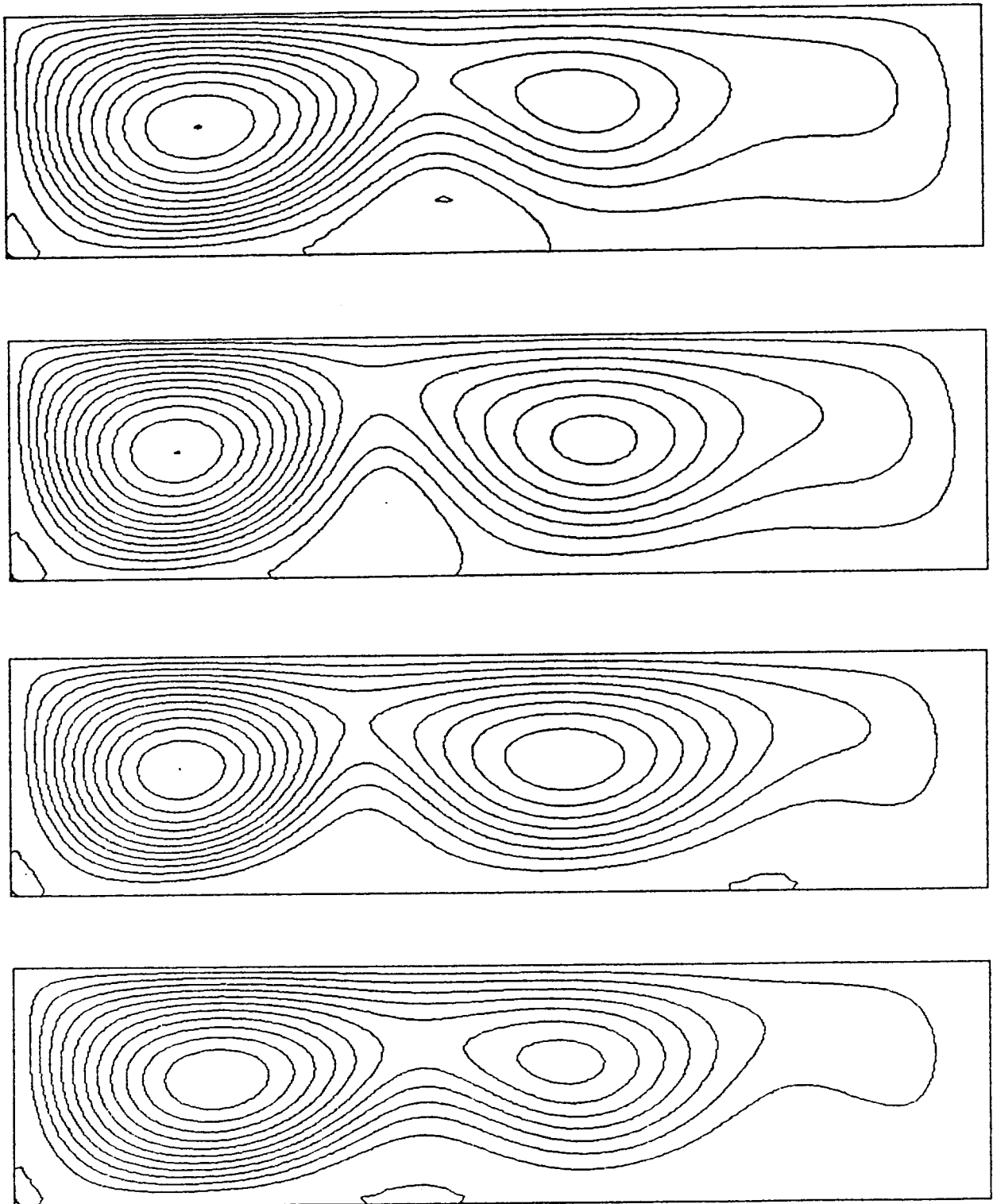


Figure IV-40

Lignes de courant aux instants $n\Pi/4$ ($n = 0,1,2,3$) durant une période Π de la convection oscillante pour $Ra = 1800$, $Ma = 40$, $A = 4$ and $Pr = 0.015$ ($\Pi = 0.043$); les quatre valeurs successives de $|\Psi_{\max}|^{\text{crit}}$ sont : 134., 126., 121. et 130.

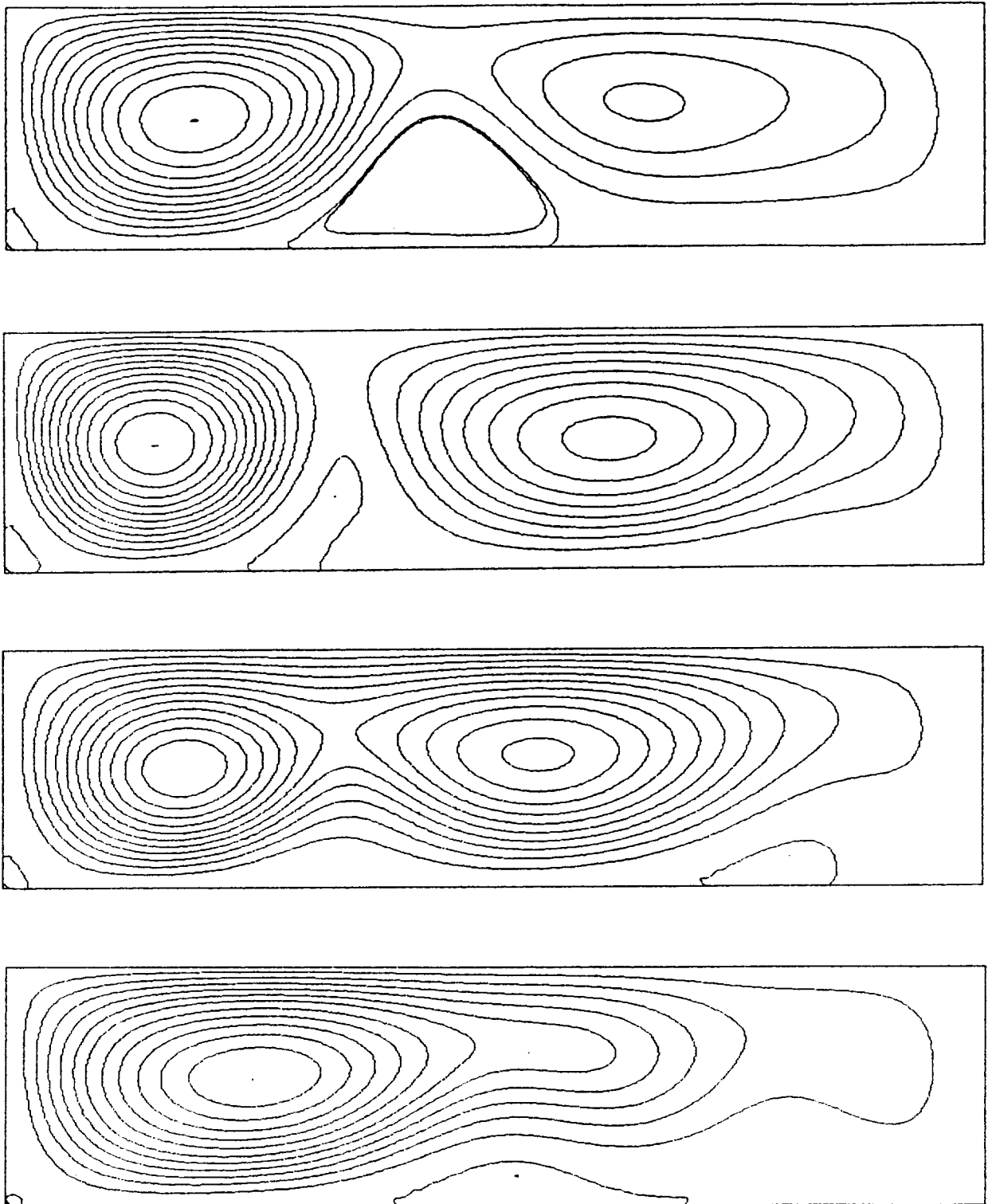


Figure IV-41

Lignes de courant aux instants $n\Pi/4$ ($n = 0,1,2,3$) durant une période Π de la convection oscillante pour $Ra = 1800$, $Ma = 0$, $A = 4$ and $Pr = 0.015$ ($\Pi = 0.024$); les quatre valeurs successives de $|\Psi_{\max}|^{\text{crit}}$ sont : 124., 108., 105. et 123.

6. Simulations numériques de la convection oscillante dans l'acétone.

Contrairement aux liquides à petits nombres de Prandtl, on ne connaît pas, à $Pr = 4$, le seuil de la convection oscillante dans une cavité rectangulaire. Nous n'avons pas tenté de déterminer précisément cette transition. Nous avons cependant effectué des simulations numériques d'une cavité de rapport d'aspect $A = 9$, avec quelques couples $Ma - Ra$ (voir la table IV-5) pour lesquels on observe des oscillations. On observe que cette convection oscillante existe pour des nombres de l'ordre de 15000, alors que d'après les expériences on s'attendrait plutôt à 25000 par exemple. Les valeurs indiquées des périodes montrent que celles-ci dépendent peu de Ra ou Ma , mais varient plutôt en fonction du rapport Ma/Ra ou $1/h^2$, ce qui est conforme aux constatations expérimentales. En particulier, les périodes non-dimensionnelles sont en bon accord avec les résultats présentés à la figure IV-33, en ce qui concerne les deux seuls rapports Ma/Ra étudiés. Par contre, la valeur maximale de la fonction de courant dépend évidemment de Ra et Ma . Pour la simulation pratiquée avec $Ra = 20000$ et $Ma = 20000$, les lignes de courant à plusieurs instants d'une période sont données à la figure IV-42. On y observe une première phase rapide (de $t = 0 - 12/42 \Pi$) d'émission de lignes de courant en provenance de la cellule principale (située du côté chaud) et en direction du côté froid; ensuite, la convection semble se stabiliser (à $t \simeq 23/42 \Pi$) en trois vortex d'intensité décroissant du chaud vers le froid; cette convection bien régulière se déstabilise rapidement : les deux vortex du côté froid se déstructurent et se ralentissent au profit du vortex principal du côté chaud, dont la taille devient minimale, mais dont les vitesses sont maximales (à $t \simeq 40/42 \Pi$). La figure IV-43 donne l'évolution au cours d'une période de quelques grandeurs caractéristiques telles que Ψ_{\max} , le nombre de Nusselt, l'énergie cinétique totale et V_X au milieu de la surface. Leur comportement est loin d'être sinusoïdal, ce qui montre que nous sommes en plein comportement non linéaire.

Table IV-5.

Ra	Ma	Ma/Ra	Π	Ψ_{\max}
10000	10000	1	Stationnaire	
15000	15000	1	0.34	8.37
20000	20000	1	0.33	11.69
30000	30000	1	0.34	17.36
40000	30000	0.75	0.24	

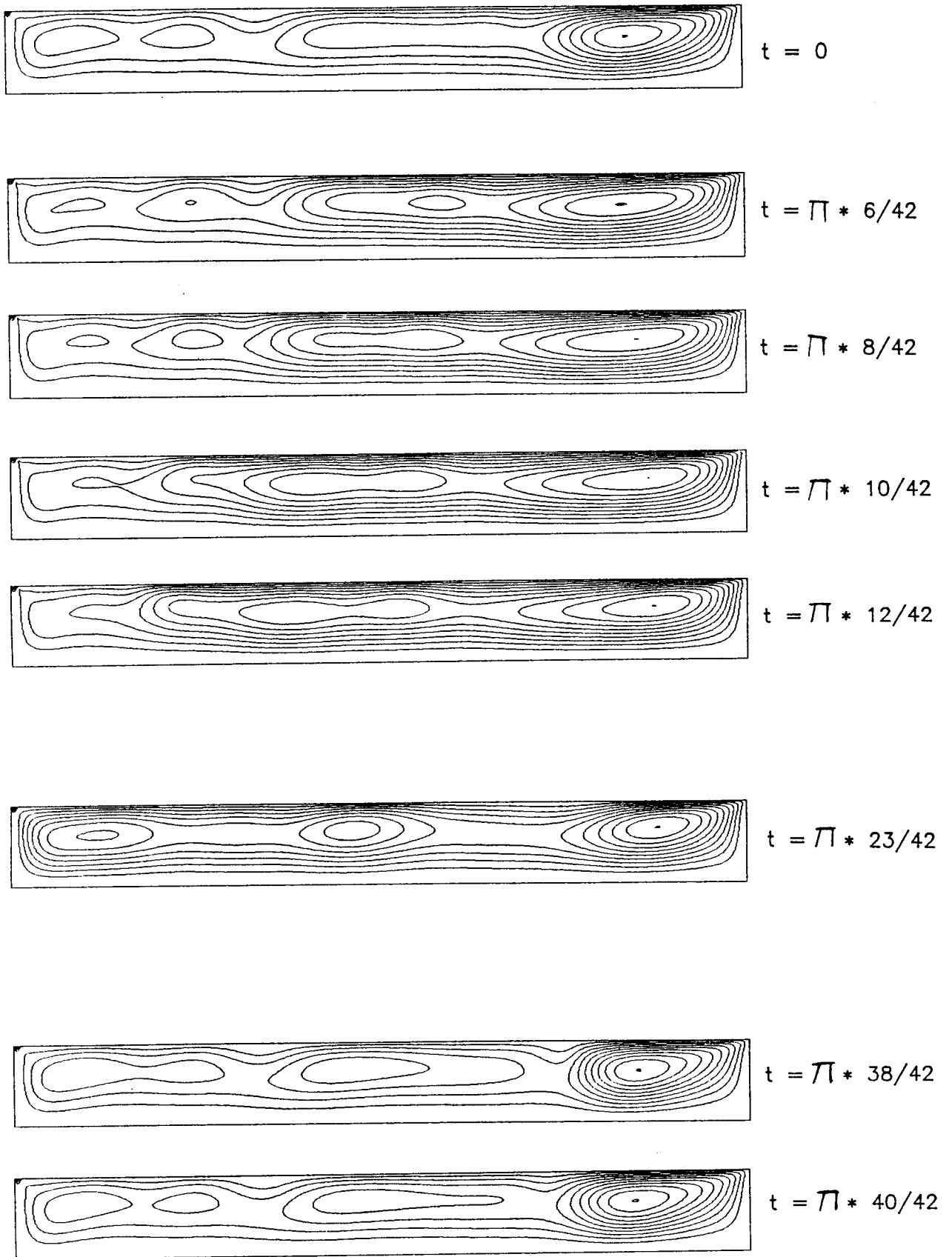


Figure IV-42.

Convection oscillante à $Ra = 20000$ et $Ma = 20000$.
Lignes de courant à quelques instants d'une période.

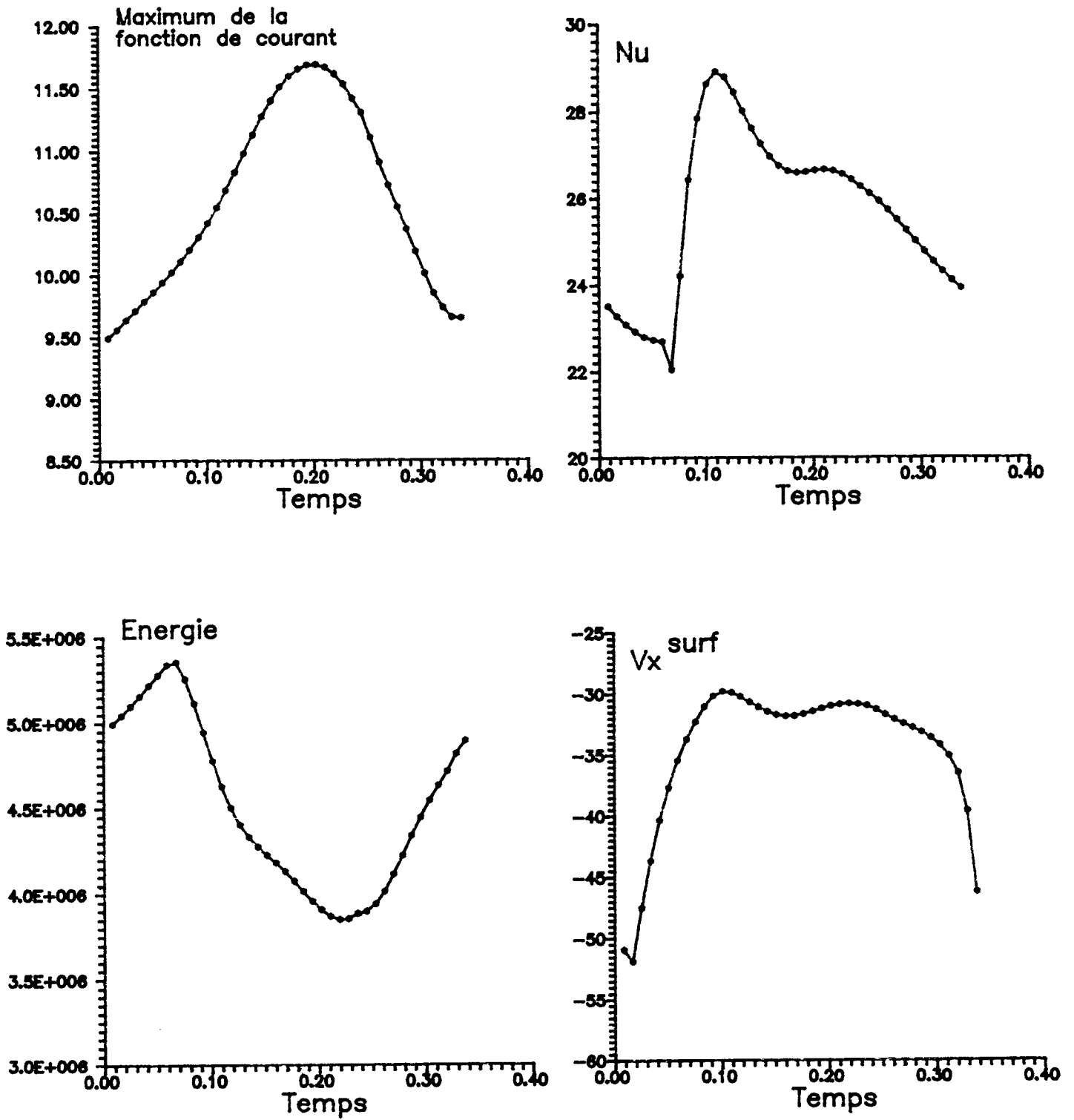


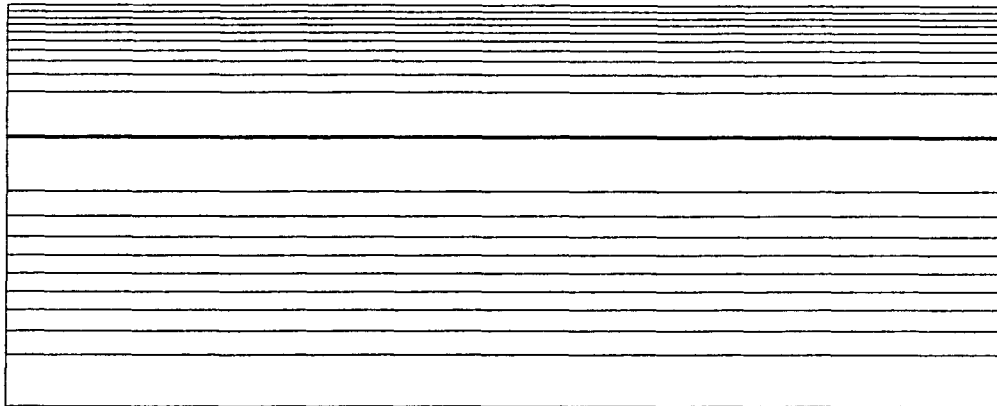
Figure IV-43.

Evolution au cours d'une période de Ψ_{\max} ,
 du nombre de Nusselt, de l'énergie cinétique totale
 et de V_x au milieu de la surface.

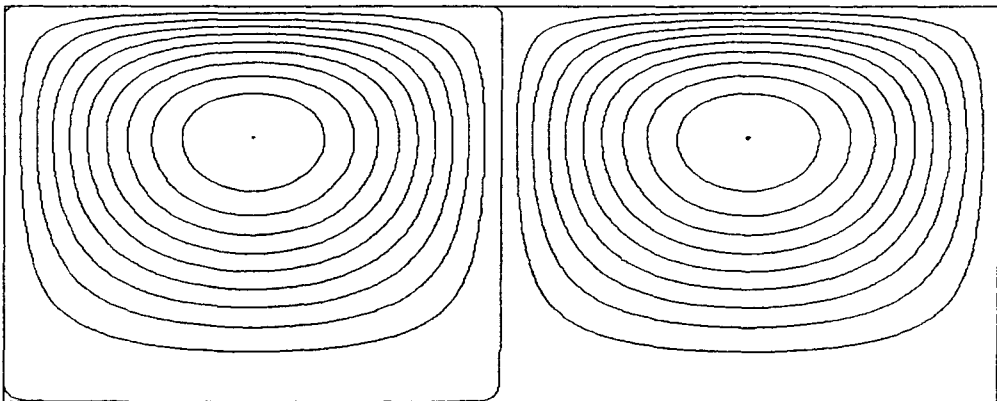
7. Discussion.

Tant du point de vue expérimental que numérique, nous avons observé des transitions successives entre des états stationnaires monocellulaires, des états stationnaires multicellulaires et enfin des états périodiques à structure spatio-temporelle, au fur et à mesure que les nombres sans dimension Ra et Ma augmentent. Nous avons constaté un accord quantitatif entre les résultats expérimentaux et numériques, pour ce qui concerne les états stationnaires. Pour les états oscillants, nous n'avons pas effectué de simulations d'oscillations dans les conditions d'une expérience, à cause d'exigences numériques : pas temporels petits, maillages réduits, temps d'intégration très longs. L'accord que nous obtenons porte seulement sur les périodes adimensionnelles en fonction de Ma/Ra et sur l'observation d'une caractéristique commune entre expérience et simulation : les oscillations n'ont pas la forme d'ondes propagatives (rouleaux convectifs en translation). Il n'y a donc pas création de cellules convectives près d'une paroi et disparition de l'autre. Nous attendions cependant un tel type de comportement spatio-temporel (rouleaux en translation) parce que c'est ce que prédit la théorie de Smith et Davis [1], qui examinent par analyse en modes normaux la stabilité linéaire tridimensionnelle du profil de base créé par la thermocapillarité seule ($Ra = 0$) dans une couche de liquide d'extension horizontale infinie. Parmi leurs résultats, retenons que pour $Pr = 4$, l'instabilité se manifeste au delà de $Ma^{crit} \simeq 550$ (suivant nos notations) pour un motif périodique de longueur d'onde spatiale $\simeq 2.5$ se déplaçant dans la direction des températures croissantes avec une fréquence adimensionnelle de 1.23. La figure IV-44 montre a) un profil de base (l'écoulement parallèle correspondant à l'équation II-35), b) une perturbation d'amplitude faible (10 %) ressemblant à un mode normal satisfaisant les conditions aux bords du problème et qui croît au delà de Ma^{crit} et c) la somme du profil de base et de la perturbation, ce qui donne une idée du type de convection qui devrait être observé au delà du seuil d'apparition de la convection oscillante. Ce motif est spatialement périodique et dans le cas d'ondes propagatives, on s'attend à une translation de ce motif vers les températures plus élevées.

BASE



PERTURBATION



BASE + PERTURBATION

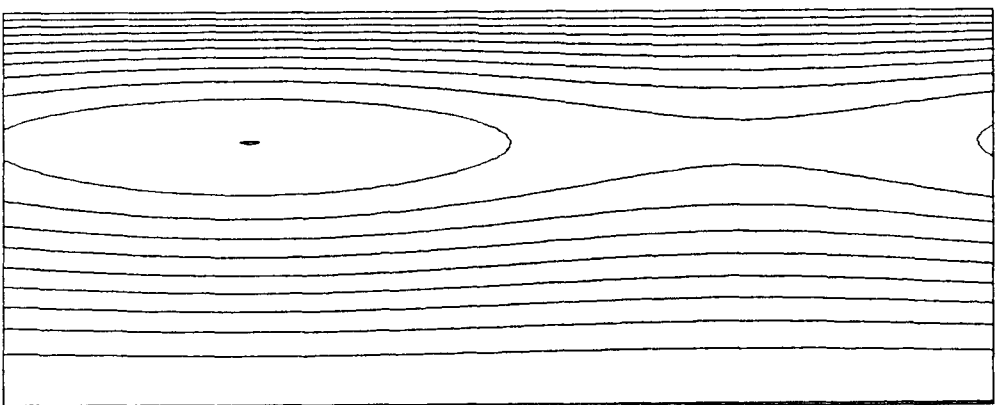


Figure IV-44.

Lignes de courant dans une couche infinie (conditions aux limites périodiques).

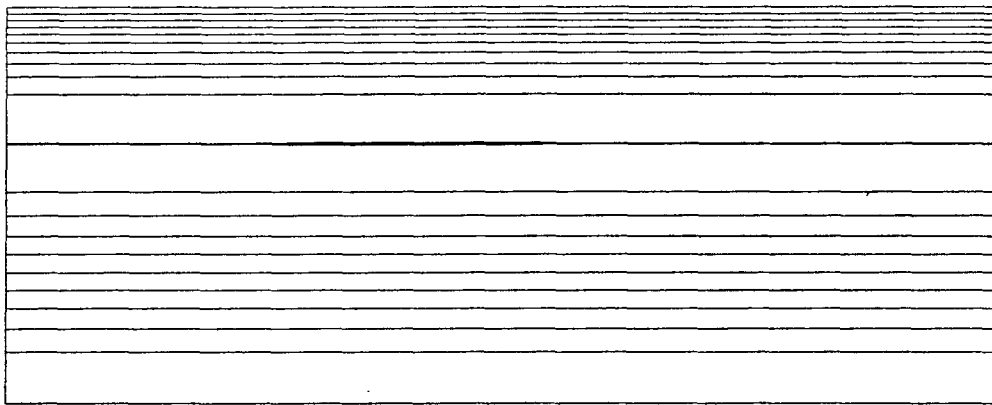
a) Profil de base.

b) Perturbation.

c) profil de base + perturbation.

Cependant, comme nous ne connaissons rien du régime convectif au delà du point critique, nous avons voulu effectuer quelques simulations numériques dans des conditions proches de la théorie de Smith et Davis. Nous avons imposé des conditions périodiques aux bords latéraux, de manière à simuler une couche d'extension infinie. Nous imposons la longueur d'onde spatiale du motif périodique à 2.5. La figure IV-45 montre les résultats d'une simulation à $Pr = 4$ et $Ma = 500$, pour laquelle l'étude théorique prévoit que le profil de base (l'écoulement parallèle) est stable. On observe effectivement que les lignes de courant sont absolument horizontales, avec donc $V_z = 0$ partout.

$Pr=4; Ra=0; Ma=500$



$Pr=4; Ra=0; Ma=500$

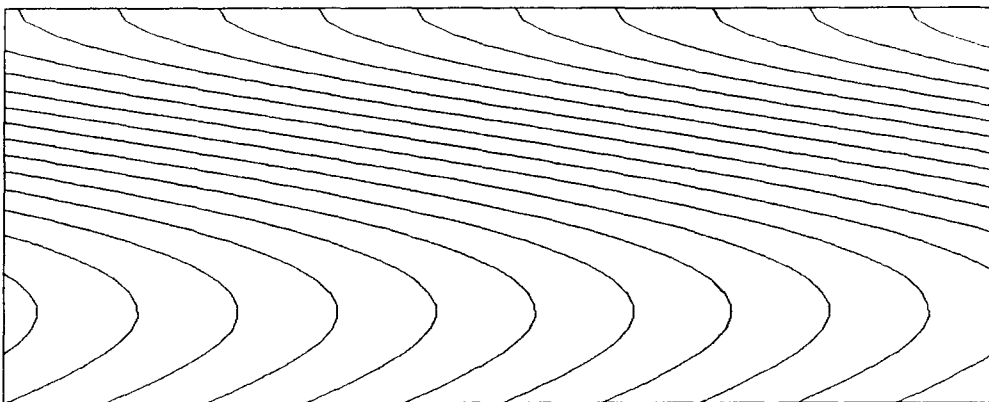


Figure IV-45.

Simulation d'une couche infinie de liquide.

$Ra = 0; Pr = 4; Ma = 500.$

Lignes de courant et isothermes.

Par contre, pour $Ma = 1000$, on observe une instabilité du profil de base, avec l'apparition de rouleaux convectifs se translatant du froid vers le chaud. La figure IV-46 donne les lignes de courant et les isothermes à un instant particulier. La fréquence de déplacement des rouleaux est approximativement de 0.61, alors que la théorie de Smith et Davis prévoit 1.23 au point critique. Cette différence peut être attribuée à l'éloignement assez grand du point critique ($Ma = 1000$ tandis que $Ma^{\text{crit}} \simeq 550$).

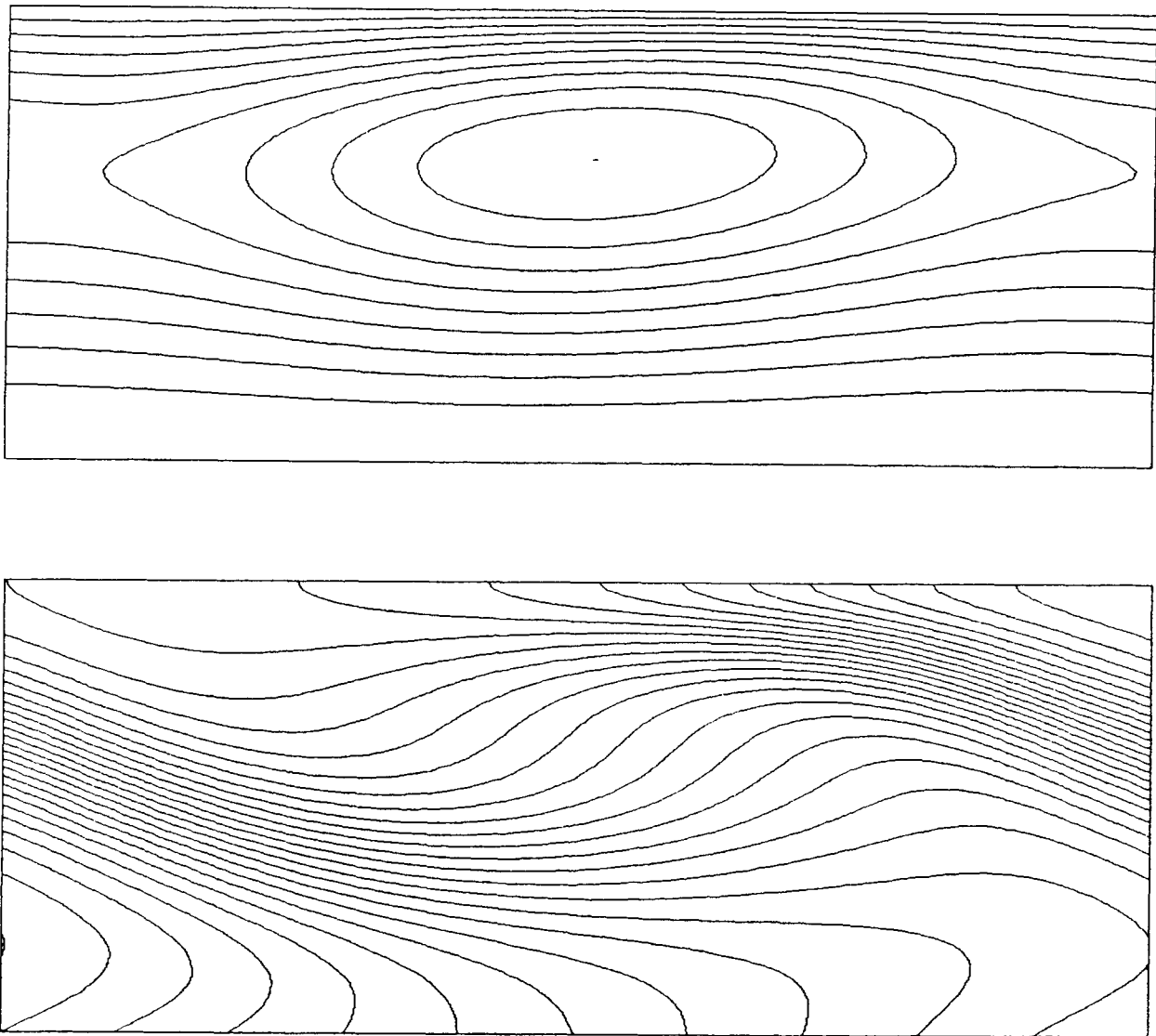


Figure IV-46.

Simulation d'une couche infinie de liquide.

$Ra = 0$; $Pr = 4$; $Ma = 1000$.

Lignes de courant et isothermes à un instant particulier.

Donc, nos simulations numériques sur la convection thermocapillaire dans une couche infinie sont en accord avec la théorie linéaire de stabilité de Smith et Davis. Lorsque l'écoulement parallèle de base devient instable, on observe une structure spatio-temporelle : des rouleaux convectifs se déplacent vers le chaud. Par contre, dans une cavité de dimension finie, tant les expériences que les simulations numériques présentent le même comportement lorsque le nombre de Marangoni augmente : on observe d'abord un régime stationnaire monocellulaire, puis multicellulaire, et enfin un régime périodique, qui n'est pas sous forme de rouleaux en translation. Nous devons en conclure que les théories pour des couches infinies ne peuvent être reliées à des expériences ou simulations dans des cavités de dimensions finies, à cause de l'influence des bords latéraux. On peut supposer que ceux-ci empêchent la translation des cellules convectives, parce que des cellules devraient se créer d'un côté et disparaître de l'autre. Ceci semble du moins le cas pour des rapports d'aspect de l'ordre de 10. On peut se demander si une cavité de beaucoup plus grand rapport d'aspect permet d'observer une structure spatio-temporelle de rouleaux mobiles, ou si la simple présence de bords, même très éloignés rend ce type de comportement périodique impossible.

Développer une nouvelle théorie (de type analytique ou numérique), capable de prédire les instabilités et de rendre compte correctement de la convection oscillante observée expérimentalement, est une tâche que nous n'avons pas encore eu le temps d'aborder. En effet, cette théorie devrait tenir compte de la thermocapillarité et de la thermogravitation, des bords latéraux et de la tridimensionalité de l'écoulement. Mais il serait utile d'introduire séparément chacun des paramètres relatifs à ces effets.

8. Bibliographie.

- [1] Smith, M.K., Davis, S.H. : "Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers. Part 1. Convective instabilities", *Journal of Fluid Mechanics*, 132, pp 119-144 (1983).
- [2] Dudderar, T.D., Simpkins, P.G. : "Laser speckle photography in a fluid medium", *Nature* 270, pp 45-47 (1977).
- [3] Hurle, D.T.J., Jakeman, E., Johnson, C.P. : "Convective temperature oscillations in molten gallium", *Journal of Fluid Mechanics*, 64(2), pp 565-576 (1974).
- [4] Proceedings of the GAMM-Workshop on "Numerical Simulation of Oscillatory Convection in low Pr Fluids", Ed. B. Roux, in "Notes on numerical Fluid Mechanics", Vieweg ed. (1989).
- [5] Winters, K.H. : "Oscillatory convection in liquid metals in a horizontal temperature gradient", soumis à *Int. J. for Num. Meth. in Eng.* (1988).
- [6] Villers, D., Platten, J.K. : "Influence of thermocapillarity on the oscillatory convection in low Pr fluids", in the proceedings of the GAMM-Workshop on "Numerical Simulation of Oscillatory Convection in low Pr Fluids", Ed. B. Roux, in "Notes on numerical Fluid Mechanics", Vieweg ed. (1989).
- [7] Crochet, M.J., Geyling, F.T., Van Schaftingen, J.J. : "Numerical simulation of the horizontal Bridgman growth of a gallium arsenide crystal", *J. Crystal Growth*, 65, pp 166-172 (1983).
- [8] Ben Hadid, H., Roux, B., Laure, P. : "Thermocapillarity effect on stability of Buoyancy-Driven Flows in Shallow cavities", in the "abstracts" of the 7th International Conference on PhysicoChemical Hydrodynamics, MIT, Boston, Juin 1989.

voir aussi

Villers, D., Platten, J.K. : "Oscillatory Marangoni convection in acetone : Earth experiments and theory", *Proceedings of the VIIth European Symposium on Materials and Fluid Sciences in Microgravity*, ESA SP-295 (1989).

Chapitre V.

Convection dans des mélanges où l'effet de thermodiffusion est important.

1. Introduction.

Au chapitre II consacré à la convection dans le système eau–heptanol, nous avons émis l'hypothèse que des transferts massiques à travers la phase gazeuse peuvent induire des inhomogénéités de concentration en surface, par évaporation de l'alcool du côté chaud et sa condensation du côté froid. Comme les gradients de concentration provoquent également des gradients de tension superficielle, la convection capillaire risque donc d'être modifiée. Nous n'avons pas l'intention de modéliser une situation aussi complexe. Cependant, il est intéressant d'investiguer les effets de gradients de concentration en surface. C'est pourquoi, dans ce chapitre, nous nous intéressons spécifiquement à la convection dans des mélanges eau–alcool où l'alcool est soluble en toute proportion, pour lesquels le gradient de concentration résulte de la thermodiffusion. Rappelons que la thermodiffusion est la diffusion dans une direction d'un constituant, dont la cause est un gradient de température (de Groot *et al.* [1]). C'est un phénomène très lent, parce que les temps caractéristiques des processus de diffusion de matière sont grands ($\tau = d^2/\pi^2 D$ où D est le coefficient de diffusion isotherme). En l'absence de mouvement convectif, on obtient à l'état stationnaire une séparation en titre massique :

$$\Delta N = -\frac{D_T}{D} N (1-N) \Delta T \quad (V-1)$$

où N est le titre massique du constituant le plus dense et D_T le coefficient de thermodiffusion. A cause de ce phénomène, une couche fluide binaire soumise à une différence de température horizontale ne reste pas homogène en composition, ni dans le coeur de la couche liquide, ni en surface. Si la thermodiffusion n'est pas à première vue importante dans le système eau–heptanol, parce que la concentration du soluté est très faible ($N(1-N) \approx 0$), il existe des solutions où les alcools sont solubles en toute proportion (par exemple des solutions aqueuses d'éthanol ou d'isopropanol) et dans lesquelles la thermodiffusion provoque une séparation non

négligeable des constituants (Kolodner *et al.* [2], Poty *et al.* [3]). Dès lors, il faut tenir compte de l'effet capillaire solutal. Comme pour de nombreuses solutions aqueuses de liquides organiques, la tension superficielle du système eau-isopropanol dépend fortement de la concentration. La table V-1 donne les mesures de σ que nous avons réalisées, en fonction de $(1-N)$, le titre massique en alcool. Notons que pour ces solutions, la tension superficielle décroît avec la température.

Table V-1.

Tension superficielle de solutions aqueuses d'isopropanol
en fonction du titre massique en alcool : $(1-N)$.

Mesures effectuées par la méthode de Wilhelmy à $\langle T \rangle = 21 \text{ }^\circ\text{C}$.

Titre massique en isopropanol : $1-N$	σ mN m^{-1}
0.	72.69
0.0027	69.08
0.0054	66.68
0.0081	64.27
0.0108	62.31
0.0160	59.28
0.0213	56.54
0.0316	52.76
0.0417	49.75
0.0515	46.96
0.0612	45.08
0.0707	43.73
0.0891	39.14
0.1068	36.91
0.1240	33.54

Ces résultats, portés en graphique à la figure V-1, montrent que la tension superficielle varie très fort avec la concentration en isopropanol pour les solutions les moins concentrées :

$$\left[\frac{\partial \sigma}{\partial (1-N)} \right]_{(1-N) \approx 0} = -1320 \text{ mN m}^{-1}, \quad \left[\frac{\partial \sigma}{\partial (1-N)} \right]_{(1-N) \approx 2\%} = -460 \text{ mN m}^{-1},$$

$$\left[\frac{\partial \sigma}{\partial (1-N)} \right]_{(1-N) \approx 5\%} = -240 \text{ mN m}^{-1}, \quad \left[\frac{\partial \sigma}{\partial (1-N)} \right]_{(1-N) \approx 10\%} = -185 \text{ mN m}^{-1}.$$

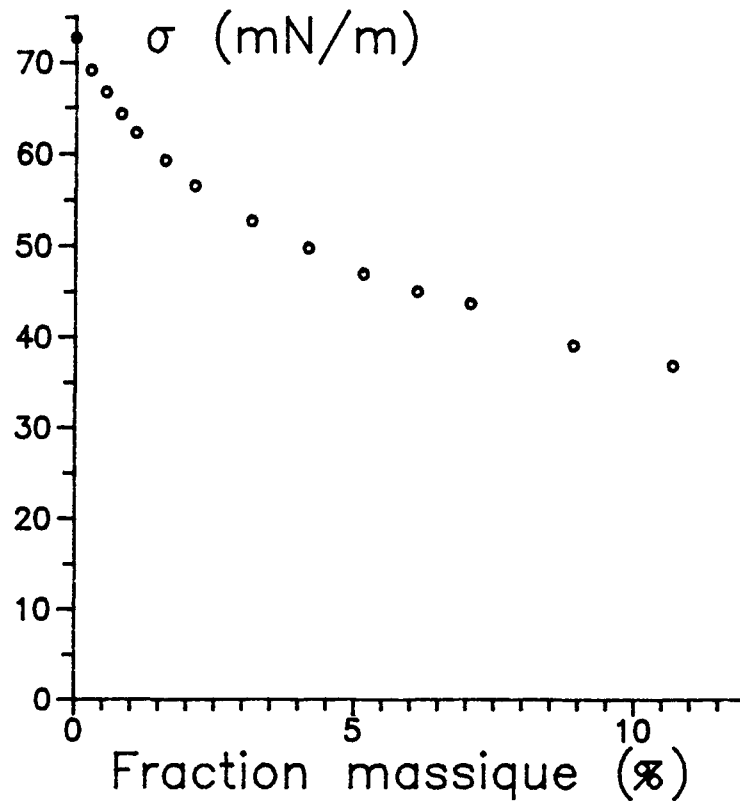


Figure V-1.

Tension superficielle de solutions aqueuses d'isopropanol
en fonction du titre massique en alcool : (1-N).

Mesures effectuées par la méthode de Wilhelmy à $\langle T \rangle = 21$ °C.

Si l'effet de thermodiffusion est tel que l'alcool migre préférentiellement vers le froid ($D_T/D < 0$), cela pourrait contribuer à diminuer σ près du bord froid, et à augmenter σ du côté chaud. Il serait même possible qu'on constate une inversion du gradient de tension superficielle $\partial\sigma/\partial x$ par rapport au gradient existant lorsque la thermodiffusion n'a pas eu le temps d'opérer (pour des temps courts).

Nous montrerons d'abord, grâce à un modèle analytique comparable au modèle présenté au chapitre II.§4., que le profil de vitesse obtenu est influencé par $\partial\sigma/\partial N$. Nous discuterons ensuite des régimes convectifs qui pourraient être observés et qui sont différents de ce que l'on peut observer dans les corps purs (ou les mélanges qui demeurent homogènes en composition).

2. Modèle analytique.

En adoptant les mêmes hypothèses qu'au chapitre II, à savoir $V_z = 0$ et V_x uniquement fonction de z , mais en utilisant l'équation d'état (I-14) qui tient compte du coefficient d'expansion massique β , on obtient l'équation différentielle suivante pour la vitesse, analogue de l'éq. (II-23) :

$$\mu \frac{\partial^3 V_x}{\partial z^3} = \rho_0 g \left[\alpha \frac{\partial T}{\partial x} - \beta \frac{\partial N}{\partial x} \right] \quad (V-2)$$

où N est la fraction massique du constituant le plus dense (l'eau dans le cas d'une solution d'isopropanol). Le gradient horizontal de titre massique, peut être explicité à partir de l'expression du flux du constituant le plus dense dans la direction x :

$$J_x = -\rho_0 D \frac{\partial N}{\partial x} - \rho_0 D_T N (1-N) \frac{\partial T}{\partial x} \quad (V-3)$$

D est le coefficient de diffusion isotherme et D_T est le coefficient de thermodiffusion. Les conditions d'existence d'un état stationnaire imposent que $J_x = 0$. Dès lors, le gradient horizontal de titre sera proportionnel au gradient horizontal de température, lui-même constant. On aura donc

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{D_T}{D} N (1-N) \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right] \quad (V-4)$$

ce qui justifie (V-1).

Les conditions aux bords (II-25) à (II-27) utilisées précédemment restent valables, à l'exception de l'équation de conservation de quantité de mouvement en surface qu'il faut compléter par un terme de dépendance massique :

$$\mu \frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\sigma T}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial N} \frac{\sigma N}{\partial x} \quad \text{en } z = h \quad (V-5)$$

A l'aide de ces conditions, on peut trouver l'expression analytique de $V_x(Z)$, Z étant la coordonnée verticale réduite, définie par (II-28). Cette expression a une forme identique à celle qui était obtenue dans le modèle applicable aux liquides purs :

$$V_x(Z) = U^* \left[\frac{Z^3}{6} - \frac{(1-3k)}{8} Z^2 - \frac{(1-k)}{4} Z + \frac{(1-3k)}{24} \right] \quad (V-6)$$

Les seules différences sont dans les définitions de U^* et k .

$$U^* = \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right] \frac{g (h/2)^3 \left[\alpha + \beta \frac{D_T}{D} N (1-N) \right]}{\nu} \quad (V-7)$$

$$k = \frac{\left[\frac{\partial \sigma}{\partial T} - \frac{D_T}{D} N (1-N) \frac{\partial \sigma}{\partial N} \right]}{\rho_m g (h/2)^2 \left[\alpha + \beta \frac{D_T}{D} N (1-N) \right]} \quad (V-8)$$

3. Discussion.

Remarquons qu'en absence de thermodiffusion ($D_T = 0$), on retrouve évidemment bien les expressions de U^* et k définies au chapitre II. Même lorsque la thermodiffusion agit, le gradient de température $\partial T/\partial x$ n'intervient toujours pas dans l'expression de k . Il ne fera donc que modifier l'amplitude du profil de vitesse, mais n'influencera pas sa forme. L'étude du profil (V-6) est équivalente à l'étude du profil (II-29) (voir chapitre II).

On constate maintenant qu'il y a de nouvelles possibilités de modifier le paramètre k en valeur et en signe. Auparavant, α étant supposé positif, seuls des $\partial\sigma/\partial T$ positifs permettaient d'obtenir un k positif; c'est d'ailleurs ce qui caractérisait les expériences réalisées dans des solutions aqueuses d'heptanol. Dans les mélanges, β est positif, mais ni le signe de D_T/D , ni celui de $\partial\sigma/\partial N$ ne sont prescrits. Dans le système eau-isopropanol, le coefficient de thermodiffusion change même de signe avec la concentration. D_T/D est négatif pour des concentrations en isopropanol inférieures à $\approx 25\%$. Pour un mélange comportant 90% en poids d'eau ($N = 0.9$), on a $D_T/D \approx -1.2 \cdot 10^{-2} \text{ K}^{-1}$ et $\partial\sigma/\partial N$ est de l'ordre de 200 mN m^{-1} (voir table V-1 et figure V-1). On trouve donc que $-D_T/D N(1-N) \partial\sigma/\partial N$ est de l'ordre de $+0.2 \text{ mN m}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Comme dans une solution aqueuse d'alcool on a certainement $\partial\sigma/\partial T$ compris entre -0.15 et $-0.1 \text{ mN m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, on voit bien que l'effet de la thermodiffusion peut surpasser l'effet thermique et permet un changement de signe de k .

En conclusion de cet exemple, lorsque la tension superficielle diminue avec la température (cas général) on pourrait croire que la tension superficielle est toujours la plus faible près du bord chaud. Mais le mélange ne reste pas homogène en composition et lorsque le coefficient de thermodiffusion est négatif, cela signifie que le constituant le plus dense (dans notre exemple l'eau) migre vers le bord chaud et donc y augmente la tension superficielle, tandis que l'alcool migrant vers le bord froid y diminue la tension superficielle. Cet effet de thermodiffusion risque de dominer, impliquant une inversion dans le gradient de tension superficielle, avec par conséquent des mouvements en surface dirigés du bord froid vers le bord chaud. Cette prévision théorique est très intéressante et nous avons voulu la vérifier par quelques expériences exploratoires dans des solutions eau-isopropanol.

4. Expériences exploratoires.

Ces expériences ont été effectuées dans des cavités en verre de longueur $l = 40$ mm. Notons que le temps caractéristique lié à la thermodiffusion est $l^2/\pi^2 D$ et vaut donc de l'ordre du jour. Evidemment nous avons vérifié la convection de Marangoni dans l'isopropanol pur (profil $V_x(z)$ de la figure V-2). Tous les autres profils ont été obtenus sans modifier les températures de thermostatisation.

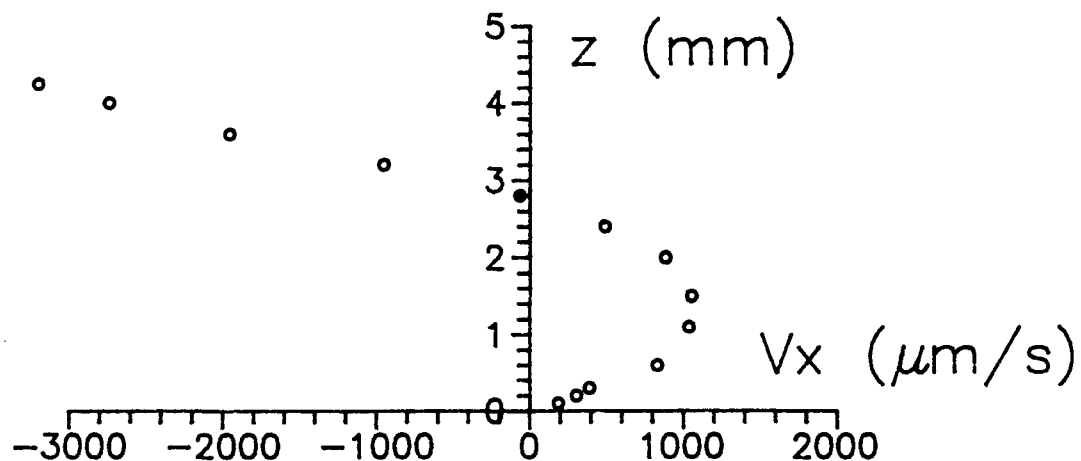


Figure V-2.

Profil $V_x(z)$ sur la médiane verticale dans une couche de 4.25 mm d'isopropanol pur.

Le premier profil mesuré dans une solution concerne un mélange de 25 % en poids d'isopropanol ($N = 0.75$); l'épaisseur de fluide est de 3.6 mm. Pour cette concentration, le coefficient D_T/D est approximativement nul car, rappelons-le, c'est environ à cette concentration qu'il change de signe. La figure V-3 montre $V_x(z)$ le long de la médiane verticale de la cavité. Ce profil montre que la thermocapillarité est dominante. On n'observe pas de changement dans les valeurs des vitesses après une nuit d'attente.

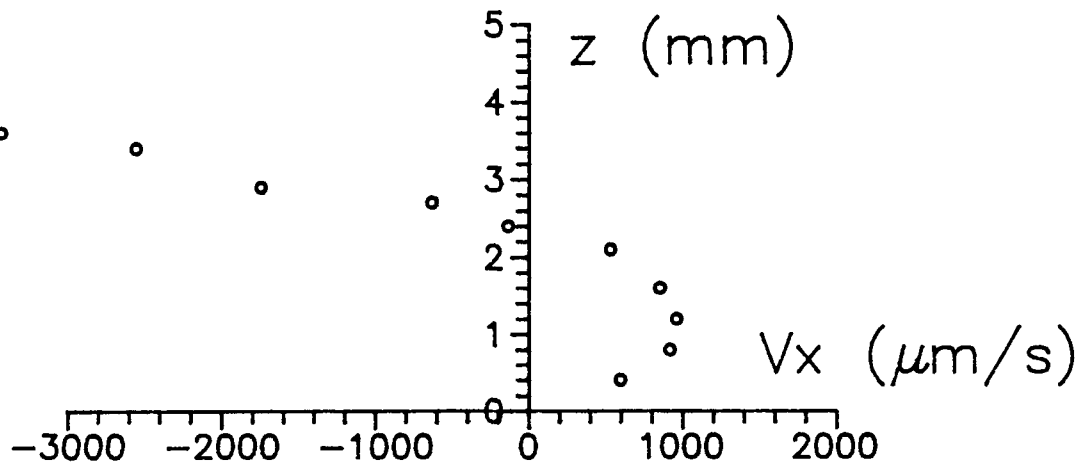


Figure V-3.

Profil $V_x(z)$ sur la médiane verticale, pour une solution aqueuse de titre massique en isopropanol = 25 %.

Dans une seconde expérience, nous avons utilisé une solution de titre massique 12 % en isopropanol. L'épaisseur de liquide est ici de 4.0 mm. La figure V-4 montre le profil $V_x(z)$ sur la médiane verticale, relevé dans les premières minutes de l'expérience. Ce profil est tout à fait semblable à celui observé dans la solution à 25 % en isopropanol, avec l'existence d'un mouvement dominé par la thermocapillarité. En mesurant au cours du temps la vitesse en surface V_x^{surf} sur la médiane verticale, nous avons remarqué que les mouvements se ralentissaient. Après 4 heures, V_x^{surf} devenait positif. La figure V-5 donne deux profils $V_x(z)$ mesurés à ce moment. Le premier est pris sur la médiane verticale, tandis que le second est mesuré sur une verticale à 9 mm du bord chaud. Ces deux profils sont compatibles avec l'existence d'une mince (≈ 0.4 mm d'épaisseur) cellule convective contrarotative (par rapport à la thermogravitation) en surface, mais n'occupant qu'un peu plus de la moitié de la surface, en partant du bord froid. Ceci est confirmé par une observation visuelle à l'aide du dispositif de visée du vélocimètre. Un schéma des mouvements convectifs est aussi donné à la figure V-5.

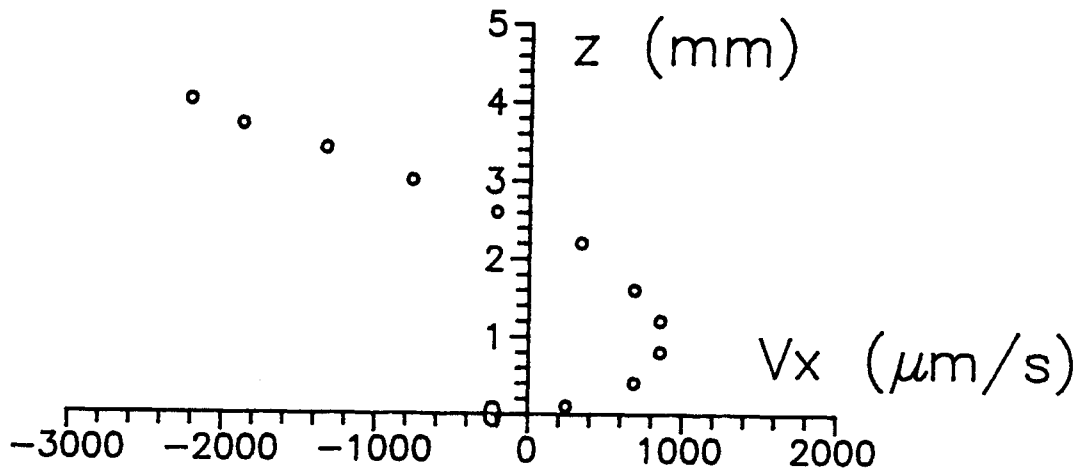


Figure V-4.

Profil $V_x(z)$ sur la médiane verticale relevé après quelques minutes dans une solution eau-isopropanol ($N = 0.88$).

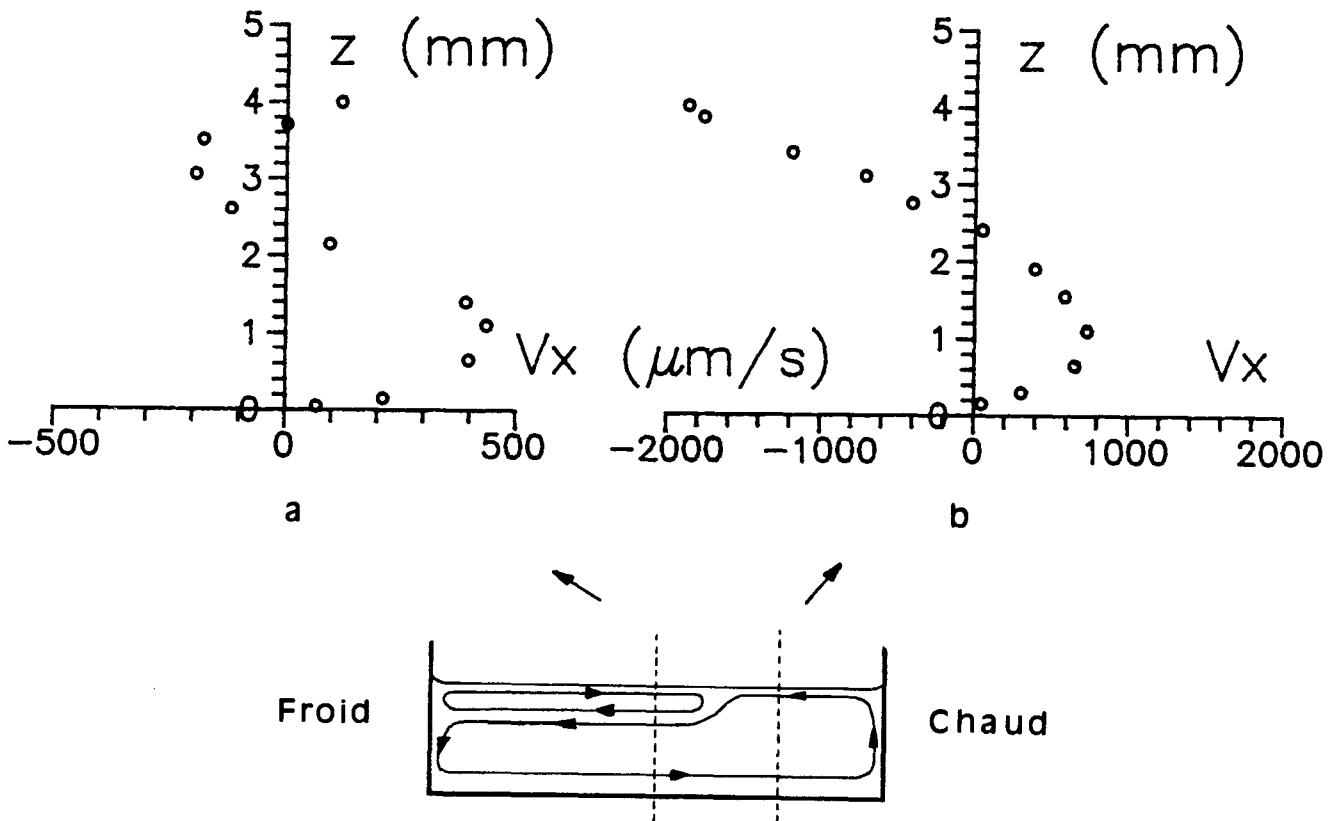


Figure V-5.

Profils $V_x(z)$ mesurés après 4 heures dans une solution eau-isopropanol ($N = 0.88$) a) sur la médiane verticale; b) à 9 mm du bord chaud et schéma des mouvements observés.

Après 20 heures, deux profils sont relevés dans les mêmes conditions. Cette fois, la cellule superficielle, devenue plus épaisse (≈ 1 mm) occupe toute la longueur de la cavité (voir figure V-6). Le fait qu'un si long délai soit nécessaire pour atteindre un état stationnaire renforce l'idée que la thermodiffusion est la cause de l'existence d'une cellule contrarotative. D'ailleurs, en réhomogénéisant la solution par agitation, nous avons réobtenu des vitesses en surface à nouveau négatives et égales aux vitesses initiales données à la figure V-4. On en conclut que la thermodiffusion ne peut certainement pas être négligée car si les séparations moléculaires sont petites, leur influence sur la tension superficielle est bien plus grande que l'influence de la température.

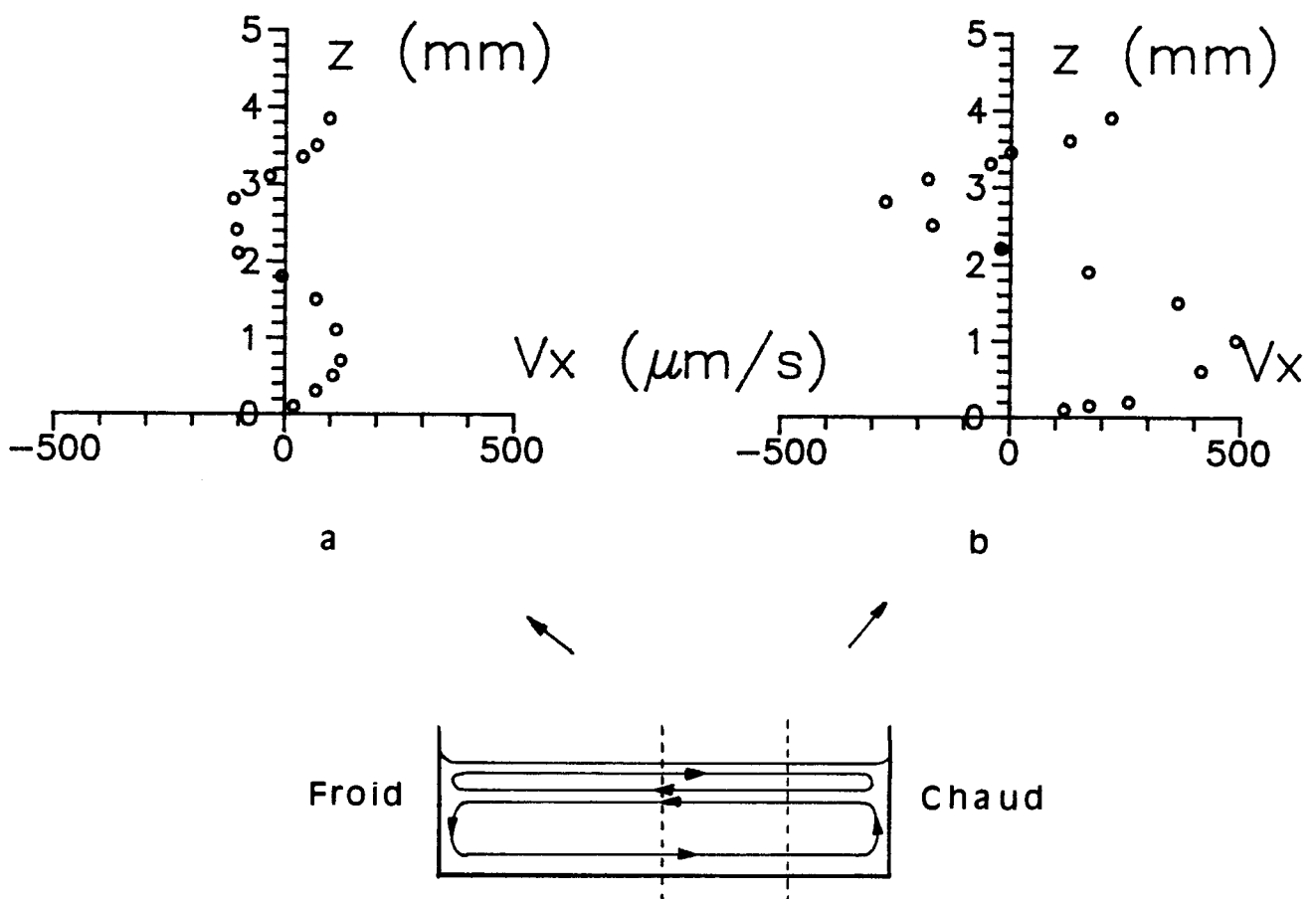


Figure V-6.

Profils $V_x(z)$ mesurés après 20 heures dans une solution eau-isopropanol ($N = 0.88$) a) sur la médiane verticale; b) à 9 mm du bord chaud et schéma des mouvements observés.

5. Bibliographie.

- [1] de Groot, R.S. , Mazur, P. : "Non equilibrium thermodynamics", North-Holland Pub. co. (1962).
- [2] Kolodner, P., Williams, H., Moe, C. : "Optical measurement of the Soret coefficient of ethanol/water solutions", J. Chem. Phys., 88(10), pp 6512-6524 (1988).
- [3] Poty, P., Legros, J.C., Thomaes, G. : "Thermal diffusion in some binary liquid mixtures by the flowing cell method", Z. Naturforsch. 29a, pp 1915-1916 (1974).

voir aussi

Platten, J.K. , Villers, D. : "Couplage entre les convections capillaire et gravitationnelle dans les mélanges", Proc. 6th European Symposium on Material Sciences under microgravity conditions, Bordeaux, France. 2-5 décembre 1986. ESA SP-256, pp 147-150 (1987).

Chapitre VI.

Convection dans des couches immiscibles superposées.

1. Introduction.

Nous avons étudié la convection dans le système eau–heptanol au chapitre II, à une concentration de $6.3 \cdot 10^{-3}$ mole/litre. L'heptanol n'est pas soluble en toute proportion dans l'eau. Si on ajoute une grande quantité d'heptanol, par exemple plusieurs millilitres dans notre cellule de mesure, il ne peut plus être dissous dans la phase aqueuse. Nous obtenons deux couches superposées de liquides immiscibles, dans lesquelles se manifeste la convection naturelle. Cette configuration pose un problème fondamental de mécanique des fluides, qui fait l'objet de ce chapitre : comment s'organise la convection dans chacune des couches, et quel est le mécanisme de couplage entre les mouvements dans les deux couches. Par exemple, des cellules convectives (de type cellules de Bénard) existant dans une des couches sont certainement influencées par les cellules existant dans l'autre couche; si les longueurs d'ondes spatiales λ_1 et λ_2 (voir figure VI-1) dans chacune des couches considérées individuellement ne sont pas les mêmes, on se doute que le couplage des mouvements à l'interface modifiera complètement l'aspect cellulaire de la convection.

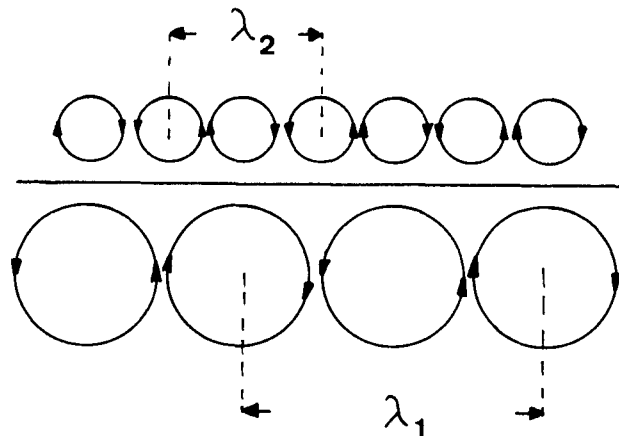


Figure VI-1.

Problème de couplage des mouvements à l'interface.

Ceci est un problème formidablement compliqué. Nous considérerons plutôt des cavités soumises à des gradients de température horizontaux. Le problème sera alors plus simple, puisque chaque couche prise individuellement ne comprend normalement qu'une seule et unique cellule de circulation. Dès lors, nous n'aurons qu'à tenir compte de la condition de continuité des vitesses à l'interface, ainsi que d'un éventuel effet du gradient de tension interfaciale $\partial\sigma/\partial x$.

Nous allons donc étudier la convection thermique dans deux couches fluides non miscibles (ou partiellement miscibles), superposées et contenues dans une cavité rectangulaire dont les parois latérales sont maintenues à des températures différentes. Nous exposerons d'abord les résultats expérimentaux et nous développerons ensuite un modèle analytique, inspiré du modèle présenté au §II.4., valide pour des couches dont les dimensions latérales sont beaucoup plus grandes que leur épaisseur. Nous déduirons le profil horizontal de vitesse dans chaque couche, en fonction des nombreux paramètres du problème, à savoir les coefficients de dilatation, les viscosités et les épaisseurs des deux couches, ainsi que le gradient de tension interfaciale, et nous comparerons enfin aux résultats expérimentaux.

2. Définition du problème.

Lorsque deux fluides immiscibles sont superposés dans une cavité rectangulaire dont les parois latérales sont à des températures différentes (voir la figure VI-2), le gradient de température horizontal induit évidemment la convection; en particulier les différences de densité dans le champ gravitationnel tendent à créer une cellule de circulation tournant dans le même sens dans chaque couche (le sens trigonométrique en l'occurrence sur la figure VI-2). A cause de la continuité des vitesses à l'interface entre les deux couches, il faut soit imaginer une vitesse nulle à l'interface, ce qui est une situation singulière, soit imaginer une troisième cellule (de sens de rotation horlogique cette fois), de manière à accommoder les forces de cisaillement (par couplage mécanique). L'existence de cette troisième cellule convective est étayée par des mesures expérimentales de profils de vitesse horizontale, qui seront présentées au paragraphe suivant. De plus, à partir de ces expériences, on verra clairement que la tension interfaciale joue un rôle souvent prépondérant par rapport aux différences de densité, cette dernière cause pouvant éventuellement devenir négligeable dans certaines circonstances. Par exemple, si la composante horizontale de la vitesse augmente dans chaque couche lorsqu'on se rapproche de l'interface, où elle y atteint sa valeur maximale (voir la figure VI-3), on doit inclure le gradient de tension interfaciale (lui-même dû au gradient de température) dans

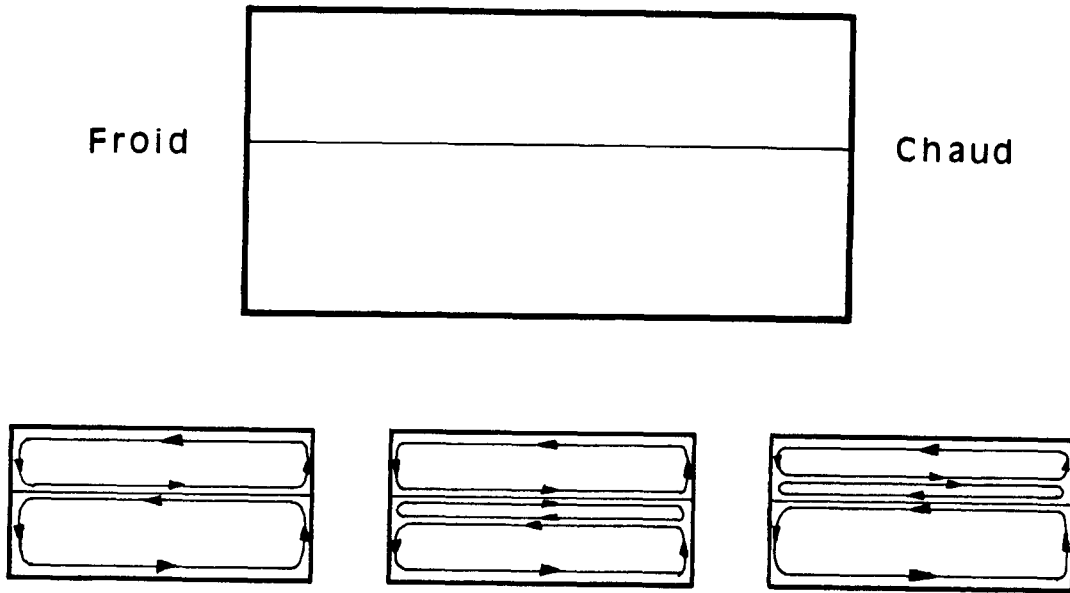


Figure VI-2.

l'équation de conservation de la quantité de mouvement à l'interface (Levich [1]).

$$\mu^{(1)} \frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial z} - \mu^{(2)} \frac{\partial v_x^{(2)}}{\partial z} = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{VI-1})$$

les superscripts (1) ou (2) se réfèrent respectivement aux couches inférieure (1) et supérieure (2). Cette équation (VI-1) permet aux dérivées $\partial v_x^{(i)}/\partial z$ d'être de signes opposés, comme on le verra dans certaines expériences, alors qu'en l'absence de gradient de tension interfaciale, on peut observer seulement un changement de pente, mais pas de signe.

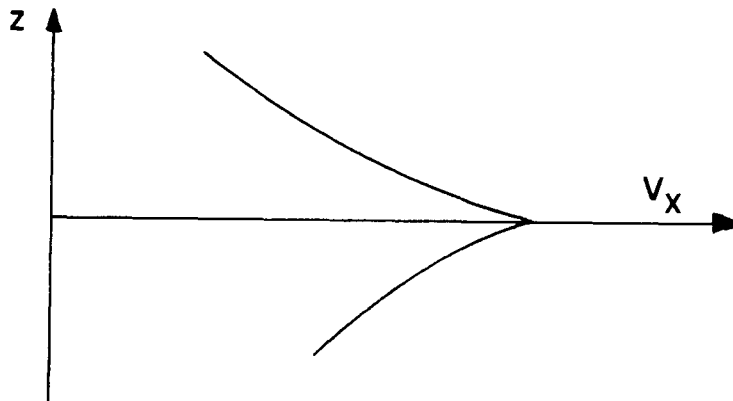


Figure VI-3.

Comportement possible des vitesses à l'interface, dominé par l'effet de la tension interfaciale.

3. Résultats expérimentaux.

Des expériences ont été effectuées dans plusieurs couples de liquides immiscibles contenus dans une cavité parallélépipédique soumise à une différence de température imposée au moyen de bains thermostatés. La cellule utilisée pour les expériences dans le système eau-heptanol avait des dimensions identiques à celles utilisées au chapitre II, III et IV, à savoir une longueur de 30 mm et une largeur entre les parois transparentes de 10 mm. Les hauteurs des couches fluides ont été maintenues à des épaisseurs relativement faibles, de manière à permettre des comparaisons quantitatives avec le modèle analytique développé au paragraphe suivant, valide pour des couches "infinies". On plaçait évidemment une limite supérieure rigide au dessus des deux couches superposées. Nous avons à chaque fois mesuré par vélocimétrie laser-Doppler le profil de la composante horizontale de la vitesse en fonction de la hauteur, le long de la médiane verticale de la cavité.

3.a Système eau-heptanol.

Dans une série d'expériences pour laquelle la valeur, ni même le signe, de $\partial\sigma/\partial T$ n'était connu, nous avons obtenu un résultat expérimental qui nous a incité à prendre en considération le gradient de tension interfaciale. Cette mesure est présentée à la figure VI-4. Il s'agit du

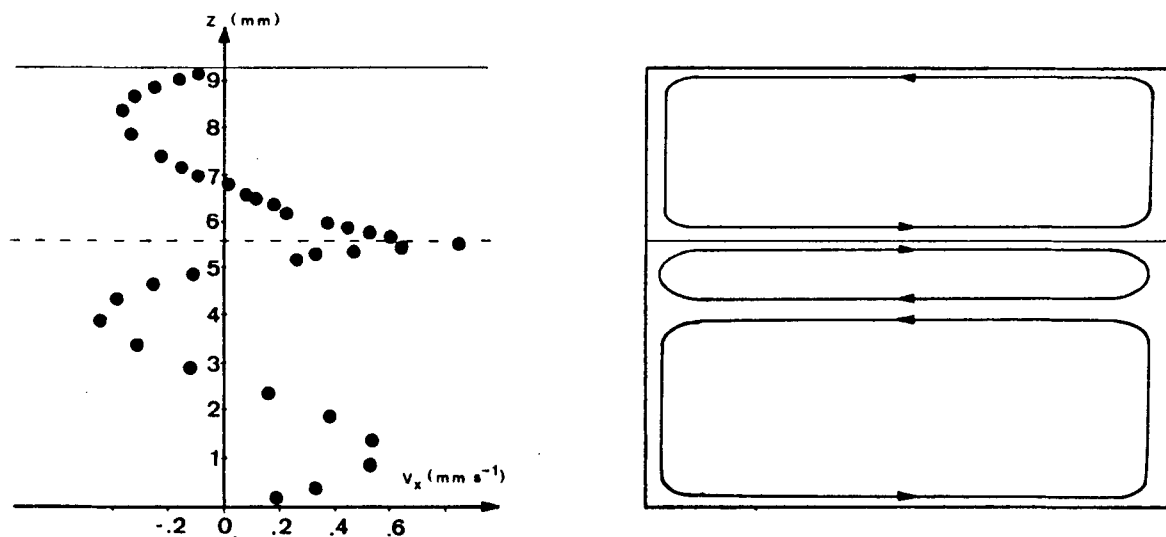


Figure VI-4.

Couche d'eau de 5.6 mm et couche d'heptanol de 3.7 mm.

Profil $V_x(z)$ et schéma de la convection.

profil de vitesse horizontale $V_x(z)$ mesuré le long de la médiane verticale de la cavité contenant une couche d'eau (de 5.6 mm d'épaisseur) surmontée d'une couche d'heptanol (de 3.7 mm). Ces deux liquides étaient soumis à une différence de température horizontale de 12.8 K et la température moyenne valait 21.3 °C. Ce profil de vitesse est compatible avec l'existence de trois cellules convectives (voir le schéma à la figure VI-4), deux d'entre elles étant situées dans la phase aqueuse. Donc, une cellule contrarotative a été créée entre les deux cellules thermogravitationnelles. L'épaisseur de la cellule due à la gravité au fond de la couche inférieure est approximativement 4.0 mm tandis que la cellule intermédiaire est épaisse d'environ 1.6 mm. Le profil de vitesse présente un maximum à l'interface, avec un mouvement du froid vers le chaud, ce qui implique que $\partial\sigma/\partial x$ est positif. On pourrait penser à ce stade que la position de la cellule intermédiaire est la conséquence d'un effet stérique, et qu'en enlevant 2 mm d'eau et en ajoutant 2 mm d'heptanol, cela provoquerait le transfert de la cellule intermédiaire vers la couche supérieure. En fait, on observe un phénomène différent : cette cellule demeure dans la phase aqueuse et la cellule thermogravitationnelle dans l'eau a disparu, ne laissant subsister que deux petits vortex dans les coins. C'est visible à partir de la figure VI-5, donnant $V_x(z)$ sur la médiane verticale, $V_x(x)$ 0.4 mm au dessus du fond de la cavité, et un schéma des cellules convectives compatibles avec les deux profils mesurés.

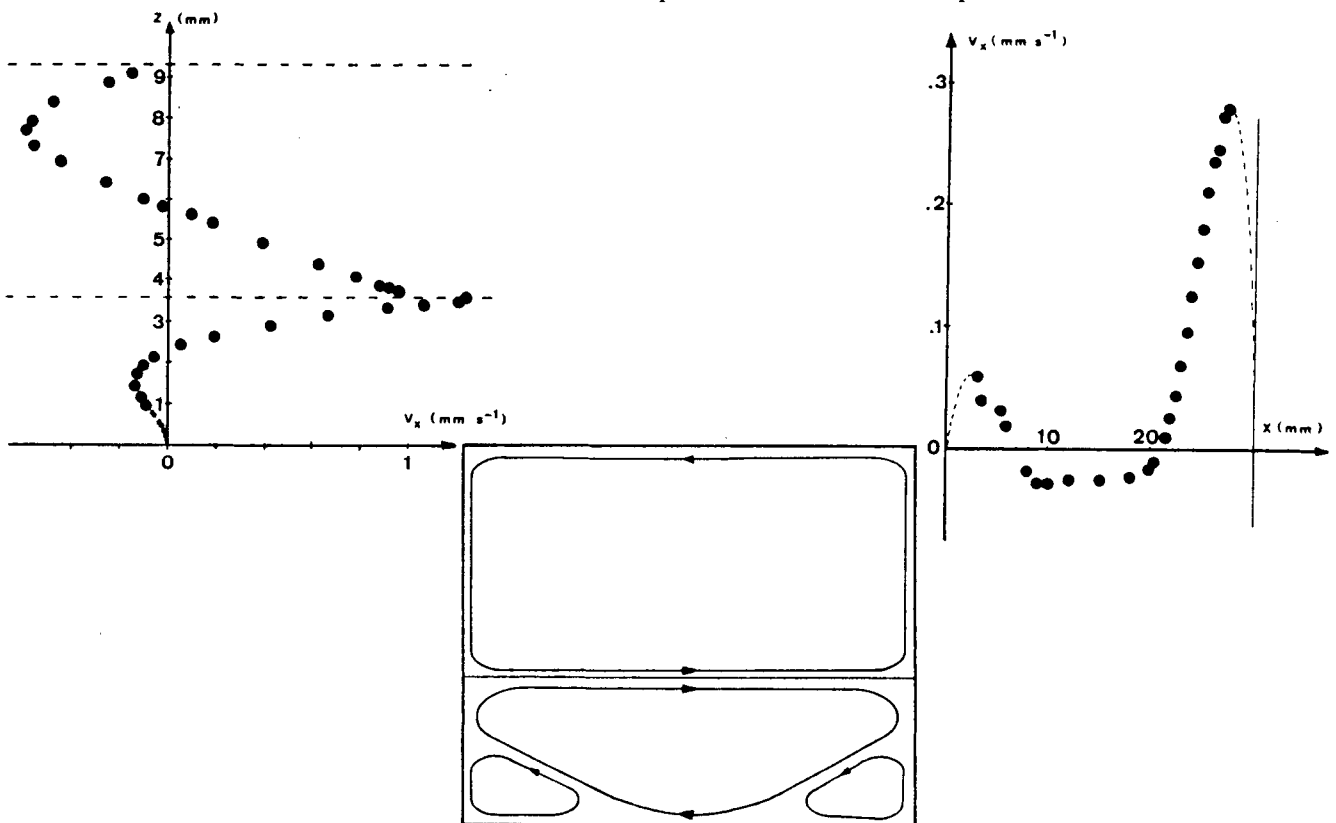


Figure VI-5.

Couche d'eau de 3.6 mm et couche d'heptanol de 5.6 mm.
 Profils $V_x(z)$ sur la médiane verticale et $V_x(x)$ à $z = 0.4$ mm.
 Schéma des cellules convectives compatibles avec ces profils.

3.b. Système tétrachlorure de carbone-eau.

La bi-couche considérée dans ce paragraphe est constituée de 4.2 mm de CCl_4 surmonté de 6.3 mm d'eau. L'expérience a été effectuée dans une cavité de 93 mm de largeur soumise à une différence de température de 7 K, à la température moyenne de 24°C . La figure VI-6 donne le profil $V_x(z)$ sur la médiane verticale.

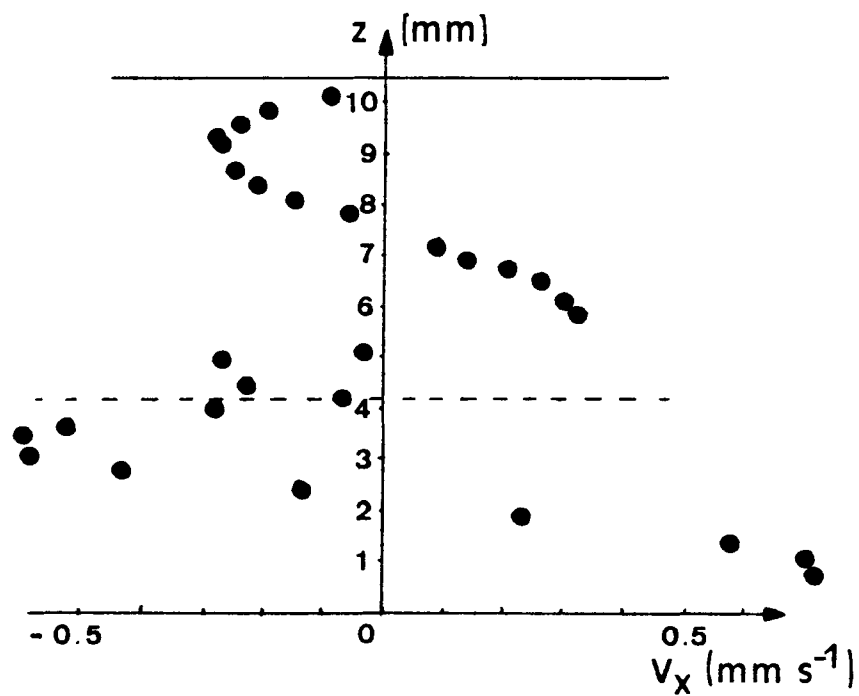


Figure VI-6.

Couche de CCl_4 de 4.2 mm et couche d'eau de 6.3 mm.

Profil $V_x(z)$ le long de la médiane verticale.

3.c. Système eau-octane.

Dans ce paragraphe, nous examinons un système constitué d'une couche d'eau de 10.6 mm surmontée de 3.3 mm d'octane. L'expérience a été effectuée dans une cavité de 93 mm de largeur soumise à une différence de température de 7 K, à la température moyenne de 24°C. La figure VI-7 donne le profil $V_x(z)$ sur la médiane verticale.

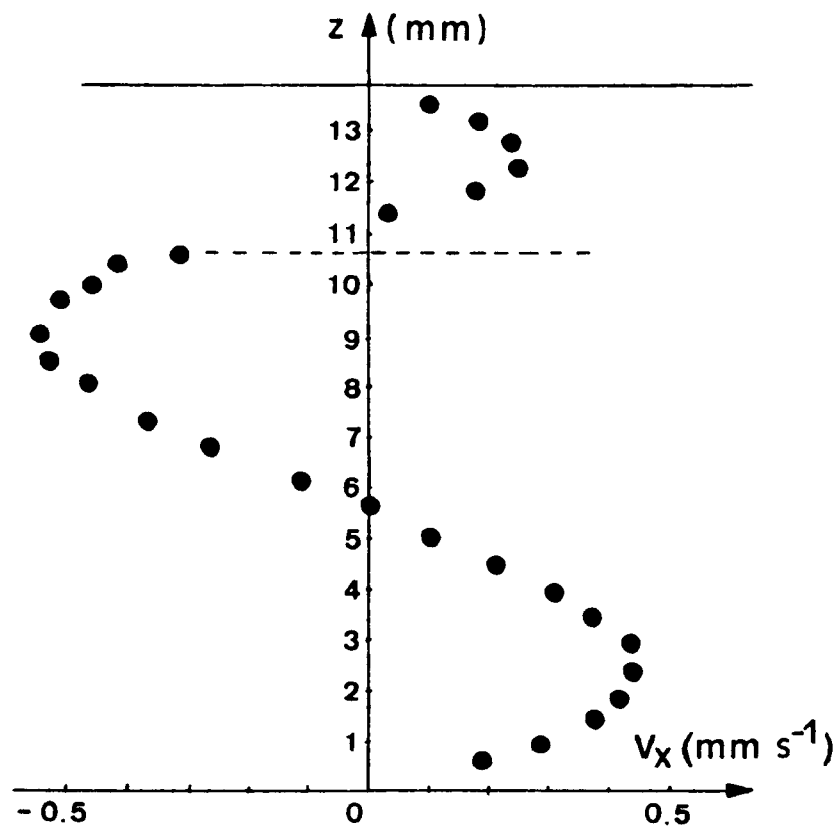


Figure VI-7.

Couche d'eau de 10.6 mm et couche d'octane de 3.3 mm.

Profil $V_x(z)$ le long de la médiane verticale.

On remarque que dans cette expérience, ainsi que dans celle qui concerne le système tétrachlorure de carbone-eau, il n'y a pas de changement de signe de $\partial V_x / \partial z$ à l'interface, mais seulement un changement de valeur de la pente. On peut donc supposer que le gradient $\partial \sigma / \partial x$ n'est pas prépondérant.

4. Modèle analytique.

A ce stade, il ne convient pas de continuer des expériences sur d'autres couples de liquides immiscibles, mais de comprendre fondamentalement celles que nous avons réalisées : le rôle des coefficients de dilatation, des viscosités, des épaisseurs, de la tension interfaciale, ... Le modèle que nous allons exposer dans ce paragraphe est avant tout destiné à prédire le nombre de cellules convectives dans chaque couche, et l'allure des vitesses à l'interface.

4.a Equations et conditions.

Tout comme dans le modèle exposé au chapitre II, on suppose la cavité d'extension horizontale infinie; on introduit une première hypothèse en considérant qu'il n'y a pas de composante verticale de la vitesse ($V_z = 0$) et que la composante horizontale est la même en tout x (V_x fonction de z uniquement). On suppose que les densités des deux phases dépendent linéairement de la température, mais les viscosités sont considérées constantes. Les équations de continuité, de Navier-Stokes et de conservation de l'énergie pour une phase i ($i = 1$ ou 2) s'écrivent alors :

$$\frac{\partial V_x^{(i)}}{\partial x} = 0 \quad (\text{VI-2})$$

$$\frac{\partial p^{(i)}}{\partial x} = \mu^{(i)} \frac{\partial^2 V_x^{(i)}}{\partial z^2} \quad (\text{VI-3})$$

$$\frac{\partial p^{(i)}}{\partial z} = -\rho^{(i)}(T) g \quad (\text{VI-4})$$

$$0 = -V_x^{(i)} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial x} + \kappa^{(i)} \left(\frac{\partial^2 T^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^{(i)}}{\partial z^2} \right) \quad (\text{VI-5})$$

p est la pression, μ la viscosité absolue, g l'accélération due à la gravité, κ la diffusivité thermique et ρ la densité qui obéit à l'équation d'état suivante :

$$\rho^{(i)} = \rho_o^{(i)} \left[1 - \alpha^{(i)} (T^{(i)} - T_o) \right] \quad (\text{VI-6})$$

$\alpha^{(i)}$ sont les coefficients d'expansion thermique (supposés positifs) et $\rho_o^{(i)}$ est la densité de référence du liquide (i) à la température T_o .

On élimine la pression entre les équations (VI-3) et (VI-4), en utilisant (VI-6) et on

obtient :

$$\mu^{(i)} \frac{\partial^3 V_x^{(i)}}{\partial z^3} = \rho_0^{(i)} \alpha^{(i)} g \frac{\partial T^{(i)}}{\partial x} \quad (\text{VI-7})$$

En suivant le même raisonnement qu'au chapitre II (équations II-20 à 22), et en prenant comme seconde hypothèse importante que le gradient horizontal de température est le même en tout z , identique dans chaque couche et non nul (par convention positif), la température obéit alors à la fonction

$$T^{(i)}(x,z) = A_T x + G^{(i)}(z) \quad (\text{VI-8})$$

L'équation VI-7 devient

$$\mu^{(i)} \frac{\partial^3 V_x^{(i)}}{\partial z^3} = \rho_0^{(i)} \alpha^{(i)} g A_T \quad (\text{VI-9})$$

dont les solutions, obtenues en intégrant trois fois par rapport à z sont

$$V_x^{(i)} = \frac{g}{\mu^{(i)}} \rho_0^{(i)} \alpha^{(i)} A_T \left[\frac{z^3}{3!} + C_1^{(i)} \frac{z^2}{2!} + C_2^{(i)} z + C_3^{(i)} \right] \quad (\text{VI-10})$$

Les six constantes d'intégration $C_1^{(i)}$, $C_2^{(i)}$ et $C_3^{(i)}$ ($i = 1$ ou 2) doivent être déterminées par les conditions suivantes :

1) Les limites inférieure et supérieure sont rigides :

$$V_x^{(i)}(z) = 0 \quad \text{en} \quad z = -h^{(1)} \quad \text{et} \quad z = h^{(2)} \quad (\text{VI-11})$$

où $h^{(1)}$ et $h^{(2)}$ sont les épaisseurs des couches inférieure et supérieure.

2) On impose une condition de recirculation dans chaque couche :

$$\int_{-h^{(1)}}^0 V_x^{(1)}(z) dz = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{h^{(2)}} V_x^{(2)}(z) dz = 0 \quad (\text{VI-12})$$

3) Les vitesses sont continues à l'interface :

$$V_x^{(1)} = V_x^{(2)} \quad \text{en } z = 0 \quad (\text{VI-13})$$

4) On écrit la condition de conservation de quantité de mouvement à l'interface supposée plane :

$$\mu^{(1)} \frac{\partial V_x^{(1)}}{\partial z} - \mu^{(2)} \frac{\partial V_x^{(2)}}{\partial z} = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\sigma T}{\partial x} \quad \text{en } z = 0 \quad (\text{VI-14})$$

De manière à examiner les expressions des vitesses entre $Z = -1$ et $Z = 1$, on définit une coordonnée verticale réduite :

$$Z = z / h^{(1)} \quad \text{pour } z < 0 \quad \text{et} \quad Z = z / h^{(2)} \quad \text{pour } z > 0 \quad (\text{VI-15})$$

A partir de l'application des deux conditions interfaciales (VI-13) et (VI-14), et en négligeant dans une première analyse le terme contenant la tension interfaciale, on est amené à introduire deux rapports de plusieurs propriétés physiques des deux couches :

$$Q_\alpha = \frac{[\rho_o \alpha h^2]^{(2)}}{[\rho_o \alpha h^2]^{(1)}} \quad (\text{VI-16})$$

$$Q_\mu = \frac{[\mu/h]^{(2)}}{[\mu/h]^{(1)}} \quad (\text{VI-17})$$

Q_α est relié à l'importance relative des forces de sustentation de la couche supérieure par rapport à la couche inférieure, tandis que Q_μ a trait au rapport des forces visqueuses. Si on considère dans une seconde étape le terme contenant la tension interfaciale dans l'équation (VI-14), on définit un troisième rapport :

$$k = -\frac{Ma^{(1)}}{Ra^{(1)}} \quad \text{avec} \quad Ma^{(1)} = \frac{-\frac{\partial \sigma}{\partial T} \Delta T h^{(1)}}{\mu^{(1)} \kappa^{(1)}} \quad (\text{VI-18})$$

$$Ra^{(1)} = \frac{g \rho_o^{(1)} \alpha^{(1)} \Delta T h^{(1)^3}{\mu^{(1)} \kappa^{(1)}}$$

$Ma^{(1)}$ est le nombre de Marangoni relatif à la couche (1). ΔT est une différence de température horizontale, quelconque, de référence, et qui ne nécessite pas d'être spécifiée.

$Ra^{(1)}$ est le nombre de Rayleigh de la couche (1). Le rapport k de ces deux groupements non-dimensionnels sert à quantifier l'importance relative des forces superficielles et volumiques dans ce problème.

En utilisant les conditions (VI-11) à (VI-14), les définitions et notations (VI-16) à (VI-19), on trouve les six constantes d'intégration du profil général (VI-10), et on aboutit aux expressions suivantes des profils dans les couches inférieure et supérieure :

$$V_x^{(1)} = U^* (Z + 1) \left[Z^2 + \frac{(1 + 4Q_\mu + 3Q_\alpha)}{8(1 + Q_\mu)} Z + \frac{(Q_\alpha - 1)}{8(1 + Q_\mu)} \right] \\ + U^* k \frac{9}{2(1 + Q_\mu)} (Z + 1) \left(Z + \frac{1}{3} \right) \quad (VI-19)$$

$$V_x^{(2)} = \frac{Q_\alpha}{Q_\mu} U^* (Z - 1) \left[Z^2 - \frac{(1 + 4\frac{1}{Q_\mu} + 3\frac{1}{Q_\alpha})}{8(1 + \frac{1}{Q_\mu})} Z + \frac{(\frac{1}{Q_\alpha} - 1)}{8(1 + \frac{1}{Q_\mu})} \right] \\ + U^* \frac{k}{Q_\mu} \frac{9}{2(1 + \frac{1}{Q_\mu})} (Z - 1) \left(Z - \frac{1}{3} \right) \quad (VI-20)$$

avec une vitesse caractéristique

$$U^* = \frac{\rho_o^{(1)} \alpha^{(1)} h^{(1)3} g A_T}{6 \mu^{(1)}} \quad (VI-21)$$

Arrivés à ce point, nous pouvons donner quelques considérations préliminaires et triviales sur ces profils de vitesse :

i) Les deux profils sont chacun la somme de deux termes, le premier est relié aux forces thermogravitationnelles et est, comme on pouvait le prévoir, un polynôme cubique; le second terme concerne les forces interfaciales et est parabolique (le produit $U^* k$ est égal à $-A_T(\partial\sigma/\partial T)h^{(1)}/6\mu^{(1)}$).

ii) Comme les conditions VI-11 l'imposent, chaque profil de vitesse possède une racine à la paroi rigide qui lui correspond ($Z = 1$ ou $Z = -1$). Il y a toujours une seconde racine au sein de chaque couche, due à la condition (VI-12) de recirculation, et une troisième racine peut aussi exister dans la couche.

iii) La valeur de U^* n'affecte pas la forme du profil de vitesse puisque U^* apparaît seulement comme un facteur constant. C'est aussi le seul facteur qui contient le gradient horizontal de température A_T . Mais bien sûr, si on s'intéresse à la stabilité hydrodynamique des profils de vitesse (VI-19) et (VI-20), la valeur du gradient A_T pourrait influencer leur allure et on devrait par conséquent inclure U^* dans la définition d'un nombre de Reynolds.

Une discussion complète des profils est donnée dans les deux prochains paragraphes, en négligeant d'abord les forces interfaciales (4.b.) et puis en les prenant en considération (4.c.). Mais, avant de clore ce paragraphe, il nous paraît ici opportun de déterminer les profils de température à partir de l'intégration de l'équation de conservation de l'énergie (VI-5). Une première intégration conduit à

$$\frac{A_T}{\kappa^{(1)}} \int_{-h}^0 V_x^{(1)}(z) dz = \left[\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} \right]_{-h}^0 \quad (\text{VI-22})$$

et à une expression similaire valide pour la couche supérieure. A cause de la condition de recirculation (VI-12) dans chaque couche et de la continuité du flux de chaleur vertical à travers l'interface, on obtient que le flux de chaleur est le même à travers les trois interfaces liquide-solide et liquide-liquide :

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} \left(\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} \right)_{z=-h} &= \lambda^{(1)} \left(\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} \right)_{z=0} \\ &= \lambda^{(2)} \left(\frac{\partial T^{(2)}}{\partial z} \right)_{z=0} = \lambda^{(2)} \left(\frac{\partial T^{(2)}}{\partial z} \right)_{z=h} \end{aligned} \quad (\text{VI-23})$$

Si on suppose qu'il n'y a pas de flux de chaleur à travers les parois rigides horizontales (bords isolants), et si de plus on fixe arbitrairement à 0 le coefficient indépendant dans $G^i(z)$ de l'équation (VI-8), en définissant les coordonnées de manière à avoir $T(x=0, z=0) = 0$, on obtient l'expression suivante pour les profils de température:

$$T^{(1)} = A_T x + \frac{U^* A_T h^{(1)2}}{\kappa^{(1)}} \frac{1}{4} \left[\frac{Z^5}{5} + \frac{(4Q_\mu + Q_\alpha + 3)}{8(1 + Q_\mu)} Z^4 + \frac{(Q_\mu + Q_\alpha)}{3(1 + Q_\mu)} Z^3 + \frac{(Q_\alpha - 1)}{4(1 + Q_\mu)} Z^2 \right]$$

$$+ \frac{U^* k A_T h^{(1)2}}{\kappa^{(1)}} \left[\frac{3}{8(1+Q_\mu)} Z^4 + \frac{1}{(1+Q_\mu)} Z^3 + \frac{3}{4(1+Q_\mu)} Z^2 \right] \quad (\text{VI-24})$$

et

$$T^{(2)} = A_T x + \frac{Q_\alpha}{Q_\mu} \frac{U^* A_T h^{(2)2}}{\kappa^{(2)}} \frac{1}{4} \left[\frac{Z^5}{5} - \frac{(4\frac{1}{Q_\mu} + \frac{1}{Q_\alpha} + 3)}{8(1+\frac{1}{Q_\mu})} Z^4 \right. \\ \left. + \frac{(\frac{1}{Q_\mu} + \frac{1}{Q_\alpha})}{3(1+\frac{1}{Q_\mu})} Z^3 - \frac{(\frac{1}{Q_\alpha} - 1)}{4(1+\frac{1}{Q_\mu})} Z^2 \right] \\ + \frac{U^* k A_T h^{(2)2}}{Q_\mu \kappa^{(2)}} \left[\frac{3}{8(1+\frac{1}{Q_\mu})} Z^4 - \frac{1}{(1+\frac{1}{Q_\mu})} Z^3 + \frac{3}{4(1+\frac{1}{Q_\mu})} Z^2 \right] \quad (\text{VI-25})$$

4.b Discussion, cas $k = 0$.

On s'intéresse alors seulement aux premiers termes des équations (VI-19) et (VI-20). Les formes des profils de vitesse dépendent donc uniquement de Q_α et Q_μ , c'est à dire des propriétés physiques volumiques des liquides, puisqu'on ne considère pas la tension interfaciale.

Cas $Q_\alpha > 1$:

Suivant la définition VI-16 de Q_α , les forces gravifiques sont plus importantes dans la couche supérieure (2). La vitesse s'annule à la limite rigide $Z = 1$; on voit que le produit des deux autres racines de $V_x^{(2)}$ est négatif lorsque $Q_\alpha > 1$. Puisqu'il existe déjà une racine positive entre $Z = 0$ et $Z = 1$ (due à la condition de recirculation), la dernière racine doit être négative, et n'est donc pas dans la couche supérieure. Par conséquent, il ne peut y avoir qu'une seule cellule convective (thermogravitationnelle) dans la couche supérieure (2) lorsque $Q_\alpha > 1$. De plus, en ce qui concerne la couche inférieure (1), on sait aussi qu'il y a une racine en $Z = -1$ et une deuxième entre $Z = -1$ et $Z = 0$. Puisqu'à partir de l'expression du profil de vitesse $V_x^{(1)}$, le produit des deux racines non triviales est positif, on désire savoir si la troisième racine est ou n'est pas dans la couche (1). La condition pour qu'elle y soit est :

$$Q_\alpha < 2 Q_\mu + 3 \quad (\text{VI-26})$$

Lorsqu'elle est satisfaite, il y a deux cellules convectives dans la couche inférieure.

Cas $Q_\alpha < 1$:

L'analyse peut être considérée comme symétrique du cas $Q_\alpha > 1$, et est donc formellement la même, si on remplace Z par $-Z$, Q_α et Q_μ par leurs inverses. Dans la couche inférieure (1), la vitesse s'annule à la limite rigide $Z = -1$; on voit que le produit des deux autres racines de $V_x^{(1)}$ est négatif lorsque $Q_\alpha < 1$. Puisqu'il existe déjà une racine négative entre $Z = -1$ et $Z = 0$ (due à la condition de recirculation), la dernière racine doit être positive, et n'est donc pas dans la couche inférieure. Par conséquent, il ne peut y avoir qu'une seule cellule convective (thermogravitationnelle) dans la couche inférieure (1) lorsque $Q_\alpha < 1$. De plus, en ce qui concerne la couche supérieure (2), on sait aussi qu'il y a une racine en $Z = 1$ et une deuxième entre $Z = 0$ et $Z = 1$. Puisqu'à partir de l'expression du profil de vitesse $V_x^{(2)}$, le produit des deux racines non triviales est positif, on désire savoir si la troisième racine est ou n'est pas dans la couche (2). La condition pour qu'elle y soit est :

$$Q_\alpha > \frac{Q_\mu}{2 + 3Q_\mu} \quad (\text{VI-27})$$

Lorsqu'elle est satisfaite, il y a deux cellules convectives dans la couche supérieure.

Cas $Q_\alpha = 1$:

On peut immédiatement vérifier que les racines sont $Z = 1$, $Z = 1/2$, $Z = 0$, $Z = -1/2$ et $Z = -1$. Il y a donc une seule cellule de convection dans chaque couche, avec le même sens de rotation, et l'interface est virtuellement au repos.

Les résultats de cette discussion sont représentés à la figure VI-8, et peuvent être résumés comme suit :

Les propriétés d'expansion des deux couches sont données par le paramètre Q_α . La couche caractérisée par la plus haute valeur de $\rho^{(i)} \alpha^{(i)} (h^{(i)})^2$ possède une seule cellule de convection, induite par la gravité. Cette cellule dominante impose dans l'autre couche une cellule convective dont le sens de rotation n'est pas en accord avec les forces de gravité. Parfois, une seconde cellule, induite par la gravité peut apparaître dans cette autre couche, à la condition que Q_α ne soit "pas trop loin" de 1.

De plus, la figure VI-9 donne une série d'exemples de profils de vitesse, suivant différentes valeurs de Q_α et Q_μ .

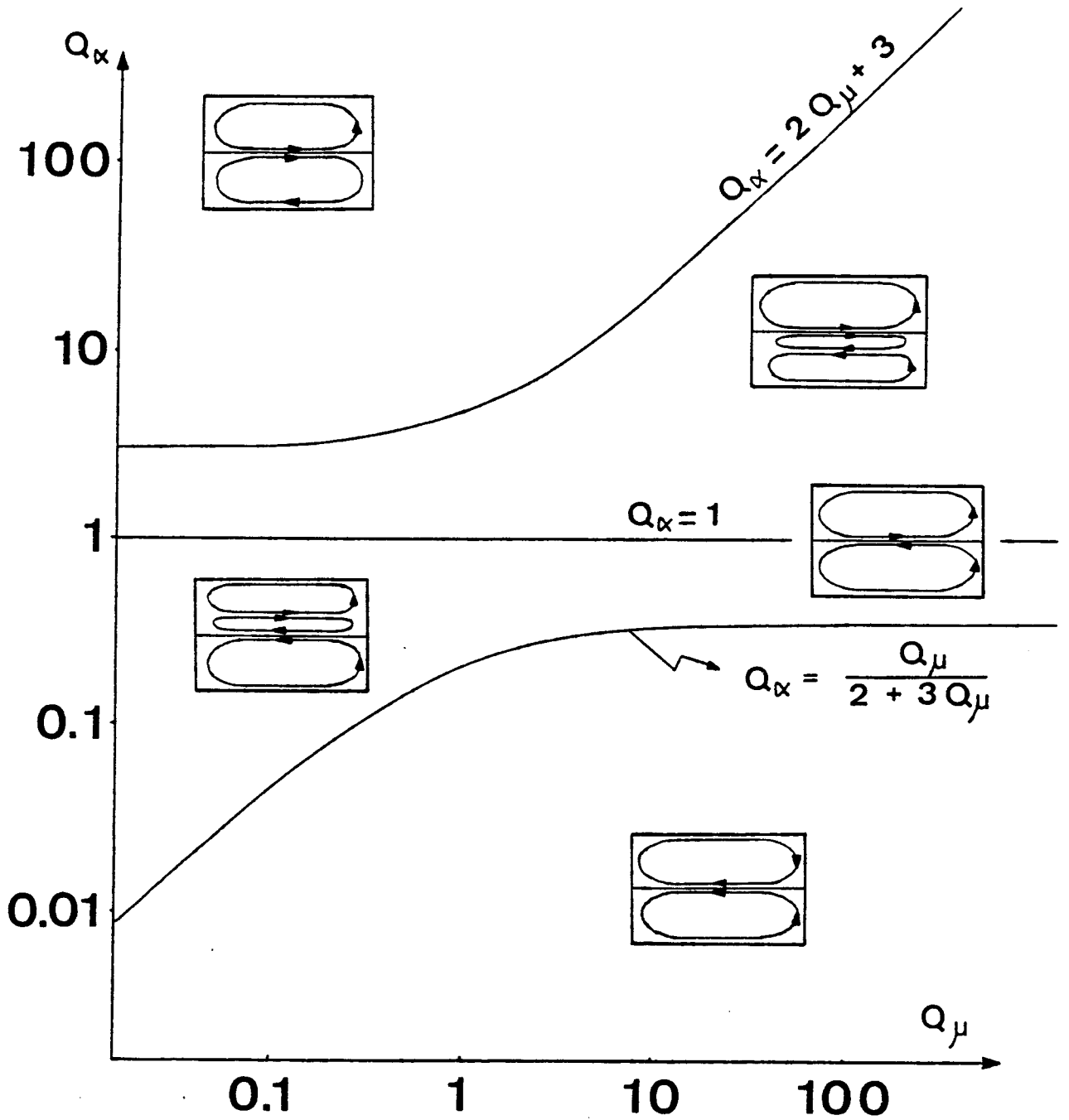


Figure VI-8.
 Les différents cas, dans le plan $Q_\alpha - Q_\mu$ ($k = 0$).

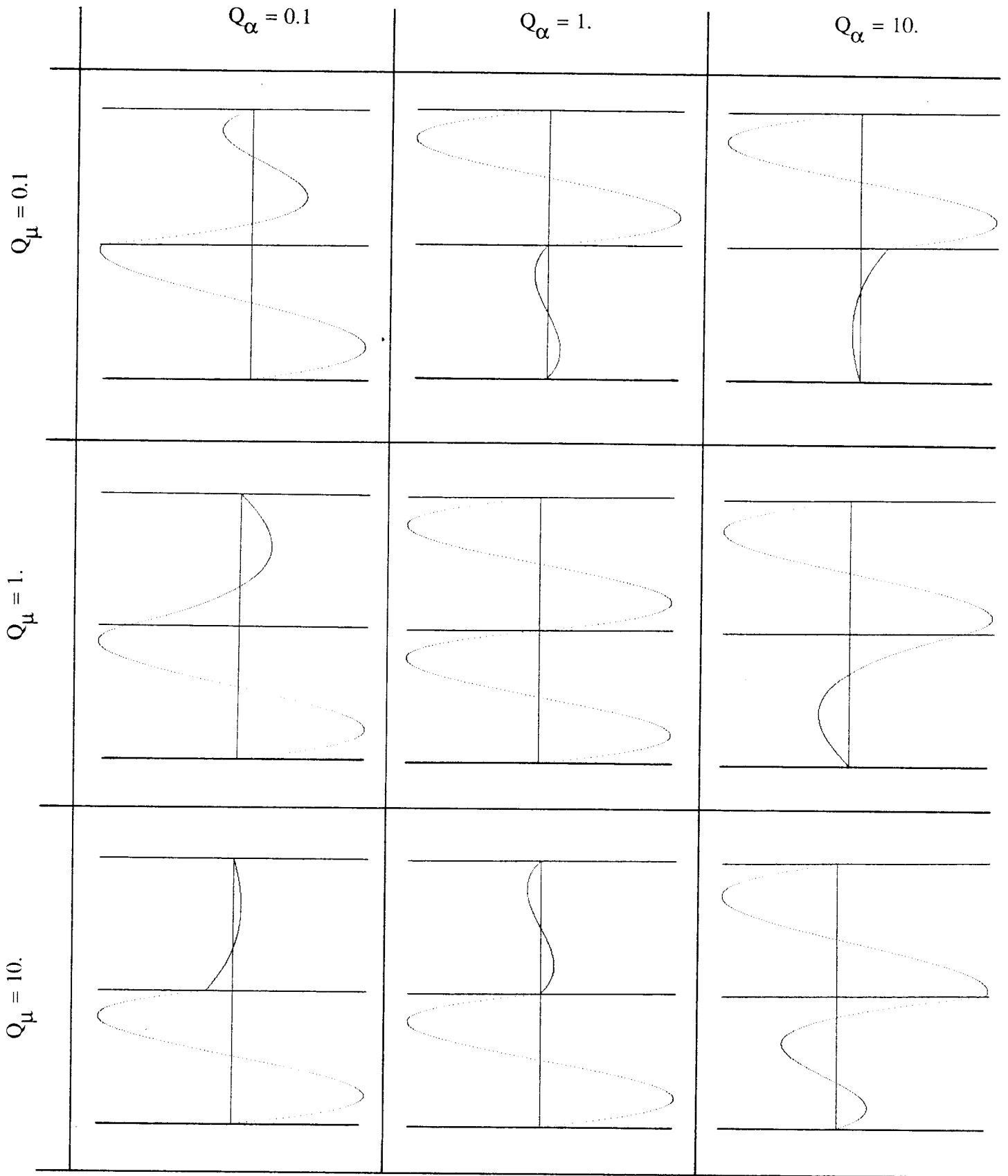


Figure VI-9.
 Quelques exemples de profils de vitesse ($k = 0$).

4.c. Discussion, cas $k \neq 0$.

On est toujours intéressé à connaître le nombre de cellules convectives dans chaque couche (donc le nombre de racines de $V_x^{(i)}$ dans la couche (i)) en fonction cette fois des trois paramètres Q_α , Q_μ et k . Les différentes possibilités sont dans un certain sens similaires à celles du cas précédent ($k = 0$). Les comportements successifs suivants sont observables :

a) une seule cellule convective induite par la gravité dans la phase inférieure et une cellule "contrarotative" dans la couche supérieure lorsque

$$Q_\alpha < \frac{Q_\mu (1 - 12k)}{2 + 3Q_\mu} \quad (\text{VI-28})$$

b) une seule cellule convective induite par la gravité dans la phase inférieure et deux cellules convectives dans la couche supérieure lorsque

$$\frac{Q_\mu (1 - 12k)}{2 + 3Q_\mu} < Q_\alpha < 1 - 12k \quad (\text{VI-29})$$

Dans ces cas a) et b), la vitesse à l'interface est négative.

c) une seule cellule convective induite par la gravité dans la phase supérieure et deux cellules convectives dans la couche inférieure lorsque

$$1 - 12k < Q_\alpha < 3 + 2Q_\mu - 12k \quad (\text{VI-30})$$

d) une seule cellule convective induite par la gravité dans la phase supérieure et une cellule "contrarotative" dans la couche inférieure lorsque

$$Q_\alpha > 3 + 2Q_\mu - 12k \quad (\text{VI-31})$$

Pour les cas c) et d), la vitesse à l'interface est positive.

La figure VI-10 représente les courbes délimitant les cas a) à d) dans le plan des paramètres Q_α et Q_μ pour différentes valeurs de k . Il apparaît immédiatement que ces limites demeurent comparables à celles qui ont été établies dans le cas particulier $k = 0$, elles sont seulement "déplacées" dans le plan Q_α - Q_μ . Le sens de ce déplacement et son amplitude sont fonctions du signe et de la valeur de k . Considérons par exemple $k > 0$ (c'est-à-dire

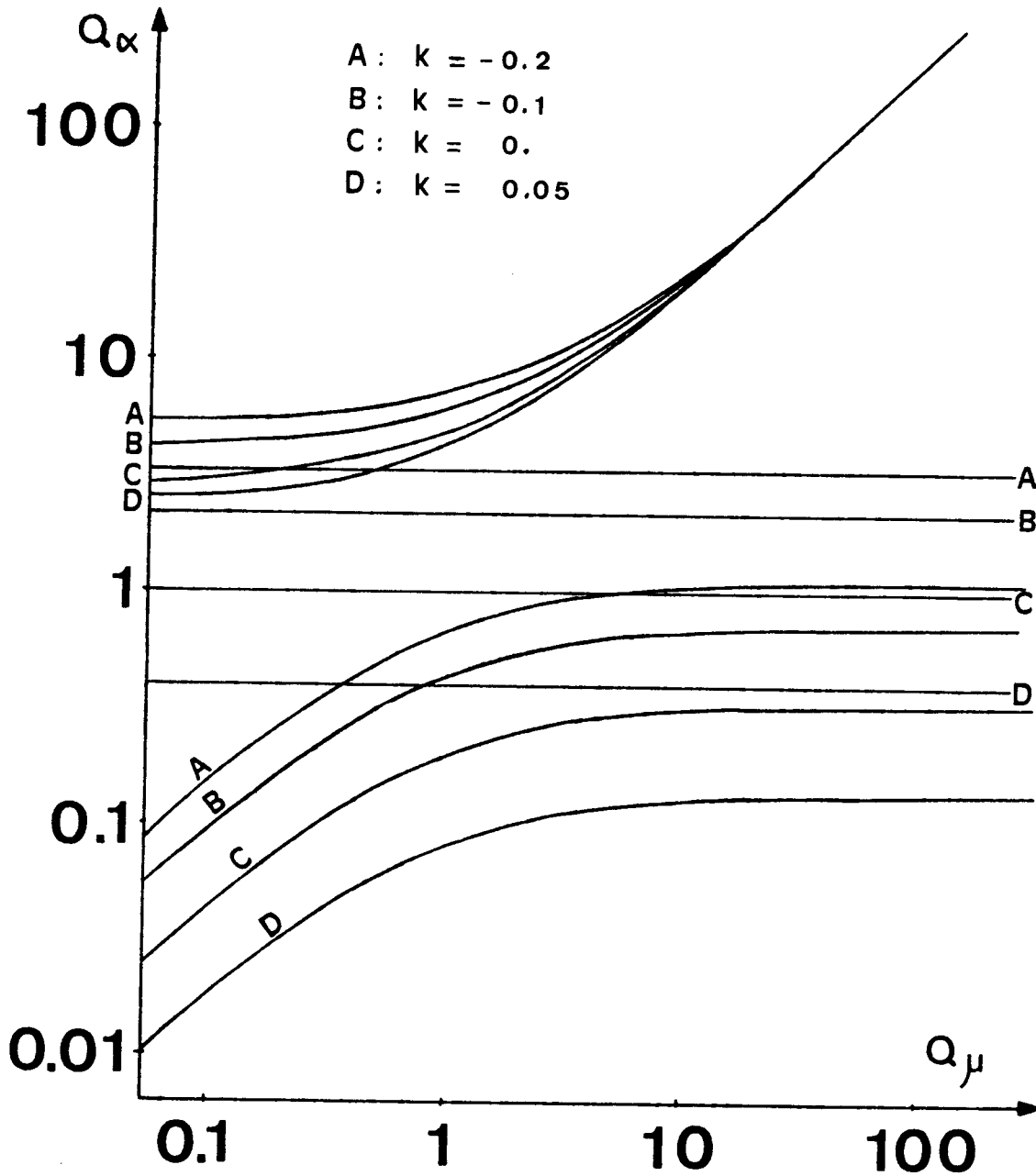


Figure VI-10.
 Différents régimes dans le plan $Q_\alpha - Q_\mu$ pour différents k .

$\partial\sigma/\partial T < 0$) : le fluide tend à aller du chaud vers le froid à l'interface. On favorisera alors toutes les situations caractérisées par une seule cellule convective dans la couche inférieure. Donc Q_μ étant fixé, augmentant Q_α en partant de 0, on peut maintenir à de plus hautes valeurs de Q_α la "suprématie" de la cellule thermogravitationnelle dans la couche inférieure et aussi retarder l'apparition de la cellule thermogravitationnelle dans la couche supérieure. Au contraire, pour des valeurs positives de k (c'est-à-dire $\partial\sigma/\partial T > 0$) : le fluide à l'interface tend à s'écouler du froid au chaud; la cellule thermogravitationnelle dans la couche inférieure disparaît pour de plus petite valeur de Q_α que lorsque $k = 0$, au bénéfice de la cellule thermogravitationnelle dans la couche supérieure.

Si on considère les pentes des vitesses à l'interface, on trouve que $\partial V_x^{(1)}/\partial Z$ et $\partial V_x^{(2)}/\partial Z$ sont positifs simultanément si

$$-\left(\frac{Q_\mu}{T_2} + \frac{Q_\alpha}{T_2}\right) < k < \frac{Q_\alpha}{T_2 Q_\mu} + \frac{1}{T_2} \quad (\text{VI-32})$$

Dans les autres cas, une pente est toujours positive et l'autre est négative : on observe un point de rebroussement à l'interface.

La figure VI-11 donne quelques exemples de profils pour différentes valeurs de Q_α , Q_μ et k . D'autres tabulations de ces profils de vitesse serviront lors des comparaisons avec l'étude expérimentale, exposées au paragraphe suivant.

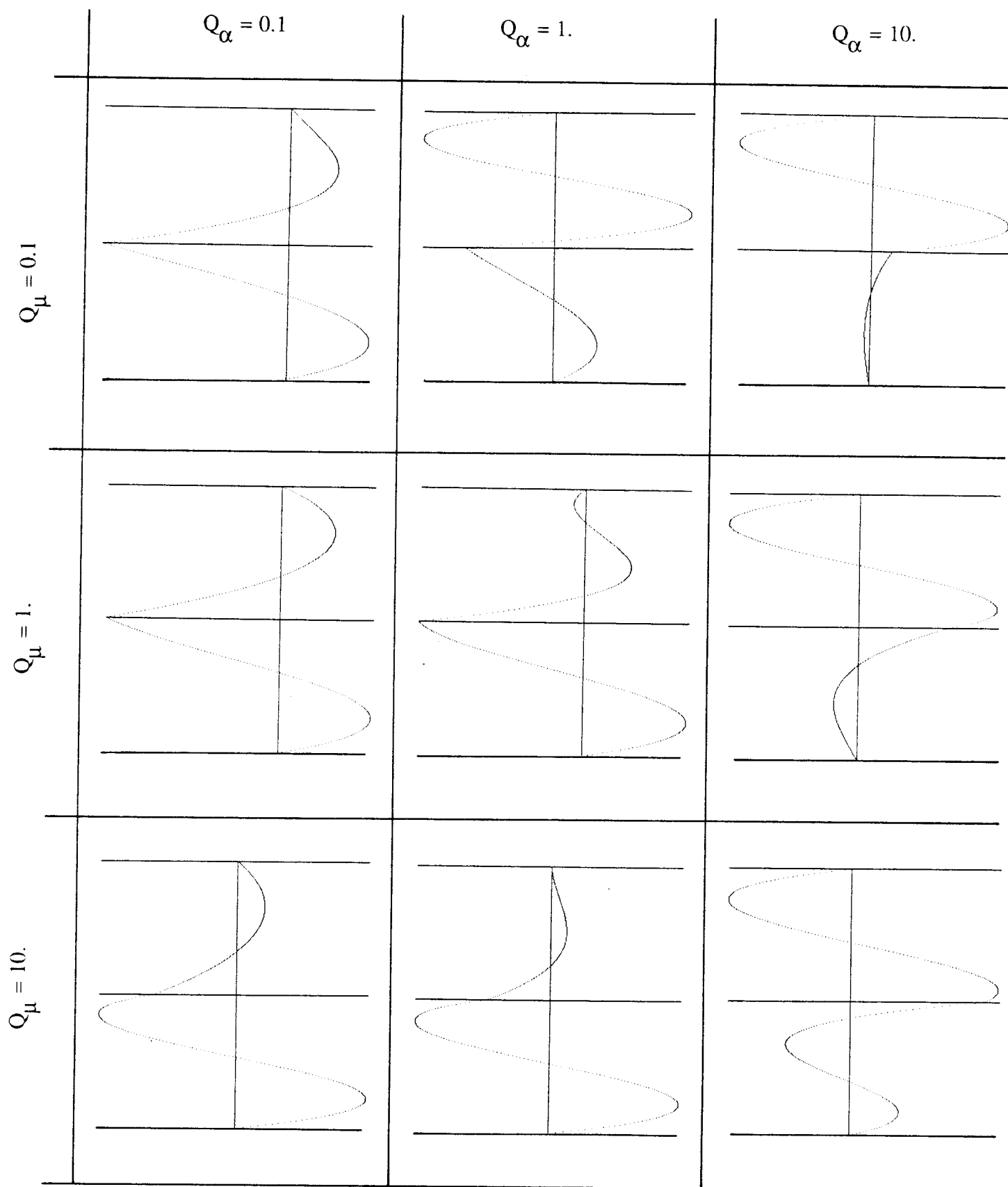


Figure VI-11.

Quelques exemples de profils de vitesse pour $k = -0.2$.

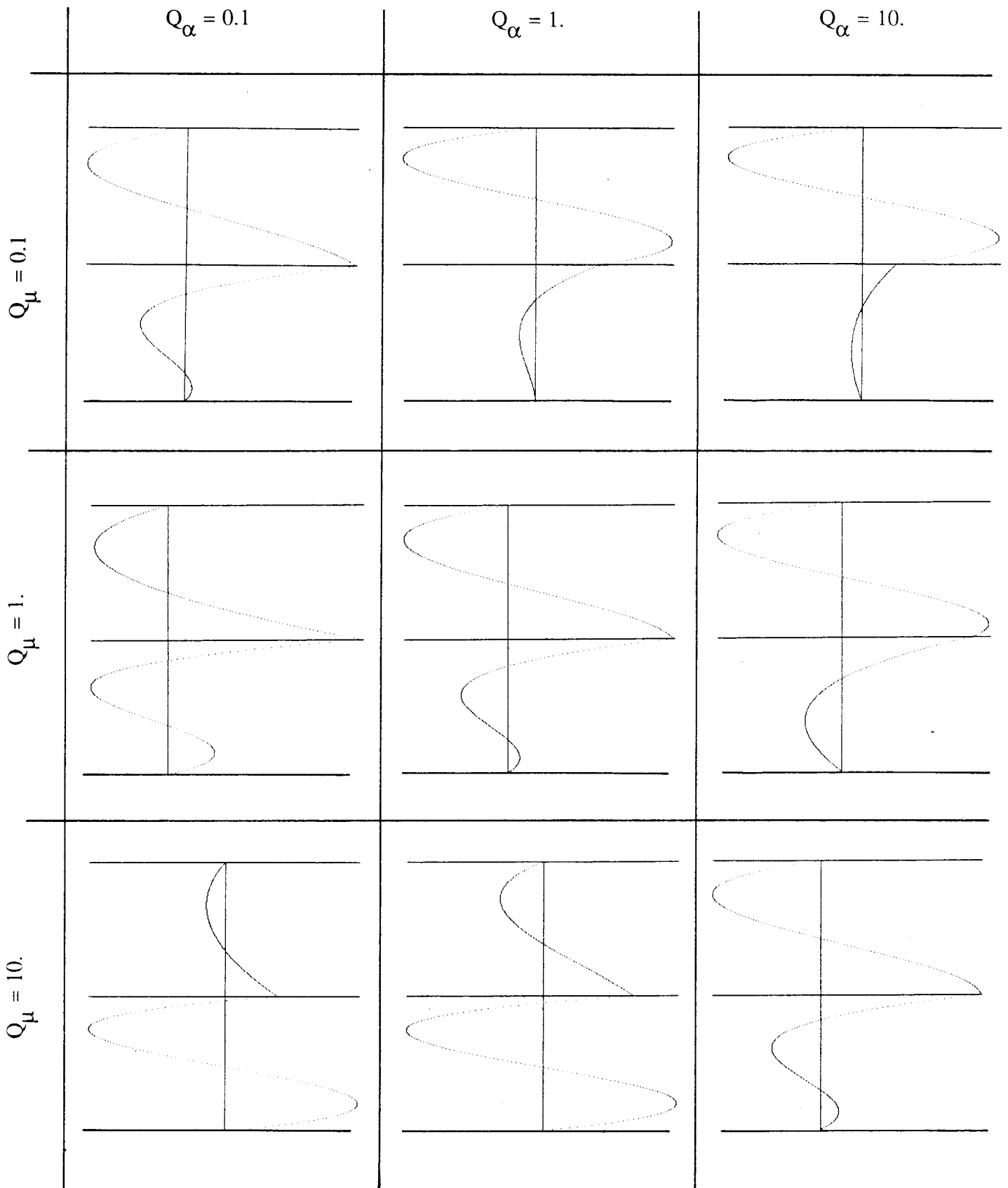


Figure VI-11 (bis).

Quelques exemples de profils de vitesse pour $k = 0.2$.

5. Comparaison avec les résultats expérimentaux.

Nous allons tout d'abord tenter d'expliquer à l'aide du modèle analytique les deux expériences pratiquées dans des bi-couches eau-heptanol. Pour la première expérience, la figure VI-4 donne le profil $V_x(z)$ mesuré le long de la médiane verticale. Rappelons que la couche d'eau de 5.6 mm d'épaisseur était surmontée d'une couche d'heptanol de 3.7 mm. A partir des propriétés physiques de l'heptanol et de l'eau (propriétés qui sont reprises à l'annexe C), on peut calculer, pour la température moyenne de l'expérience (21.3 °C), les valeurs des rapports Q_α et Q_μ définis par les équations (VI-16) et (VI-17). Nous avons obtenu $Q_\alpha = 1.33$ et $Q_\mu = 8.73$. Avec ces deux valeurs et $k = 0$, c'est-à-dire sans tenir compte de l'effet thermocapillaire, le profil de vitesse théorique, calculé à partir des expressions (VI-19) et (VI-20), est représenté à la figure VI-12. On observe immédiatement que les dérivées $\partial V_x / \partial z$ ne sont pas correctement prédites.

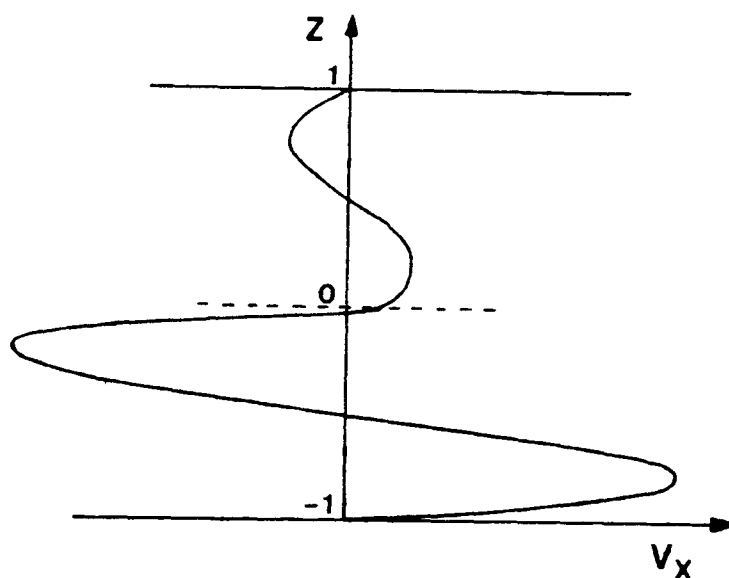


Figure VI-12.

Profil de vitesse obtenu à partir du modèle analytique avec $Q_\alpha = 1.33$, $Q_\mu = 8.73$ (et $k = 0$);
Les pentes $\partial V_x / \partial z$ ne sont pas prédites correctement.

Le modèle analytique avec $k = 0$ ne permet en effet pas à ces dérivées d'être de signe opposé, comme on l'observe dans le profil expérimental de la figure VI-4; puisque la vitesse à l'interface est visiblement orientée du froid vers le chaud, il est nécessaire de considérer un k positif et qui ne satisfasse pas la condition (VI-32) (donc plus grand que 0.096 ici). Des tables donnant la dépendance de la tension interfaciale en fonction de la température n'étant pas

disponibles au moment de ces calculs, nous avons recherché, par essais successifs, la valeur de k qui permettait au modèle analytique de ressembler au mieux au profil expérimental. La figure VI-13 donne un profil calculé avec $k = 0.35$ (Q_α et Q_μ demeurant bien sûr inchangés).

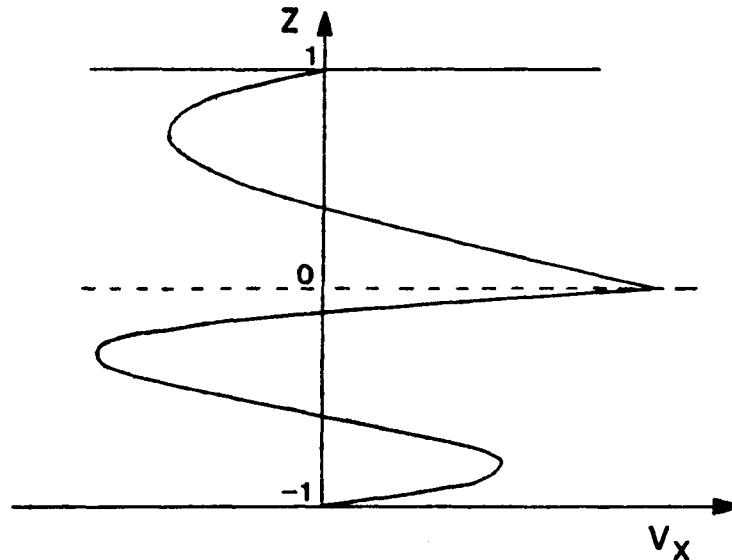


Figure VI-13.

Profil de vitesse obtenu à partir du modèle analytique avec $Q_\alpha = 1.33$, $Q_\mu = 8.73$ et $k = 0.35$.

Dans la seconde expérience avec les mêmes liquides, mais des épaisseurs différentes (3.7 mm d'eau et 5.6 mm d'heptanol), nous avons mesuré un profil $V_x(z)$ un peu surprenant à première vue : l'eau, dans la partie inférieure de la cavité, circule dans le sens contraire de la thermogravitation. La figure VI-5 montre en effet que les mouvements vont du froid vers le chaud dans la partie supérieure de la couche d'eau, tandis qu'ils sont orientés vers le froid dans le bas de la cavité. A l'interface, comme dans l'expérience considérée précédemment, on observe que la vitesse est extrême, avec encore un changement de signe de $\partial V_x / \partial z$. Les rapports calculés de Q_α et Q_μ valent cette fois respectivement 7.64 et 4.42. Une fois de plus, on constate que le profil de vitesse obtenu à partir du modèle, restreint à $k = 0$, ne prédit pas correctement les dérivées $\partial V_x / \partial z$ de part et d'autre de l'interface (voir la figure VI-14). Mais même le nombre de cellules convectives dans la couche inférieure n'est pas correct. Par contre, le profil calculé à partir du modèle avec une valeur de $k = 0.75$ correspond valablement à l'expérience (voir figure VI-15).

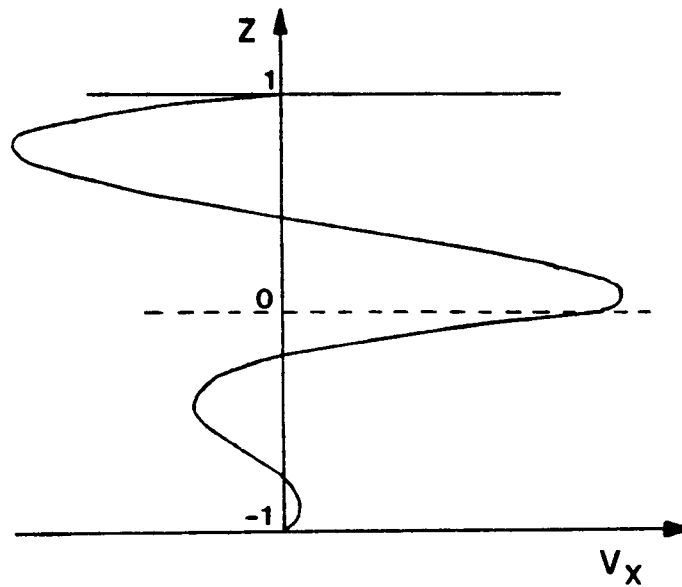


Figure VI-14.

Profil de vitesse obtenu à partir du modèle analytique avec $Q_\alpha = 7.64$ et $Q_\mu = 4.42$ ($k = 0$);
Les pentes $\partial V_x / \partial z$ ne sont pas prédites correctement.

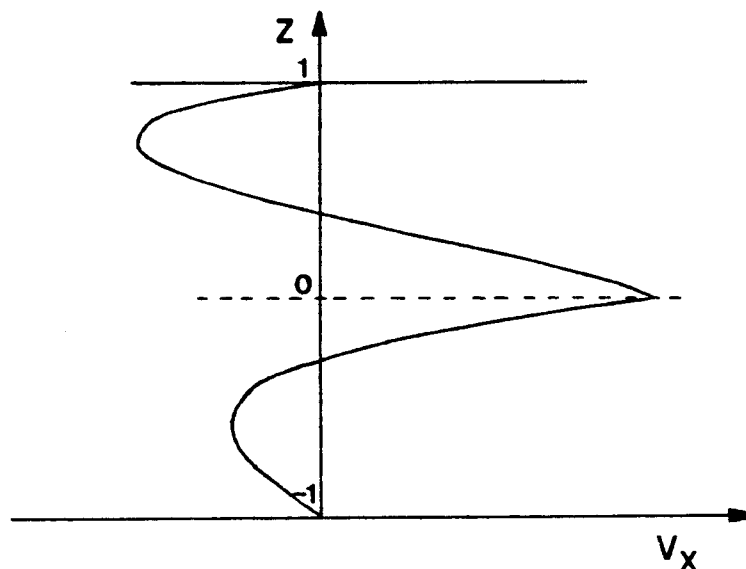


Figure VI-15.

Profil de vitesse obtenu à partir du modèle analytique avec $Q_\alpha = 7.64$, $Q_\mu = 4.42$ et $k = 0.75$.

A partir des valeurs de k (0.35 et 0.75) pour ces deux dernières expériences et de sa définition VI-18, nous avons déterminé que la dépendance de la tension interfaciale avec la

température $\partial\sigma/\partial T$ valait approximativement $0.03 \text{ mN m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ dans les deux cas. Il est possible aussi d'utiliser la condition de conservation de quantité de mouvement à l'interface (VI-1) pour déterminer, à partir de quelques valeurs des vitesses à proximité de l'interface, le gradient $\partial\sigma/\partial x$. En utilisant une borne supérieure pour le gradient de température : $\Delta T/l$, nous avons obtenu $\partial\sigma/\partial T = 0.017 \text{ mN m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, qui constitue une borne inférieure de la valeur réelle, ce qui est donc en accord avec notre détermination à partir du profil de vitesse complet. Il devenait particulièrement intéressant d'effectuer des mesures directes de ce coefficient, donc de mesurer la tension interfaciale en fonction de la température, afin de vérifier ce résultat tout à fait inattendu. Les résultats de ces mesures (par la méthode de Wilhelmy) indiquent que pour l'eau et l'heptanol, la tension interfaciale a une allure parabolique, passe par un maximum, et peut être approchée par la formule empirique

$$\sigma = -3.230 \cdot 10^{-4} T^2 + 3.94 \cdot 10^{-2} T + 6.70 \quad (\text{VI-33})$$

où T est exprimé en degrés Celcius. Les mesures sont également montrées à la figure VI-16.

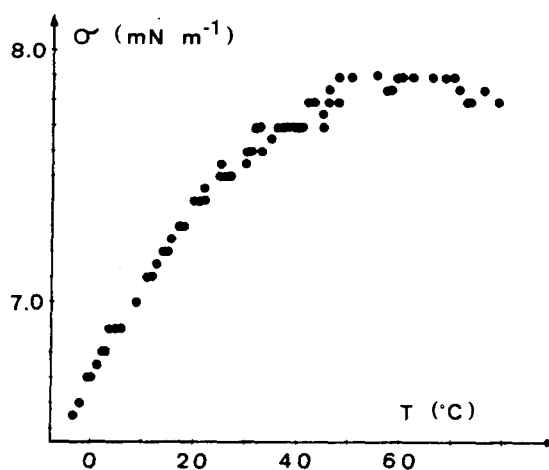


Figure VI-16.

Tension interfaciale en fonction de la température
pour le système eau-heptanol.

A la température moyenne de ces expériences ($21.3 \text{ }^\circ\text{C}$), la dérivée $\partial\sigma/\partial T$ vaut $0.026 \text{ mN m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, ce qui est en accord quantitatif avec la valeur obtenue à partir des profils de vitesse.

Pour les deux autres expériences que nous avons décrites au paragraphe 3., on se trouve dans des situations normales : la tension interfaciale est une fonction décroissante de la température. Pour l'expérience avec le système CCl_4 -eau (4.2 mm de CCl_4 surmonté de 6.3 mm d'eau), la figure VI-6 donne le profil $V_x(z)$ mesuré sur la médiane verticale de la cavité. A partir des propriétés physiques du CCl_4 et de l'eau (voir l'annexe C), on peut calculer, pour la température moyenne de l'expérience (24 °C), les valeurs des rapports Q_α et Q_μ définis par les équations (VI-16) et (VI-17). Nous avons obtenu $Q_\alpha = 0.29$ et $Q_\mu = 0.702$. En prenant ces deux valeurs et $k = 0$, le profil de vitesse théorique, calculé à partir des expressions (VI-19) et (VI-20), est représenté à la figure VI-17. On remarque que ce profil est déjà en accord avec l'expérience, même si les lobes convectifs n'ont pas tout à fait la même taille, et qu'un essai d'un autre profil théorique avec $k \neq 0$ ne devrait pas améliorer substantiellement l'accord qui existe.

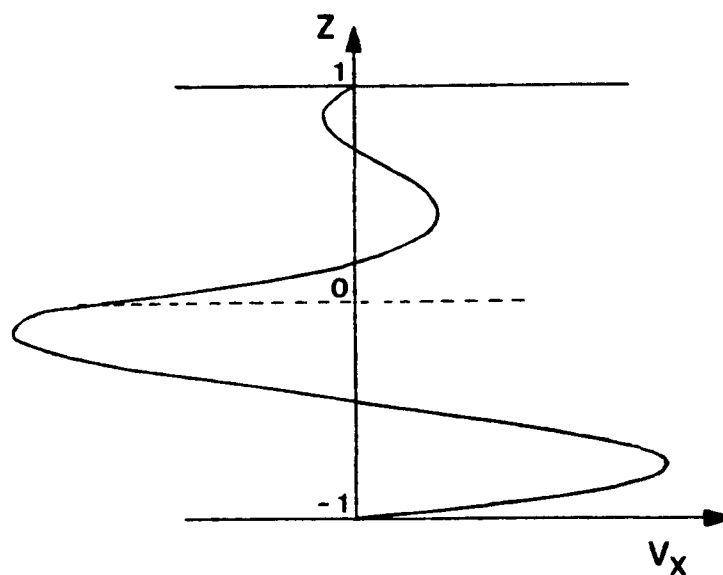


Figure VI-17.

Profil de vitesse obtenu à partir du modèle analytique. $Q_\alpha = 0.29$, $Q_\mu = 0.702$ (et $k = 0$).

Pour l'expérience dans le système eau-octane (10.6 mm d'eau recouverte de 3.3 mm d'octane), la figure VI-7 donne le profil $V_x(z)$ mesuré sur la médiane verticale de la cavité. A partir des propriétés physiques de l'octane et de l'eau (voir l'annexe C), on peut calculer, pour la température moyenne de l'expérience (24 °C), les valeurs des rapports Q_α et Q_μ définis par les équations (VI-16) et (VI-17). Nous avons obtenu $Q_\alpha = 0.307$ et $Q_\mu = 1.74$. En prenant ces deux valeurs et $k = 0$, le profil de vitesse théorique, calculé à partir des expressions (VI-19) et (VI-20), est représenté à la figure VI-18. On remarque ici aussi que déjà avec $k = 0$, on obtient un accord raisonnable avec l'expérience. On constate donc que pour ces deux dernières expériences, l'influence de k peut être considérée comme peu importante.

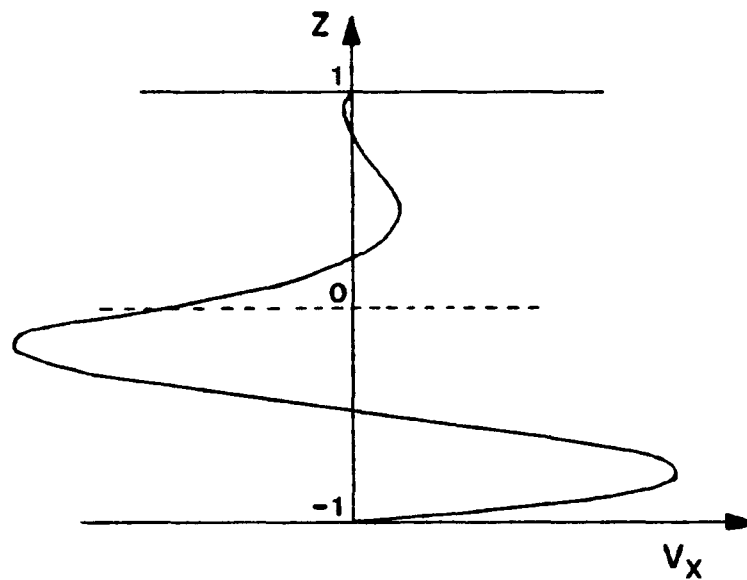


Figure VI-18.

Profil de vitesse obtenu à partir du modèle analytique. $Q_\alpha = 0.307$, $Q_\mu = 1.74$ (et $k = 0$).

6. Conclusion.

Nous avons abordé dans ce chapitre un nouveau type de problème convectif, d'un intérêt fondamental évident, puisqu'on a à considérer le couplage entre la convection naturelle dans deux couches, en tenant compte de l'effet thermocapillaire à l'interface. Les expériences montrent que l'influence de la tension interfaciale se manifeste de manière évidente surtout si le gradient $\partial\sigma/\partial x$ va à l'encontre des mouvements thermogravitationnels. Ceci est basé sur l'utilisation d'un modèle théorique simple (unidimensionnel, linéarisé) et considérant les deux seules forces (forces gravifiques et forces thermocapillaires) qui existent dans deux couches superposées de liquides immiscibles soumises à un gradient de température. Malgré sa simplicité, ce modèle a été appliqué aux expériences effectuées dans des cavités de dimensions finies (mais avec un rapport d'aspect plus grand que 3) et avec des gradients de température relativement importants (par exemple 5 K cm^{-1}). En particulier, pour les expériences dans le système eau-heptanol avec $\partial\sigma/\partial x$ positif, le gradient de tension interfaciale qui est déduit du profil théorique est en accord avec des mesures directes. Il semble qu'un modèle plus réaliste est seulement nécessaire si on désire décrire la convection dans une boîte de rapport d'aspect plus petit, ou si le gradient de température est plus élevé (avec la possibilité d'instabilité et/ou de convection oscillante), ou encore si on veut obtenir des informations sur le champ de vitesse proche des parois latérales de la cavité. Mais aussi longtemps qu'on est intéressé au nombre de cellules convectives, ce modèle est adéquat.

7. Bibliographie.

[1] Levich, V.G. : Physicochemical Hydrodynamics. Prentice-Hall (1962).

Villers, D., Platten, J.K. : "Thermal convection in superposed immiscible liquid layers", Appl. Sci. Research **45**(2) (1988) 145-152.

Villers, D., Platten, J.K. : "Temperature dependence of the interfacial tension between water and long-chain alcohols", J. Phys. Chem. **92** (1988) 4023-24.

Villers, D., Platten, J.K. : "Influence of interfacial tension gradients on thermal convection in two superposed immiscible liquid layers", Appl. Sci. Res. (1989 ou 1990).

Chapitre VII.

Conclusion générale et perspectives.

Henri Poincaré écrivait dans *La Science et l'Hypothèse* : "... Qu'est-ce donc qu'une bonne expérience ? C'est celle qui nous fait connaître autre chose qu'un fait isolé; c'est celle qui nous permet de prévoir, c'est-à-dire celle qui nous permet de généraliser". Nous ne prétendons pas que l'ensemble des expériences présentées dans cette thèse, aussi bien numériques que celles effectuées en laboratoire, ont déjà ce caractère totalement prédictif. Pour une géométrie, un nombre de Rayleigh et un nombre de Prandtl donnés, ainsi qu'un ensemble de nombres de Marangoni (M_1, M_2, \dots) caractérisant $\partial\sigma/\partial T$, il n'est pas encore possible de prédire avec assurance le type de mouvement convectif qui sera observé : monocellulaire stationnaire, multicellulaire stationnaire ou à dépendance spatio-temporelle, avec une fréquence donnée. Et dans le cas multicellulaire stationnaire, la convection peut être soit sous forme de cellules superposées, liées à des forces thermocapillaires et thermogravitationnelles opposées, soit multicellulaire par l'existence d'un motif spatial périodique dans la direction horizontale, avec une longueur d'onde connue. Cependant, nos expériences font connaître plus que "des faits isolés"; elles tendent à ce caractère prédictif souhaité, qui était totalement absent au début de ce travail.

Par exemple, nos expériences montrent que pour des petites différences de température, le type de convection ne dépend que du seul paramètre k ($= -4 Ma/Ra$). Si k est compris entre $1/3$ et 1 , on observe deux cellules superposées liées à l'opposition des forces thermocapillaires et thermogravitationnelles. Les différents cas sont schématisés à la figure VII-1, où les types de convection sont classés suivant k et ΔT (ou le nombre de Reynolds Re), encore qu'il eût fallu un diagramme bien plus général considérant le nombre de Prandtl et le paramètre géométrique A . Cette prédiction que nous venons d'énoncer, concernant les écoulements de base, se complique lorsqu'on augmente ΔT . A partir d'expériences et de simulations, nous avons montré qu'il existe alors une transition vers des états à structure spatiale périodique, parce que les cellules de base deviennent instables et font place à des états multicellulaires stationnaires. Nous n'avons pas déterminé "l'équation" de cette courbe de séparation (elle est

probablement fonction de k , Pr , A), mais nous avons démontré l'existence d'au moins deux types de convection multicellulaire stationnaire à structure spatiale périodique. La figure VII-1 en suggère d'autres.

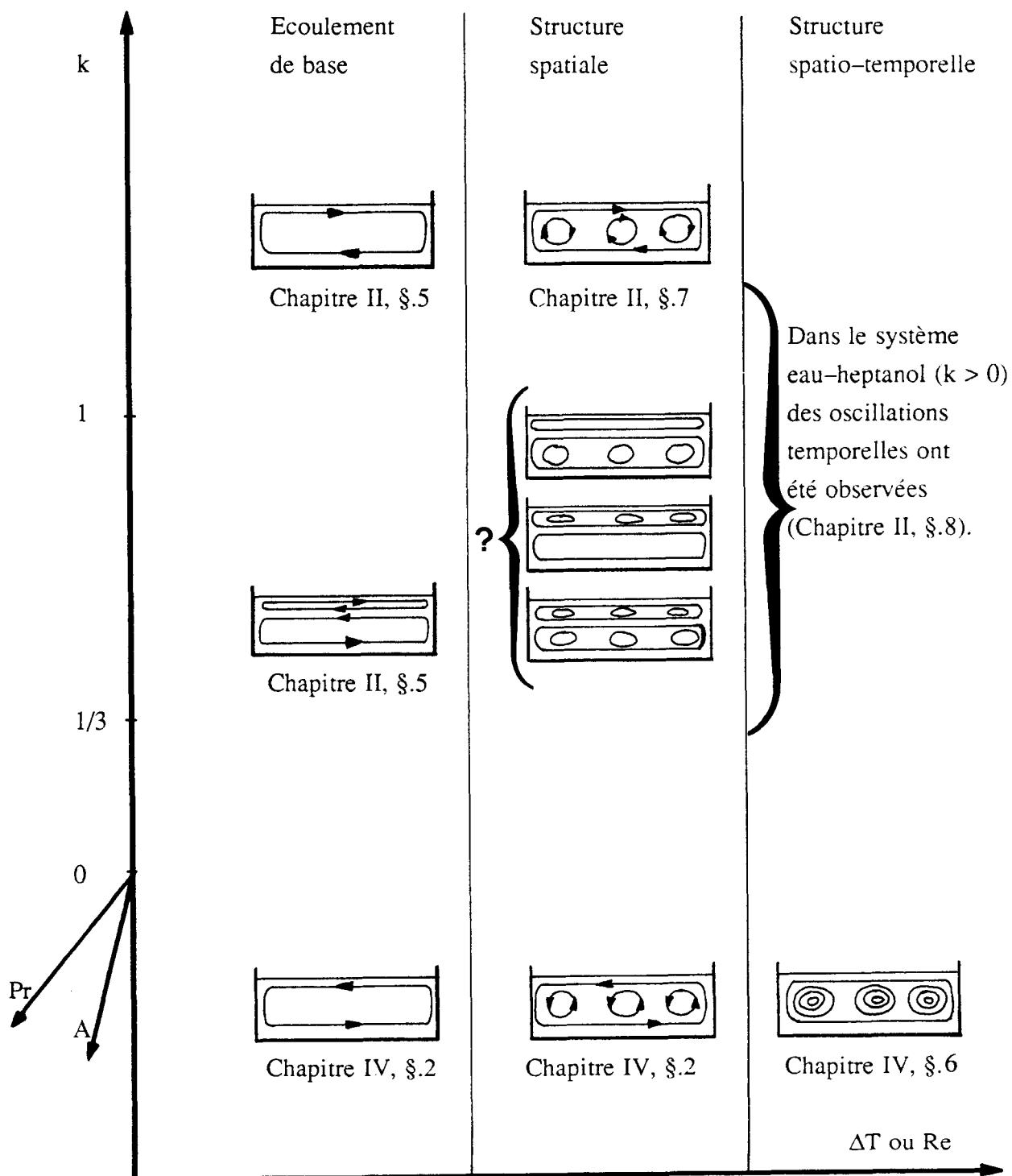


Figure VII-1

Nos expériences et simulations ont également établi l'existence d'une seconde transition vers des états oscillants, à dépendance spatio-temporelle. Nous donnons des ordres de grandeur des valeurs critiques dans le plan $Ra-Ma$, pour une valeur donnée de Pr . Cette courbe critique approximative a néanmoins été établie à partir d'expériences effectuées à rapport d'aspect A variable. Il en va de même pour la détermination des périodes des oscillations, pour lesquelles nous proposons aussi une relation empirique.

Il faut tendre à obtenir à court terme un diagramme complet prédictif des différents états convectifs, en fonction de k , Re , Pr et A . Cet objectif ne peut être réalisé que progressivement. Nous croyons qu'il sera nécessaire dans une première étape d'effectuer au moins une analyse linéaire de stabilité, du genre de celle de Smith et Davis, mais tenant compte à la fois de la thermocapillarité et de la thermogravitation. Une théorie de ce type est généralement limitée à une couche infinie; elle permet d'incorporer analytiquement le rôle du nombre de Prandtl. Il n'est même pas évident que la structure spatiale périodique stationnaire soit possible dans ce cas: la transition pourrait se faire immédiatement vers une structure temporelle sous forme d'ondes propagatives. Le rôle des parois latérales (A fini) devrait être étudié dans une seconde étape, et on peut penser que les parois latérales rigides "arrêtent" les ondes propagatives et favorisent une structure périodique stationnaire comme nous l'avons montré dans ce travail. Tous ces résultats nouveaux appelleraient aussitôt une validation par des expériences et des simulations nouvelles. Il n'est pas évident dès lors que la vélocimétrie laser-Doppler reste l'outil approprié lorsqu'on veut étudier une structure spatiale instationnaire. Il faudra peut-être se tourner vers d'autres techniques expérimentales telle la vélocimétrie par déplacement d'images de particules, qui permet une mesure globale et instantanée du champ de vitesse.

Nous espérons dans un futur proche pouvoir effectuer de tels calculs et de telles expériences, mais en recherche, il arrive un moment où il faut s'arrêter et faire l'inventaire du travail déjà accompli pour mieux envisager un programme futur.

ANNEXES

Annexe A.

Le modèle numérique.

1. Les différences finies.

Une résolution analytique exacte et complète des équations de Navier–Stokes (voir chapitre I, équations (I–6) à (I–14)) est en général impossible (au vu de l'état actuel des connaissances dans le domaine de la résolution des équations aux dérivées partielles non–linéaires), sauf si des simplifications importantes peuvent être faites (comme dans le cas du modèle unidimensionnel développé au chapitre II), au prix de l'imposition d'hypothèses particulièrement limitatives. Dès lors, une approche de ces problèmes par une méthode de résolution de type numérique s'avère une solution raisonnable, compte tenu des moyens techniques dont nous disposons actuellement : des ordinateurs de plusieurs millions d'octets de mémoire centrale pouvant effectuer de l'ordre d'un million d'opérations arithmétiques en virgule flottante par seconde.

Parmi les nombreuses techniques existantes, nous avons choisi la méthode des différences finies, simple et efficace, particulièrement bien adaptée pour résoudre des problèmes dépendants du temps, mais (le plus souvent) rendus bidimensionnels, dans des géométries rectangulaires. D'autres méthodes numériques (les éléments finis, les éléments de frontière, les développements en séries, les méthodes spectrales,...) présentent néanmoins des avantages qui pourraient être utiles pour des extensions de ce travail; citons :

- La modélisation d'interfaces courbes et/ou mobiles.
- Une étude tridimensionnelle.
- La détection précise de points critiques.
- L'établissement de diagrammes de bifurcation.

Notons que les études tridimensionnelles, qui ne sont pratiquement utilisables que si on dispose d'ordinateurs vectoriels, rendent mieux compte de la réalité (forcément tridimensionnelle) que les méthodes bidimensionnelles. Par exemple Behnia *et al.* [1] observe des variations de l'ordre de plusieurs dizaines de pourcents sur certaines valeurs caractéristiques du champ de vitesse lorsqu'il passe d'une étude bidimensionnelle sur un rectangle à une étude tridimensionnelle similaire dans un parallépipède rectangle.

Les simples mots "différences finies" décrivent un concept : l'approximation des dérivées par des différences, mais pas encore un schéma précis de résolution; nous allons donc décrire dans les paragraphes qui suivent cette méthode, dans le cadre de l'utilisation que nous en avons faite.

1.a. La discrétisation spatiale.

Le modèle bidimensionnel des équations de Navier-Stokes et de l'énergie (voir éqs (I-21) à (I-24)) est utilisé. Il a l'avantage de ne plus comprendre que deux équations d'évolution pour la température et la vorticité (sous forme réduite bien entendu), avec l'adjonction éventuelle d'une équation pour la fraction massique si on considère un mélange où la thermodiffusion peut jouer un rôle non négligeable.

Le domaine rectangulaire du plan X-Z (avec $0 \leq X \leq LX$ et $0 \leq Z \leq LZ$) dans lequel nous décrivons les champs de température et de vitesse est discrétisé suivant un maillage de NX et NZ lignes équidistantes et parallèles aux axes X et Z. Un point quelconque du maillage, repéré par les indices i et j ($1 \leq i \leq NX$ et $1 \leq j \leq NZ$) aura donc les coordonnées X_i et Z_j . Ces points sont séparés des incréments ΔX et ΔZ (voir figure (A-1)).

$$X_i = (i-1) \Delta X \quad \text{et} \quad Z_j = (j-1) \Delta Z \quad (\text{A-1})$$

$$\Delta X = \frac{LX}{NX - 1} \quad \text{et} \quad \Delta Z = \frac{LZ}{NZ - 1} \quad (\text{A-2})$$

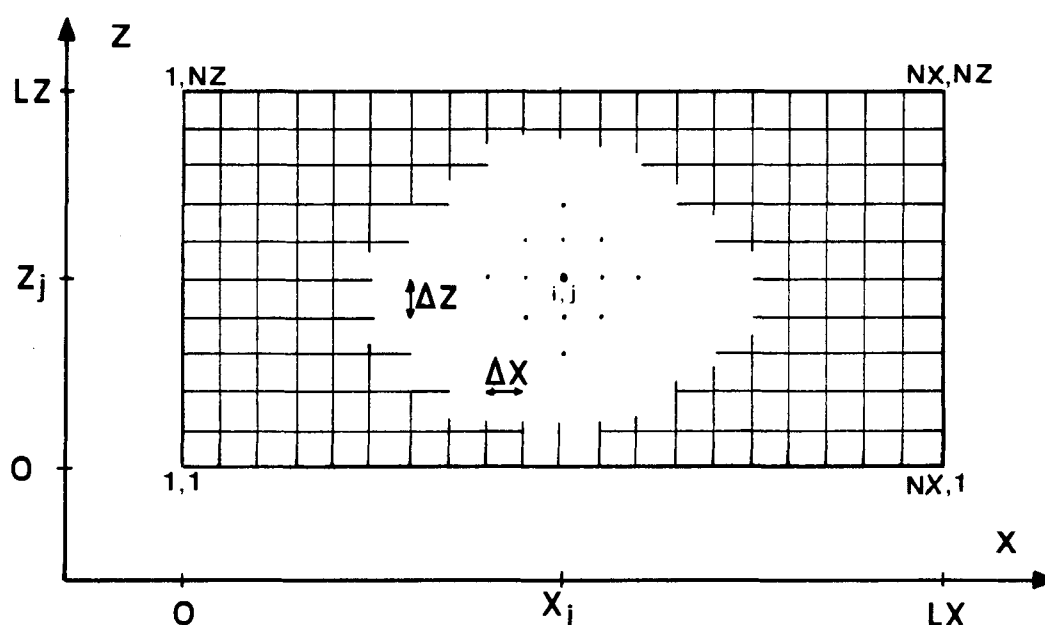


Figure A-1

La valeur d'une fonction F (la vorticité Φ , la température T , la fonction de courant Ψ ou la fraction massique N) en un point i,j du maillage sera notée $F_{i,j}$. En utilisant des développements en série de Taylor de ces fonctions, tronqués après le terme du second ordre, nous pouvons exprimer les dérivées partielles spatiales en termes de différences (finies) d'éléments $F_{i,j}$. Pour des raisons pratiques qui seront analysées plus loin, nous utilisons pour les noeuds internes ($2 \leq i \leq NX$ et $2 \leq j \leq NZ$) des différences finies centrales, qui impliquent pour exprimer une dérivée en un point donné d'utiliser les deux points voisins de part et d'autre. Pour une dérivée première (par exemple suivant x) :

$$\left. \frac{\partial F}{\partial X} \right|_{i,j} = \frac{F_{i+1,j} - F_{i-1,j}}{2 \Delta X} \quad (\text{A-3})$$

et pour une dérivée seconde :

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \right|_{i,j} = \frac{F_{i-1,j} - 2 F_{i,j} + F_{i+1,j}}{\Delta X^2} \quad (\text{A-4})$$

A l'aide de ces définitions, on peut récrire les équations d'évolutions (I-22) et (I-23) pour les noeuds internes ($2 \leq i \leq NX-1$ et $2 \leq j \leq NZ-1$) :

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_{i,j}}{dt} = & \frac{(\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}) (\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j-1})}{2 \Delta X} - \frac{(\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}) (\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j})}{2 \Delta Z} \\ & + \frac{(\Phi_{i-1,j} - 2 \Phi_{i,j} + \Phi_{i+1,j})}{\Delta X^2} + \frac{(\Phi_{i,j-1} - 2 \Phi_{i,j} + \Phi_{i,j+1})}{\Delta Z^2} \\ & - \frac{Ra}{Pr} \frac{(T_{i+1,j} - T_{i-1,j})}{2 \Delta X} \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_{i,j}}{dt} = & \frac{(\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}) (T_{i,j+1} - T_{i,j-1})}{2 \Delta X} - \frac{(\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}) (T_{i+1,j} - T_{i-1,j})}{2 \Delta Z} \\ & + \frac{1}{Pr} \frac{(T_{i-1,j} - 2 T_{i,j} + T_{i+1,j})}{\Delta X^2} \\ & + \frac{1}{Pr} \frac{(T_{i,j-1} - 2 T_{i,j} + T_{i,j+1})}{\Delta Z^2} \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

avec

$$\Phi_{i,j} = \frac{(\Psi_{i-1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i+1,j})}{\Delta X^2} + \frac{(\Psi_{i,j-1} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j+1})}{\Delta Z^2} \quad (\text{A-7})$$

1.b. La discrétisation des conditions aux bords.

Examinons maintenant la discrétisation des conditions aux bords; souvent, celle-ci ne peut pas être effectuée en utilisant des différences finies centrales. Si on considère une fonction F proche du bord vertical $X = 0$ ($i=1$), on utilisera pour établir les formules de différences finies les développements en séries de Taylor pour les fonctions F en des points à l'intérieur du domaine d'étude:

$$\begin{aligned} F_{2,j} = F_{1,j} + \Delta X \left. \frac{\partial F}{\partial X} \right|_{1,j} + \frac{\Delta X^2}{2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \right|_{1,j} + \frac{\Delta X^3}{6} \left. \frac{\partial^3 F}{\partial X^3} \right|_{1,j} \\ + \frac{\Delta X^4}{24} \left. \frac{\partial^4 F}{\partial X^4} \right|_{1,j} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A-8a})$$

$$\begin{aligned} F_{3,j} = F_{1,j} + 2\Delta X \left. \frac{\partial F}{\partial X} \right|_{1,j} + 2\Delta X^2 \left. \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \right|_{1,j} + \frac{4\Delta X^3}{3} \left. \frac{\partial^3 F}{\partial X^3} \right|_{1,j} \\ + \frac{2\Delta X^4}{3} \left. \frac{\partial^4 F}{\partial X^4} \right|_{1,j} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A-8b})$$

$$\begin{aligned} F_{4,j} = F_{1,j} + 3\Delta X \left. \frac{\partial F}{\partial X} \right|_{1,j} + \frac{9\Delta X^2}{2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \right|_{1,j} + \frac{9\Delta X^3}{2} \left. \frac{\partial^3 F}{\partial X^3} \right|_{1,j} \\ + \frac{27\Delta X^4}{8} \left. \frac{\partial^4 F}{\partial X^4} \right|_{1,j} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A-8c})$$

etc

Nous allons dans les lignes qui suivent donner quelques exemples de conditions que nous avons utilisées. Il est évident que cette liste ne saurait être exhaustive, puisque chacun des quatre bords possède de l'ordre d'une dizaine de conditions possibles et que dès lors un programme suffisamment général, tel que nous l'avons écrit, peut combiner toutes ces possibilités et est donc capable de traiter des milliers de problèmes convectifs différents, avant

même que l'on ait fixé les valeurs des nombres sans dimensions.

Bords thermostatés : si une température est fixée le long d'un bord, on n'effectue aucune approximation et on écrit par exemple

$$T_{1,j} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad T_{NX,j} = \frac{1}{2} \quad (\text{A-9})$$

Le bord gauche est à la température (réduite) $-1/2$ alors que le bord opposé est à $T=1/2$.

Bords conducteurs : si le bord inférieur par exemple est conducteur de la chaleur et est soumis à un gradient de température, on ne fait également pas d'approximation et on écrit une dépendance linéaire de la température :

$$T_{i,1} = -\frac{1}{2} + \frac{i-1}{NX-1} \quad (\text{A-10})$$

Bords isolants : pour un bord en matériau parfaitement isolant pour lequel on peut considérer que le flux de chaleur perpendiculaire est nul, on utilise la condition de Neumann donnée par l'équation (I-15) : $\partial T/\partial X = 0$ par exemple pour une paroi latérale isolante. Sous forme de différences finies au deuxième ordre, cette condition s'obtient à partir des expressions (A-8a) et (A-8b), tronquées après le terme du deuxième ordre, après élimination de la dérivée seconde.

$$T_{1,j} = \frac{4 T_{2,j} - T_{3,j}}{3} \quad (\text{A-11})$$

Transfert de Newton : on peut, par exemple pour un bord supérieur exposé à une "ambiance" de température fixée, tenir compte d'un transfert de chaleur tel que la loi de Newton le propose (voir éq. (I-16)) :

$$T_{i,NZ} = \frac{4 T_{i,NZ-1} - T_{i,NZ-2} + 2 Bi \Delta Z T_{\text{gaz}}}{(3 + 2 Bi \Delta Z)} \quad (\text{A-12})$$

où T_{gaz} est la température (réduite) de l'ambiance surmontant le bord supérieur. On remarque que si le nombre de Biot (caractérisant l'importance du transfert de chaleur vers la phase gazeuse) est nul, on retrouve alors une condition similaire à (A-11), tandis que si Bi est très grand, la température est fixée à la température de l'ambiance T_{gaz} .

Bords imperméables et indéformables : cette condition est satisfaite en imposant que la fonction de courant soit constante le long du bord. On fixe arbitrairement très souvent Ψ à 0 sur tous les bords. Toutefois, pour des problèmes d'écoulement entre deux parois, on fixe des valeurs différentes de Ψ sur les deux murs de manière à permettre un flux de matière global non nul entre les deux limites.

Bords rigides : cette condition pour le bord vertical $X = 0$ ($i=1$) par exemple est trouvée à partir de (A-8a) et (A-8b) (si $F \equiv \Psi$), tronquées après le quatrième terme et en éliminant $\partial^3 \Psi / \partial X^3$ (en n'oubliant pas qu'ici $\partial \Psi / \partial X = V_Z = 0$). On obtient :

$$\Phi_{i,1} = \frac{8 \Psi_{i,2} - \Psi_{i,3} - 7 \Psi_{i,1}}{2 \Delta Z^2} \quad (\text{A-13})$$

Bords libres : la condition (I-25) d'absence de tensions tangentielles devient :

$$\Phi_{i,NZ} = 0 \quad (\text{A-14})$$

Bords soumis aux forces de tension superficielle : La condition (II-11) pour le bord supérieur est approchée par :

$$\Phi_{i,NZ} = \left[\frac{M2}{Pr} T_{i,NZ} - \frac{M1}{Pr} \right] \frac{T_{i+1,NZ} - T_{i-1,NZ}}{2 \Delta Z} \quad (\text{A-15})$$

Les conditions aux limites périodiques : l'imposition de conditions périodiques revêt un caractère restrictif, puisqu'elles reposent sur l'existence d'un motif spatial périodique de dimension imposée, et par conséquent non-ajustable par le processus numérique, mais simplement paramétrisable; leur utilisation s'avère intéressante, si la longueur d'onde spatiale d'un motif est connue a priori (fournie par une étude expérimentale ou par une théorie généralement linéaire). Si on imagine une cavité infinie verticalement, soumise à un gradient de température latéral (voir figure A-2), les conditions de périodicité sur la température et les vitesses (dérivées de la fonction de courant) s'écrivent :

$$T_{i,1} = T_{i,NZ} = \frac{T_{i,2} + T_{i,NZ-1}}{2} \quad (\text{A-16})$$

$$\Psi_{i,1} = \Psi_{i,NZ} = \frac{\Psi_{i,2} + \Psi_{i,NZ-1}}{2} \quad (\text{A-17})$$

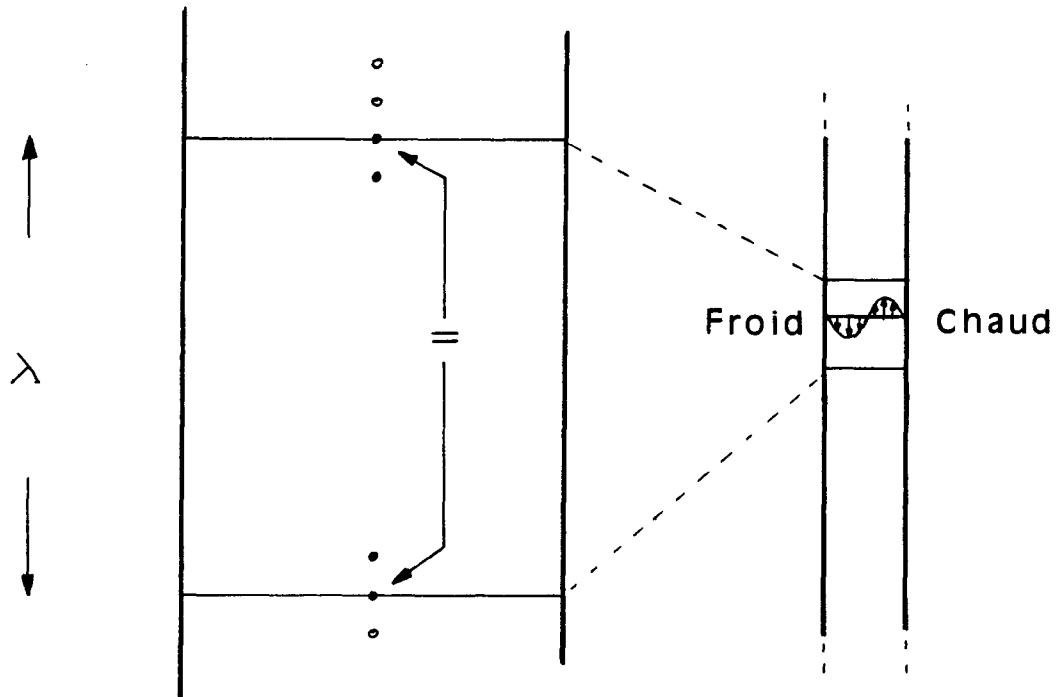


Figure A-2.

Exemple de situation modélisable
par des conditions aux limites périodiques.

1.c. Le schéma d'intégration temporelle.

La méthode la plus simple d'approcher les dérivées temporelles dans les équations d'évolutions (A-5) et (A-6) est la méthode d'Euler, du premier ordre, de manière explicite ou implicite. Si $F_{i,j}^n$ représente une fonction quelconque Φ , T ou N au point i,j et au pas d'intégration n , ces deux méthodes sont :

$$\text{Euler explicite} \quad \frac{F_{i,j}^{n+1} - F_{i,j}^n}{\Delta t} = f(F_{i,j}^n) \quad (\text{A-18})$$

$$\text{Euler implicite} \quad \frac{F_{i,j}^{n+1} - F_{i,j}^n}{\Delta t} = f(F_{i,j}^{n+1}) \quad (\text{A-19})$$

Δt est l'écart temporel qui sépare l'itération n de l'itération $n+1$.

La méthode explicite est assurément la plus simple à appliquer, elle a aussi l'avantage de requérir le moins de mémoire d'ordinateur et le moins de temps de calcul par itération. Par contre, c'est la plus mauvaise des méthodes sur le plan de la stabilité numérique (voir Peaceman et Rachford [2]); Par exemple, pour la résolution de l'équation de la chaleur $\partial T/\partial t = \nabla^2 T$, un calcul de propagation d'erreurs est possible et indique que la méthode est numériquement stable seulement si le pas temporel Δt est plus petit que $\Delta X^2/4$. Cette limite, qui peut être encore abaissée du fait des termes non linéaires dans les équations de Navier-Stokes, rend finalement la méthode explicite peu intéressante.

La méthode totalement implicite possède des propriétés de stabilité meilleures et permet l'utilisation de pas temporels grands (le schéma d'Euler implicite est même inconditionnellement stable pour n'importe quel pas temporel dans le cas de la résolution de l'équation de la chaleur). Malheureusement, l'implémentation de cette méthode nécessite la résolution de $2.NX.NZ$ équations non linéaires à $2.NX.NZ$ inconnues, ce qui augmente très fortement le temps de résolution ainsi que la mémoire nécessaire. Cette méthode devient rapidement prohibitive pour de grandes valeurs de NX et NZ .

Nous avons choisi d'utiliser une méthode intermédiaire, dite aux directions alternées (ou A.D.I., introduite par Peaceman et Rachford).

Au cours d'un premier pas temporel, à partir des $F_{i,j}$ connus à l'itération n , les équations d'évolution pour les $F_{i,j}$ sont écrites de manière implicite pour F dans une direction déterminée (X ou Z), tandis que les autres variables apparaissent explicitement. Après la résolution des systèmes d'équations obtenus, on obtient donc tous les $F_{i,j}$ à l'itération $n+1$. On reprend alors l'intégration par un second pas temporel pour lequel on inverse la direction de la partie implicite (en Z ou X), pour obtenir finalement tous les $F_{i,j}$ à l'itération $n+2$. Par exemple, pour l'équation d'évolution de la vorticité, on résoudra successivement (les parties implicites sont en gras) :

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}^n}{\Delta t} = & \frac{(\Psi_{i+1,j}^n - \Psi_{i-1,j}^n) (\Phi_{i,j+1}^{n+1} - \Phi_{i,j-1}^{n+1})}{2 \Delta X} \\ & - \frac{(\Psi_{i,j+1}^n - \Psi_{i,j-1}^n) (\Phi_{i+1,j}^n - \Phi_{i-1,j}^n)}{2 \Delta Z} \\ & + \frac{(\Phi_{i-1,j}^n - 2 \Phi_{i,j}^n + \Phi_{i+1,j}^n)}{\Delta X^2} + \frac{(\Phi_{i,j-1}^{n+1} - 2 \Phi_{i,j}^{n+1} + \Phi_{i,j+1}^{n+1})}{\Delta Z^2} \\ & - \frac{Ra}{Pr} \frac{(T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n)}{2 \Delta X} \end{aligned} \quad (A-20)$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi_{i,j}^{n+2} - \Phi_{i,j}^{n+1}}{\Delta t} &= \frac{(\Psi_{i+1,j}^{n+1} - \Psi_{i-1,j}^{n+1})}{2 \Delta X} \frac{(\Phi_{i,j+1}^{n+1} - \Phi_{i,j-1}^{n+1})}{2 \Delta Z} \\
&- \frac{(\Psi_{i,j+1}^{n+1} - \Psi_{i,j-1}^{n+1})}{2 \Delta Z} \frac{(\Phi_{i+1,j}^{n+2} - \Phi_{i-1,j}^{n+2})}{2 \Delta X} \\
&+ \frac{(\Phi_{i-1,j}^{n+2} - 2 \Phi_{i,j}^{n+2} + \Phi_{i+1,j}^{n+2})}{\Delta X^2} + \frac{(\Phi_{i,j-1}^{n+1} - 2 \Phi_{i,j}^{n+1} + \Phi_{i,j+1}^{n+1})}{\Delta Z^2} \\
&- \frac{Ra}{Pr} \frac{(T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1})}{2 \Delta X}
\end{aligned} \tag{A-21}$$

Le grand avantage de cette méthode par rapport à la méthode implicite est que les systèmes d'équations à résoudre sont linéaires et contiennent moins de variables (mais sont en contre-partie plus nombreux). Les équations de la forme (A-20) conduisent à résoudre $NX-2$ systèmes de $NZ-2$ équations à $NZ-2$ inconnues. De plus, ces systèmes sont tridiagonaux (l'équation pour $\Phi_{i,j}^{n+1}$ par exemple ne contient que les inconnues $\Phi_{i,j-1}^{n+1}$, $\Phi_{i,j}^{n+1}$ et $\Phi_{i,j+1}^{n+1}$); de tels systèmes sont aisément solubles par l'algorithme de Thoma, de complexité linéaire. Notons d'ailleurs que c'est parce qu'on utilise des différences finies centrales au deuxième ordre qu'on obtient des systèmes d'équations tridiagonaux. La résolution de deux pas d'intégration successifs, avec des directions alternées, possède donc une complexité d'ensemble linéaire en le nombre de noeuds $NX.NZ$, tout comme le schéma totalement explicite. Cependant, les propriétés de stabilité numérique sont nettement améliorées et permettent par conséquent d'utiliser des pas temporels plus grands. Les termes non linéaires influençant fortement la stabilité numérique, et une étude théorique de ces problèmes de stabilité étant impossible, le pas temporel sera toujours optimisé par recherches successives (essais et erreurs!).

1.d. La résolution de $\Phi = \nabla^2 \Psi$.

La fonction de courant n'ayant pas d'équation correspondante d'évolution, il est nécessaire de remettre à jour régulièrement les $\Psi_{i,j}$ à partir des valeurs renouvelées de la vorticité $\Phi_{i,j}$. L'équation discrétisée (A-7) doit donc être résolue après chaque paire d'itérations temporelles, ce qui constitue un système d'équations linéaires de $NX.NZ$ équations à $NX.NZ$ inconnues. Une résolution par une méthode "exacte", de type triangularisation ou diagonalisation, de complexité $(NX.NZ)^2$, ferait évidemment perdre le bénéfice d'un algorithme linéaire pour les itérations temporelles. Par contre, une méthode itérative peut être utilisée avantageusement, puisque les valeurs précédentes des $\Psi_{i,j}$ constituent d'excellentes

valeurs de départ pour un processus itératif. La méthode utilisée est la méthode classique de Gauss-Seidel avec un coefficient de relaxation ou de surrelaxation (Durand [3]), dont la formule de réactualisation s'écrit (pour $\Delta X = \Delta Z$):

$$\Psi_{i,j} = \Psi_{i,j} + \alpha \left[(\Psi_{i-1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i+1,j}) + (\Psi_{i,j-1} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j+1}) - \Phi_{i,j} \Delta X^2 \right] \quad (\text{A-22})$$

Le coefficient α est le coefficient de surrelaxation, il vaut :

$$\alpha = (2 - \pi \Delta X)/4 \quad (\text{A-23})$$

1.e. Le calcul de valeurs témoins.

En cours d'intégration des équations d'évolution, ou lorsqu'on a atteint un état stationnaire, on désire caractériser l'écoulement global par un petit nombre de valeurs, plutôt que par les $2 \times NX \times NZ$ valeurs de la température et de la fonction de courant. Ces valeurs "témoins" sont soit locales, soit globales. Parmi les grandeurs locales, les plus fréquemment utilisées sont:

- i) La valeur $\left[\begin{array}{c} \text{maximale} \\ \text{minimale} \end{array} \right]$ de la fonction de courant et ses coordonnées.
- ii) La valeur $\left[\begin{array}{c} \text{maximale} \\ \text{minimale} \end{array} \right]$ de la composante $\left[\begin{array}{c} \text{horizontale} \\ \text{verticale} \end{array} \right]$ de la vitesse et ses coordonnées.
- iii) La valeur $\left[\begin{array}{c} \text{maximale} \\ \text{minimale} \end{array} \right]$ de la composante horizontale de la vitesse en surface et son abscisse, ainsi que le gradient horizontal de température à cette position.
- iv) La valeur de la composante horizontale de la vitesse et le gradient horizontal de température au milieu de la surface .

Pour les variables globales, deux grandeurs couramment usitées sont l'énergie cinétique totale et le nombre de Nusselt. L'énergie cinétique est facilement calculée en sommant pour tout les points du maillage les carrés des deux composantes du vecteur vitesse :

$$E = \sum_{i,j} \left[\frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}}{2 \Delta Z} \right]^2 + \left[\frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}}{2 \Delta X} \right]^2 \quad (\text{A-24})$$

Le nombre de Nusselt est le flux de chaleur au travers d'un plan donné, par rapport au flux de chaleur conductif. Par exemple, le nombre de Nusselt Nu, à travers le bord vertical $i=1$ est calculé par :

$$\text{Nu} = \frac{1}{(Z_{\max} - Z_{\min})} \int_{Z_{\min}}^{Z_{\max}} \left. \frac{\partial T}{\partial X} \right|_{X=0} dz \quad (\text{A-25})$$

Sous forme discrétisée, on a l'expression suivante pour Nu, précise au premier ordre :

$$\text{Nu} = \frac{NX - 1}{NZ} \sum_{j=2}^{NZ} T_{2,j} - T_{1,j} \quad (\text{A-26})$$

On peut également rechercher des nombres de Nusselt plus précis en utilisant des développements en séries de Taylor au deuxième, troisième et quatrième ordre par exemple.

On a alors :

$$\text{Nu}_2 = \frac{NX - 1}{NZ} \sum_{j=2}^{NZ} \frac{4 T_{2,j} - 3 T_{1,j} - T_{3,j}}{2} \quad (\text{A-27})$$

$$\text{Nu}_3 = \frac{NX - 1}{NZ} \sum_{j=2}^{NZ} \frac{18 T_{2,j} - 11 T_{1,j} - 9 T_{3,j} + 2 T_{4,j}}{6} \quad (\text{A-28})$$

$$\text{Nu}_4 = \frac{NX - 1}{NZ} \sum_{j=2}^{NZ} \frac{48 T_{2,j} - 25 T_{1,j} - 36 T_{3,j} + 16 T_{4,j} - 3 T_{5,j}}{12} \quad (\text{A-29})$$

2. Implémentation de la méthode.

La méthode numérique étant maintenant connue, son exécution est une affaire d'ordinateur et de programmes. Le langage qui a été utilisé pour implémenter la méthode est le FORTRAN-77, largement répandu et compatible. Les conditions aux bords ont été codées dans le programme, tandis que des fichiers de données (en entrée et en sortie) fournissaient les paramètres d'exécution (nombres sans dimensions, pas temporels,...) ainsi que les tableaux numériques répertoriant la température et la fonction de courant sur le maillage. La structure du programme est schématisée dans la figure A-3.

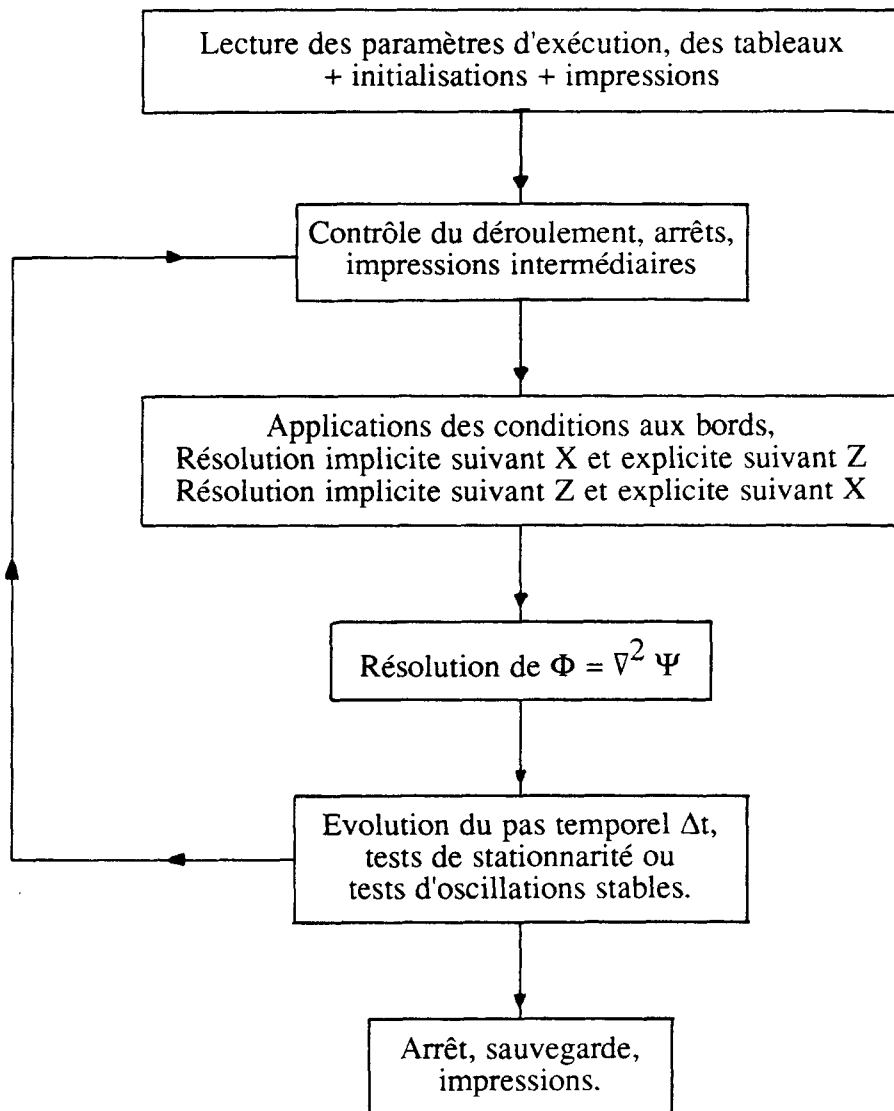


Figure A-3.

L'ensemble du code source pour cette application a une taille d'environ 100 Koctets. Les résultats du tableau A-1 montrent que les temps d'exécutions pour deux demi pas temporels sont proportionnels à $NX \times NZ$, du moins lorsqu'il n'y a pas de problème de type "pagination de mémoire", de limite de "mémoire-cache" ou tout autre limitation liée aux machines. Ceci est en parfaite concordance avec la complexité de la méthode, annoncée linéaire (voir § 1)

Table A-1.
Temps de calcul en fonction du maillage utilisé.

NX	NZ	t_{cpu} (s)	$t_{cpu}/(NX.NZ)$
33	33	0.60	$5.50 \cdot 10^{-4}$
45	45	1.10	$5.43 \cdot 10^{-4}$
65	65	2.35	$5.56 \cdot 10^{-4}$
129	129	10.42	$6.26 \cdot 10^{-4}$
151	151	13.63	$5.98 \cdot 10^{-4}$
175	175	18.63	$6.08 \cdot 10^{-4}$
257	257	37.69	$5.71 \cdot 10^{-4}$

Le programme a fonctionné sur différents types d'ordinateurs ou de micro-ordinateurs, notamment pour un même problème, traité avec un maillage 33×33 . Les résultats obtenus étaient (heureusement) identiques, mais les vitesses d'exécution variaient considérablement. La table A-2 donne ces vitesses, par comparaison avec la machine la plus lente. Les coûts de ces machines (estimés approximativement) sont également donnés, établissant clairement la supériorité pour ce type de programme du micro-ordinateur PS2/70.

Table A-2.
Performances et coûts relatifs de divers
ordinateurs et micro-ordinateurs.

Machine	Vitesse	Coût relatif
PC-XT compatible (8088 à 10 MHz)	1.	1
PS2-60 (80286 à 12 MHz)	1.2	2
PS2-80 (80386 à 16 MHz)	2.9	2.5
SUN-3 (68020 à 16 MHz)	3.2	15
PS2-70 (80386 à 25 MHz)	5.4	4.5
IBM 4341	8.4	>50
IBM 9370	19	>100

3. Validations du code numérique.

De manière générale, on peut dire qu'il est impossible de prouver le fonctionnement correct d'un programme, ou même l'écriture correcte d'un algorithme. Néanmoins, il est d'usage d'éprouver un programme sur des problèmes dont les solutions sont connues de manière indépendantes (et pas par un programme semblable!). Si le programme examiné produit des résultats concordants, on peut alors suspecter que le programme est écrit correctement.

Dans ce contexte, nous avons eu l'occasion de tester notre programme dans deux cas qui sont abordés dans les paragraphes qui suivent. Il en ressort une certaine confiance puisque chaque test a fourni un résultat positif.

3.a. Comparaison avec un modèle unidimensionnel.

Si on considère une cavité verticale d'extension infinie, soumise à un faible gradient de température horizontal (de manière à éviter toute instabilité), la composante verticale de la vitesse obéit à la relation suivante, obtenue analytiquement :

$$V_z = -\frac{1}{6} \frac{Ra}{Pr} X (X - 1/2) (X - 1) \quad , \quad 0 < X < 1 \quad (A-30)$$

En imposant dans notre modèle numérique des conditions périodiques pour la température et la vitesse aux limites inférieure et supérieure, il est aisé de simuler une cavité verticale infinie. La résolution des équations pour un nombre de Rayleigh et un nombre de Prandtl donnés doit donc nous conduire à un résultat compatible avec le profil A-30.

Nous avons effectué une telle simulation, pour $Ra = 500$ et $Pr = 1$; le profil de vitesse $V_z(X)$ calculé avec un maillage de 33 points dans la direction horizontale est donné à la figure A-4.

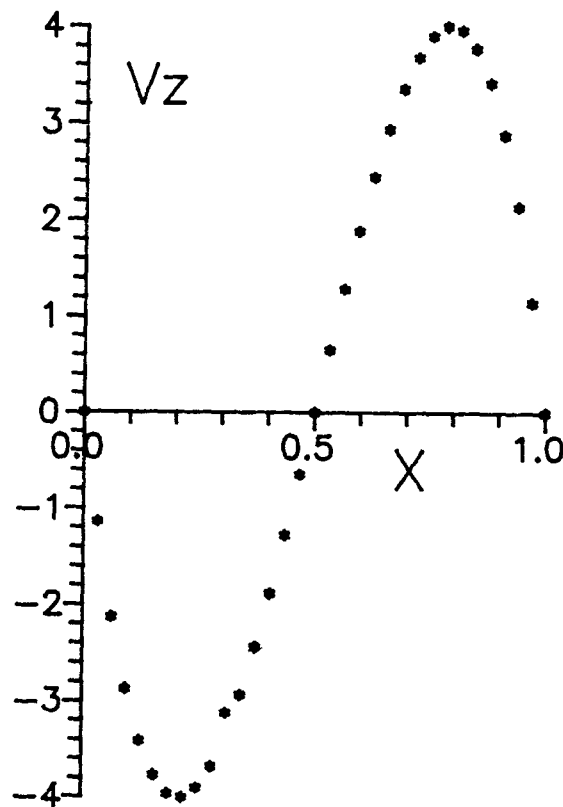


Figure A-4.

Profil $V_z(X)$ obtenu par différence finie.

La valeur de la vitesse maximale est 4.00487 en $X = 0.78125$; A cette abscisse, le profil (A-30) annonce la valeur 4.00543. L'écart entre les valeurs "numérique" et "analytique" est inférieur à 0.015 %, ce qui est un indice du fonctionnement correct du programme numérique. La position du maximum dans le profil analytique est $X = 0.7886$. Et même en utilisant un maillage plus grossier (17 points dans la direction X), on obtient une valeur maximale de

$V_z = 3.97343$ en $X = 0.8125$ au lieu de $V_z = 3.96688$ prévu par l'équation A-30, ce qui reste encore dans une limite "raisonnable" au point de vue de la valeur de V_z , puisque l'erreur relative reste inférieure à 0.15 %. Cependant la position de ce maximum est moins bien prédite avec 17 points. Dans ces intégrations numériques, on doit normalement obtenir une composante V_x nulle. De fait, on constate que les valeurs numériques de V_x sont au maximum de l'ordre de 0.0002, ce qui peut être considéré comme négligeable vis à vis des V_z calculés. La table A-3 donne le détail de ces résultats.

Table A-3

x	V_z (NX=17)	V_z (NX=33)	V_z (éq. A-30)
0.	0.	0.	0.
0.03125		-1.14532	-1.18256
0.0625	-2.00264	-2.13677	-2.13623
0.09375		-2.87650	-2.87628
0.125	-3.42542	-3.41792	-3.41797
0.15625		-3.77629	-3.77655
0.1875	-3.97342	-3.96683	-3.96729
0.21875		-4.00481	-4.00543
0.25	-3.91113	-3.90552	-3.90625
0.28125		-3.68426	-3.68500
0.3125	-3.36055	-3.35617	-3.35693
0.34375		-2.93664	-2.93732
0.375	-2.44379	-2.44080	-2.44141
0.40625		-1.88394	-1.88446
0.4375	-1.28293	-1.28145	-1.28174
0.46875		-0.64829	-0.64850
0.5	0.00001	0.00001	0.
0.53125		0.64829	0.64850
0.56250	1.28294	1.28137	1.28174
0.59375		1.88399	1.88446
0.625	2.44380	2.44081	2.44141
0.65625		2.93656	2.93732
0.6875	3.36054	3.35618	3.35693
0.71875		3.68425	3.68500
0.75	3.91111	3.90553	3.90625
0.78125		4.00487	4.00543
0.8125	3.97343	3.96688	3.96729
0.84375		3.77628	3.77655
0.875	3.42543	3.41792	3.41797
0.90625		2.87653	2.87628
0.9375	2.00263	2.13680	2.13623
0.96875		1.14531	1.18256
1.	0.	0.	0.

3.b. Convection thermogravitationnelle dans l'air.

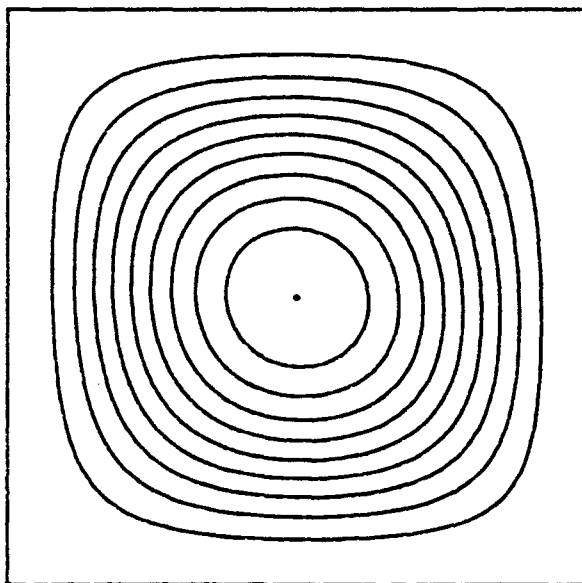
Le besoin de tester, de valider et de comparer les performances des codes numériques spécifiques aux problèmes de la convection naturelle a abouti en 1979 à l'établissement d'un problème test (un benchmark) [4]. L'énoncé en était le suivant :

'Consider the two-dimensional flow of a Boussinesq fluid of Prandtl number 0.71 in an upright square cavity, described in non-dimensional terms by $0 \leq X \leq 1$, $0 \leq Z \leq 1$ with Z vertically upwards. Assume that both components of the velocity are zero on all the boundaries, that the boundaries at $Z = 0$ and 1 are insulated, $\partial T / \partial Z = 0$, and that $T = 1$ at $X = 0$ and $T = 0$ at $X = 1$.

Calculate the flow and thermal field for Rayleigh numbers, $\alpha g \Delta T D^3 / \kappa \nu$ of 10^3 , 10^4 ,

Il apparaissait donc très intéressant de valider notre méthode en effectuant des calculs en vue de comparer nos résultats à ceux obtenus par divers groupes ayant participé à cet exercice de comparaison, ou mieux encore de les comparer avec une solution convergée obtenue par De Vahl Davis [5]. La figure A-5 donne les lignes de courant et les isothermes obtenus pour $Ra = 10^3$ et $Ra = 10^4$, avec un maillage de 41×41 points.

Pr=0.71; Ra=1000 : Benchmark.



Pr=0.71; Ra=10000 : Benchmark.

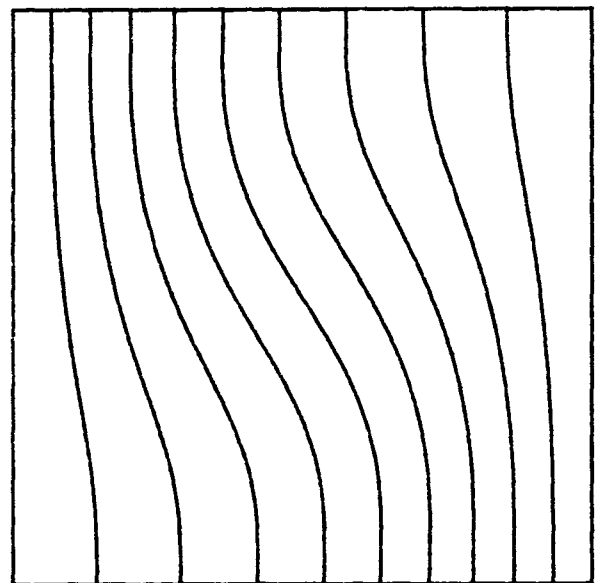
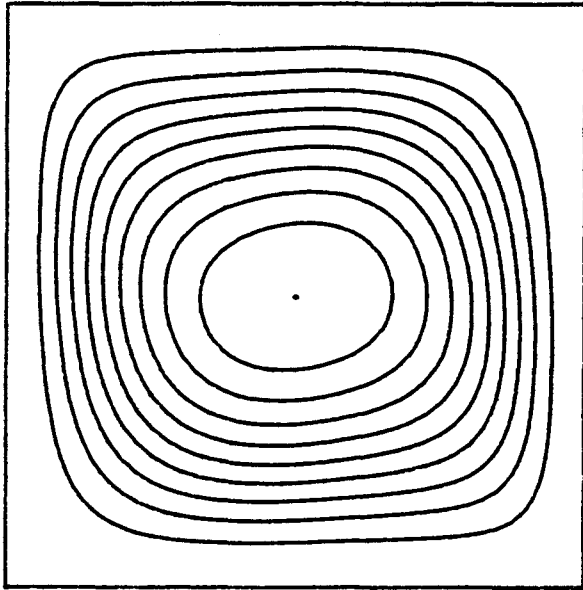


Figure A-5.

$Ra = 1000$, $Pr = 0.71$,

lignes de courant et isothermes du "Benchmark".

Pr=0.71; Ra=10000 : Benchmark



Pr=0.71; Ra=10000 : Benchmark

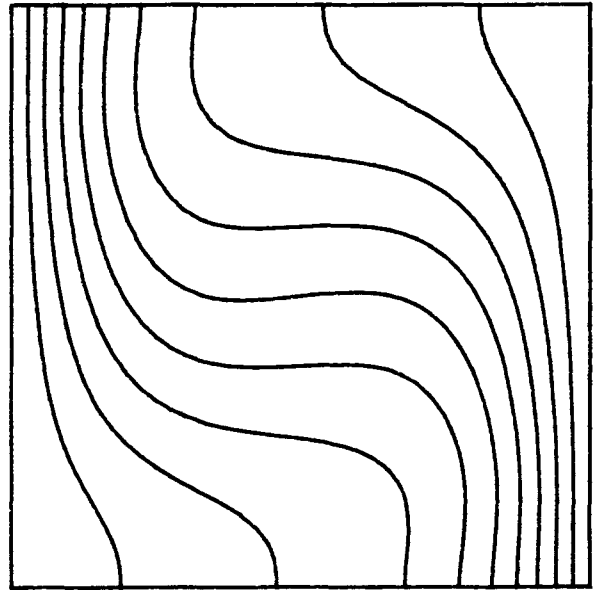


Figure A-5 (bis).

Ra = 10000, Pr = 0.71,

lignes de courant et isothermes du "Benchmark".

Comme il est difficile d'effectuer des comparaisons quantitatives précises à partir de telles figures, plusieurs valeurs témoins ont été utilisées pour les comparaisons; il s'agit des valeurs maximales de Ψ , de V_x et de V_z , ainsi que du nombre de Nusselt. Ces valeurs sont regroupées dans la table A-4, vis-à-vis des valeurs convergées proposées par de Vahl Davis. On peut déduire de ce tableau une bonne concordance de nos résultats, puisqu'aucune de nos valeurs ne s'écarte de plus de 1.2 % des valeurs réputées correctes.

Table A-4.
 Comparaison des résultats obtenus par notre code
 au benchmark établi par de Vahl Davis.

		Le présent travail	De Vahl Davis
Ra=10 ³	$ \Psi _{\max}$	1.173	1.174
	$ V_x _{\max}$	3.619	3.649
	$ V_z _{\max}$	3.675	3.697
	Nu	1.117	1.117
Ra=10 ⁴	$ \Psi _{\max}$	5.050	5.071
	$ V_x _{\max}$	16.04	16.18
	$ V_z _{\max}$	19.38	19.62
	Nu	2.243	2.243

Nous avons profité de cette série d'expériences numériques pour calculer a posteriori l'ordre de notre méthode, prévu égal à deux.

Soit X_c une grandeur représentative de l'état convectif, solution correcte des équations du problème, mais calculée sur un réseau de points fondamental (par exemple 11 x 11); soit également X_i la valeur correspondante, mais reprise à partir d'un maillage i caractérisé par un pas spatial h_i (par exemple $i=1$ pour 11 x 11; $i=2$ pour 21 x 21; $i=3$ pour 41 x 41). Si la méthode de résolution est précise à l'ordre n , alors

$$X_c = X_i + C h_i^n \quad (\text{A-31})$$

C étant une constante indépendante de h. A partir de solutions obtenues sur 3 grilles, et en éliminant X_c et C, on peut obtenir n à partir de l'équation

$$\frac{X_1 - X_2}{X_2 - X_3} = \frac{h_1^n - h_2^n}{h_2^n - h_3^n} \quad (\text{A-32})$$

ou, si on a $h_1/h_2 = h_2/h_3 = 2$

$$n = \frac{\ln \frac{X_1 - X_2}{X_2 - X_3}}{\ln 2} \quad (\text{A-33})$$

Nous avons calculé n à partir du problème test avec $Ra = 10^4$, la grandeur représentative utilisée étant l'"énergie" E, c'est-à-dire la somme des carrés des vitesses, calculée sur le maillage 11 x 11 de plus petite résolution. Les valeurs obtenues sont :

$$E = 20474.3 = X_1 \text{ à partir du maillage } 11 \times 11.$$

$$E = 20551.6 = X_2 \text{ à partir du maillage } 21 \times 21.$$

$$E = 20862.0 = X_3 \text{ à partir du maillage } 41 \times 41.$$

La valeur de n calculée par l'équation (A-33) vaut alors 2.0056, ce qui démontre clairement que la méthode que nous utilisons est effectivement d'ordre deux.

4. Bibliographie.

- [1] Behnia, M., de Vahl Davis, G. : communication présentée au GAMM-Workshop "Numerical Simulation of Oscillatory Convection in low Pr Fluids", proceedings : Ed. B. Roux, in "Notes on numerical Fluid Mechanics", Vieweg ed. (1989).
 - [2] Peaceman, D.W., Rachford, H.H.: "The numerical solution of parabolic and elliptic differential equation", J. Soc. Indust. Appl. Math., 3(1) (1955) pp. 28-41.
 - [3] Durand, E. : Solution numérique des équations algébriques, Masson (1960).
 - [4] de Vahl Davis, G., Jones, I.P. : "Natural convection in a square cavity: a comparison exercise.", International Journal for Numerical Methods in Fluids, 3, pp 227-248 (1983).
 - [5] de Vahl Davis, G. : "Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution.", International Journal for Numerical Methods in Fluids, 3, pp 249-264 (1983).
- M.E. Newell, F.W. Schmidt : "Heat transfer by laminar natural convection within rectangular enclosures.", Journal of Heat Transfer, Feb. 1970, p159 (méthode de Thoma).
- J.O. Wilkes, S.W. Churchill : "The finite difference computation of natural convection in a rectangular enclosure", A.I.Ch.E. Journal, Vol. 12(1), p161, 1966.

Annexe B.

La vélocimétrie laser–Doppler.

1. Principes de la vélocimétrie.

Depuis que les expériences en mécanique des fluides existent, on s'est intéressé à mesurer les caractéristiques des écoulements, afin de les comparer aux théories. Parmi les techniques récentes utilisées, citons–en deux : l'anémométrie à fil chaud, qui permet d'obtenir des évaluations intéressantes des vitesses ou des débits, mais induit souvent des perturbations importantes par le dégagement de chaleur de la sonde (Tritton [1]); la visualisation des mouvements par photographie de particules traçantes (fumée, poudre d'aluminium...)(Merzkirch [2]), qui donne des informations sur les trajets suivis par le fluide examiné, mais ne permet pas des mesures précises du vecteur vitesse, à moins d'utiliser des systèmes automatiques de traitement d'images.

Nous désirons souvent déterminer précisément le champ de vitesse dans un fluide, sans en perturber l'écoulement par échauffement ou en ajoutant des particules. En fait, deux méthodes actuelles possèdent ces qualités (mesures quantitatives et non–perturbatives); elles sont basées sur les théories de l'optique physique, et nécessitent un équipement important. La première, historiquement, est la vélocimétrie (ou anémométrie) laser–Doppler (que nous symboliserons dans la suite par l'abréviation LDV)(Durst *et al.* [3]), qui permet la mesure locale et instantanée de une ou plusieurs composantes du vecteur vitesse. La seconde méthode, la vélocimétrie par déplacement d'images de particules (symbolisée PIDV)(Dudderar *et al.* [4]), est plus récente et bénéficie de l'état des connaissances en LDV. Elle permet une mesure globale et instantanée du champ de vitesse. La PIDV a l'avantage de pouvoir étudier, en effectuant plusieurs clichés successifs, des écoulements instationnaires. Cependant, l'analyse de chacun de ces clichés nécessite un temps de traitement très important, parce qu'on doit utiliser des méthodes numériques lourdes telles que les transformées de Fourier ou des fonctions d'autocorrélation bidimensionnelles, ou des algorithmes avancés de reconnaissance de formes.

La méthode utilisée dans ce travail est la LDV. Nous en énoncerons les grands principes ci–dessous. Le reste de cette annexe sera consacré à la description de l'équipement que nous

avons utilisé, au traitement du signal et à la discussion d'erreurs éventuelles à considérer.

La figure B-1 montre les composants fondamentaux d'un vélocimètre LDV permettant de mesurer une composante de la vitesse, en valeur absolue, au sein d'un fluide.

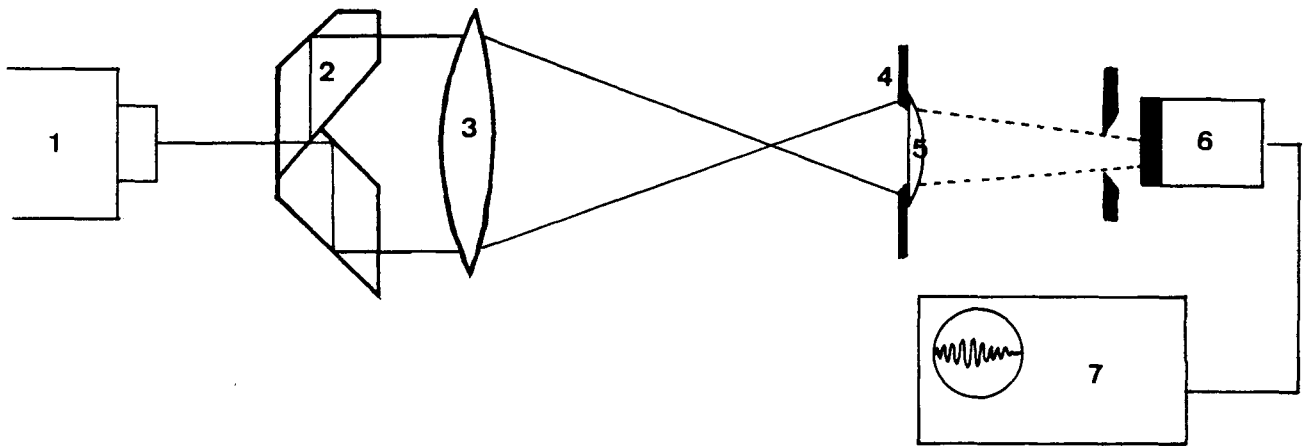


Figure B-1.

Composants fondamentaux d'un vélocimètre.

- 1 Le laser fournit un faisceau de lumière parallèle, monochromatique, cohérente et polarisée.
- 2 Le séparateur de faisceau sépare le rayon initial en deux rayons décentrés mais toujours parallèles à l'axe optique, et d'intensités égales.
- 3 La lentille de focalisation focalise les deux rayons vers un point de mesure (son foyer) situé dans l'écoulement fluide à étudier.
- 4 Le masque arrête les rayons lumineux d'origine après le point de mesure.
- 5 La lentille de collection est focalisée sur le point de mesure de manière à en collecter la lumière diffusée.
- 6 Le photo-détecteur (le plus souvent un tube photo-multiplicateur) détecte et convertit la lumière diffusée en un signal électrique.
- 7 L'analyseur de signaux traite ce signal afin de le convertir en une mesure de la vitesse (ou d'une composante en valeur absolue) au point de mesure.

Le fait essentiel qui se produit au point de focalisation des deux rayons lumineux, est la formation d'un motif d'interférence. Ce motif, constitué de franges contenues dans un ellipsoïde est représenté à la figure B-2.

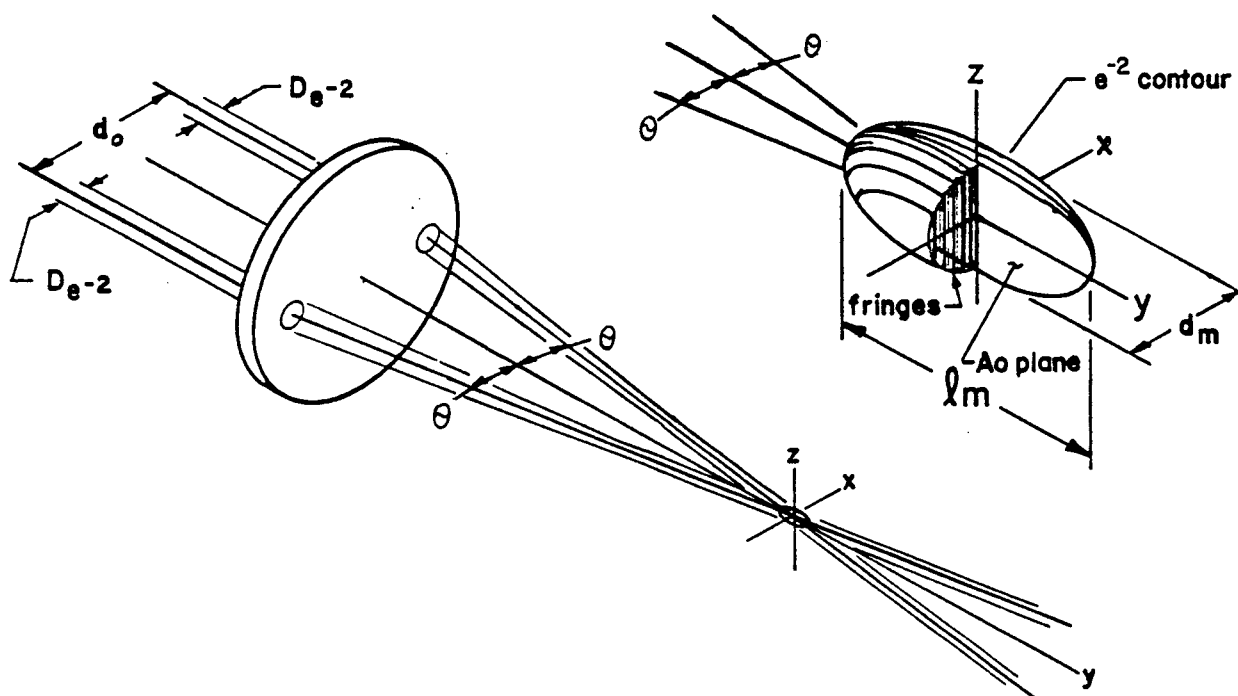


Figure B-2.

Toutes les propriétés de cet ensemble de franges peuvent être déduites à partir des lois fondamentales de l'optique géométrique et de l'optique ondulatoire (voir par exemple Durst *et al.* [3]).

La distance interfrange d_{fr} entre deux franges lumineuses successives dépend uniquement de la longueur d'onde λ_0 de la lumière laser et du demi-angle θ entre les rayons incidents et vaut :

$$d_{fr} = \frac{\lambda_0}{2 \sin \theta} \quad (B-1)$$

Le demi-angle θ peut être calculé à partir de la distance d_0 entre les rayons lumineux avant la lentille de focalisation, ainsi que sa longueur focale f_0 :

$$\theta = \arctg\left(\frac{d_o}{2 f_o}\right) \quad (\text{B-2})$$

Le volume de mesure, constitué de plans d'interférences (les franges) parallèles à l'axe optique et perpendiculaires au plan des deux rayons incidents n'est pas ponctuel (au sens mathématique); ses dimensions sont finies, tout comme l'épaisseur d'un faisceau laser. Si on appelle $D_{e^{-2}}$ le diamètre des rayons laser non focalisés, mesuré où l'intensité vaut e^{-2} (soit $\simeq 14\%$) de l'intensité centrale, alors le diamètre correspondant, au point de croisement des rayons vaut

$$d_{e^{-2}} = \frac{4 \lambda_o f_o}{\pi D_{e^{-2}}} \quad (\text{B-3})$$

Le diamètre du volume de mesure, à l'intérieur duquel l'intensité des franges d'interférences est supérieure à e^{-2} de l'amplitude maximale, est

$$d_m = \frac{d_{e^{-2}}}{\cos \theta} \quad (\text{B-4})$$

La longueur du volume de mesure est

$$l_m = \frac{d_{e^{-2}}}{\sin \theta} \quad (\text{B-5})$$

Par conséquent, le nombre de franges d'interférences d'intensité supérieure à e^{-2} de la frange centrale vaut

$$N_{fr} = \frac{d_m}{d_{fr}} \simeq \frac{1.27 d_o}{D_{e^{-2}}} \quad (\text{B-6})$$

Dans de nombreux systèmes utilisés pour des mesures de vitesses dans des liquides, d_{fr} est de l'ordre de quelques micromètres, la longueur du volume de mesure d'environ 1 millimètre et son diamètre d'approximativement un dixième de millimètre. C'est au travers d'un tel volume que passe l'écoulement à étudier. Le fluide charrie dans son mouvement des particules de petites tailles, existantes au départ (poussières, impuretés...) ou ajoutées. Lorsque ces particules croisent le volume de mesure et ses franges alternativement lumineuses et

sombres, elles peuvent diffuser la lumière reçue. L'intensité de la lumière diffusée, analysée par la suite, reflète par sa dépendance temporelle la structure spatiale des franges traversées (voir figure B-3).

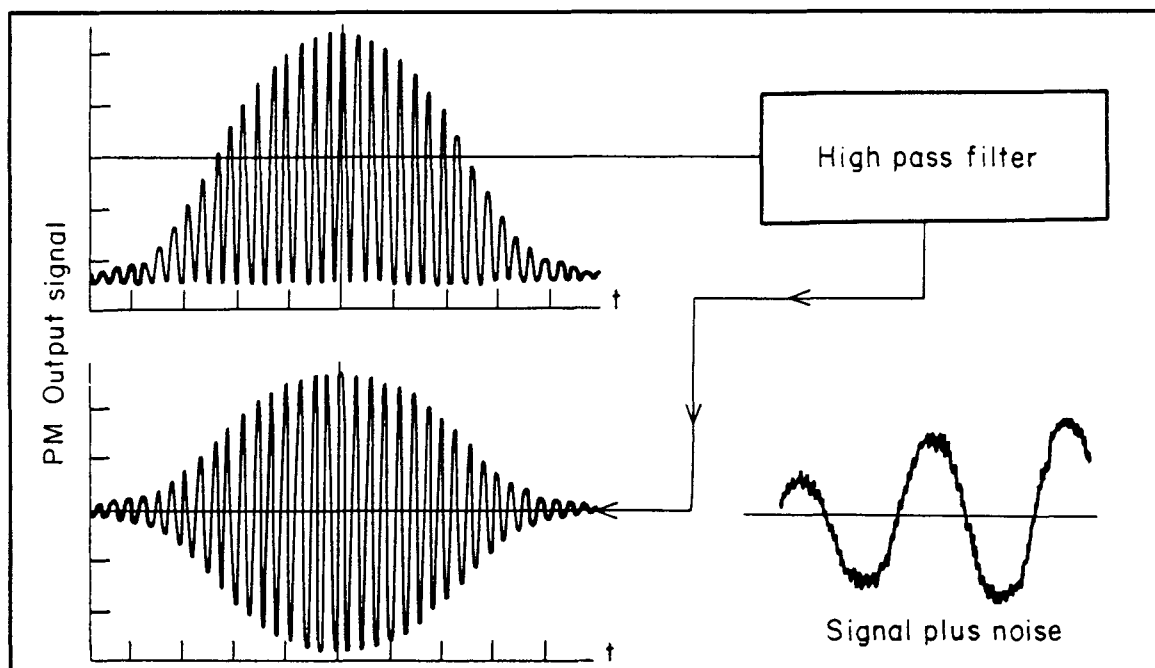


Figure B-3. Particules et franges; signal diffusé.

Le signal transformé est analysé (par un compteur de fréquence, un analyseur de Fourier,...) de manière à en tirer la fréquence f ou la période fondamentale T qui correspond au temps de passage d'une frange d'interférence à la frange suivante. La valeur absolue de la composante de vitesse perpendiculaire aux franges est ainsi obtenue :

$$|V_{\perp}| = \frac{d_{fr}}{T} = f d_{fr} \quad (\text{B-7})$$

La lumière diffusée par les particules étant généralement faible, il est utile de savoir ce qui influence le rapport signal/bruit d'un vélocimètre. Celui-ci est évidemment directement proportionnel à l'intensité du faisceau laser et au rendement quantique du photodétecteur, mais il est aussi fortement influencé par la taille, la concentration et les paramètres de diffusion des particules; l'angle de réception de la lumière est également important.

2. Description de l'équipement.

La figure B-4 donne le schéma complet de l'installation actuelle. Certains accessoires comme la rotation des faisceaux et la double cellule de Bragg ne faisaient pas partie de l'équipement de départ, tel qu'il a servi aux premières expériences.

Le laser est un modèle Hélium-Néon de Spectra Physics 124B, d'une puissance de 25 mW à la longueur d'onde 632.8 nm. Certaines mesures ont également été effectuées avec un laser de 15 mW de puissance.

Le reste de l'équipement optique provient de la firme T.S.I., spécialisée dans le matériel de mesure en dynamique des fluides. A savoir :

Le séparateur de faisceau sépare le faisceau issu du laser en deux faisceaux d'égale intensité distants de 50 mm.

La double cellule de Bragg est un dispositif destiné à modifier la longueur d'onde des faisceaux laser, par le principe de diffraction d'une onde lumineuse par une onde électro-acoustique (Raman *et al.* [5]). En agissant sur le décalage en fréquence apporté à chacun des faisceaux, on peut obtenir un défilement des franges d'interférence dans un sens sélectionné par l'utilisateur. La cadence de défilement peut être fixée à 2 kHz, 5 kHz, 10 kHz, 20 kHz, ... jusque 10 MHz. Par ce dispositif, on obtient une addition ou une soustraction à la fréquence du signal de mesure, qui permet de lever l'ambiguïté sur le sens du mouvement. Notons toutefois qu'il était souvent possible, par simple observation visuelle, d'obtenir le signe de la vitesse; néanmoins, en plus de la subjectivité possible d'un oeil, cette méthode impliquait des démontages beaucoup trop fréquents de l'optique de réception.

Des réglages d'angles des faisceaux permettent de réaligner correctement les rayons laser à la sortie de la double cellule de Bragg.

Un espaceur de faisceaux permet de réduire éventuellement l'espacement de 50 mm entre les faisceaux pour le ramener à 9 mm. On a alors la possibilité d'obtenir des angles θ plus petits, pour pénétrer des dispositifs d'écoulement étroits.

Le dispositif de rotation des faisceaux est constitué de deux bagues pouvant tourner librement autour de l'axe optique, ce qui permet d'effectuer aisément une rotation du plan des deux faisceaux laser, et donc de mesurer n'importe quelle composante de vitesse dans le plan perpendiculaire à l'axe optique.

La lentille de focalisation a une distance focale de 120 mm. N'oublions pas cependant que cette distance est donnée pour un milieu d'indice de réfraction unitaire. Pour beaucoup de liquides, l'indice est supérieure à 1.3 et on corrigera donc les parcours optiques à l'intérieur du liquide. La distance interfrange demeure cependant indépendante de l'indice de réfraction et vaut, pour un d_0 de 50 mm et une lentille de 120mm : 1.7 μm .

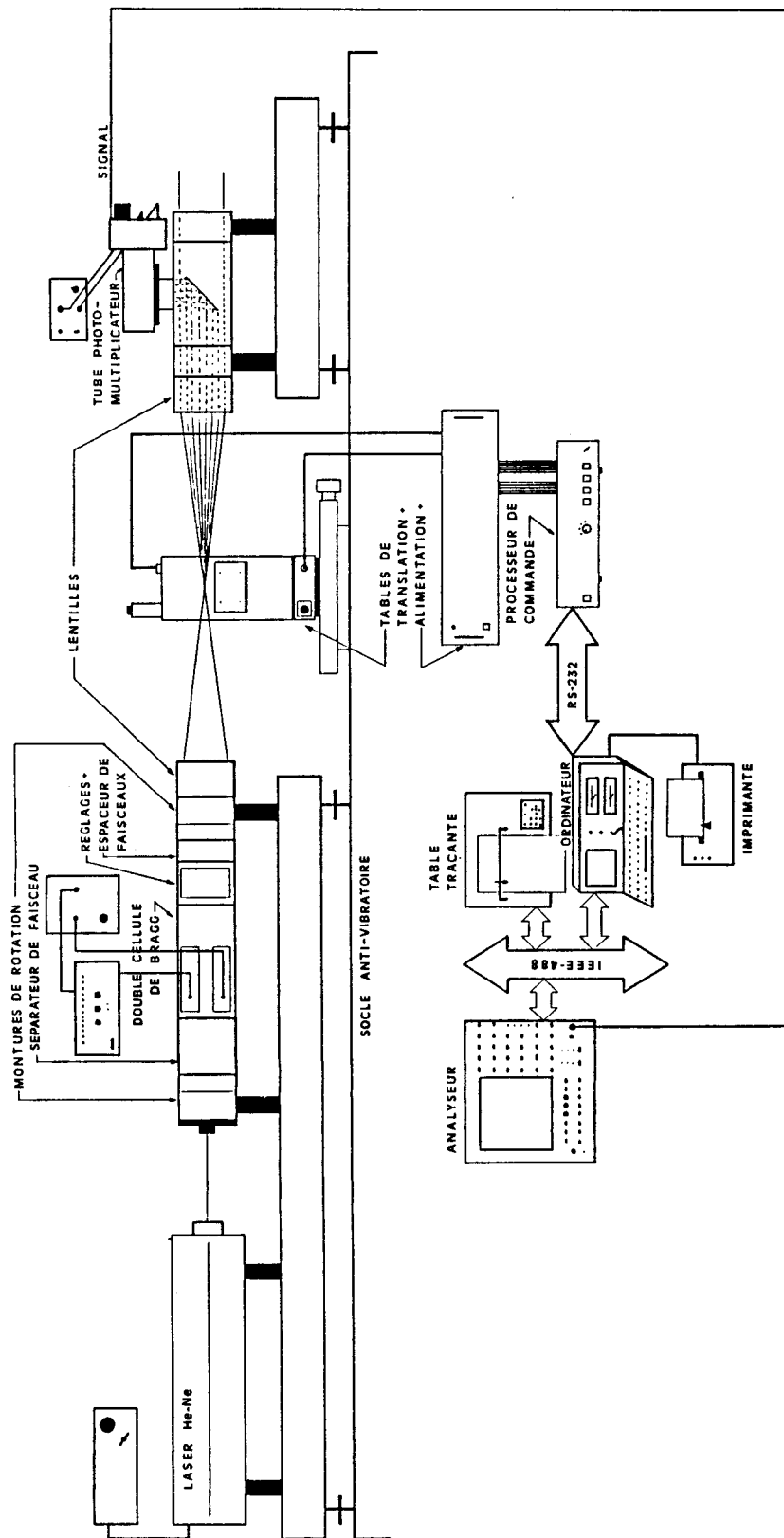


Figure B-4.
Dispositif de vélocimétrie.

La lentille de réception est identique à la lentille précédente. L'espace entre les deux a donc une longueur légèrement supérieure à 24 cm. C'est là que l'on disposera le montage expérimental.

L'optique de réception a pour but de capter la lumière provenant du volume de mesure, mais pas les rayons incidents, et de diriger cette lumière tantôt sur l'entrée d'un tube photo-multiplicateur, tantôt sur un dispositif de visée. Une lentille mobile permet un réglage fin de la focalisation de l'ensemble de réception.

Le tube photo-multiplicateur et son amplificateur convertissent le signal lumineux en un signal électrique de puissance suffisante.

L'analyseur de signaux, modèle Hewlett-Packard 3561A, effectue l'analyse du signal par transformée de Fourier.

L'ordinateur, de type IBM PC, permet d'acquérir rapidement les mesures effectuées par l'analyseur, de les traiter et de les mémoriser. La liaison s'effectue par un bus parallèle de standard IEEE 488, qui accède également à la table traçante et à un voltmètre. Si on ajoute à cela la connexion à des tables de translation de marque Microcontrôle commandées par des moteurs pas à pas, l'ordinateur peut gérer complètement une série de mesures de vitesses en fonction du temps et de la position. Nous avons d'ailleurs écrit quelques programmes destinés à automatiser les prises de mesures. Ces programmes sont écrits en BASIC. Ils comprennent une partie de gestion des bus de données utilisés dans les transmissions (IEEE 488 pour l'analyseur de signaux, le voltmètre et la table traçante, RS-232 pour les communications avec le processeur de commande des tables de translations); une seconde partie s'occupe des prises de mesures et des commandes destinées aux appareils, ainsi que du sauvetage des informations; enfin, une troisième partie des programmes traite les données, effectue des conversions, des mises en forme des résultats, etc...

La table traçante et l'imprimante permettent de sortir des graphiques.

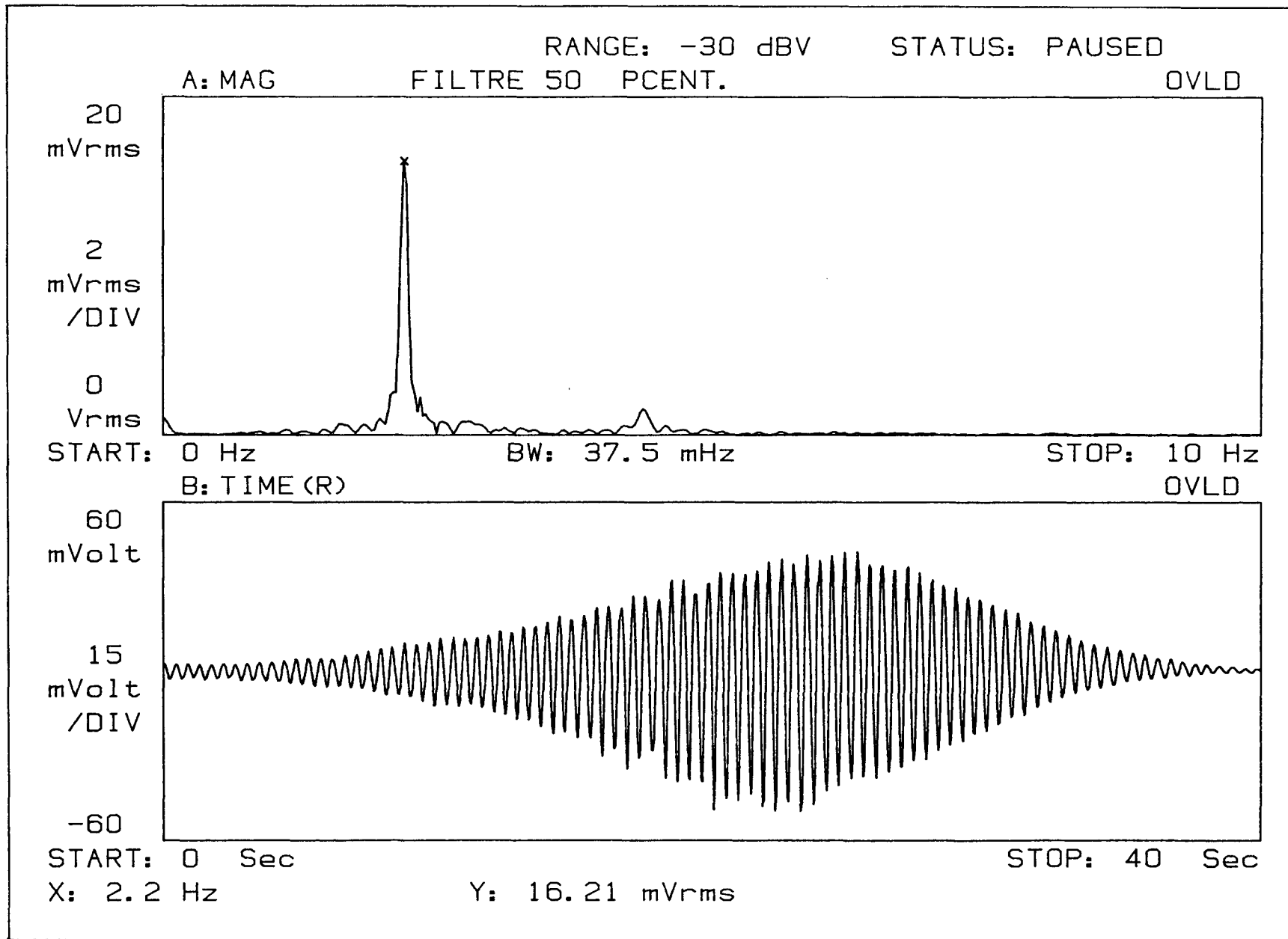
3. Qualité et traitement du signal.

La figure B-5 montre dans sa partie inférieure un exemple de signal généré par une particule traversant le volume de mesure. Ce signal est discrétisé en 1024 valeurs, dans cet exemple sur une durée de 40 s. On y remarque nettement le caractère périodique et l'enveloppe "gaussienne", dûs aux franges d'interférences équidistantes, mais dont l'amplitude varie dans le volume de mesure. Dans la partie supérieure, l'analyseur montre la transformée de Fourier discrète qu'il a effectuée à partir des 1024 échantillons temporels. Ce spectre comporte un pic intense à la fréquence 2.2 Hz, qui correspond à une vitesse de $2.2 \text{ Hz} \cdot 1.7 \mu\text{m} = 3.74 \mu\text{m s}^{-1}$. Cet exemple montre bien que les performances en résolution et en fréquence maximale de l'analyseur conditionnent pour une grande part la gamme et la précision des mesures des vitesses. Celle-ci s'étend d'environ $1 \mu\text{m s}^{-1}$ (vitesse très lente, assez peu fréquente dans les liquides ordinaires) à environ 20 cm s^{-1} . La résolution des mesures des fréquences vaut 1/400-ème de la fréquence maximale.

On remarque qu'au sommet du pic de la transformée de Fourier de la figure B-5, l'analyseur a placé automatiquement un marqueur. Par l'intermédiaire du bus IEEE 488, on peut transférer les coordonnées du marqueur sur l'ordinateur, ce qui permet par exemple de suivre au cours du temps une composante de vitesse instationnaire (voir figure B-6) ou de dresser un histogramme de mesures afin d'obtenir le plus précisément possible la valeur de la vitesse (Lhost *et al.* [6]).

Signal du vélocimètre enregistré par l'analyseur de signaux, et sa transformée de Fourier.

Figure B-5.



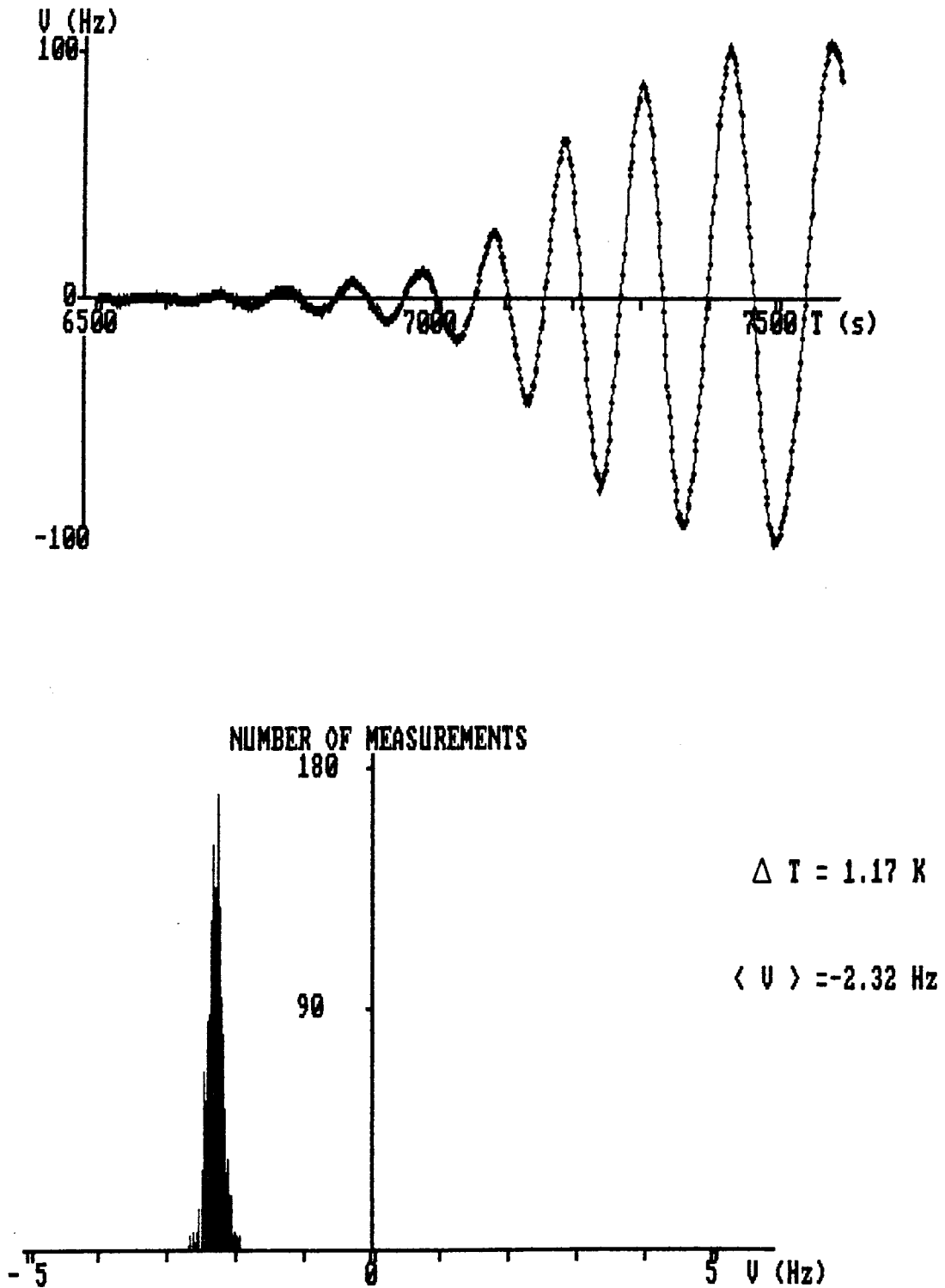


Figure B-6.
Acquisition des fréquences au cours du temps
et histogramme.

4. Mesures biaisées en vélocimétrie laser-Doppler.

La LDV a la réputation d'être une méthode de mesure précise et non-perturbative. Toutefois dans certaines conditions, cette assertion s'avère en défaut. Nous avons voulu préciser deux cas pour lesquels la LDV peut produire des résultats erronés. Le premier concerne un effet perturbatif dû à la puissance du faisceau laser. Le second est lié à l'existence d'un gradient d'indice de réfraction lui-même dû à un gradient de température, qui existe toujours dans nos expériences. Nous avons néanmoins montré qu'en ce qui concerne les expériences présentées dans ce travail, les corrections à apporter étaient négligeables, voire non-mesurables.

4.a. Effet convectif lié à une source de chaleur ponctuelle.

Les premières mesures pour lesquelles nous avons soupçonné une influence du laser étaient effectuées dans du glycol (liquide très visqueux, caractérisé par un nombre de Prandtl élevé, de ≈ 180) placé entre deux parois horizontales de cuivre séparées de 1 cm et éventuellement soumises à une différence de température (problème dit de Bénard [7]). cette situation expérimentale est décrite par la figure B-7.

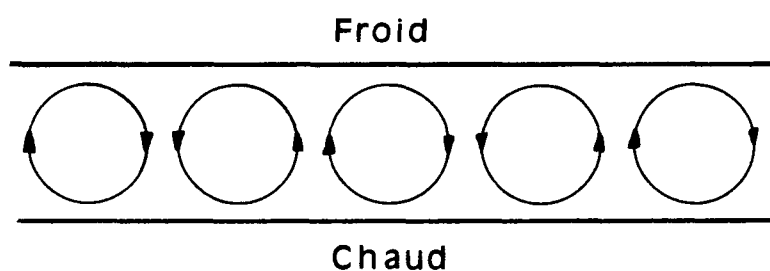


Figure B-7.

Alors que le gradient de température vertical était sous-critique, c'est à dire que la couche de glycol devait être normalement au repos, nous avons mesuré une composante verticale de la vitesse non nulle, quoique faible (approximativement $13 \mu\text{m s}^{-1}$). Le laser fut mis immédiatement en cause étant donné que cette vitesse apparaissait et augmentait en valeur après l'allumage. Des relevés précis de ce phénomène ont été effectués, et on observe (voir figure B-8) que la vitesse est manifestement nulle au départ et atteint sa valeur finale en approximativement 2 minutes.

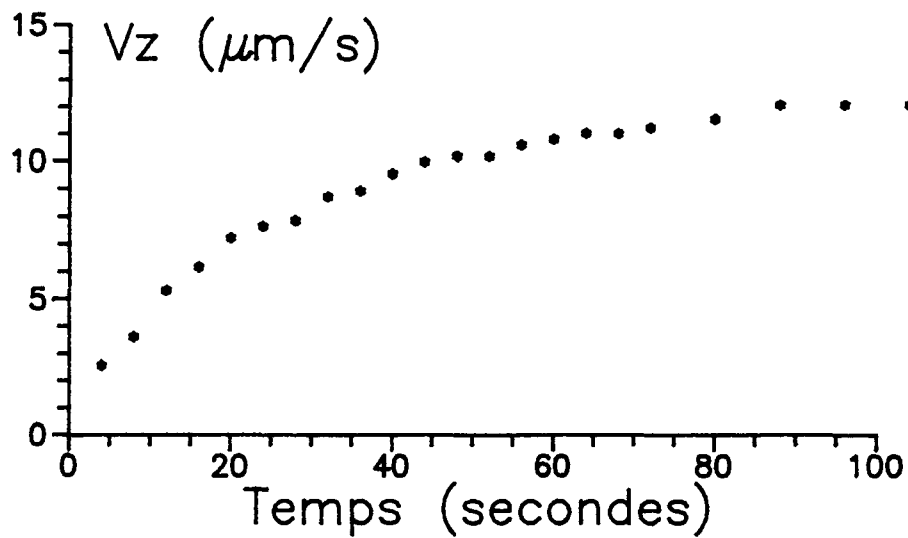


Figure B-8.

Vitesse verticale en fonction du temps après l'allumage du faisceau laser.

Une deuxième expérience a permis d'établir une relation directe entre la puissance du faisceau laser et la vitesse qui en résultait dans le glycol. La puissance était modifiée par un filtrage au travers d'une solution de concentration variable de vert de bromocrésol, dont l'absorption est importante aux alentours de la longueur d'onde 632.8 nm du laser He-Ne. Cette puissance était mesurée à l'aide d'une thermopile. La relation est linéaire dans le domaine de puissance considéré (figure B-9).

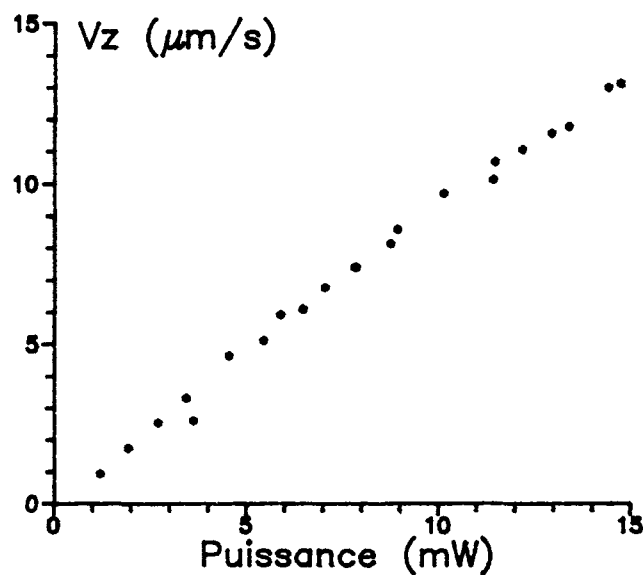


Figure B-9.

Composante verticale de la vitesse en fonction de la puissance du laser.

Une troisième expérience avait pour objet de déterminer l'orientation du vecteur vitesse. La composante de vitesse fut mesurée suivant des angles par rapport à la verticale de 0° (vitesse = $V_0 = 9.86 \mu\text{m s}^{-1}$), 45° (vitesse = $V_{45} = 6.87 \mu\text{m s}^{-1}$), 67.5° (vitesse = $V_{67.5} = 3.54 \mu\text{m s}^{-1}$) et 90° (pas de vitesse mesurable). Ces résultats sont représentés à la figure B-10; le rapport $V_0/V_{45} = 0.70$, proche de $\sin 45^\circ$ (0.707), et le rapport $V_0/V_{67.5} = 0.36$, proche de $\sin 22.5^\circ$ (0.38). Par conséquent, on est bien sûr que la vitesse est uniquement verticale au point de mesure.

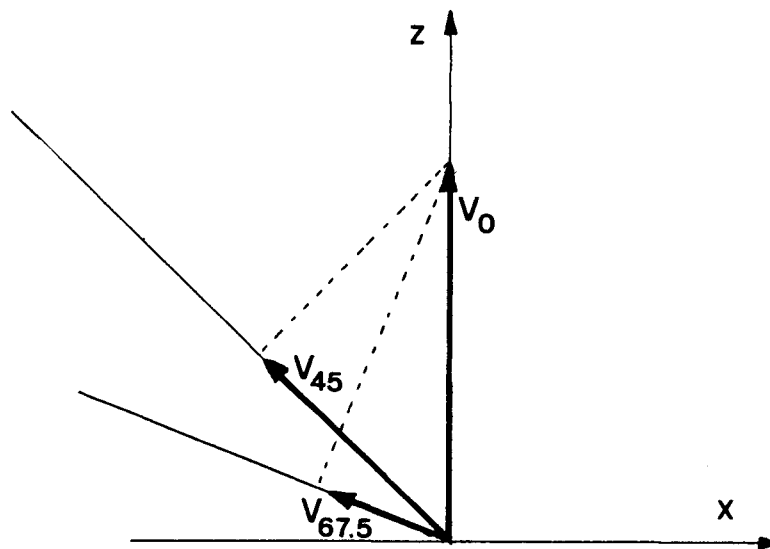


Figure B-10.

Mesures de la composante de vitesse perpendiculaire aux franges d'interférence suivant plusieurs angles.

Une dernière expérience avait pour but de montrer que c'est en créant par chauffage un gradient instable de densité que le laser perturbait l'état de repos. Nous avons "stabilisé" la couche de glycol en la chauffant par au-dessus et en la refroidissant par en-dessous, de manière à créer un gradient vertical de densité stable. On a alors observé une diminution de la vitesse engendrée par le laser d'autant plus importante que le gradient adverse de densité (proportionnel à ΔT) était important.

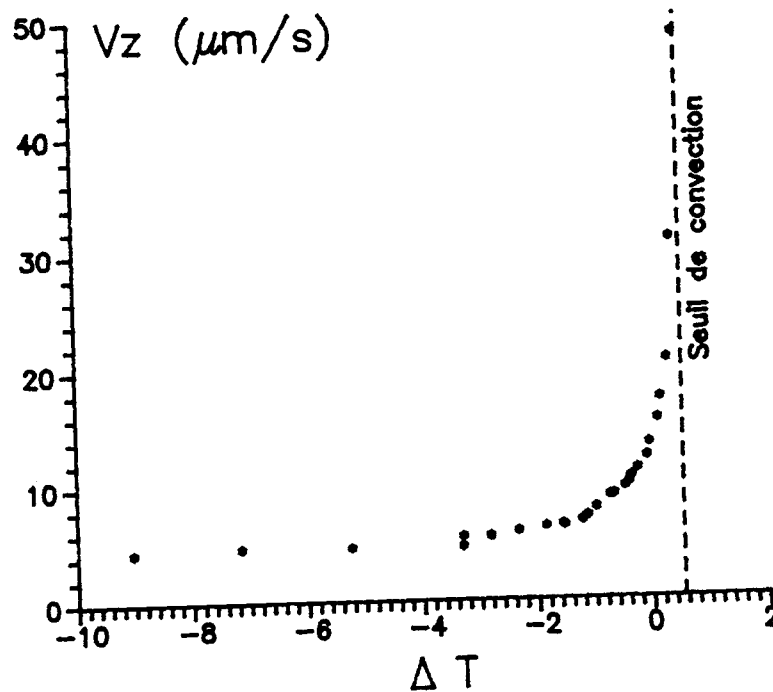


Figure B-11.

Vitesse verticale en fonction de l'amplitude ΔT d'un gradient stabilisant de température.

Des expériences semblables avec d'autres liquides ont été tentées, mais n'ont pas produit des effets plus grands que ce qui a été observé dans le glycol. Un effet semblable pourrait expliquer les résultats de Tsuchiya *et al.* [8] qui ont détecté par LDV une convection résiduelle dans une couche d'huile de silicone normalement au repos, mais qui attribuaient cette convection à l'isolation imparfaite des parois latérales.

Il est évident que la viscosité ainsi que la diffusivité thermique du liquide utilisé doivent influencer l'écoulement obtenu. Mais la nécessité de quantifier la puissance absorbée par le fluide introduit dans le problème d'autres paramètres tels que la puissance et la dimension du faisceau laser ainsi que le pouvoir d'absorption du liquide à la longueur d'onde du laser.

Un traitement théorique complet du problème nécessite donc la résolution des équations de Navier-Stokes et de conservation de l'énergie en y incluant un terme de source de chaleur. Un tel traitement a été effectué par Vest et Lawson [9] avec un fil résistif comme source de chaleur, et par Boyd et Vest [10] avec un faisceau laser comme source. Dans cette dernière étude, les auteurs obtenaient une puissance non-dimensionnelle critique au delà de laquelle il y avait convection par analogie simple avec le problème de Bénard classique [7] pour lequel $Ra^{\text{crit}} = 27 \pi^4/4$; malheureusement, ils ne donnaient pas de prévisions de vitesses au delà du point critique.

4.b. effet distordant dû à un gradient d'indice de réfraction.

La lumière se propage en ligne droite dans un milieu isotrope. Cependant, lorsqu'il existe un gradient d'indice de réfraction, les rayons lumineux sont déviés, comme ils le sont lors du passage d'un milieu à un autre, d'indices différents, en suivant la loi de réfraction de Snell. La loi qui nous intéresse est évidemment plus compliquée, puisqu'elle doit considérer des variations continues d'indice. Ces variations peuvent être dues à des gradients de température ou des gradients de concentration pour les mélanges. En appliquant le principe de Fermat, on obtient l'équation de Helmholtz (voir par exemple Hauf et Grigull [11]) régissant la trajectoire des rayons :

$$\vec{N} \cdot \text{grad} \ln n = \frac{1}{R} \quad (\text{B-9})$$

où \vec{N} est la normale unitaire à la trajectoire du rayon lumineux, n l'indice de réfraction du milieu et R le rayon de courbure de la trajectoire (voir la figure B-13). Cette équation indique que les rayons s'incurvent vers les régions de plus grand indice de réfraction.

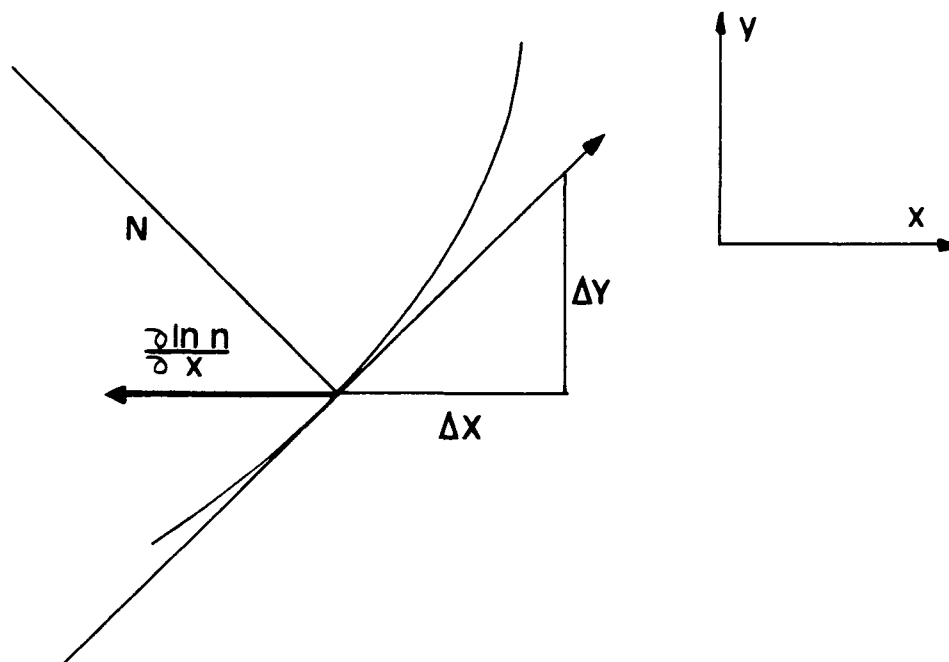


Figure B-13.

Schéma de la trajectoire d'un rayon lumineux dans un milieu d'indice de réfraction variable dans la direction x .

En adoptant l'hypothèse que l'indice de réfraction varie seulement dans la direction x , l'équation B-9 s'écrit plus simplement

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \right] \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} \quad (\text{B-10})$$

on pose $\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} = \varphi$ et $\frac{dx}{dy} = p$, et on adopte les conditions aux limites : $\frac{dx}{dy} = P_0$ en $y = 0$ et

$$x = x_0 \text{ en } y = 0.$$

Dès lors, B-10 devient

$$\frac{dp}{dy} = (1 + p^2) \varphi \quad (\text{B-11})$$

La solution de cette équation, lorsque φ est non nul est

$$x = x_0 - \frac{1}{\varphi} \ln \frac{\cos(\varphi y + \arctg P_0)}{\cos(\arctg P_0)} \quad (\text{B-12})$$

et si $\varphi = 0$:

$$x = x_0 + y P_0 \quad (\text{B-13})$$

La différence entre les distances x données par les équations B-12 et B-13 caractérise la déviation du faisceau laser par rapport au parcours droit. On constate que pour de l'eau par exemple, la déviation est de l'ordre de quelques μm sur une distance de 1 cm, pour un gradient de température tel que celui que nous imposons. Par contre, si nos expériences étaient effectuées dans des cavités de plus de 10 cm, la déviation atteindrait des valeurs de l'ordre de 100 μm , et les rayons risqueraient de ne plus se croiser correctement, ce qui empêcherait alors les mesures.

5. Bibliographie.

- [1] Tritton, D.J. : Physical Fluid Dynamics, Van Nostrand Reinhold (1977).
- [2] Merzkirch, W. : Flow visualization, Academic Press (1974).
- [3] Durst, F., Melling, A., Whitelaw, J.H. : Principles and practice of laser-Doppler Anemometry, Academic Press (1981).
- [4] Dudderar, T.D., Simpkins, P.G. : "Laser speckle photography in a fluid medium", *Nature* 270, pp 45-47 (1977).
- [5] Raman, C.V., Nagendra Nath, N.S. : "The diffraction of light by high frequency sound waves : Part I, II and III", *Proc. Indian Acad. Sci. Sect A2*, p406 (1935); *A2*, p413 (1935); *A3*, p75 (1936).
- [6] Lhost, O., Villers, D., Platten, J.K. : "Computer aided measurements of stationary and oscillatory velocities in free convection", proceedings of the meeting on "The use of computers in laser velocimetry", ISL Saint-Louis, France (1987).
- [7] Chandrasekhar, S. : Hydrodynamic and hydromagnetic stability, Oxford University Press (1961).
- [8] Tsuchiya, Y., Nakamura, K., Kawakubo, T. : "Steady flow observed below the threshold of Bénard convection", *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol. 50, N° 7, July 1981, pp 2149-2150.
- [9] Vest, C.M., Lawson, M.L. : "Onset of convection near a suddenly heated horizontal wire", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 15, 1972, pp 1281-1283.
- [10] Boyd, R.D., Vest, C.M. : "Onset of convection due to horizontal laser beams", *Applied Physics Letters*, Vol. 26, N° 6, 1975, pp 287-288.
- [11] Hauf, W., Grigull, V. : Optical methods in heat transfer, *Advances in Heat Transfer*, Vol. 6, 1970, pp 133-366, Academic Press.

Annexe C.

Propriétés physiques des liquides utilisés.

1. Introduction.

Pour les comparaisons entre les expériences et les calculs théoriques ou numériques qui ont été effectués dans ce travail, il était nécessaire de connaître les propriétés physiques des liquides étudiés. Nombre de ces propriétés ont pu être recueillies dans des tables spécialisées (voir réfs. [1], [2], [3], [4]).

Lorsque la tension superficielle ou interfaciale en fonction de la température était inconnue pour un système, nous l'avons mesurée par la méthode de la plaque de Wilhelmy (avec une lame de platine de 20 mm de largeur), à l'aide du tensiomètre Tensiomat 2000 de Prolabo (la résolution a été portée à approximativement 0.05 mN m^{-1} par la connexion d'un voltmètre à la sortie "enregistreur" du tensiomètre). Les liquides étaient versés dans un récipient circulaire en verre et thermostatisé (constance de la température : $\pm 0.02^\circ\text{C}$).

2. Les propriétés physiques de la solution eau-heptanol.

$$\begin{aligned} \text{A } 51^\circ\text{C,} \quad & \alpha = 471.4 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1} \\ & \lambda = 6.4 \text{ mW cm}^{-1} \text{ K}^{-1} \\ & \rho = 0.987 \text{ g cm}^{-3} \\ & C_v = 4.1814 \text{ J g}^{-1} \text{ K}^{-1} \\ & \kappa = 1.53 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} \\ & \nu = 5.36 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

3. Les propriétés physiques de l'acétone.

A 20 °C

$$\begin{aligned}\rho &= 0.7905 \text{ g cm}^{-3} \\ \alpha &= 1.46 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} \\ \kappa &= 9.9 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} \\ \nu &= 4.2 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} \\ \sigma &= 23.7 \text{ mN m}^{-1} \\ \partial\sigma/\partial T &= -0.125 \text{ mN m}^{-1} \text{ K}^{-1}\end{aligned}$$

4. Les propriétés physiques de l'heptanol.

A 15 °C

$$\begin{aligned}\rho &= 0.820 \text{ g cm}^{-3} \\ \alpha &= 9.5 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1} \\ \nu &= 10.4 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}\end{aligned}$$

5. Les propriétés physiques de l'octane.

A 20 °C

$$\begin{aligned}\rho &= 0.7026 \text{ g cm}^{-3} \\ \alpha &= 11.6 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1} \\ \nu &= 7.80 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}\end{aligned}$$

6. Les propriétés physiques du tétrachlorure de carbone.

$$\begin{aligned} \text{A } 20 \text{ }^{\circ}\text{C} \quad \rho &= 1.594 \text{ g cm}^{-3} \\ \alpha &= 1.236 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} \\ \nu &= 6.01 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

7. Bibliographie.

- [1] Weast, R.C. (éd.) : "CRC handbook of chemistry and physics", 67th edition, CRC Press (1986).
- [2] Lange, N.A. (éd.) : "Handbook of chemistry" 10th edition, McGraw-Hill (1967).
- [3] Vargaftik, N.B. : "Handbook of physical properties of liquids and gases", Springer-Verlag (1975).
- [4] International Critical Tables of Numerical Data, Vol. III, McGraw-Hill, New-york (1928).