

Droites et plans dans l'espace: opérationnalisation du cadre de la théorie de l'activité

Céline Nihoul

Mon travail de thèse trouve son origine dans mon expérience d'enseignante intervenant dans un cours de géométrie différentielle suivi par des étudiants de L3 en Belgique. Une difficulté souvent repérée consiste à décrire une courbe ou une surface de \mathbb{R}^3 définie par une paramétrisation ou une courbe de niveau. Plus précisément, que ce soit à partir d'une équation paramétrique ou cartésienne, un nombre important d'étudiants ne parvient pas à déterminer les objets décrits voire même de mettre en place une démarche permettant d'y parvenir. Or, cette interprétation géométrique des équations est essentielle dans ce cours pour pouvoir vérifier et interpréter les différents résultats obtenus lors des calculs des deux formes fondamentales. Partant de ce constat, j'ai voulu mieux comprendre en quoi cette démarche peut être difficile pour les étudiants. À l'université de Mons, seuls les droites et les plans sont étudiés en L1 dans un cours reprenant des notions du lycée pour favoriser la transition secondaire-université. Un diagnostic du cours montre que l'interprétation géométrique des équations de droites et de plans dans l'espace constitue une difficulté récurrente et importante chez la majorité des étudiants (Nihoul, 2016). Cette difficulté peut selon moi être liée au fait que ces notions mettent en jeu de nombreux registres de représentation (Duval, 1993) et de nombreux points de vue (Rogalski, 1995). Ces notions requièrent alors que les étudiants développent une certaine flexibilité entre les registres et les points de vue pour pouvoir interpréter géométriquement les équations. Selon Artigue, Chartier & Dorier (2000), cette flexibilité n'est pas automatique et doit être travaillée en classe. De plus, mon étude historique révèle qu'un travail prolongé sur les équations a mené à minorer les aspects visuels du problème (Dorier, 1990). Cela plaide en faveur de mettre en relation le cadre (Douady, 1986) de la géométrie «classique» (dit «synthétique») et le cadre de la géométrie analytique pour favoriser la compréhension des notions.

Ces premières analyses m'amènent à associer la conceptualisation des droites et des plans dans l'espace à une disponibilité des notions dans la résolution de tâches nécessitant des adaptations variées (Vandebrouck, 2008), ce qui inclut une flexibilité entre les cadres, les registres et les points de vue. Étant donné que les étudiants de L1 rencontrent ces notions au lycée, je me suis d'abord intéressée aux injonctions présentes dans les programmes scolaires.

Les équations de droites et de plans dans l'espace sont travaillées en première au lycée. Il est demandé d'étudier les équations vectorielles, paramétriques et cartésiennes des droites et des plans. Ils ne disent pas s'il est mieux de voir d'abord les droites ou les plans, quels sont les registres en jeu, quelles sont les éventuelles conversions possibles, dans quel ordre introduire les points de vue, quels sont les changements de points de vue à effectuer, et ils n'insistent pas sur l'interprétation géométrique des équations, ni sur l'articulation possible avec les connaissances antérieures des élèves. En 2018, de nouveaux programmes sont entrés en vigueur. Ceux-ci mentionnent explicitement d'articuler les registres de représentation sémiotique, d'interpréter les équations géométriquement et de mobiliser les outils de géométrie synthétique et analytique dans des exercices pour pouvoir comparer les démarches propres à chacun des cadres¹. Or, les ressources accessibles aux enseignants, comme les manuels scolaires, ne sont pas encore conformes à ceux-ci. Mon questionnement est alors le suivant: **comment les enseignants prennent en compte les nouvelles injonctions des programmes sur les droites et les plans dans l'espace dans les activités qu'ils proposent aux élèves afin de développer leur interprétation géométrique des objets ?**

1 Cette analyse curriculaire a été développée lors du WEJCH 2017.

Je fais l'hypothèse qu'au vu des nouvelles injonctions des programmes et du manque de ressources conformes à ceux-ci, une manière pour les enseignants de s'adapter est de proposer des activités différentes aux élèves et d'intégrer dans leur discours des commentaires sur l'interprétation géométrique des notions étudiées. En ce sens, je m'intéresse aux pratiques enseignantes en relation avec les activités des élèves. Dans cette perspective, j'inscris mon travail dans le cadre de la théorie de l'activité (Vandebrouck, 2008). Pour étudier les pratiques des enseignants, j'utilise notamment l'outil des proximités-en-acte (Robert & Vandebrouck, 2014) pour caractériser dans leurs discours tous les ajouts qui peuvent être faits et qui permettent de rester aussi proche que possible des connaissances antérieures des élèves. En ce qui concerne les activités prescrites, j'analyse *a priori* les exercices en termes de niveaux de mise en fonctionnement des connaissances à partir des adaptations à réaliser (Vandebrouck, 2008) pour chaque exercice.

L'étude des occasions de proximités dans les moments d'exposition des connaissances et des activités des élèves s'intègre dans l'analyse de scénarios globaux et prend appui sur une étude de relief sur les notions à enseigner. J'ai ainsi réalisé une étude de plusieurs manuels belges complétée par l'analyse des documents fournis aux élèves par les enseignants dans cinq classes de première dans lesquelles j'ai pu filmer les déroulements des cours. Ces analyses montrent que les enseignants font beaucoup de commentaires sur l'interprétation géométrique des équations mais ils ne proposent aucune tâche la travaillant réellement. De plus, les activités prescrites par les enseignants sont souvent minorées lors des déroulements suites à des aides procédurales (Pariès et al., 2014) de la part de l'enseignant. Des résultats plus détaillés de ces analyses ont été exposés lors du WEJCH 2018 et présentés dans (Nihoul, à paraître). Il est alors fort possible que la démarche d'interprétation ne soit pas développée chez un certain nombre d'élèves.

Dans cette communication, je présente la séquence d'enseignement que j'ai élaborée afin de favoriser la conceptualisation des notions par les élèves. La démarche choisie est très différente de ce qu'on retrouve dans les documents des enseignants et dans les manuels étudiés. Je fais le pari qu'on peut introduire les nouvelles notions en partant de ce que les élèves connaissent déjà sur les équations, les résolutions de systèmes, la géométrie synthétique et analytique plane. L'activité d'introduction consiste à résoudre géométriquement des systèmes d'équations, d'abord dans le plan et puis dans l'espace. Je fais l'hypothèse qu'il est plus facile pour les élèves de travailler l'interprétation géométrique d'équations de droites dans \mathbb{R}^2 , vues en seconde, avant d'appliquer cette démarche sur des équations dont ils ne connaissent pas les objets géométriques associés. Le travail à réaliser permet d'effectuer des conversions entre les registres algébrique et graphique, d'effectuer des changements de points de vue, mais aussi de concevoir les objets comme des ensembles de points. Ce dernier point est important car les élèves voient souvent les équations comme une procédure automatisée de résolution et non comme un objet en soi, conception qui peut faire obstacle à la compréhension des élèves sur les équations (Cerclé et al., 2015). Lors de la correction de cette activité, l'enseignant profitera des interactions avec les élèves pour introduire le nouveau savoir et intégrer ainsi dans son discours des proximités s'appuyant sur le travail qu'ils ont réalisé. Viennent ensuite des exercices permettant de mettre en place une dialectique outil/objet, de travailler le sens et la technique et de comparer les démarches propres aux cadres des géométries synthétique et analytique. L'expérimentation de cette séquence et l'analyse de son impact sur les apprentissages des élèves seront réalisées dans le courant de l'année prochaine.

Artigue M., Chartier G., Dorier J.-L. (2000) Presentation of other research works. Mathematics Education Library, On the teaching of Linear Algebra (pp. 247-264).

Chappet-Pariès M., Robert A., Millon-Fauré K., Drouhard J.P. (2014) Sur quoi porte le discours du professeur en classe de mathématiques? Questions méthodologiques et premiers résultats. *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz*, 12, IREM Paris 7.

- Cerclé V., Chesnais A., Gosselin R., Leberre J., Nyssen L. (2015) Enjeux de logique et de raisonnement au croisement des cadres et des registres à propos des équations de droites. *Actes du Colloque CORFEM 22*, Nîmes.
- Dorier J.-L. (1990) Analyse historique de l'émergence des concepts élémentaires d'algèbre linéaire. *Cahier de didactique des mathématiques*, 7, Université Paris Diderot.
- Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.
- Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.
- Nihoul C. (2016) Quelques difficultés d'étudiants universitaires à reconnaître les objets «droites» et «plans» dans l'espace: une étude de cas. In Nardi, E., Winslow, C., Hausberger, T. (Eds). Proceedings of INDRUM 2016, 464-473.
- Nihoul C. (à paraître) Les équations de droites dans l'espace: une étude des proximités discursives dans les manuels de l'enseignement secondaire belge. *Actes du Colloque EMF 2018*, Gennevilliers.
- Robert A., Vandebrouck F. (2014) Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves: analyses de séances sur des tâches complexes. *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz*, 10, IREM Paris 7.
- Rogalski M. (1995) Notes du séminaire à Sao Paulo, Brésil.
- Vandebrouck F. (2008) La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants. Toulouse: Octarès.