

FACULTÉ POLYTECHNIQUE DE MONS



Service de Thermique et Combustion

THERMIQUE NUMERIQUE

Prof. Paul Lybaert

Prof. Véronique Feldheim

2003 (rev. 09/2004)

Table des matières

Table des matières	iv
Liste des Tableaux	v
Table des Figures	vi
1 Introduction	1
1.1 Types de problèmes à résoudre	1
1.2 Principes généraux des méthodes numériques	1
1.2.1 Mise en équations	2
1.2.2 Discrétisation	2
1.2.3 Solution des équations nodales	3
1.2.4 Analyse des résultats	3
1.3 Plan du cours	3
2 Equations de conservation dans un milieu continu	1
2.1 Dérivée historique d'une intégrale de volume	1
2.2 Conservation de la masse	2
2.3 Conservation de la quantité de mouvement	3
2.4 Conservation de l'énergie	5
2.5 Forme générale des équations de conservation	8
2.6 Conditions initiales et conditions aux limites	9
3 Méthode aux volumes finis	1
3.1 Principes généraux de la méthode	1
3.2 Problèmes elliptiques	1
3.2.1 Discrétisation spatiale - Définition des noeuds et des éléments de volume	1
3.2.2 Discrétisation des équations - Diffusion stationnaire	3
Problèmes monodimensionnels (1-D)	3
Problèmes 2-D et 3-D	6
3.2.3 Discrétisation des équations - convection-diffusion stationnaire	7
Problèmes monodimensionnels	7
Profil linéaire	10
"Upwinding" ("Upwind scheme")	11
Solution rigoureuse	12
Schéma hybride	13
Schéma en puissance ("Power scheme")	14

	Autres schémas	14
	Problèmes 2-D et 3-D	14
	Schémas localement mono dimensionnels	16
	Diffusion numérique - schémas bi- ou tridimensionnels	16
	Conditions aux limites	19
	Méthode A : noeuds placés sur les limites	19
	Méthode B	20
3.3	Problèmes paraboliques	22
3.3.1	Diffusion non-stationnaire	22
	Méthode d'Euler explicite	23
	Exemple	23
	Méthode d'Euler implicite	24
	Méthode de pondération - méthode de Crank-Nicholson	25
3.3.2	Convection diffusion non-stationnaire	25
	Méthode explicite	26
	Exemples	27
	Méthode implicite	28
	Méthode de pondération	29
3.3.3	Couches limites stationnaires 2-D ou 3-D	29
	Discrétisation spatiale	29
	Discrétisation des équations	29
	Méthode explicite	30
	Méthode implicite	31
3.4	Solution du système d'équations nodales	32
3.4.1	Structure et propriétés du système d'équations linéarisées	33
3.4.2	Méthodes itératives par points	34
3.4.3	Solution directe pour les problèmes 1-D - Algorithme de Thomas	35
	Problèmes 2-D et 3-D - Méthodes itératives par lignes	37
4	Méthode aux éléments finis	1
4.1	Principes généraux de la méthode	1
4.1.1	Discrétisation spatiale	1
4.1.2	Discrétisation des équations	2
4.2	Eléments finis et fonctions d'interpolation	4
4.2.1	Géométrie des éléments	4
	Eléments à 1 dimension	4
	Eléments à 2 dimensions	4
	Eléments à 3 dimensions	4
4.2.2	Fonctions de forme	6
4.2.3	Élément de référence - Transformations	9
4.3	Discrétisation des équations	13
4.4	Discrétisation des équations - conductibilité thermique	13
4.4.1	Forme faible - méthode de Galerkin	13
4.4.2	Problèmes stationnaires - Equation nodale	15
4.4.3	Problèmes non-stationnaires - Equation nodale	15

4.5	Assemblage du système d'équations nodales - Calcul des coefficients	17
4.6	Discrétisation de l'équation d'advection - diffusion	19
4.6.1	Forme faible - méthode de Galerkin	19
4.6.2	Problèmes stationnaires - Equation nodale ($\rho c = \text{constante}$)	19
4.6.3	Modification de la méthode de Galerkin - "Upwinding"	21
4.7	Solution du système d'équations nodales	24
4.7.1	Structure et propriétés du système $[A][t]=[b]$	24
4.7.2	Méthodes itératives utilisées	25
4.7.3	Méthodes directes	25
5	Application aux problèmes de convection	1
5.1	Convection forcée laminaire - équations	1
5.2	Application de la méthode aux volumes finis	3
5.2.1	Discrétisation spatiale	3
5.2.2	Discrétisation des équations	3
5.2.3	Solution des équations nodales - Linéarisation	5
5.2.4	Solution des équations linéarisées - Algorithme SIMPLE	6
5.3	Convection naturelle	8
5.4	Convection forcée turbulente	10
5.4.1	Modélisation de la turbulence - Hypothèse de Boussinesq	11
5.4.2	Détermination des propriétés turbulentes	12
5.4.3	Structure de l'écoulement turbulent près d'une paroi - Profils généralisés	14
	Remarques	16
5.4.4	Solution numérique des transferts convectifs turbulents	16
6	Le transfert de chaleur par rayonnement	1
6.1	Rappel de quelques définitions	1
6.1.1	Emission d'un corps athermane	1
6.1.2	Propagation dans un milieu diathermane	3
6.1.3	Absorption par une surface	4
6.2	Equation de transfert du rayonnement	5
6.2.1	Cas du parfait diathermane	8
6.3	Couplage du rayonnement avec les autres modes	9
6.3.1	Flux radiatif	9
6.3.2	Puissance volumique radiative dissipée	9
6.4	Solution numérique - Méthode des transferts discrets	10
6.4.1	Principes	10
6.4.2	Intégration le long d'un rayon	12
6.4.3	Conditions aux limites	12
6.4.4	Calcul de la puissance dissipée	13

Chapitre 1

Introduction

1.1 Types de problèmes à résoudre

- Transfert par conductibilité
Ex : Déperditions au travers du fond d'un réservoir posé sur le sol
- Transfert par convection (+conduction)
Ex : Refroidissement par convection mixte laminaire de composants électroniques - Transfert de chaleur entre un jet turbulent et une paroi - Champ de température et écoulement à l'intérieur d'un échangeur
- Transfert par rayonnement
Ex : Calcul des températures des éléments d'un satellite
- Transferts combinés conductibilité - convection - rayonnement
Ex : Champ de température dans un four de cuisson céramique - Champs de température et de concentrations dans une chambre de combustion
- Simulation des systèmes thermiques
Ex : Simulation des fours intermittents de cuisson céramique - Simulation des fours de recuit discontinu de bobines de tôle

1.2 Principes généraux des méthodes numériques

L'utilisation d'une méthode numérique en vue de la solution d'un problème de transfert de chaleur requiert quatre étapes :

- la mise en équations du problème
- la discrétisation du domaine et des équations
- la résolution des équations discrétisées
- l'analyse des résultats

1.2.1 Mise en équations

La mise en équations consiste à exprimer en termes mathématiques un problème posé en termes physiques.

Généralement, cela nécessite de poser au préalable un certain nombre d'hypothèses - négliger certains modes de transfert ou certains phénomènes, approximer les propriétés thermophysiques par des valeurs constantes,... - de façon à simplifier les équations et à réduire au maximum la difficulté de la résolution.

Ces hypothèses faites, on écrit les équations qui régissent les phénomènes mis en jeu dans le problème posé. Pour des problèmes de transfert de chaleur, il s'agit de l'équation de conservation de l'énergie, associée éventuellement à d'autres équations de conservation (masse, quantité de mouvement, espèces chimiques (combustion par exemple), intensité de rayonnement,...), et/ou des relations cinétiques (liant les vitesses de réaction à la température,...). Ces équations sont des équations différentielles et leur solution requiert l'expression de conditions initiales et aux limites du domaine de résolution.

On appelle modèle l'ensemble ainsi constitué par la définition du domaine de résolution, les hypothèses simplificatrices, les équations et leurs conditions aux limites et initiales. Une situation physique déterminée peut être décrite par plusieurs modèles qui diffèrent en complexité, en précision et par le type de résultats qu'ils fournissent.

1.2.2 Discrétisation

La solution des équations du modèle - le champ de température - est une fonction continue de l'espace et éventuellement du temps. Dans les cas qui nous occupent, cette solution ne peut être calculée analytiquement. On doit donc en chercher une approximation.

Dans les méthodes numériques que nous examinerons dans ce cours, cette approximation est basée sur un ensemble fini de valeurs approximatives des températures et des autres variables éventuelles en un certain nombre de points appelés noeuds. Les valeurs associées à ces noeuds sont appelées valeurs nodales. Des noeuds devront être définis dans l'espace - c'est la discrétisation spatiale ou maillage du domaine - et, le cas échéant, dans le temps - c'est la discrétisation temporelle.

Pour calculer les valeurs nodales, il est nécessaire de transformer les équations du modèle. C'est la discrétisation des équations. Celle-ci conduit à un système d'équations, en nombre égal au nombre de noeuds, dont les inconnues sont les valeurs nodales.

1.2.3 Solution des équations nodales

Les équations nodales obtenues sont des équations algébriques, non-linéaires si les équations du modèle sont non-linéaires.

Ce système d'équations algébriques peut être résolu par les méthodes classiques du calcul numérique. Cependant, la structure des équations nodales obtenues par certaines méthodes de discrétisation permet l'utilisation de méthodes spécialement adaptées et plus efficaces que les méthodes générales. Quelques unes de ces méthodes seront examinées dans le cadre de ce cours.

1.2.4 Analyse des résultats

Au terme de la résolution du système d'équations nodales, l'utilisateur dispose d'une approximation de la solution cherchée. Il lui appartient alors de l'analyser, c'est-à-dire d'évaluer sa cohérence et sa précision. Là interviennent le sens physique et l'expérience de l'ingénieur.

Cette analyse peut l'amener à revenir à l'une ou l'autre étape de la procédure afin d'améliorer la qualité des résultats : revoir la définition des noeuds pour améliorer la précision, lever une hypothèse simplificatrice du modèle en vue d'obtenir une meilleure adéquation au réel,...

L'utilisation d'une méthode numérique est donc finalement une démarche par approximations successives qui nécessite une bonne connaissance à la fois des phénomènes physiques mis en oeuvre et des méthodes numériques de simulation de ces phénomènes. C'est l'objet de ce cours d'améliorer cette connaissance.

1.3 Plan du cours

La transmission de la chaleur s'effectue selon deux modes fondamentaux : la conduction thermique, d'une part, le rayonnement d'autre part. Ces deux modes de transfert sont régis par des équations de types différents : des équations aux dérivées partielles régissent les phénomènes conductifs et convectifs, des équations intégrales différentielles rendent compte des transferts par rayonnement. Le cours sera dès lors divisé en deux parties, consacrées successivement à ces deux modes de transfert.

Le chapitre 1 traite de la modélisation des problèmes de transfert par conduction-convection. On y dérive l'équation de conservation de l'énergie dans un milieu continu. On y rappelle l'expression des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement dans un fluide en mouvement.

Les deux chapitres suivants traitent de méthodes de discrétisation de ces équations.

Nous avons choisi de limiter notre présentation aux deux méthodes les plus répandues : la méthode aux volumes finis et la méthode aux éléments finis. Les principes de ces méthodes sont présentés aux chapitres 2 et 3.

Ces principes sont ensuite appliqués à la résolution de problèmes de conductibilité thermique au chapitre 4, le chapitre 5 étant consacré quant à lui aux phénomènes convectifs.

Les problèmes de rayonnement sont introduits, au chapitre 6, par un rappel des équations qui régissent les transferts radiatifs.

Deux méthodes de résolution numériques de ces équations ont été choisies : la méthode des zones sera explicitée au chapitre 7, les méthodes des flux seront examinées au chapitre 8. Ces dernières sont particulièrement utilisées pour traiter les problèmes de transferts combinés conduction - convection - rayonnement.

Le dernier chapitre est consacré à la simulation des systèmes thermiques. Ceux-ci mettent généralement en oeuvre tous les modes de transfert de chaleur, ainsi que des systèmes de régulation. Leur complexité rend quasi-impossible la simulation détaillée de leur fonctionnement. Des méthodes simplifiées, développées à cet effet, sont présentées au chapitre 9.

Chapitre 2

Equations de conservation dans un milieu continu

Les transferts thermiques par conductibilité ou par convection sont régis par l'équation de conservation de l'énergie. Cette équation est la seule à considérer dans le cas des milieux solides indéformables. Par contre, dans les fluides, transfert de chaleur et écoulement sont liés et la simulation des transferts thermiques convectifs nécessite donc généralement le calcul du champ de vitesse. Les problèmes de convection sont donc régis par les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

2.1 Dérivée historique d'une intégrale de volume

Les équations de conservation expriment les principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie, ... appliqués à un volume du milieu continu. Un même principe peut être exprimé sous différentes formes, suivant le volume - infinitésimal ou quelconque - et le référentiel - fixe ou en mouvement avec le fluide - choisis. Nous développerons les différentes équations en exprimant les principes de conservation appliqués à un volume quelconque de fluide que l'on suit dans son mouvement (fig. 2.1). Ces expressions utilisent la dérivée historique d'une intégrale de volume. Celle-ci est liée à la dérivée temporelle locale et à la vitesse de l'écoulement : pour un champ $f(x, y, z, \tau)$, et un système déformable de volume V limité par la surface S , on a

$$\frac{D}{D\tau} \int_{V(\tau)} f dV = \int_{V(\tau)} \frac{\partial f}{\partial \tau} dV + \oint_{S(\tau)} f \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (2.1.1)$$

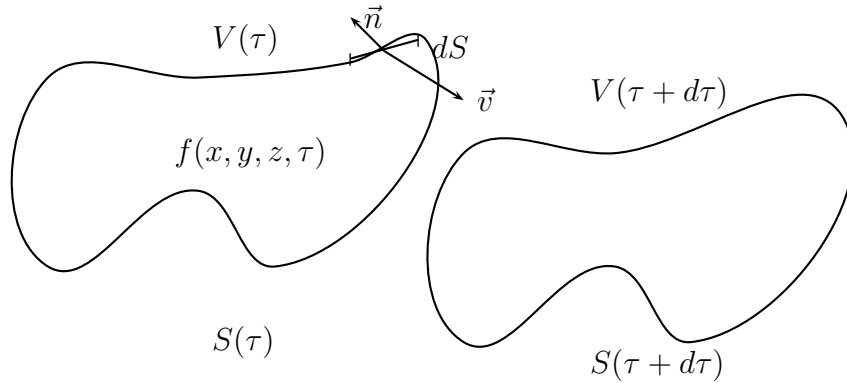


FIG. 2.1 – Définition du volume de fluide suivi dans son mouvement

2.2 Conservation de la masse

L'équation de conservation de la masse est obtenue en exprimant que la masse du volume V , que l'on suit dans son mouvement, ne change pas au cours du temps càd

$$\frac{\mathcal{D}m}{\mathcal{D}\tau} = 0 \quad (2.2.1)$$

En utilisant l'équation 2.1.1, on obtient

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}\tau} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dV + \oint_S \rho \vec{v} \vec{n} dS = 0 \quad (2.2.2)$$

ce qui conduit, en utilisant le théorème d'Ostrogradsky, à

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dV + \int_V \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) dV = 0 \quad (2.2.3)$$

Cette expression est valable quel que soit le volume V . Elle est donc valable pour un volume infinitésimal. On obtient ainsi la forme locale ou différentielle de l'équation de conservation de la masse, appelée également *équation de continuité*

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.2.4)$$

Dans le cas d'un fluide incompressible et non-dilatable, ρ est constant et l'équation devient

$$\vec{\nabla} \vec{v} = 0 \quad (2.2.5)$$

2.3 Conservation de la quantité de mouvement

L'équation de conservation de quantité de mouvement est l'expression de la seconde loi de Newton appliquée à un volume de fluide en mouvement càd

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}\tau}(m\vec{v}) = \sum \vec{F}_{ext} \quad (2.3.1)$$

Les forces extérieures se décomposent en forces de volume et en forces de surface. Appliquée au volume V , l'équation 2.3.1 s'écrit

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}\tau} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_V \vec{F}_v dV + \oint_S \vec{F}_s dS \quad (2.3.2)$$

Les forces de volume sont des forces à distance qui s'expriment à partir de leur densité massique \vec{g} par

$$\vec{F}_v = \rho \vec{g} \quad (2.3.3)$$

Le cas le plus courant correspond aux forces de gravité pour lesquelles la densité massique est égale à l'accélération de la pesanteur.

Les forces de surface sont les tensions exercées par le fluide en tout point de la surface S . Elles se décomposent en forces de pression et en contraintes visqueuses et sont données par

$$\vec{F}_s = -p\vec{n} + \underline{\tau}\vec{n} \quad (2.3.4)$$

avec le tenseur des contraintes visqueuses donné par

$$\underline{\tau} = \begin{vmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{vmatrix} \quad (2.3.5)$$

τ_{ij} étant la tension appliquée dans la direction i sur une surface perpendiculaire à la direction j .

L'équation de conservation 2.3.2 peut donc s'écrire

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}\tau} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_V \rho \vec{g} dV - \oint_S p \vec{n} dS + \oint_S \underline{\tau} \vec{n} dS \quad (2.3.6)$$

avec

$$\begin{aligned} \underline{\tau}\vec{n} &= \begin{vmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{vmatrix} \\ &= \theta_x \vec{u}_x + \theta_y \vec{u}_y + \theta_z \vec{u}_z \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

les composantes du vecteur contrainte visqueuse $\vec{\theta}$ étant données par

$$\theta_i = \sum_j \tau_{ij} n_j \quad (2.3.8)$$

En projetant l'équation vectorielle 2.3.6 sur l'axe Ox, et en appliquant le théorème d'Ostrogradsky aux intégrales de surface, on obtient l'équation de conservation de la composante suivant x de la quantité de mouvement

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}\tau} \int_V \rho v_x dV = \int_V \rho g_x dV - \int_V \frac{\partial p}{\partial x} dV + \int_V \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dV \quad (2.3.9)$$

c'est-à-dire

$$\int_V \frac{\partial}{\partial \tau} (\rho v_x) dV + \int_V \vec{\nabla} (\rho \vec{v} v_x) dV = \int_V \rho g_x dV - \int_V \frac{\partial p}{\partial x} dV + \int_V \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dV \quad (2.3.10)$$

ou, sous forme différentielle

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho v_x) + \vec{\nabla} (\rho \vec{v} v_x) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (2.3.11)$$

et des expressions analogues pour les composantes suivant y et z.

Pour un fluide newtonien, le tenseur des contraintes visqueuses τ_{ij} est lié au tenseur des taux de déformation ϵ_{ij} par

$$\tau_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} - \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \left(\sum_k \epsilon_{kk} \right) \quad (2.3.12)$$

avec

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.3.13)$$

En introduisant ces expressions dans 2.3.8, on obtient finalement

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y v_x) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z v_x) = \\ & \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

ou encore

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y v_x) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z v_x) = \\ & \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + S_{v_x \mu} \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

avec

$$S_{v_x\mu} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right) \quad (2.3.16)$$

A cause de l'équation de continuité 2.2.5, le terme source 2.3.16 s'annule pour un fluide aux propriétés physiques (ρ et μ) constantes.

Les expressions ci-dessus constituent la *forme conservative* des équations de conservation de quantité de mouvement. Cette appellation est liée au fait que le terme $\vec{\nabla}(\rho\vec{v}v_x)$ représente le bilan du flux convectif de quantité de mouvement.

En notant que, compte tenu de l'équation de continuité 2.2.4,

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho v_x) + \vec{\nabla}(\rho\vec{v}v_x) = \rho \frac{\partial v_x}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \rho\vec{v}\vec{\nabla}v_x + v_x \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = \rho \frac{\partial v_x}{\partial \tau} + \rho\vec{v}\vec{\nabla}v_x \quad (2.3.17)$$

l'équation 2.3.14 peut également s'écrire

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial \tau} + \rho\vec{v}\vec{\nabla}v_x = \vec{\nabla}(\mu\vec{\nabla}v_x) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + S_{v_x\mu} \quad (2.3.18)$$

Cette équation est la *forme non-conservative* de l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

Les deux formes de l'équation de conservation de la quantité de mouvement 2.3.15 et 2.3.18 sont mathématiquement équivalentes. Du point de vue des méthodes numériques, elles conduisent cependant après discrétisation à des équations nodales différentes, et dont les propriétés, de convergence notamment, peuvent différer sensiblement. Cela conduira à préférer parfois une forme par rapport à l'autre.

2.4 Conservation de l'énergie

On obtient l'équation de conservation de l'énergie en appliquant le premier principe de thermodynamique à un volume de fluide en mouvement. Ce principe s'écrit

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}\tau}(U + E_{cin}) = \frac{\delta W}{\delta \tau} + \frac{\delta Q}{\delta \tau} \quad (2.4.1)$$

La puissance fournie au système sous forme de travail résulte des puissances associées aux forces de volume et aux forces de surface càd

$$\frac{\delta W}{\delta \tau} = \int_V \rho \vec{g}\vec{v}dV - \oint_S p \vec{n}\vec{v}dS + \oint_S \underline{\tau}\vec{n}\vec{v}dS \quad (2.4.2)$$

La puissance fournie sous forme de chaleur est la somme de la puissance générée à l'intérieur du volume et du flux de chaleur entrant par la surface càd

$$\frac{\delta Q}{\delta \tau} = \int_V qdV - \oint_S \vec{\phi}\vec{n}dS \quad (2.4.3)$$

En remplaçant dans 2.4.1 et après transformation des intégrales de surface en intégrales de volume, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}\tau} \int_V \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) dV &= \int_V \rho \vec{g} \vec{v} dV - \int_V \vec{\nabla} \cdot (p\vec{v}) dV \\ &+ \int_V \vec{\nabla} \cdot (\underline{\tau}\vec{v}) dV + \int_V q dV - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\phi} dV \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

avec

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\underline{\tau}\vec{v}) &= \frac{\partial}{\partial x} (v_x \tau_{xx} + v_y \tau_{xy} + v_z \tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (v_x \tau_{yx} + v_y \tau_{yy} + v_z \tau_{yz}) \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} (v_x \tau_{zx} + v_y \tau_{zy} + v_z \tau_{zz}) \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Cette relation est valable quel que soit le volume V , on a donc

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{v} \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) \right) = \rho \vec{g} \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot (p\vec{v}) + \vec{\nabla} \cdot (\underline{\tau}\vec{v}) + q - \vec{\nabla} \cdot \vec{\phi} \quad (2.4.6)$$

forme différentielle conservative de l'équation de conservation de l'énergie totale.

L'équation de conservation de l'énergie interne est obtenue en soustrayant de cette équation l'équation de conservation de l'énergie cinétique. Celle-ci s'obtient en multipliant par la vitesse \vec{v}_i l'équation de conservation de la quantité de mouvement, ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\rho \frac{v^2}{2} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{v} \rho \frac{v^2}{2} \right) &= \rho \vec{g} \vec{v} - \vec{v} \vec{\nabla} \cdot p + v_x \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \\ &+ v_y \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) + v_z \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

En soustrayant 2.4.7 de 2.4.6, on obtient l'équation de conservation de l'énergie interne

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho u) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \rho u) = q - \vec{\nabla} \cdot \vec{\phi} - p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \mu \Phi_{diss} \quad (2.4.8)$$

Le terme $\mu \Phi_{diss}$ est toujours positif. Il rend compte de l'échauffement du fluide dû au travail irréversible des contraintes visqueuses. Il est donné par

$$\begin{aligned} \mu \Phi_{diss} &= \tau_{xx} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial v_x}{\partial z} + \tau_{yx} \frac{\partial v_y}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ &+ \tau_{zx} \frac{\partial v_z}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial v_z}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

On préfère généralement utiliser l'équation de bilan d'enthalpie. L'enthalpie est définie par

$$h = u + \frac{p}{\rho} \quad (2.4.10)$$

En introduisant cette relation dans le bilan d'énergie interne 2.4.8, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho h) + \vec{\nabla}(\vec{v}\rho h) = q - \vec{\nabla}\vec{\phi} + \frac{\partial p}{\partial \tau} + \vec{v}\vec{\nabla}p + \mu\Phi_{diss} \quad (2.4.11)$$

Le vecteur densité de flux ϕ est lié au transfert de chaleur par conductibilité thermique au sein du milieu. Il est lié au champ de température par la loi de Fourier, càd

$$\vec{\phi} = -\lambda\vec{\nabla}T \quad (2.4.12)$$

La forme conservative de l'équation de conservation de l'énergie s'écrit donc finalement

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho h) + \vec{\nabla}(\vec{v}\rho h) = \vec{\nabla}(\lambda\vec{\nabla}T) + q + \frac{\partial p}{\partial \tau} + \vec{v}\vec{\nabla}p + \mu\Phi_{diss} \quad (2.4.13)$$

Dans les applications industrielles courantes, en présence de transfert de chaleur, les trois derniers termes de cette équation sont généralement très faibles par rapport aux autres et peuvent être négligés. Ils ne deviennent significatifs que lorsque les vitesses sont proches de la vitesse du son.

La forme non-conservative de l'équation 2.4.13 est obtenue en soustrayant l'équation de continuité multipliée par l'enthalpie ce qui donne

$$\rho\frac{\partial h}{\partial \tau} + \rho\vec{v}\vec{\nabla}h = \vec{\nabla}(\lambda\vec{\nabla}T) + q + \dots \quad (2.4.14)$$

Une équation ne faisant intervenir que la température comme variable dépendante est obtenue en introduisant la variation de l'enthalpie avec la température càd

$$dh = c_p dT \quad (2.4.15)$$

ce qui donne

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} + \rho c_p \vec{v}\vec{\nabla}T = \vec{\nabla}(\lambda\vec{\nabla}T) + q + \dots \quad (2.4.16)$$

La forme conservative de l'équation exprimée en température est donc

$$c_p \frac{\partial}{\partial \tau}(\rho T) + c_p \vec{\nabla}(\rho\vec{v}T) = \vec{\nabla}(\lambda\vec{\nabla}T) + q + \dots \quad (2.4.17)$$

Dans le cas le plus général, les propriétés physiques λ et c_p dépendent de la température. Si la chaleur spécifique peut être considérée comme constante, la relation liant l'enthalpie à la température devient

$$h = c_p T \quad (2.4.18)$$

et le bilan d'énergie (2.4.17) peut alors s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho c_p T) + \vec{\nabla}(\rho\vec{v}c_p T) = \vec{\nabla}(\lambda\vec{\nabla}T) + q + \dots \quad (2.4.19)$$

Dans un solide, les chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant sont égales. L'équation de Fourier-Kirchhoff régissant le transfert de chaleur par conductibilité dans un solide immobile est obtenue en annulant la vitesse dans les équations de conservation de l'énergie, c'ad

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} = \vec{\nabla}(\lambda \vec{\nabla} T) + q \quad (2.4.20)$$

2.5 Forme générale des équations de conservation

Les équations de conservation de la masse, des trois composantes de la quantité de mouvement et de l'énergie ont une forme commune. Cette forme générale d'une équation de conservation s'obtient en écrivant le bilan de la grandeur conservée sur un élément de volume du fluide. Ce bilan s'exprime par

$$\textit{Accumulation} + \textit{Flux net sortant} = \textit{Génération interne}$$

ce qui devient, mis sous forme mathématique, pour une grandeur conservée f , intensive par unité de masse

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho f) + \vec{\nabla} \vec{J}_f = q_f \quad (2.5.1)$$

Le flux \vec{J}_f est la somme d'un flux convectif et d'un flux diffusionnel c'ad

$$\vec{J}_f = \rho \vec{v} f - \Gamma_f \vec{\nabla} f^* \quad (2.5.2)$$

expression dans laquelle f^* est le potentiel associé au transport de la grandeur f . En introduisant cette expression dans l'équation de bilan de f (2.5.1) on obtient

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho f) + \vec{\nabla}(\rho \vec{v} f) = \vec{\nabla}(\Gamma_f \vec{\nabla} f^*) + q_f \quad (2.5.3)$$

forme conservative de l'équation de conservation, appelée aussi *équation de transport*, de f .

La forme non-conservative est obtenue en multipliant l'équation de continuité par f et en soustrayant le résultat de l'équation 2.5.3, ce qui donne

$$\rho \frac{\partial f}{\partial \tau} + \rho \vec{v} \vec{\nabla} f = \vec{\nabla}(\Gamma_f \vec{\nabla} f^*) + q_f \quad (2.5.4)$$

Les équations 2.5.3 et 2.5.4 sont applicables à la conservation de nombreuses grandeurs : masse, quantité de mouvement, énergie, espèces chimiques, Ces différentes équations sont synthétisées dans le tableau 5.1 ci-après. Lorsque la grandeur transportée et la grandeur potentiel sont identiques, le coefficient de transport Γ_f a des dimensions indépendantes de la grandeur transportée : il s'exprime en $kg.m^{-1}.s^{-1}$.

TAB. 2.1 – Equations de conservation dans un milieu continu

Principe de conservation	f	f^*	Γ_f
Masse	1	-	-
Quantité de mouvement	v_i	v_i	μ
Energie (potentiel : t)	h	t	λ
Energie (potentiel : h)	h	h	$\frac{\lambda}{c_p}$
Espèce chimique	x_i	x_i	Γ_i

Les différentes équations de conservation ayant une forme commune, nous limiterons l'étude des méthodes de discrétisation à l'équation de bilan d'énergie. Les conclusions de cette étude pourront être appliquées directement à la discrétisation des autres équations.

2.6 Conditions initiales et conditions aux limites

Les équations de conservation sont des équations aux dérivées partielles, du premier ordre en la variable temps et du second ordre en les variables d'espace. Pour que le problème soit correctement défini mathématiquement, ces équations doivent être complétées de conditions aux limites et initiales.

Les équations étant du second ordre en variables spatiales, elles nécessitent de manière générale l'imposition d'une condition sur chaque variable dépendante partout sur la limite du domaine. Ces conditions peuvent porter soit sur la valeur soit sur le gradient de la variable.

Pour la température par exemple, les différentes conditions aux limites suivantes peuvent être imposées :

- condition de Dirichlet :

$$T = T_l(x, y, z, \tau) \quad (2.6.1)$$

- condition de Neumann :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \phi_l(x, y, z, \tau) \quad (2.6.2)$$

- condition de Fourier :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = K_f(T - T_f) \quad (2.6.3)$$

Pour certaines formes particulières des équations - écoulements "paraboliques" - il n'est pas nécessaire de fixer des conditions sur *toutes* les limites du domaine, les différents champs étant indépendants de ce qui se passe là où le fluide sort du système.

Nous reviendrons sur l'écriture des conditions aux limites dans les chapitres consacrés à la simulation des transferts thermiques conductifs et convectifs.

Lorsque le problème est non-stationnaire, les équations étant du premier ordre en la variable temps, leur solution nécessite de fixer les valeurs initiales des différents champs cherchés. Cette condition initiale sera de la forme, pour la température par exemple,

$$T(x, y, z, \tau = 0) = T_0(x, y, z) \quad (2.6.4)$$

Chapitre 3

Méthode aux volumes finis

Dans la méthode aux volumes finis, on utilise les équations de conservation sous leur forme intégrale. Celles-ci sont discrétisées sur un ensemble d'éléments de volume qui recouvrent le domaine.

3.1 Principes généraux de la méthode

La méthode est basée sur les principes suivants :

- Discrétisation spatiale
 - noeuds : points où les variables sont définies i
 - éléments de volume associés aux noeuds (1 élément par noeud) V_i
- Discrétisation des équations
 - intégrer l'équation de conservation sur chaque élément de volume V_i en approximant les différents termes de l'équation à partir des valeurs nodales
 - = appliquer le principe de conservation à chaque élément de volume
 - = écrire le bilan de f sur chaque V_i

Il existe différentes méthodes selon la forme des éléments et les fonctions utilisées pour approximer les différents termes du bilan. Dans ce chapitre, on étudiera les méthodes aux volumes finis sur maillages structurés cartésiens et non structurés.

3.2 Problèmes elliptiques

3.2.1 Discrétisation spatiale - Définition des noeuds et des éléments de volume

Deux méthodes peuvent être utilisées pour définir les noeuds et les éléments de volume dans un maillage rectangulaire :

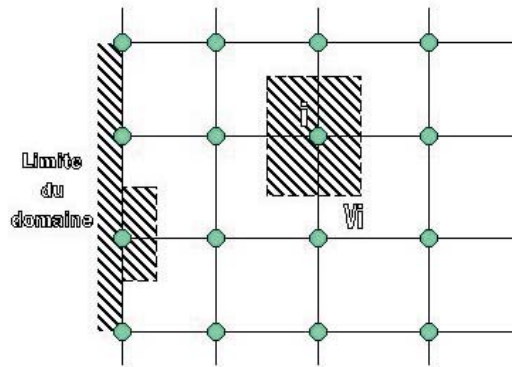


FIG. 3.1 – Discrétisation spatiale basée sur les noeuds

- Méthode A : cette méthode définit d'abord les noeuds, aux points d'intersection des lignes d'un réseau de parallèles aux axes de coordonnées. On associe à chaque noeud un élément de volume dont les faces sont situées à mi-distance entre le noeud considéré et ses voisins (fig. 3.1). Dans cette méthode, les limites coïncident avec des lignes du réseau. Des "demi-éléments" de volume sont associés aux noeuds situés sur les limites.
- Méthode B : cette seconde méthode part de la définition des éléments de volume. Ils sont définis par les différentes mailles du réseau. Le noeud associé à chaque élément de volume est placé au centre de celui-ci (fig. 3.2). Dans cette méthode, les limites coïncident avec des limites d'éléments. Généralement, on place des noeuds sur les limites. A ces noeuds sont associés des éléments fictifs de volume nul.

Pour un maillage uniforme, les deux méthodes conduisent à des maillages pour lesquels les noeuds sont au centre des éléments et les faces des éléments de volume sont situées à mi-distance entre les noeuds voisins.

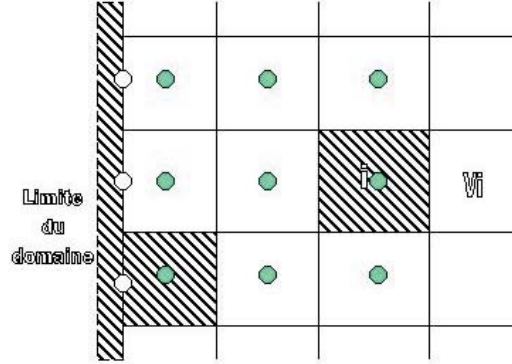


FIG. 3.2 – Discrétisation spatiale basée sur les éléments

3.2.2 Discrétisation des équations - Diffusion stationnaire

Problèmes monodimensionnels (1-D)

L'équation à résoudre s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + q = 0 \quad (3.2.1)$$

$$\vec{\nabla}(\lambda \vec{\nabla} T) + q = 0 \quad (3.2.2)$$

En réalisant l'intégration sur le volume de contrôle V_i , on a

$$\int_{V_i} \vec{\nabla}(\lambda \vec{\nabla} T) dV + \int_{V_i} q dV = 0 \quad (3.2.3)$$

$$\int_{S_i} (\lambda \vec{\nabla} T) \vec{n} dS + \int_{V_i} q dV = 0 \quad (3.2.4)$$

$$\sum Flux\ entrants + Source = 0 \quad (3.2.5)$$

Pour un noeud intérieur, cela donne

$$\left(+\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} S_{i+\frac{1}{2}} + \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}} S_{i-\frac{1}{2}} + \int_{V_i} q dV = 0 \quad (3.2.6)$$

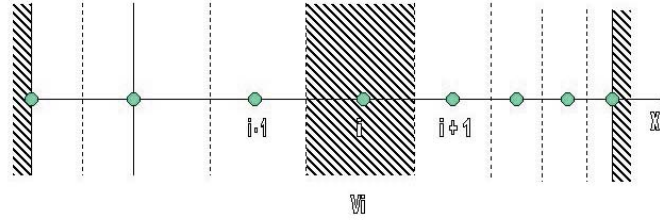


FIG. 3.3 – Problème monodimensionnel

Pour évaluer cette expression, on effectue les approximations suivantes :

- profils de température linéaires entre les noeuds
- source uniforme sur chaque élément de volume

Cela permet donc d'écrire :

$$\left(+\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} = \lambda \frac{T_{i+1} - T_i}{x_{i+1} - x_i} = K_{i+1,i}(T_{i+1} - T_i) \quad (3.2.7)$$

$$\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}} = \lambda \frac{T_{i-1} - T_i}{x_i - x_{i-1}} = K_{i-1,i}(T_{i-1} - T_i) \quad (3.2.8)$$

$$\int_{V_i} q dV = q_i V_i = q_i (x_{i+1} - x_{i-1})/2 \quad (3.2.9)$$

$$S_{i+\frac{1}{2}} = S_{i-\frac{1}{2}} = 1 \quad (3.2.10)$$

En regroupant tous les termes de l'équation, on a

$$\sum_j K_{ij} S_{ij} (T_j - T_i) + q_i V_i = 0 \quad (3.2.11)$$

$$\sum_j K_{ij} S_{ij} (T_i - T_j) = q_i V_i \quad (3.2.12)$$

Pour un noeud intérieur, on obtient donc une équation algébrique de la forme

$$\boxed{\sum_j a_{ij} T_j = b_i} \text{ avec}$$

$$\begin{cases} a_{ij} = -K_{ij} S_{ij} \\ a_{ii} = \sum_j K_{ij} S_{ij} \\ b_i = q_i V_i \end{cases} \quad (3.2.13)$$

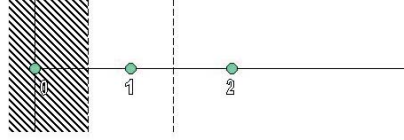


FIG. 3.4 – Noeud à la limite

Pour un noeud aux limites, on rencontre trois types de conditions aux limites différentes :

- Condition de Dirichlet (température imposée)

$$T_0 = T_{paroi}$$

- Condition de Neumann (flux imposé)

$$\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\right)_0 = \phi_{lim}$$

(flux sortant !)

Le bilan sur V_0 donne

$$\left(+\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{0+\frac{1}{2}} S_{0+\frac{1}{2}} + \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)_0 S_0 + q_0 V_0 = 0 \quad (3.2.14)$$

c'est-à-dire

$$\lambda \frac{T_1 - T_0}{x_1 - x_0} S_{0+\frac{1}{2}} - \phi_{lim} S_0 + q_0 V_0 = 0 \quad (3.2.15)$$

$$K_{01} S_{01} (T_0 - T_1) = q_0 V_0 - \phi_{lim} S_0 \quad (3.2.16)$$

- Condition de Fourier (contact avec un fluide)

$$\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\right)_0 = K_f (T - T_f)$$

$$K_{01} S_{01} (T_0 - T_1) + K_f S_0 (T_0 - T_f) = q_0 V_0 \quad (3.2.17)$$

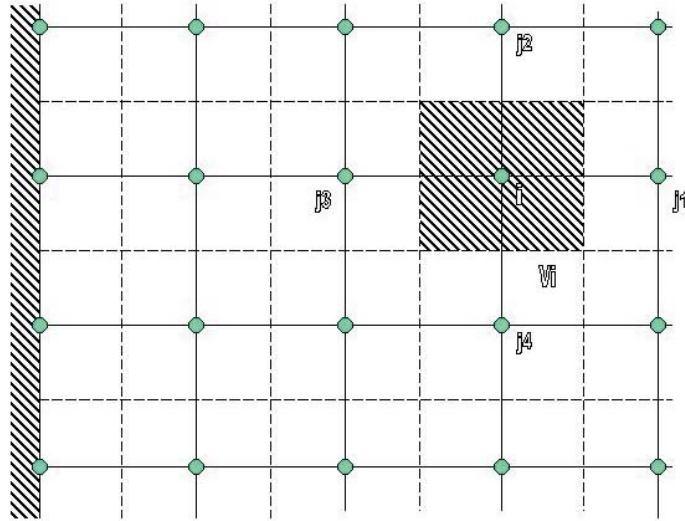


FIG. 3.5 – Définition d'un volume de contrôle - cas 2D

Pour un noeud aux limites, l'équation nodale est donc de la forme :

$$\sum_j a_{ij} T_j = b_i \quad (3.2.18)$$

avec

$$\begin{cases} a_{ij} = -K_{ij} S_{ij} \\ a_{ii} = \sum_j K_{ij} S_{ij} + K_f S_{lim} \\ b_i = q_0 V_0 - \phi_{lim} S_{lim} + K_f S_{lim} T_f \end{cases} \quad (3.2.19)$$

Problèmes 2-D et 3-D

L'équation à résoudre s'écrit :

$$\vec{\nabla}(\lambda \vec{\nabla} T) + q = 0 \quad (3.2.20)$$

En réalisant l'intégration sur le volume de contrôle V_i , on a

$$\int_{V_i} \vec{\nabla}(\lambda \vec{\nabla} T) dV + \int_{V_i} q dV = 0 \quad (3.2.21)$$

$$\int_{S_i} (\lambda \vec{\nabla} T) \vec{n} dS + \int_{V_i} q dV = 0 \quad (3.2.22)$$

Pour évaluer ces expressions, on effectue les approximations suivantes :

- flux uniformes sur chaque face
- profils de température linéaires entre les noeuds
- source uniforme sur chaque élément de volume

Cela permet donc d'écrire :

$$\left(+\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{ij_1} S_{ij_1} + \left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{ij_2} S_{ij_2} - \left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{ij_3} S_{ij_3} - \left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{ij_4} S_{ij_4} + q_i V_i = 0 \quad (3.2.23)$$

ce qui donne :

$$\sum_{j=j_1}^{j_4} K_{ij} S_{ij} (T_i - T_j) = q_i V_i \quad (3.2.24)$$

avec

$$K_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{d_{ij}} \quad (3.2.25)$$

On obtient donc une équation de la forme :

$$\sum_j a_{ij} T_j = b_i \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_{ij} = -K_{ij} S_{ij} \\ a_{ii} = \sum_j K_{ij} S_{ij} \\ b_i = q_i V_i \end{cases} \quad (3.2.26)$$

3.2.3 Discrétisation des équations - convection-diffusion stationnaire

Problèmes monodimensionnels

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v h) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + q \quad (3.2.27)$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial x}(J_h) = q$$

avec

$$J_h = \rho v h - \lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

Effectuons l'intégration sur le volume de contrôle V_i

$$\int_{V_i} \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_h dV = \int_{V_i} q dV \quad (3.2.28)$$

c'est-à-dire

$$\int_{S_i} \vec{J}_h \cdot \vec{n} dS = \int_{V_i} q dV \quad (3.2.29)$$

$$J_{i+\frac{1}{2}} S_{i+\frac{1}{2}} - J_{i-\frac{1}{2}} S_{i-\frac{1}{2}} = \int_{V_i} q dV \quad (3.2.30)$$

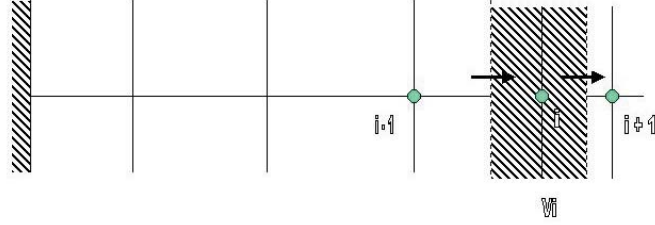


FIG. 3.6 – Définition d'un volume de contrôle - cas 1D

En supposant q uniforme dans l'élément de volume, on a

$$J_{i+\frac{1}{2}}S_{i+\frac{1}{2}} - J_{i-\frac{1}{2}}S_{i-\frac{1}{2}} = q_iV_i \quad (3.2.31)$$

avec

$$J_{i+\frac{1}{2}} = (\rho u)_{i+\frac{1}{2}}h_{i+\frac{1}{2}} - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} \quad (3.2.32)$$

$$J_{i-\frac{1}{2}} = (\rho u)_{i-\frac{1}{2}}h_{i-\frac{1}{2}} - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}} \quad (3.2.33)$$

L'équation de continuité s'écrit :

$$\int_{V_i} \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) dV = \int_{S_i} (\rho \vec{v}) \vec{n} dS = 0 \quad (3.2.34)$$

c'est-à-dire

$$(\rho u)_{i+\frac{1}{2}}S_{i+\frac{1}{2}} - (\rho u)_{i-\frac{1}{2}}S_{i-\frac{1}{2}} = 0 \quad (3.2.35)$$

En multipliant l'équation 3.2.35 par h_i et en soustrayant de 3.2.31, on a

$$(J_{i+\frac{1}{2}} - (\rho u)_{i+\frac{1}{2}}h_i)S_{i+\frac{1}{2}} - (J_{i-\frac{1}{2}} - (\rho u)_{i-\frac{1}{2}}h_i)S_{i-\frac{1}{2}} = q_iV_i \quad (3.2.36)$$

On pose

$$\begin{aligned} J_{i+\frac{1}{2}} - (\rho u)_{i+\frac{1}{2}}h_i &= (\rho u)_{i+\frac{1}{2}}(h_{i+\frac{1}{2}} - h_i) - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} \\ &= K_{i,i+1}(T_i - T_{i+1}) \end{aligned} \quad (3.2.37)$$

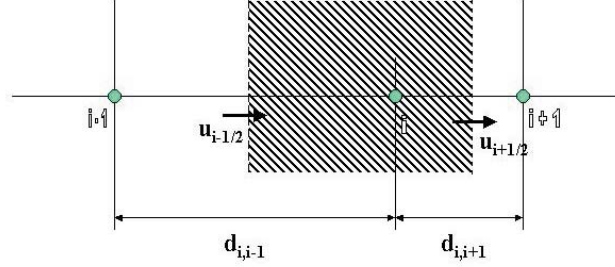


FIG. 3.7 – Evaluation des flux

et

$$\begin{aligned} J_{i-\frac{1}{2}} - (\rho u)_{i-\frac{1}{2}} h_i &= (\rho u)_{i-\frac{1}{2}} (h_{i-\frac{1}{2}} - h_i) - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}} \\ &= K_{i,i-1} (T_{i-1} - T_i) \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

On a donc

$$K_{i,i+1} S_{i,i+1} (T_i - T_{i+1}) + K_{i,i-1} S_{i,i-1} (T_i - T_{i-1}) = q_i V_i \quad (3.2.39)$$

c'est-à-dire

$$\sum_j a_{ij} T_j = b_i \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_{ij} = -K_{ij} S_{ij} \\ a_{ii} = \sum_j K_{ij} S_{ij} \\ b_i = q_i V_i \end{cases} \quad (3.2.40)$$

Remarques :

- Si $q_i = 0$ et si tous les $T_j (j \neq i)$ sont identiques, on doit avoir $T_i = T_j$, ce qui nécessite

$$a_{ii} = - \sum_{j \neq i} a_{ij}$$

- En vertu du second principe de thermodynamique, si T_j augmente, T_i doit augmenter également, ce qui nécessite $\boxed{K_{ij} \geq 0}$, c'est-à-dire $a_{ii} \geq 0$ et $a_{ij} (j \neq i) \leq 0$

Evaluation des flux - Calcul des K_{ij}

$$\begin{aligned}
J_{i+\frac{1}{2}} - (\rho u)_{i+\frac{1}{2}} h_i &= (\rho u)_{i+\frac{1}{2}} (h_{i+\frac{1}{2}} - h_i) - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} \\
&\approx (\rho u c)_{i+\frac{1}{2}} (T_{i+\frac{1}{2}} - T_i) - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{3.2.41}$$

Le problème est maintenant de déterminer $T_{i+\frac{1}{2}}$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}}$.

Profil linéaire Entre i et $i+1$, on suppose $\frac{T-T_i}{T_{i+1}-T_i} = \xi$ avec $\xi = \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$

$$\Rightarrow T = T_i + \xi(T_{i+1} - T_i) \tag{3.2.42}$$

$$\Rightarrow T_{i+\frac{1}{2}} = T_i + \xi_{i+\frac{1}{2}}(T_{i+1} - T_i) \tag{3.2.43}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{T_{i+1} - T_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{T_{i+1} - T_i}{d_{i,i+1}} \tag{3.2.44}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow J_{i+\frac{1}{2}} - (\rho u)_{i+\frac{1}{2}} h_i &= K_{i,i+1}(T_i - T_{i+1}) \\
&= (\rho u c)_{i+\frac{1}{2}} \xi (T_{i+1} - T_i) - \lambda \frac{T_{i+1} - T_i}{d_{i,i+1}} \\
&= (T_i - T_{i+1}) \left(\frac{\lambda}{d_{i,i+1}} - (\rho u c)_{i+\frac{1}{2}} \xi \right)
\end{aligned} \tag{3.2.45}$$

On a donc $\boxed{K_{i,i+1} = \frac{\lambda}{d_{i,i+1}} - (\rho u c)_{i+\frac{1}{2}} \xi_{i+\frac{1}{2}}}$ avec $\xi_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_{i+\frac{1}{2}} - x_i}{x_{i+1} - x_i}$.

Un raisonnement analogue conduit à

$$\boxed{K_{i,i-1} = \frac{\lambda}{d_{i,i-1}} + (\rho u c)_{i-\frac{1}{2}} \xi_{i-\frac{1}{2}}}$$
 avec $\xi_{i-\frac{1}{2}} = \frac{x_i - x_{i-\frac{1}{2}}}{x_i - x_{i-1}}$

Problème

Le second principe de thermodynamique impose que $K_{ij} \geq 0$.

- Si ρu est positif, il faut $K_{i,i+1} \geq 0$ c'est-à-dire

$$\frac{\lambda}{d_{i,i+1}} - (\rho u c)_{i+\frac{1}{2}} \xi_{i+\frac{1}{2}} \geq 0$$

$$(\rho u c)_{i+\frac{1}{2}} \xi_{i+\frac{1}{2}} \leq \frac{\lambda}{d_{i,i+1}}$$

ou

$$\frac{(\rho u c) d}{\lambda} \leq \frac{1}{\xi_{i+\frac{1}{2}}}$$

Si le maillage est uniforme, $\xi = 1/2$ et on a $\boxed{\frac{(\rho u c) d}{\lambda} \leq 2}$ avec $\frac{(\rho u c) d}{\lambda}$ qui représente le nombre de Peclet de la maille.

Si le nombre de Peclet est supérieur à 2, les solutions sont non-physiques. Cette condition impose donc une limitation de la taille des mailles!

- Si ρu est négatif, il faut $K_{i,i-1} \geq 0$, ce qui conduit, après développements et pour un maillage uniforme, à $\boxed{\frac{(\rho u)c d}{\lambda} \geq -2}$

La conclusion générale est donc la suivante :

Si le nombre de Peclet de la maille est, en module, supérieur à 2, **l'hypothèse d'un profil linéaire de température entre deux noeuds successifs conduit à des solutions non physiques.**

La condition de validité de cette approximation est donc

$$|Pe| = \left| \frac{\rho u c d}{\lambda} \right| \leq 2 \quad (3.2.46)$$

"Upwinding" ("Upwind scheme") Supposons la diffusion négligeable par rapport à la convection. Dans ce cas, on aurait, physiquement,

$$\begin{aligned} - si(\rho u)_{i+\frac{1}{2}} > 0, \quad t_{i+\frac{1}{2}} = t_i \\ - si(\rho u)_{i+\frac{1}{2}} < 0, \quad t_{i+\frac{1}{2}} = t_{i+1} \end{aligned} \quad (3.2.47)$$

La température en $i+1/2$ serait égale à la température à l'amont. Le schéma "upwind" tient compte de cet effet en calculant les flux en $i+1/2$ de la façon suivante :

- Flux diffusionnel :

$$\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{d_{i,i+1}} (T_i - T_{i+1})$$

comme en conductibilité pure

- Flux convectif

$$(\rho u c)_{i+\frac{1}{2}} (T_{i+\frac{1}{2}} - T_i)$$

avec

$$T_{i+\frac{1}{2}} = T_i \quad si \quad u > 0$$

$$T_{i+\frac{1}{2}} = T_{i+1} \quad si \quad u < 0$$

On a donc,

$$\begin{aligned} - si \quad u > 0 \quad K_{i,i+1} &= \frac{\lambda}{d_{i,i+1}} \\ - si \quad u < 0 \quad K_{i,i+1} &= \frac{\lambda}{d_{i,i+1}} - (\rho u c)_{i+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$K_{i,i+1} = \frac{\lambda}{d_{i,i+1}} + \max[-(\rho u c)_{i+\frac{1}{2}}, 0]$$

$$K_{i,i-1} = \frac{\lambda}{d_{i,i-1}} + \max[(\rho uc)_{i-\frac{1}{2}}, 0]$$

Ces K_{ij} sont toujours positifs et l'équation nodale ne viole donc plus le second principe de thermodynamique.

Solution rigoureuse Une solution plus précise peut être obtenue en intégrant l'équation de conservation entre le noeud i et le noeud $i+1$ et en calculant ainsi le profil de température entre les noeuds. En l'absence de terme source ($q = 0$), l'équation de conservation peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uh - \lambda \frac{\partial T}{\partial x}) = 0 \quad (3.2.48)$$

c'est-à-dire, si ρu , c et λ sont constants

$$\rho uc \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}) \quad (3.2.49)$$

avec les conditions aux limites suivantes

$$\begin{aligned} x = 0 \quad T &= T_i \\ x = d_{i,i+1} \quad T &= T_{i+1} \end{aligned} \quad (3.2.50)$$

La solution de l'équation est donnée par

$$\frac{T - T_i}{T_{i+1} - T_i} = \frac{\exp\left(\frac{\rho uc x}{\lambda}\right) - 1}{\exp\left(\frac{\rho uc d}{\lambda}\right) - 1} = \frac{\exp(\xi Pe) - 1}{\exp(Pe) - 1} \quad (3.2.51)$$

Si le nombre de Peclet est différent de 0 ($u \neq 0$), on obtient un profil non-linéaire de température.

La valeur de $K_{i,i+1}$ est alors donnée par

$$K_{i,i+1}(T_i - T_{i+1}) = (\rho uc)_{i+\frac{1}{2}}(T_{i+\frac{1}{2}} - T_i) - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2}} \quad (3.2.52)$$

avec

$$(\rho uc)_{i+\frac{1}{2}}(T_{i+\frac{1}{2}} - T_i) = (\rho uc)(T_{i+1} - T_i) \frac{\exp(\xi Pe) - 1}{\exp(Pe) - 1} \quad (3.2.53)$$

$$\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{\lambda Pe \exp(\xi Pe)}{d \exp(Pe) - 1} (T_{i+1} - T_i) \quad (3.2.54)$$

On a donc

$$K_{i,i+1} = \frac{\lambda}{d_{i,i+1}} \frac{Pe}{\exp(Pe) - 1} \quad (3.2.55)$$

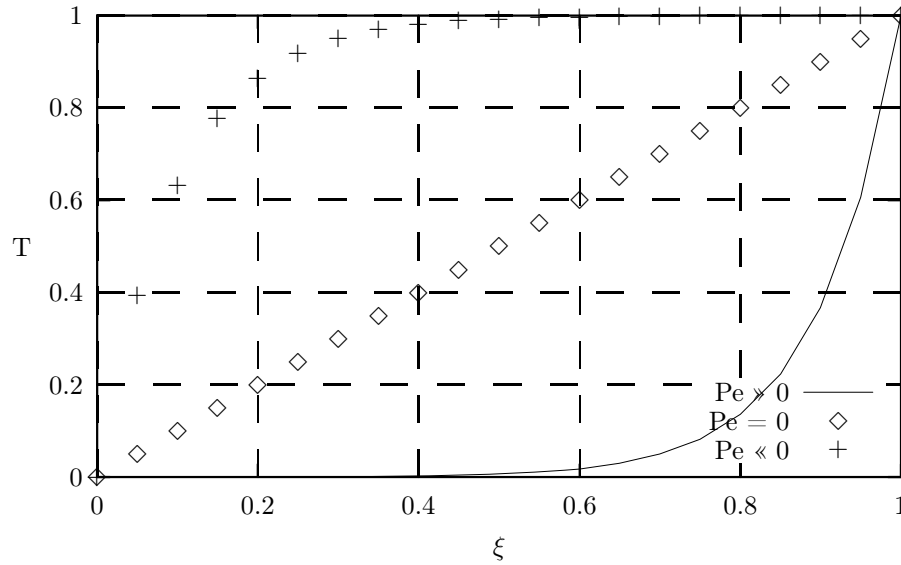


FIG. 3.8 – Profil de température en fonction du nombre de Peclet

et par un raisonnement analogue

$$K_{i,i-1} = \frac{\lambda}{d_{i,i-1}} \frac{Pe \exp(Pe)}{\exp(Pe) - 1} \quad (3.2.56)$$

Si on pose $A(Pe) = \frac{Pe}{\exp(Pe) - 1}$, on peut donc écrire

$$K_{i,i+1} = \frac{\lambda}{d_{i,i+1}} [A(|Pe|) + \max(-Pe, 0)] \quad (3.2.57)$$

$$K_{i,i-1} = \frac{\lambda}{d_{i,i-1}} [A(|Pe|) + \max(Pe, 0)] \quad (3.2.58)$$

Schéma hybride A grandes valeurs du nombre de Peclet, le schéma "upwind" surestime le flux diffusionnel. Ce schéma hybride ("hybrid scheme") est basé sur les approximations suivantes :

- Si $|Pe| < 2$, on utilise l'approximation linéaire, c'est-à-dire

$$Si |Pe| < 2 \quad A(|Pe|) = 1 - 0.5|Pe|$$

- Si $|Pe| > 2$, on néglige le flux diffusionnel et on suppose que la température entre les deux noeuds (en $i + \frac{1}{2}$ ou en $i - \frac{1}{2}$) est égale à la température à l'amont, ce qui donne

$$Si |Pe| > 2 \quad A(|Pe|) = 0$$

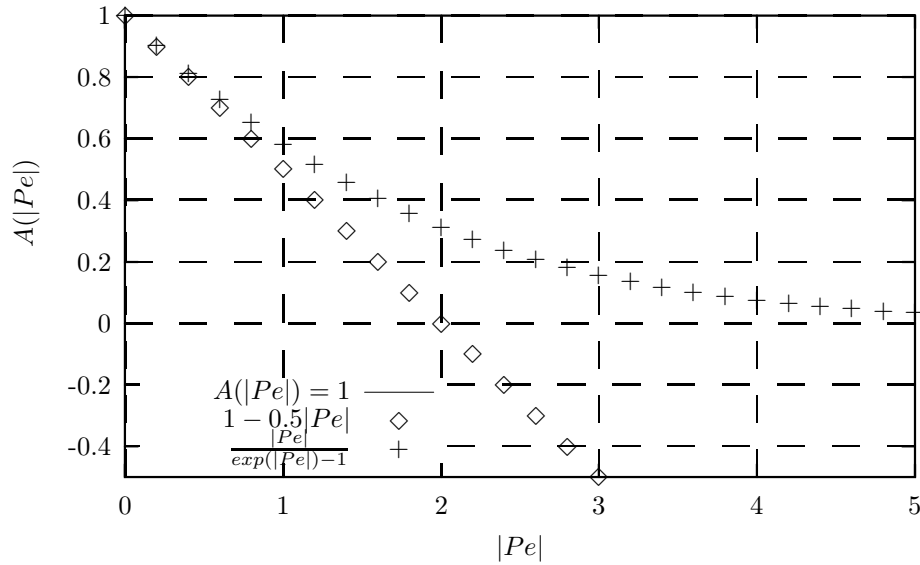


FIG. 3.9 – Profil de A en fonction du nombre de Peclet

Le schéma hybride revient donc à approximer la relation "rigoureuse" donnant $A(|Pe|)$ par sa tangente à l'origine pour $|Pe| < 2$, et son asymptote pour $|Pe| > 2$.

Schéma en puissance ("Power scheme") Le calcul d'une exponentielle étant coûteux en temps de calcul, on peut approximer la solution rigoureuse par l'approximation numérique suivante

$$A(|Pe|) = \max(0, (1 - 0.1|Pe|)^5) \quad (3.2.59)$$

Autres schémas Tous les schémas précédents déterminent les flux aux interfaces entre les éléments de volume à partir des températures des deux noeuds voisins. Il existe également des schémas faisant intervenir plus de deux noeuds dans le calcul des flux. Le plus connu est QUICK ("Quadratic Upstream Interpolation") qui utilise une approximation quadratique du profil de température à partir des valeurs de T_i et des températures en deux noeuds à l'amont de i .

Problèmes 2-D et 3-D

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_h = q \quad (3.2.60)$$

avec

$$\vec{J}_h = \rho \vec{v} h - \lambda \vec{\nabla} T \quad (3.2.61)$$

Intégration sur V_i

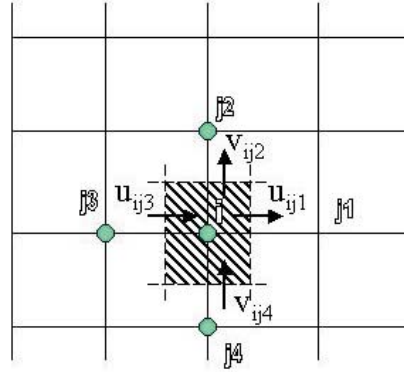


FIG. 3.10 – Noeud i et son volume de contrôle

$$\int_{V_i} \vec{\nabla} \vec{J}_h dV = \int_{V_i} q dV \quad (3.2.62)$$

c'est-à-dire

$$\int_{S_i} \vec{J}_h \vec{n} dS = \int_{V_i} q dV \quad (3.2.63)$$

Approximations :

- \vec{J}_h et \vec{v} uniformes sur chaque surface S_{ij}
- q uniforme dans V_i

$$J_{ij_1} S_{ij_1} + J_{ij_2} S_{ij_2} - J_{ij_3} S_{ij_3} - J_{ij_4} S_{ij_4} = q_i V_i \quad (3.2.64)$$

avec

$$\begin{aligned} J_{ij_1} &= \rho u_{ij_1} h_{ij_1} - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{ij_1} \\ J_{ij_2} &= \rho u_{ij_2} h_{ij_2} - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{ij_2} \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.2.65)$$

Intégration de l'équation de continuité

$$(\rho u)_{ij_1} S_{ij_1} + (\rho v)_{ij_2} S_{ij_2} - (\rho u)_{ij_3} S_{ij_3} - (\rho u)_{ij_4} S_{ij_4} = 0 \quad (3.2.66)$$

En multipliant 3.2.66 par h_i et en soustrayant de 3.2.64, on a

$$\begin{aligned} & (J_{ij_1} - (\rho u)_{ij_1} h_i) S_{ij_1} + (J_{ij_2} - (\rho v)_{ij_2} h_i) S_{ij_2} \\ & - (J_{ij_3} - (\rho u)_{ij_3} h_i) S_{ij_3} - (J_{ij_4} - (\rho v)_{ij_4} h_i) S_{ij_4} = q_i V_i \end{aligned} \quad (3.2.67)$$

Schémas localement mono dimensionnels On a

$$\begin{aligned} J_{ij_1} - (\rho u)_{ij_1} h_i &= (\rho u)_{ij_1} (h_{ij_1} - h_i) - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{ij_1} \\ &= (\rho u c)_{ij_1} (T_{ij_1} - T_i) - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{ij_1} \end{aligned} \quad (3.2.68)$$

Si on suppose que la température à l'interface T_{ij} ne dépend que de T_{j_1} et T_i (profil localement 1-D), on peut écrire

$$(\rho u c)_{ij_1} (T_{ij_1} - T_i) - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{ij_1} = K_{ij_1} (T_i - T_{j_1}) \quad (3.2.69)$$

et calculer K_{ij_1} par l'une des expressions obtenues pour le problème 1-D, c'est-à-dire de manière générale

$$K_{ij_1} = \frac{\lambda_{ij_1}}{d_{ij_1}} [A(|Pe_{ij_1}|) + \max(-Pe_{ij_1}, 0)] \quad (3.2.70)$$

avec $Pe_{ij_1} = \frac{(\rho u c)_{ij_1} d_{ij_1}}{\lambda_{ij_1}}$.

Pour les autres K_{ij} , on utilise des relations analogues, c'est-à-dire

$$K_{ij_2} = \frac{\lambda_{ij_2}}{d_{ij_2}} [A(|Pe_{ij_2}|) + \max(-Pe_{ij_2}, 0)] \quad (3.2.71)$$

avec $Pe_{ij_2} = \frac{(\rho v c)_{ij_2} d_{ij_2}}{\lambda_{ij_2}}$

$$K_{ij_3} = \frac{\lambda_{ij_3}}{d_{ij_3}} [A(|Pe_{ij_3}|) + \max(Pe_{ij_3}, 0)] \quad (3.2.72)$$

$$K_{ij_4} = \frac{\lambda_{ij_4}}{d_{ij_4}} [A(|Pe_{ij_4}|) + \max(Pe_{ij_4}, 0)] \quad (3.2.73)$$

Diffusion numérique - schémas bi- ou tridimensionnels L'utilisation de schémas monodimensionnels entraîne des erreurs dues à ce que l'on appelle "la diffusion numérique". Ce phénomène peut être mis en évidence dans le cas simple suivant : soit un écoulement à vitesse uniforme, orientée à 45° par rapport aux axes. On suppose qu'à l'entrée la température vaut T_1 au dessus de la bissectrice des axes, et T_2 en-dessous. En l'absence de diffusion ($\lambda = 0$) et de source ($q = 0$), le profil de tempé-

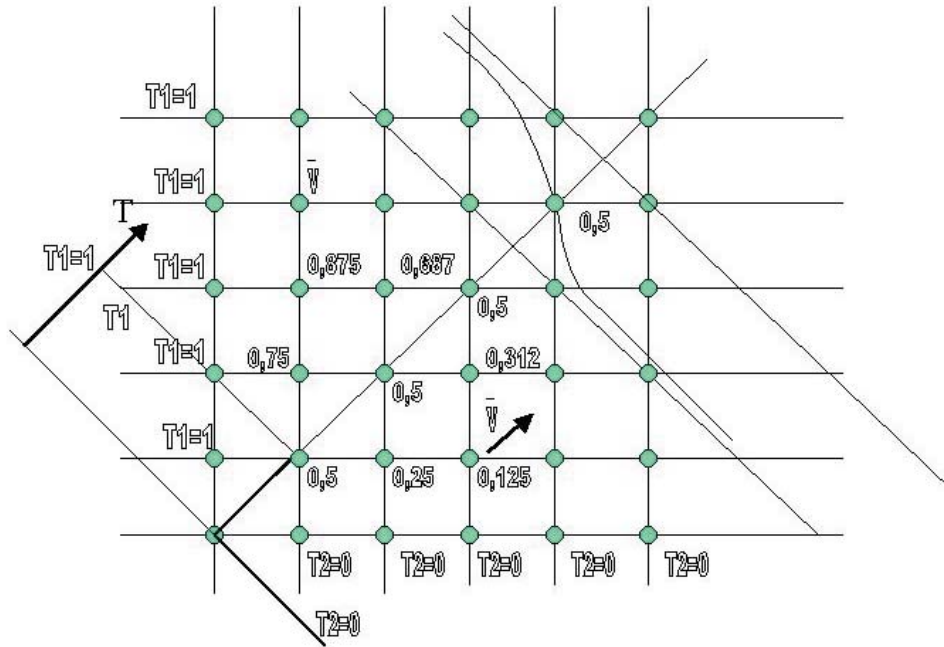


FIG. 3.11 – Illustration du phénomène de diffusion numérique

rature devrait se propager dans le milieu sans changer de forme.

L'équation nodale est dans ce cas donnée par

$$\begin{aligned}
 u &= v > 0 \\
 Pe \gg 0 &\rightarrow A(|Pe|) = 0 \\
 K_{ij1} &= K_{ij2} = 0 \\
 K_{ij3} &= K_{ij4} = \rho uc
 \end{aligned} \tag{3.2.74}$$

c'est-à-dire

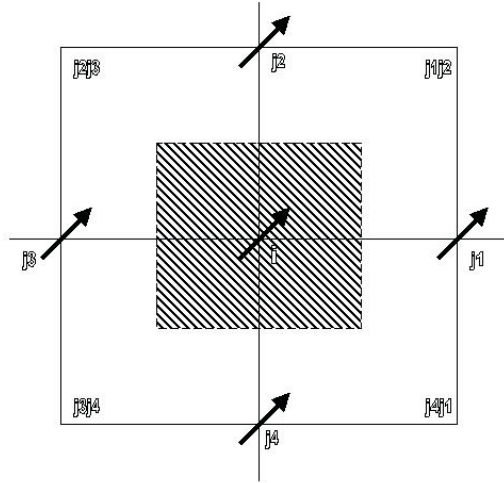
$$\rho uc(T_{j3} - T_i) + \rho vc(T_{j4} - T_i) = 0 \tag{3.2.75}$$

ou

$$T_i = \frac{T_{j3} + T_{j4}}{2} \tag{3.2.76}$$

Cette équation conduit à un profil de température calculé analogue à celui qu'on obtiendrait en présence de diffusion. Cette diffusion est d'origine purement numérique, elle est due au fait qu'en utilisant un schéma localement monodimensionnel, la température en chaque noeud i dépend de la température à gauche (j_3) et de la température en-dessous du noeud (j_4).

En réalité, compte tenu de l'orientation de l'écoulement, la température au noeud i

FIG. 3.12 – Noeud i et son volume de contrôle

ne dépend que de la température à l'amont dans la direction de l'écoulement c'est-à-dire de la température au noeud j_3j_4 . Ce phénomène de diffusion numérique n'existe pas si l'écoulement est parallèle aux lignes du maillage (horizontal ou vertical).

La réduction des erreurs dues à la diffusion numérique nécessite donc des schémas de discrétisation qui tiennent compte de la direction de l'écoulement. Nous nous limiterons ici, à titre d'exemple, au schéma SUDS ("Skew Upstream Differencing Scheme"), qui est l'analogue 2-D de l'upwinding.

Pour la face ij_3 par exemple, le flux est donné par

$$J_{ij_3} = (\rho u c)_{ij_3} T_{ij_3} - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{ij_3} \quad (3.2.77)$$

L'upwinding consiste à supposer que la température sur la face ij_3 est égale à la température à l'amont de l'écoulement c'est-à-dire

$$T_{ij_3} = T^* \quad (3.2.78)$$

En supposant que la température varie linéairement entre j_3j_4 et j_3 , on a, si u et v sont positifs

$$T^* = T_{j_3} + (T_{j_3j_4} - T_{j_3}) \frac{y^* - y_{ij_3}}{y_{j_3j_4} - y_{ij_3}} \quad (3.2.79)$$

avec

$$\frac{y^* - y_{ij_3}}{x^* - x_{ij_3}} = \left(\frac{v}{u} \right)_{ij_3} \quad (3.2.80)$$

ce qui donne

$$T^* = T_{j_3} + (T_{j_3j_4} - T_{j_3}) \left(\frac{v}{u} \right)_{ij_3} \frac{d_{ij_3}}{2.d_{ij_4}} \quad (3.2.81)$$

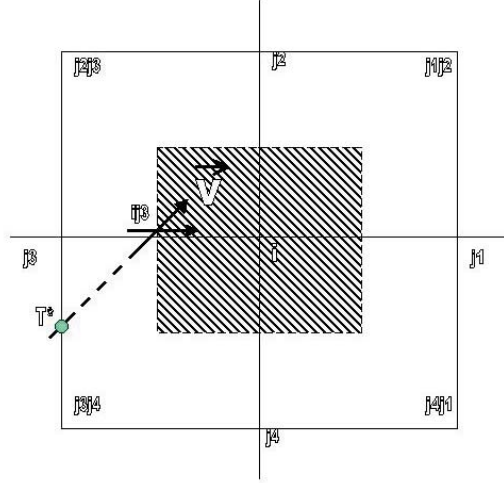


FIG. 3.13 – Illustration du schéma SUDS

Si $\left(\frac{v}{u}\right)_{ij_3} \frac{d_{ij_3}}{2d_{ij_4}} > 1$, le point d'intersection tombe en dehors du segment (j_3, j_3j_4) . T^* est alors obtenue par extrapolation, ce qui est peu précis. On utilise donc les relations suivantes, pour u et $v > 0$.

$$\begin{cases} T^* = T_{j_3} + (T_{j_3j_4} - T_{j_3}) \left(\frac{v}{u}\right)_{ij_3} \frac{d_{ij_3}}{2d_{ij_4}} & \text{si } \left(\frac{v}{u}\right)_{ij_3} < \frac{2d_{ij_4}}{d_{ij_3}} \\ T^* = T_{j_3j_4} & \text{si } \left(\frac{v}{u}\right)_{ij_3} > \frac{2d_{ij_4}}{d_{ij_3}} \end{cases} \quad (3.2.82)$$

Pour d'autres orientations de la vitesse \vec{v} , on calcule de manière analogue la valeur de T^* par interpolation sur les autres segments. Pour u et $v > 0$, le flux est donc finalement donné par

$$J_{ij_3} = (\rho u)_{ij_3} T^* - \lambda \frac{T_i - T_{j_3}}{d_{ij_3}} \quad (3.2.83)$$

Conditions aux limites

L'implémentation des conditions aux limites dépend du type de maillage adopté.

Méthode A : noeuds placés sur les limites Equation du noeud i :

$$\begin{aligned} & (J_i - (\rho u)_i h_i) S_{i,lim} + (J_{ij_2} - (\rho v)_{ij_2} h_i) S_{ij_2} \\ & - (J_{ij_3} - (\rho u)_{ij_3} h_i) S_{ij_3} - (J_{ij_4} - (\rho v)_{ij_4} h_i) S_{ij_4} = q_i V_i \end{aligned} \quad (3.2.84)$$

Problème : comment calculer $J_i - (\rho u)_i h_i = ?$

$$J_i - (\rho u)_i h_i = (\rho u)_i h_i - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_i - (\rho u)_i h_i = \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_i \quad (3.2.85)$$

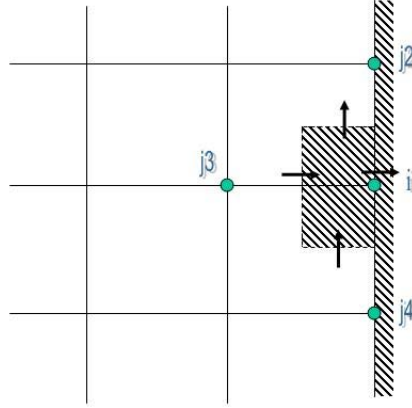


FIG. 3.14 – Noeud sur la limite et son volume de contrôle

1. Entrée : $u_i < 0$ et T_i fixé $\rightarrow T_i = T_{entrée}$
2. Sortie : $u_i > 0$ et $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ $J_i - (\rho u)_i h_i = 0$
3. Symétrie : $u_i = 0$ et $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ $J_i - (\rho u)_i h_i = 0$
4. Paroi : $u_i = 0$
 - à température imposée $T_i = T_{paroi}$
 - à flux imposé

$$\begin{aligned}
 -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \phi_{paroi} \quad (> 0 \text{ si sortant}) \\
 J_i - (\rho u)_i h_i &= \phi_{paroi}
 \end{aligned} \tag{3.2.86}$$

- condition de Fourier

$$\begin{aligned}
 -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = K_f(T - T_f) \\
 J_i - (\rho u)_i h_i &= K_f(T_i - T_f)
 \end{aligned} \tag{3.2.87}$$

Méthode B

$$J_{j_1} - (\rho u)_{j_1} h_{j_1} = (\rho u)_{j_1} (h_{j_1} - h_i) - \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{j_1} \tag{3.2.88}$$

1. Entrée : $u_{j_1} < 0$ et T_{j_1} fixé $= T_{entrée}$
On pose $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$

$$J_{j_1} - (\rho u)_{j_1} h_i = (\rho u c)_{j_1} (T_{entrée} - T_i) = K_{ij_1} (T_i - T_{entrée}) \tag{3.2.89}$$

$$\rightarrow K_{ij_1} = -(\rho u c)_{j_1} \quad \text{et} \quad T_{j_1} = T_{entrée} \tag{3.2.90}$$

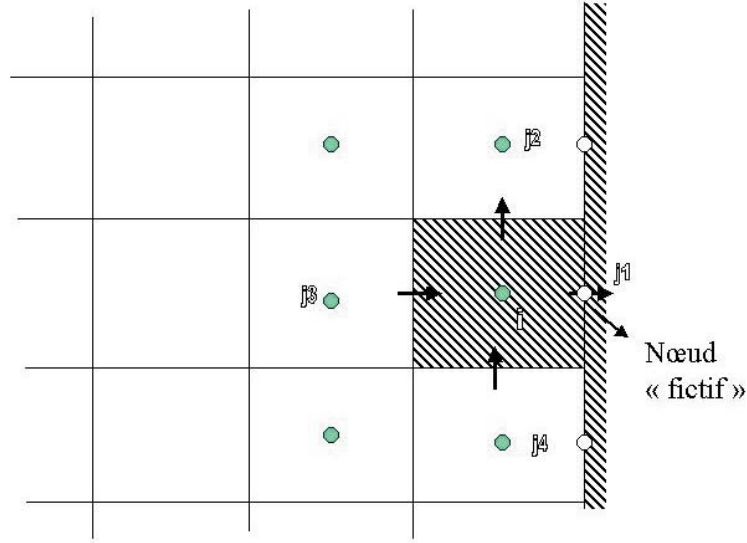


FIG. 3.15 – Volume de contrôle à la limite et nœud fictif associé

2. Sortie : $u_{j_1} > 0$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{j_1} = 0$
Upwinding : $T_{j_1} = T_i$ et $K_{ij_1} = 0$
3. Symétrie : $u_{j_1} = 0$ et $\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \rightarrow T_{j_1} = T_i$
4. Paroi : $u_{j_1} = 0$
 - à température imposée $T_{j_1} = T_{paroi}$

$$J_{j_1} - (\rho u)_{j_1} h_i = - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{j_1} = \frac{\lambda_{ij_1}}{d_{ij_1}} (T_i - T_{paroi}) \quad (3.2.91)$$

$$\rightarrow K_{ij_1} = \frac{\lambda_{ij_1}}{d_{ij_1}} \quad \text{et} \quad T_{j_1} = T_{paroi}$$

- à flux imposé $-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \phi_{paroi}$

$$J_{j_1} - (\rho u)_{j_1} h_i = - \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{j_1} = \phi_{paroi} = \frac{\lambda_{ij_1}}{d_{ij_1}} (T_i - T_{j_1}) \quad (3.2.92)$$

- condition de Fourier $-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = K_f (T - T_f)$

$$J_{j_1} - (\rho u)_{j_1} h_i = - \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{j_1} = K_f (T_{j_1} - T_f) = \frac{\lambda_{ij_1}}{d_{ij_1}} (T_i - T_{j_1}) \quad (3.2.93)$$

$$= K_{if} (T_i - T_f)$$

$$\text{avec } \frac{1}{K_{if}} = \frac{1}{K_f} + \frac{d_{ij_1}}{\lambda_{ij_1}}$$

3.3 Problèmes paraboliques

3.3.1 Diffusion non-stationnaire

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} = \vec{\nabla}(\lambda \vec{\nabla} T) + q \quad (3.3.1)$$

Intégration

$$\int_{V_i} \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} dV = \int_{V_i} \vec{\nabla}(\lambda \vec{\nabla} T) dV + \int_{V_i} q dV \quad (3.3.2)$$

c'est-à-dire

$$\int_{V_i} \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} dV = \int_{S_i} (\lambda \vec{\nabla} T) \vec{n} dS + \int_{V_i} q dV \quad (3.3.3)$$

Approximations

- $\lambda \vec{\nabla} T$ uniforme sur chaque face
- q uniforme dans V_i
- $T = T_i$ uniforme dans V_i pour le calcul de $\partial T / \partial \tau$
- profil de T linéaire entre i et j

$$\rho_i c_i V_i \frac{dT_i}{d\tau} + \sum_{j=j_1}^{j_4} K_{ij} S_{ij} (T_i - T_j) = q_i V_i \quad (3.3.4)$$

$$m_i c_i \frac{dT_i}{d\tau} + \sum_j K_{ij} S_{ij} (T_i - T_j) = q_i V_i \quad (3.3.5)$$

On obtient donc un système d'équations différentielles ordinaires.

Ce système peut être résolu par n'importe quel algorithme de résolution de système d'équations différentielles : Runge-Kutta, prédiction - correction, ... Ces algorithmes consistent à transformer le système en système d'équations algébriques en discrétisant le temps. On s'intéressera ici particulièrement à la méthode d'Euler. Celle-ci consiste à approximer la dérivée temporelle par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dT_i}{d\tau} &= (T_i(\tau + \Delta\tau) - T_i(\tau)) / \Delta\tau \\ &= \frac{T_i^+ - T_i^-}{\Delta\tau} \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

ce qui donne

$$m_i c_i \frac{T_i^+ - T_i^-}{\Delta\tau} + \sum_j K_{ij} S_{ij} (T_i - T_j) = q_i V_i \quad \text{avec} \quad c_i = c_i \left(\frac{T_i^+ + T_i^-}{2} \right) \quad (3.3.7)$$

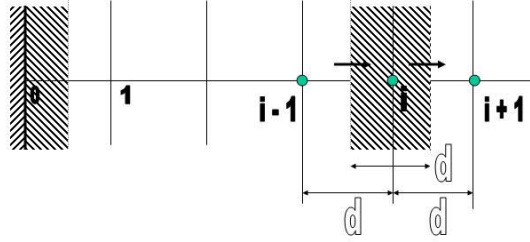


FIG. 3.16 – Problème 1-D

Méthode d'Euler explicite

Dans la méthode explicite, on calcule les flux et le terme source au début du pas de temps, c'est-à-dire

$$m_i c_i \frac{T_i^+ - T_i^-}{\Delta\tau} + \sum_j K_{ij}^- S_{ij} (T_i^- - T_j^-) = q_i^- V_i \quad (3.3.8)$$

ce qui donne, si c_i est constant, une expression explicite pour les T_i^+

$$T_i^+ = T_i^- \left[1 - \frac{\sum_j K_{ij} S_{ij}}{m_i c_i} \Delta\tau \right] + \sum_j \frac{K_{ij} S_{ij}}{m_i c_i} \Delta\tau T_j^- + \frac{q_i V_i}{m_i c_i} \Delta\tau \quad (3.3.9)$$

Problème

Le second principe de thermodynamique impose que si T_i^- augmente, T_i^+ doit augmenter, ce qui impose

$$1 - \frac{\sum_j K_{ij} S_{ij}}{m_i c_i} \Delta\tau \geq 0 \quad (3.3.10)$$

c'est-à-dire

$$\Delta\tau \leq \frac{m_i c_i}{\sum_j K_{ij} S_{ij}} \quad (3.3.11)$$

Si le pas de temps est supérieur à cette valeur, on obtient des solutions non-physiques ! Cette condition est une **condition de stabilité** de la méthode, elle impose, pour une discrétisation spatiale donnée, une limitation du pas de temps !

Exemple Problème 1-D, discrétisation spatiale uniforme

On a $K_{ij} = \frac{\lambda}{d}$, $V_i = d$ et $S_{ij} = 1$.

Pour un noeud intérieur, la condition de stabilité s'écrit :

$$\Delta\tau \leq \frac{\rho c d}{2 \frac{\lambda}{d}} \quad \text{càd} \quad \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\Delta\tau}{d^2} = Fo \leq \frac{1}{2} \quad (3.3.12)$$

Pour un noeud sur une limite, avec une condition aux limites de type Fourier, on a

$$T_0^+ = T_0^- \left[1 - \frac{K_{01} S_{01} + K_f S_0}{m_0 c_0} \right] + \frac{K_{01} S_{01}}{m_0 c_0} \Delta\tau T_1^- + \frac{K_f S_0}{m_0 c_0} \Delta\tau T_f^- + \frac{q_0 V_0}{m_0 c_0} \Delta\tau \quad (3.3.13)$$

avec $K_{01} = \frac{\lambda}{d}$, $S_{01} = S_0 = 1$ et $m_0 = \frac{\rho_0 d}{2}$.

La condition de stabilité s'écrit :

$$\Delta\tau \leq \frac{\rho c d}{2 \left(\frac{\lambda}{d} + K_f \right)} \quad (3.3.14)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\lambda}{\rho c} \cdot \frac{\Delta\tau}{d^2} \left(1 + \frac{K_f d}{\lambda} \right) \leq \frac{1}{2} \quad (3.3.15)$$

ou

$$Fo \leq \frac{1}{(1 + Bi)2} \quad \text{avec} \quad Bi = \frac{K_f d}{\lambda} \quad (3.3.16)$$

condition plus sévère encore que la condition de stabilité pour un noeud intérieur.

Fo est le nombre de Fourier et Bi est le nombre de Biot.

Méthode d'Euler implicite

Dans la méthode implicite, on calcule les flux et le terme source à la fin du pas de temps, c'est-à-dire

$$m_i c_i \frac{T_i^+ - T_i^-}{\Delta\tau} + \sum_j K_{ij}^+ S_{ij} (T_i^+ - T_j^+) = q_i^+ V_i \quad (3.3.17)$$

ce qui conduit, à chaque pas de temps, à un système d'équations algébriques de la forme

$$\sum_j a_{ij} T_j^+ = b_i \quad (3.3.18)$$

avec

$$\begin{cases} a_{ij} = -K_{ij}^+ S_{ij} \\ a_{ii} = + \sum_{j \neq i} K_{ij}^+ S_{ij} + \frac{m_i c_i}{\Delta\tau} = - \sum_{j \neq i} a_{ij} + \frac{m_i c_i}{\Delta\tau} \\ b_i = q_i^+ V_i + m_i c_i \frac{T_i^-}{\Delta\tau} \end{cases} \quad (3.3.19)$$

Si T_i^- augmente, T_i^+ augmente également car $\frac{m_i c_i}{\Delta\tau a_{ii}}$ est toujours positif. La méthode est donc **inconditionnellement stable**.

Méthode de pondération - méthode de Crank-Nicholson

L'équation nodale peut s'écrire

$$m_i c_i \frac{T_i^+ - T_i^-}{\Delta\tau} + \sum_j \Phi_{ij} = q_i V_i \quad \text{avec} \quad \Phi_{ij} = K_{ij} S_{ij} (T_i - T_j) \quad (3.3.20)$$

Entre τ et $\tau + \Delta\tau$, les Φ_{ij} varient entre Φ_{ij}^- et Φ_{ij}^+ . On peut donc exprimer le flux moyen sur le pas de temps par

$$\Phi_{ij} = (1 - \theta)\Phi_{ij}^- + \theta\Phi_{ij}^+ \quad (3.3.21)$$

θ étant un facteur de pondération. L'équation nodale s'écrit donc

$$\begin{aligned} m_i c_i \frac{T_i^+ - T_i^-}{\Delta\tau} + \sum_j [(1 - \theta)\Phi_{ij}^- + \theta\Phi_{ij}^+] \\ = [(1 - \theta)q_i^- + \theta q_i^+] V_i \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

- Si $\theta = 0$, on obtient la méthode explicite
- Si $\theta \neq 0$, on obtient un système d'équations à chaque pas de temps
- Si $\theta = 1$, on obtient la méthode d'Euler implicite
- Si $\theta = 0.5$, la méthode est la méthode de Crank-Nicholson.

On peut montrer que, si les propriétés physiques et le terme source sont constants, **la méthode est stable si $\theta \geq 0.5$.**

3.3.2 Convection diffusion non-stationnaire

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial\tau} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_h = q \quad (3.3.23)$$

avec $\vec{J}_h = \rho \vec{v} h - \lambda \vec{\nabla} T$

Intégration sur V_i :

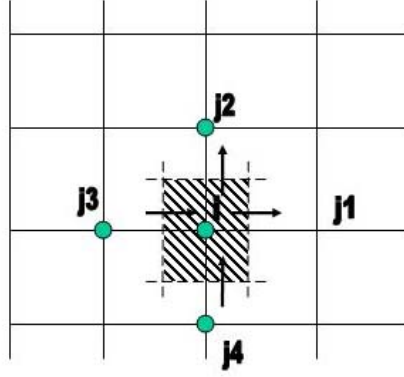
$$\int_{V_i} \frac{\partial(\rho h)}{\partial\tau} dV + \int_{V_i} \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_h dV = \int_{V_i} q dV \quad (3.3.24)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \int_{V_i} (\rho h) dV + \int_{S_i} \vec{J}_h \cdot \vec{n} dS = \int_{V_i} q dV \quad (3.3.25)$$

Approximations :

- J_h uniforme sur chaque face
- q uniforme dans V_i
- $h = h_i$, $\rho = \rho_i$ uniformes dans V_i pour le calcul de $\frac{\partial(\rho h)}{\partial\tau}$

FIG. 3.17 – Noeud i et volume de contrôle

$$\frac{d}{d\tau}(\rho h)_i V_i + J_{ij_1} S_{ij_1} + J_{ij_2} S_{ij_2} - J_{ij_3} S_{ij_3} - J_{ij_4} S_{ij_4} = q_i V_i \quad (3.3.26)$$

En approximant la dérivée temporelle par la formule d'Euler

$$\frac{d}{d\tau}(\rho_i h_i) V_i = \frac{\rho_i^+ h_i^+ - \rho_i^- h_i^-}{\Delta\tau} V_i \quad (3.3.27)$$

on obtient

$$\frac{\rho_i^+ h_i^+ - \rho_i^- h_i^-}{\Delta\tau} V_i + J_{ij_1} S_{ij_1} + J_{ij_2} S_{ij_2} - J_{ij_3} S_{ij_3} - J_{ij_4} S_{ij_4} = q_i V_i \quad (3.3.28)$$

De même la discrétisation de l'équation de continuité conduit à

$$\frac{\rho_i^+ - \rho_i^-}{\Delta\tau} V_i + (\rho u)_{ij_1} S_{ij_1} + (\rho v)_{ij_2} S_{ij_2} - (\rho u)_{ij_3} S_{ij_3} - (\rho v)_{ij_4} S_{ij_4} = 0 \quad (3.3.29)$$

Méthode explicite

Dans la méthode explicite, on approxime les flux et le terme source dans 3.3.28 et 3.3.29 par leurs valeurs au début du pas de temps.

En multipliant l'équation 3.3.29 par h_i^- et en la soustrayant de l'équation 3.3.28, on obtient

$$\rho_i^+ \frac{h_i^+ - h_i^-}{\Delta\tau} V_i + (J_{ij_1}^- - (\rho u)_{ij_1}^- h_i^-) S_{ij_1} + \dots = q_i^- V_i \quad (3.3.30)$$

c'est-à-dire

$$\rho_i^+ c_i \frac{T_i^+ - T_i^-}{\Delta\tau} V_i + (J_{ij_1}^- - (\rho u)_{ij_1}^- h_i^-) S_{ij_1} + \dots = q_i^- V_i \quad (3.3.31)$$

En approximant les flux par l'un des schémas vus pour les problèmes stationnaires, les équations discrétisées sont de la forme

$$\rho_i^+ c_i \frac{T_i^+ - T_i^-}{\Delta\tau} V_i + \sum_j K_{ij}^- S_{ij} (T_i^- - T_j^-) = q_i^- V_i \quad (3.3.32)$$

avec $c_i = c_i \left(\frac{T_i^+ + T_i^-}{2} \right)$.

Si les propriétés physiques sont constantes, on obtient donc une expression explicite des températures T_i^+ , donnée par

$$T_i^+ = T_i^- \left(1 - \frac{\sum_j K_{ij}^- S_{ij} \Delta\tau}{\rho_i c_i V_i} \right) + \sum_j \frac{K_{ij}^- S_{ij} \Delta\tau}{\rho_i c_i V_i} T_j^- + \frac{q_i^- \Delta\tau}{\rho_i c_i} \quad (3.3.33)$$

avec

$$\begin{aligned} K_{ij_1} &= \frac{\lambda_{ij_1}}{d_{ij_1}} [A(|Pe_{ij_1}|) + \max(-Pe_{ij_1}, 0)] \\ K_{ij_2} &= \frac{\lambda_{ij_2}}{d_{ij_2}} [A(|Pe_{ij_2}|) + \max(Pe_{ij_2}, 0)] \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.3.34)$$

Problème

Le second principe de la thermodynamique impose que si T_i^- ou T_j^- augmente, T_i^+ doit augmenter, ce qui impose

$$1 - \frac{\sum_j K_{ij} S_{ij} \Delta\tau}{\rho_i c_i V_i} \geq 0 \quad \text{si} \quad K_{ij} \geq 0 \quad (3.3.35)$$

c'est-à-dire

$$\Delta\tau \leq \frac{m_i c_i}{\sum_j K_{ij} S_{ij}} \quad (3.3.36)$$

Cette expression est la **condition de stabilité** de la méthode explicite. Elle impose une limitation du pas de temps, qui **dépend du schéma de discrétisation des flux** (expression des K_{ij}).

Exemples : Problèmes 1-D - discrétisation spatiale uniforme

Supposons $u > 0$, uniforme et les flux sont approximés par le schéma "upwind".

On a $V_i = d$, $S_{ij} = 1$, $A(|Pe|) = 1$, $K_{i,i+1} = \frac{\lambda}{d}$ et $K_{i,i-1} = \frac{\lambda}{d} + \rho u c$.

La condition de stabilité s'écrit

$$\Delta\tau \leq \frac{\rho c d}{2\frac{\lambda}{d} + \rho u c} \quad (3.3.37)$$

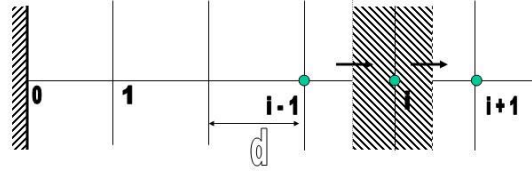


FIG. 3.18 – Problème 1-D

c'est-à-dire

$$2 \left(\frac{\lambda}{\rho c} \right) \frac{\Delta\tau}{d^2} + \frac{u\Delta\tau}{d} \leq 1 \quad (3.3.38)$$

ou encore $2Fo + Co \leq 1$ avec

$$\begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\rho c} \right) \frac{\Delta\tau}{d^2} = Fo \text{ nombre de Fourier du maillage} \\ \frac{u\Delta\tau}{d} = Co \text{ nombre de Courant} \end{cases} \quad (3.3.39)$$

Dans le cas limite où $\lambda = 0$ (convection pure), la condition s'écrit

$$Co = \frac{u\Delta\tau}{d} \leq 1 \quad (3.3.40)$$

appelée condition de Courant - Friedrich - Levy (condition C.F.L.).

(En réalité, le problème de convection pure non-stationnaire est un problème hyperbolique).

La condition C.F.L. peut s'écrire aussi $\Delta\tau < \frac{\Delta x}{u}$ ce qui signifie que le pas de temps doit être inférieur au temps nécessaire au fluide pour parcourir la distance d .

Méthode implicite

Dans la méthode implicite, on approxime les flux et le terme source par leurs valeurs à la fin du pas de temps. En multipliant l'équation de continuité par h_i^+ et en la soustrayant de l'équation de conservation de l'énergie, on obtient

$$\rho_i^- c_i \frac{T_i^+ - T_i^-}{\Delta\tau} V_i + \sum_j K_{ij}^+ S_{ij} (T_i^+ - T_j^+) = q_i^+ V_i \quad (3.3.41)$$

ce qui conduit à devoir résoudre un système d'équations algébriques à chaque pas de temps. Cette méthode est **inconditionnellement stable**.

Méthode de pondération

De façon analogue à ce qui a été fait pour le problème de conductibilité non-stationnaire, on peut approximer les flux par une moyenne pondérée des valeurs au début et à la fin du pas de temps. On obtient alors

$$\begin{aligned} & \rho_i c_i V_i \frac{T_i^+ - T_i^-}{\Delta \tau} + (1 - \theta) \left[\sum_j K_{ij}^- S_{ij} (T_i^- - T_j^-) \right] \\ & + \theta \left[\sum_j K_{ij}^+ S_{ij} (T_i^+ - T_j^+) \right] = [(1 - \theta) q_i^- + \theta q_i^+] V_i \end{aligned} \quad (3.3.42)$$

3.3.3 Couches limites stationnaires 2-D ou 3-D

Les problèmes de couches limites 2-D ou 3-D sont des problèmes de convection-diffusion stationnaires, dans lesquels la diffusion dans le sens de l'écoulement du fluide peut être négligée. Pour un problème 2-D, l'équation de conservation de l'énergie s'écrit dans ce cas (écoulement parallèle à x)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u h) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v h) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + q \quad (3.3.43)$$

avec $\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)$ qui peut être négligé.

Ce problème est analogue à un problème de convection-diffusion non-stationnaire dans lequel le temps serait remplacé par la distance parcourue par le fluide depuis l'entrée du domaine.

Discrétisation spatiale

Pour résoudre les problèmes de couches limites, on utilise une discrétisation du domaine différente de celle utilisée pour les problèmes de diffusion ou de diffusion-convection.

Dans le sens de l'écoulement global du fluide, les faces des éléments de volume coïncident avec les noeuds.

Discrétisation des équations

En intégrant l'équation de conservation sur V_i

$$(\rho u h)_j^+ S_j - (\rho u h)_j^- S_j + J_{j+\frac{1}{2}} S_{j+\frac{1}{2}} - J_{j-\frac{1}{2}} S_{j-\frac{1}{2}} = q_j V_j \quad (3.3.44)$$

L'équation de continuité conduit à

$$(\rho u)_j^+ S_j - (\rho u)_j^- S_j + (\rho v)_{j+\frac{1}{2}} S_{j+\frac{1}{2}} - (\rho v)_{j-\frac{1}{2}} S_{j-\frac{1}{2}} = 0 \quad (3.3.45)$$

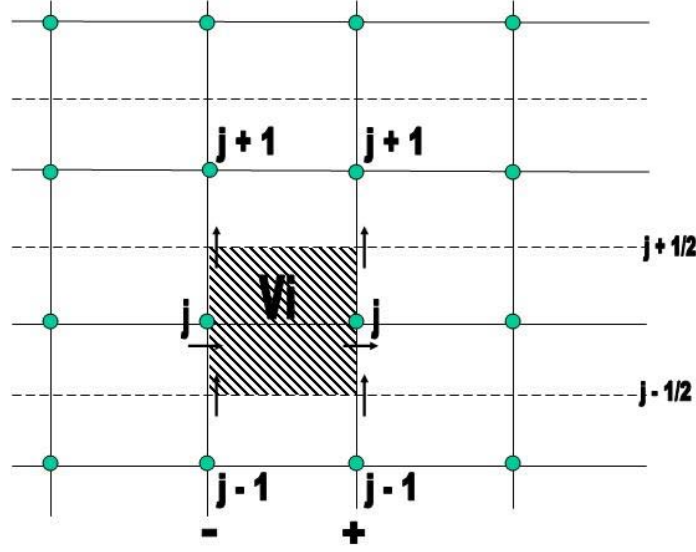


FIG. 3.19 – Volume de contrôle

Méthode explicite On soustrait de l'équation de conservation l'équation de continuité, multipliée par h_j^- et on évalue les flux en $-$

$$\begin{aligned}
 (\rho u)_j^+ c_j (T_j^+ - T_j^-) S_j + (J_{j+\frac{1}{2}}^- - (\rho v)_{j+\frac{1}{2}} h_j^-) S_{j+\frac{1}{2}} \\
 - (J_{j-\frac{1}{2}}^- - (\rho v)_{j-\frac{1}{2}} h_j^-) S_{j-\frac{1}{2}} = q_j^- V_j
 \end{aligned} \tag{3.3.46}$$

ce qui s'écrit, après discrétisation des flux par un des schémas vus précédemment,

$$\begin{aligned}
 (\rho u)_j^+ c_j (T_j^+ - T_j^-) S_j + K_{j,j+1}^- S_{j,j+1} (T_j^- - T_{j+1}^-) \\
 + K_{j,j-1}^- S_{j,j-1} (T_j^- - T_{j-1}^-) = q_i^- V_i
 \end{aligned} \tag{3.3.47}$$

ce qui conduit à l'expression explicite suivante pour T_j^+

$$T_j^+ = T_j^- \left[1 - \frac{\sum_k K_{jk}^- S_{jk}}{(\rho u)_j^+ c_j S_j} \right] + \sum_k \frac{K_{jk}^- S_{jk}}{(\rho u)_j^+ c_j S_j} T_k^- + \frac{q_j^- V_j}{(\rho u)_j^+ c_j S_j} \tag{3.3.48}$$

Cette méthode explicite est stable si

$$\frac{\sum_k K_{jk}^- S_{jk}}{(\rho u)_j^+ c_j S_j} \leq 1 \tag{3.3.49}$$

Exemple : $v = 0, u^+ = u^-$, maillage uniforme Δy et Δx .

On a dans ce cas

$$\begin{aligned} K_{j,j+1} &= K_{j,j-1} = \frac{\lambda}{\Delta y} \\ S_{j,j+1} &= S_{j,j-1} = \Delta x \\ S_i &= \Delta y \end{aligned} \quad (3.3.50)$$

La condition s'écrit

$$\frac{2\lambda\Delta x}{\rho u c \Delta y^2} \leq 1 \quad (3.3.51)$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{\lambda}{\rho c}\right) \cdot \frac{\Delta x}{u \Delta y^2} \leq \frac{1}{2} \quad (3.3.52)$$

ou

$$\Delta x \leq \frac{1}{2} \frac{u \Delta y^2}{a} \quad \left(a = \frac{\lambda}{\rho c}\right) \quad (3.3.53)$$

Méthode implicite On soustrait de l'équation de conservation l'équation de continuité, multipliée par h_j^+ et on évalue les flux en $+$

$$\begin{aligned} (\rho u)_j^- c_j (T_j^+ - T_j^-) S_j + K_{j,j+1}^+ S_{j,j+1} (T_j^+ - T_{j+1}^+) \\ + K_{j,j-1}^+ S_{j,j-1} (T_j^+ - T_{j-1}^+) = q_i^+ V_i \end{aligned} \quad (3.3.54)$$

On obtient donc un système d'équations algébriques à résoudre dans chaque section. La solution de ce système fournit les températures dans la section T_j^+ à partir des températures T_j^- dans la section à l'amont de l'écoulement. Cette méthode implicite est toujours stable.

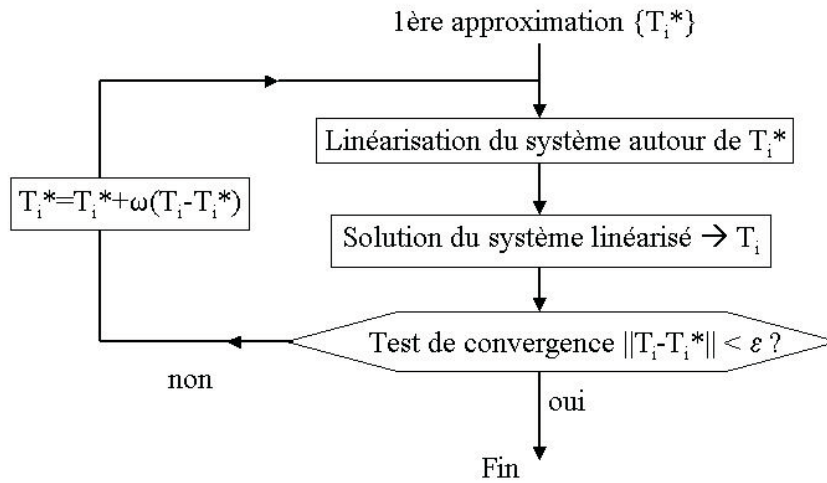


FIG. 3.20 – Algorithme de résolution du système d'équations

3.4 Solution du système d'équations nodales

Pour les problèmes elliptiques et pour les problèmes paraboliques, lorsqu'on utilise une méthode implicite ou de Crank-Nicolson, la discrétisation de l'équation de conservation conduit à un système d'équations algébriques. Par exemple, pour un problème non-stationnaire discrétisé par une méthode implicite, ce système est de la forme

$$\sum_j a_{ij} T_j^+ = b_i \quad (3.4.1)$$

avec

$$\begin{cases} a_{ij} = -K_{ij}^+ S_{ij} \\ a_{ii} = + \sum_j K_{ij}^+ S_{ij} + \frac{m_i c_i}{\Delta\tau} \\ b_i = q_i^+ V_i + m_i c_i \frac{T_i^-}{\Delta\tau} \end{cases} \quad (3.4.2)$$

Ce système est **linéaire** si les K_{ij}^+ et q_i^+ sont constants c'est-à-dire si les propriétés physiques et le terme source ne dépendent pas des températures. Dans le cas contraire, le système est non-linéaire. Il doit alors être résolu par approximations successives. L'algorithme est alors celui de la figure 3.20 dans laquelle ω est un facteur de relaxation.

Si $\omega < 1$, la nouvelle valeur T_i^* est obtenue par interpolation entre l'ancienne valeur T_i^* et la valeur calculée T_i .

Si $\omega > 1$, la nouvelle approximation T_i^* est obtenue par extrapolation.

Si $\omega < 1$, on parle de sous-relaxation, si $\omega > 1$, on parle de surrelaxation.

Normalement, $\omega < 1$.

Pour linéariser le système d'équations nodales, on procède généralement comme suit :

1. Les propriétés physiques sont calculées à T_i^* , c'est-à-dire

$$K_{ij}^+ \cong K_{ij}^* = K_{ij}(T_i^*, T_j^*) \quad (3.4.3)$$

2. Le terme source est linéarisé à l'aide d'un développement de Taylor limité. On écrit

$$\begin{aligned} q_i^+ &= q_i^* + \left(\frac{\partial q_i}{\partial T_i} \right)^* (T_i^+ - T_i^*) \\ &= \left[q_i^* - \left(\frac{\partial q_i}{\partial T_i} \right)^* T_i^* \right] + \left(\frac{\partial q_i}{\partial T_i} \right)^* T_i^+ \\ &= q_{ci} + \left(\frac{\partial q_i}{\partial T_i} \right)^* T_i^+ \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

La stabilité impose $\left(\frac{\partial q_i}{\partial T_i} \right)^* < 0$, sans cela, il y a "emballement" des températures.

Le système d'équations devient donc

$$\sum_j a_{ij}^* T_j^+ = b_i^* \quad (3.4.5)$$

avec

$$\begin{cases} a_{ij}^* = -K_{ij}^* S_{ij} \\ a_{ii}^* = + \sum_j K_{ij}^* S_{ij} + \frac{m_i c_i}{\Delta \tau} - \left(\frac{\partial q_i}{\partial T_i} \right)^* V_i \\ b_i^* = q_{ci} V_i + m_i c_i \frac{T_i^-}{\Delta \tau} \end{cases} \quad (3.4.6)$$

3.4.1 Structure et propriétés du système d'équations linéarisées

Le système linéarisé peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$[A][T] = [b] \quad (3.4.7)$$

La matrice $[A]$ possède les caractéristiques suivantes :

1. Le nombre d'équations n est grand, typiquement compris entre 10^2 et 10^6 . La matrice $[A]$ comporte donc n^2 coefficients, soit un nombre très grand de valeurs.
2. La matrice $[A]$ est "creuse", elle comporte un très grand nombre de valeurs nulles. Pour un problème de conductibilité par exemple, la matrice $[A]$ comporte
 - pour un problème 1-D, 3 coefficients non-nuls par ligne
 - pour un problème 2-D, 5 coefficients non-nuls par ligne
 - pour un problème 3-D, 7 coefficients non-nuls par ligne

toutes les autres valeurs sont nulles.

3. La matrice $[A]$ est à diagonale dominante. En effet, on a

$$\forall i, |a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad (3.4.8)$$

4. En conductibilité pure, la matrice $[A]$ est symétrique.

Ces caractéristiques justifient l'utilisation d'algorithmes spécialisés pour la résolution du système d'équations.

3.4.2 Méthodes itératives par points

Dans les méthodes itératives "par points", on balaye le domaine point par point et on applique en chaque noeud i l'équation du noeud pour déterminer une nouvelle approximation de la température T_i .

La méthode la plus utilisée est la méthode de Gauss-Seidel, dans laquelle on utilise à tout instant les dernières valeurs disponibles.

Pour un problème 2-D par exemple, en parcourant le domaine de gauche à droite et de bas en haut, les itérés successifs sont calculés par

$$T_i^k = \frac{1}{a_{ii}} [-a_{ij_1} T_{j_1}^{k-1} - a_{ij_2} T_{j_2}^{k-1} - a_{ij_3} T_{j_3}^k - a_{ij_4} T_{j_4}^k + b_i] \quad (3.4.9)$$

équation dans laquelle k indique les valeurs relatives à l'itération k et $(k-1)$ indique les valeurs relatives à l'itération précédente.

Cette méthode peut être accélérée par application de la surrelaxation. On calcule

$$\Delta T_i^k = \frac{1}{a_{ii}} \left[- \sum_{j, k-1} a_{ij} T_j^{k-1} - \sum_{j, k} a_{ij} T_j^k + b_i \right] - T_i^{k-1} \quad (3.4.10)$$

et on détermine l'itéré k par

$$T_i^k = T_i^{k-1} + \alpha \Delta T_i^k \quad (3.4.11)$$

La vitesse de convergence est améliorée si $1 \leq \alpha \leq 2$.

Pour $\alpha > 2$, la méthode diverge.

Cette méthode itérative par points présente deux inconvénients :

1. La vitesse de convergence est liée à la valeur de α . Elle est maximale pour une valeur particulière $\alpha = \alpha_{opt}$ mais cette valeur optimale du facteur de surrelaxation dépend du problème à résoudre et ne peut être déterminée que par expérimentation numérique.

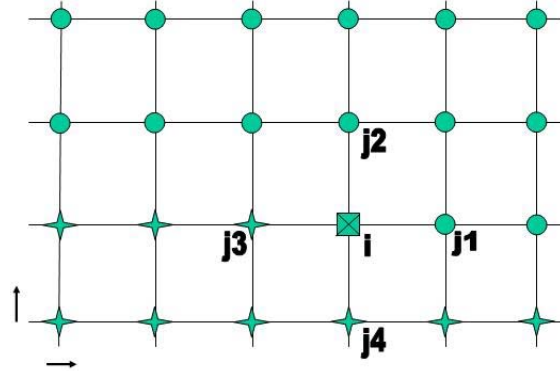


FIG. 3.21 – Exemple de schéma de résolution : \circ valeurs disponibles en $(k-1)$, $+$ valeurs déjà calculées à l'itération k , \times noeud courant

2. La vitesse de convergence de la méthode se dégrade très rapidement lorsque le nombre de noeuds augmente. La raison est que l'information des conditions aux limites est transmise au sein du domaine de proche en proche, à une vitesse de l'ordre de un pas d'espace par itération.

3.4.3 Solution directe pour les problèmes 1-D - Algorithme de Thomas

Pour les problèmes monodimensionnels, la matrice $[A]$ des coefficients est tridiagonale. Les expressions nodales sont de la forme

$$a_{i,i-1}T_{i-1} + a_{ii}T_i + a_{i,i+1}T_{i+1} = b_i \quad (3.4.12)$$

ou encore

$$a_iT_{i-1} + b_iT_i + c_iT_{i+1} = d_i \quad (3.4.13)$$

avec $i = 1, \dots, n$, $a_1 = 0$ et $c_n = 0$.

Un tel système peut être résolu de manière très efficace par une méthode directe, l'algorithme de Thomas, qui est en fait l'algorithme de Gauss appliqué à un système tridiagonal.

Le système peut s'écrire :

$$\begin{cases} b_1 T_1 + c_1 T_2 = d_1 & (1) \\ a_i T_{i-1} + b_i T_i + c_i T_{i+1} = d_i & (2) \dots (n-1) \\ a_n T_{n-1} + b_n T_n = d_n & (n) \end{cases} \quad (3.4.14)$$

L'algorithme comporte deux étapes :

- Elimination (en descendant)

De (1), on tire

$$T_1 = \frac{d_1 - c_1 T_2}{b_1} = d'_1 - c'_1 T_2 \quad (3.4.15)$$

avec $d'_1 = \frac{d_1}{b_1}$ et $c'_1 = \frac{c_1}{b_1}$

En insérant cette expression dans la deuxième équation, on a

$$a_2(d'_1 - c'_1 T_2) + b_2 T_2 + c_2 T_3 = d_2 \quad (3.4.16)$$

c'est-à-dire

$$T_2 = \frac{d_2 - a_2 d'_1}{b_2 - a_2 c'_1} - \frac{c_2}{b_2 - a_2 c'_1} T_3 = d'_2 - c'_2 T_3 \quad (3.4.17)$$

avec $d'_2 = \frac{d_2 - a_2 d'_1}{b_2 - a_2 c'_1}$ et $c'_2 = \frac{c_2}{b_2 - a_2 c'_1}$.

De même, pour l'équation (i), on obtient

$$T_i = d'_i - c'_i T_{i+1} \quad (3.4.18)$$

avec $d'_i = \frac{d_i - a_i d'_{i-1}}{b_i - a_i c'_{i-1}}$ et $c'_i = \frac{c_i}{b_i - a_i c'_{i-1}}$.

L'équation (n) devient

$$T_n = d'_n - c'_n T_{n+1} = d'_n \quad (3.4.19)$$

avec $c'_n = 0$ et $d'_n = \frac{d_n - a_n d'_{n-1}}{b_n - a_n c'_{n-1}}$.

- Substitution (en montant)

En remontant, on obtient successivement

$$\begin{aligned} T_n &= d'_n \\ T_{n-1} &= d'_{n-1} - c'_{n-1} T_n \\ &\dots \\ T_i &= d'_i - c'_i T_{i+1} \\ &\dots \\ T_1 &= d'_1 - c'_1 T_2 \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

Cet algorithme est très performant du point de vue vitesse d'exécution. Il ne nécessite que le stockage des a_i, b_i, c_i, d_i soit quatre valeurs par noeud.

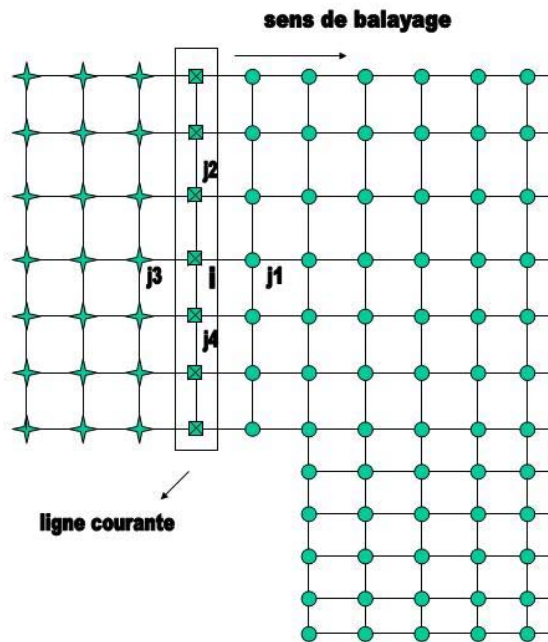


FIG. 3.22 – Balayage du maillage : + dernières valeurs calculées à l'itération courante k , \circ dernières valeurs calculées à l'itération précédente ($k-1$)

Problèmes 2-D et 3-D - Méthodes itératives par lignes

Pour les problèmes 2-D et 3-D, on peut utiliser des méthodes itératives par lignes. Le principe de ces méthodes est le suivant :

- on balaye le domaine ligne par ligne
- à chaque ligne, les nouvelles approximations des variables sont calculées simultanément sur toute la ligne en appliquant l'algorithme de Thomas.

L'équation des noeuds de la ligne courante est donnée par

$$a_{ij_4} T_{j_4}^k + a_{ii} T_i^k + a_{ij_2} T_{j_2}^k = b_i - a_{ij_1} T_{j_1}^{k-1} - a_{ij_3} T_{j_3}^k \quad (3.4.21)$$

Ces équations constituent un système d'équations à matrice tridiagonale dont la solution par l'algorithme de Thomas fournit les nouvelles approximations des températures des noeuds de la ligne.

Cette méthode itérative par lignes présente les caractéristiques suivantes :

- L'information des conditions aux limites est propagée au sein du domaine en une fois dans la direction de la ligne. Dans les directions perpendiculaires à la direction de la ligne (direction de balayage), l'information est propagée de proche en proche, à une vitesse de l'ordre d'un pas d'espace par itération. La vitesse de convergence est donc meilleure que celle des méthodes itératives par points.

- La vitesse de convergence dépend de la direction choisie pour la ligne et du sens de balayage des lignes :
 1. Si les coefficients d'une direction sont plus grands que les coefficients des autres directions, la convergence sera plus rapide si on choisit cette direction comme direction de la ligne.
 2. Le sens de balayage est important également. Par exemple, dans un problème de convection, la convergence sera plus rapide si on balaye le domaine dans le sens de l'écoulement.
 3. En alternant la direction des lignes à chaque itération, on propage rapidement l'information des conditions aux limites à l'intérieur du domaine, la convergence sera donc plus rapide qu'en utilisant toujours la même direction pour les lignes.
- On peut également appliquer la surrelaxation aux méthodes itératives par lignes. Le gain en vitesse de convergence est cependant faible.

Chapitre 4

Méthode aux éléments finis

4.1 Principes généraux de la méthode

4.1.1 Discrétisation spatiale

La méthode est basée sur l'ensemble des points suivants :

- Subdiviser le domaine en un ensemble d'éléments de formes simples (triangles, quadrilatères, tétraèdres,... droits ou curvilignes). Ces éléments recouvrent tout le domaine sans se recouvrir l'un l'autre.
- Sur chaque élément, on définit des noeuds sur les frontières et à l'intérieur de l'élément.
- Le champ de température est approximé à partir des valeurs des températures nodales t_i inconnues, à l'aide de fonctions d'interpolation, définies localement à l'intérieur de chaque élément.

Le champ de température approximatif est donc donné à l'intérieur de l'élément (e) par

$$\tilde{t}^{(e)}(\vec{x}) = \sum_{j \in e} t_j N_j^{(e)}(\vec{x}) \quad (4.1.1)$$

c'est à dire une combinaison linéaire des valeurs nodales. N_j est la fonction de forme et t_j la valeur inconnue de la température au noeud j . Pour l'ensemble du domaine, on a donc

$$\tilde{t}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n t_j N_j(\vec{x}) \quad (4.1.2)$$

avec $N_j(\vec{x})$ la fonction de forme du noeud j et

$$N_j(\vec{x}) = \sum_{(e) \ni j} N_j^{(e)}(\vec{x}) \quad (4.1.3)$$

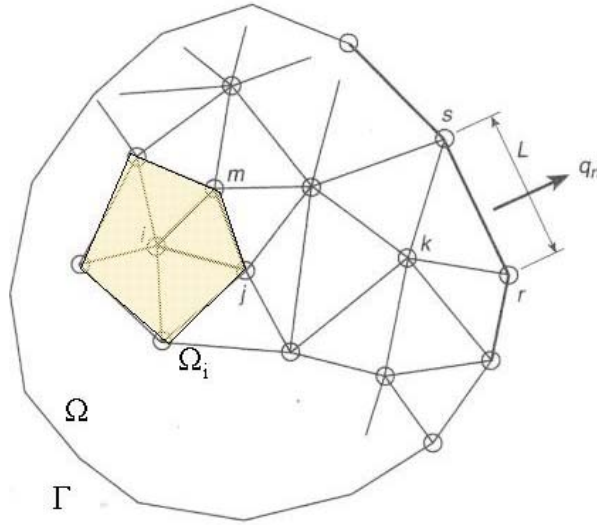


FIG. 4.1 – Discrétisation spatiale d'un domaine quelconque

4.1.2 Discrétisation des équations

On remplace l'équation différentielle par une formulation intégrale, obtenue par la **méthode des résidus pondérés**. Si l'équation différentielle de départ s'écrit

$$f(t, \vec{\nabla}t, \nabla^2t) = 0 \quad (4.1.4)$$

en introduisant l'approximation (4.1.2) en lieu et place de l'évolution exacte de t dans cette équation, celle-ci n'est plus respectée et on obtient un résidu non-nul

$$R(\tilde{t}) = f(\tilde{t}, \vec{\nabla}\tilde{t}, \nabla^2\tilde{t}) \neq 0 \quad (4.1.5)$$

La méthode des résidus pondérés consiste à rechercher l'approximation \tilde{t} qui annule la moyenne des résidus dans le domaine Ω c'est-à-dire telle que

$$\int_{\Omega} W(\vec{x})R(\tilde{t})dV = 0 \quad (4.1.6)$$

La fonction approximative $\tilde{t}(\vec{x})$ comportant n paramètres inconnus t_i , il faut n équations c'est-à-dire choisir n fonctions de pondération W_i linéairement indépendantes, et annuler n résidus pondérés c'est-à-dire

$$\int_{\Omega} W_i(\vec{x})R(\tilde{t})dV = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (4.1.7)$$

ce qui conduit à un système de n équations algébriques en les n températures t_i .

Il existe de nombreuses méthodes aux éléments finis, qui diffèrent entre elles en fonction du choix des W_i . En particulier, citons :

- **la méthode de Galerkin** : $W_i(\vec{x}) = N_i(\vec{x})$
- **la méthode aux volumes finis** : $W_i(\vec{x}) = 1$ pour $\vec{x} \in V_i$ autour du noeud i et $W_i(\vec{x}) = 0$ sinon. Cette méthode est à la base des méthodes aux volumes finis sur des maillages non structurés.

Appliquée à l'équation de conservation de l'énergie écrite sous sa forme non conservative,

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} + \rho \vec{u} c \vec{\nabla}(t) = \vec{\nabla}(\lambda \vec{\nabla} t) + q \quad (4.1.8)$$

la méthode des résidus pondérés donne

$$\int_{\Omega} W_i(\rho c \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \tau}) dV + \int_{\Omega} W_i \rho \vec{u} c \vec{\nabla}(\tilde{t}) dV = \int_{\Omega} W_i \vec{\nabla}(\lambda \vec{\nabla} \tilde{t}) dV + \int_{\Omega} W_i q dV \quad (4.1.9)$$

En intégrant par parties le terme diffusionnel,

$$W_i \vec{\nabla}(\lambda \vec{\nabla} \tilde{t}) = \vec{\nabla}(W_i \lambda \vec{\nabla} \tilde{t}) - (\vec{\nabla} W_i) \lambda \vec{\nabla} \tilde{t} \quad (4.1.10)$$

on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} W_i(\rho c \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \tau}) dV + \int_{\Omega} W_i \rho \vec{u} c \vec{\nabla} \tilde{t} dV \\ &= \int_{\Omega} \vec{\nabla}(W_i \lambda \vec{\nabla} \tilde{t}) dV - \int_{\Omega} (\vec{\nabla} W_i) \lambda \vec{\nabla} \tilde{t} dV + \int_{\Omega} W_i q dV \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

En appliquant le théorème d'Ostrogradsky au troisième terme, on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} W_i(\rho c \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \tau}) dV + \int_{\Omega} W_i \rho \vec{u} c \vec{\nabla} \tilde{t} dV \\ &= \int_{\Gamma} W_i(\lambda \frac{\partial \tilde{t}}{\partial n}) dS - \int_{\Omega} (\vec{\nabla} W_i) \lambda \vec{\nabla} \tilde{t} dV + \int_{\Omega} W_i q dV \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

Cette expression est appelée **forme faible** de l'équation de conservation de l'énergie, car les dérivées qu'elle contient sont d'un ordre inférieur de une unité à l'ordre des dérivées de l'équation différentielle de départ. Cette forme présente deux avantages :

- les fonctions de forme doivent être simplement dérivables une fois dans le domaine où elles sont non nulles. L'utilisation de fonctions linéaires est donc possible.
- elle introduit naturellement les conditions aux limites de type gradient imposé (par le terme $\frac{\partial \tilde{t}}{\partial n}$)

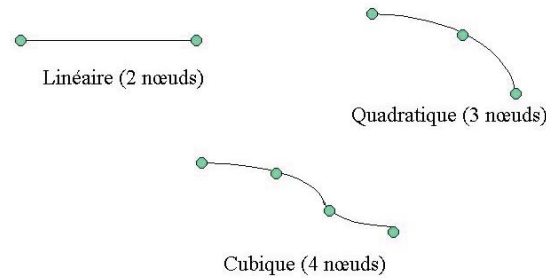


FIG. 4.2 – Trois éléments à une dimension

4.2 Eléments finis et fonctions d'interpolation

De nombreux types d'éléments et de fonctions d'interpolation peuvent être construits. Ils diffèrent

- par la forme
- par le nombre et la localisation des noeuds
- par l'expression des fonctions de forme définies sur l'élément.

Les deux premiers éléments relèvent évidemment de la géométrie de l'élément.

4.2.1 Géométrie des éléments

Les éléments classiques utilisés en pratique sont les suivants :

Eléments à 1 dimension

On peut utiliser des éléments à 2, 3 ou 4 noeuds (voir figure 4.2).

Eléments à 2 dimensions

Dans les éléments à deux dimensions, on distingue les éléments à trois et quatre côtés : les éléments triangulaires à 3 ou 6 noeuds (voir figure 4.3) et les éléments quadrilatéraux à 4, 8 ou 9 noeuds (voir figure 4.4).

Eléments à 3 dimensions

D'une manière similaire à ce qui est fait en deux dimensions, on trouvera, pour résoudre des problèmes tridimensionnels, des éléments 3-D tétraédriques ou hexaédriques. Dans le cas des tétraèdres, on rencontre des éléments à 4 ou 10 noeuds (voir

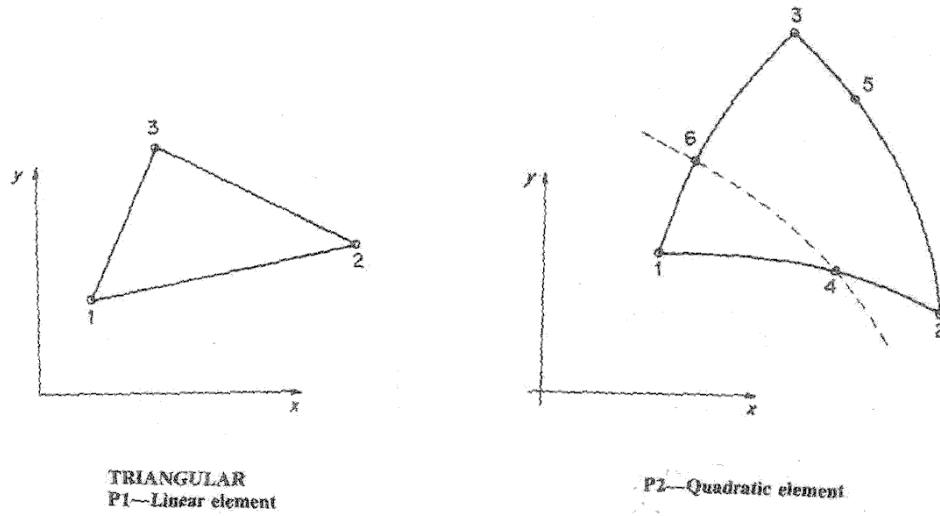


FIG. 4.3 – Deux éléments triangulaires : à 3 et 6 noeuds

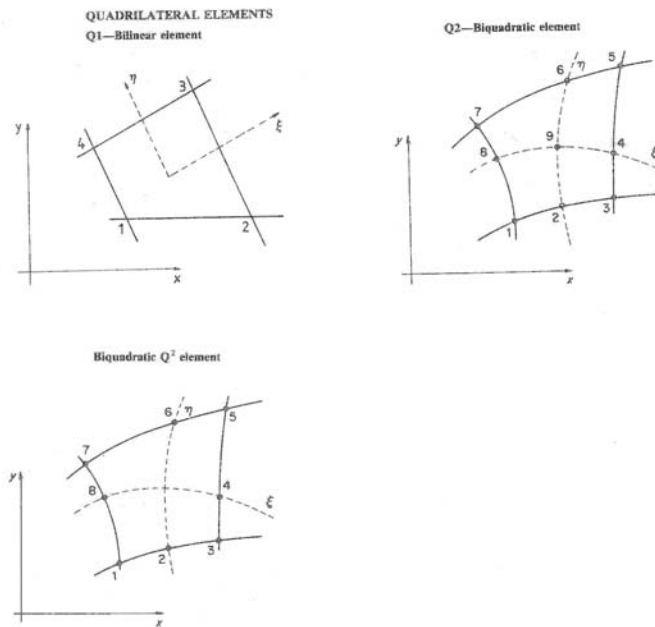


FIG. 4.4 – Trois éléments quadrilatéraux : à 4, 8 ou 9 noeuds

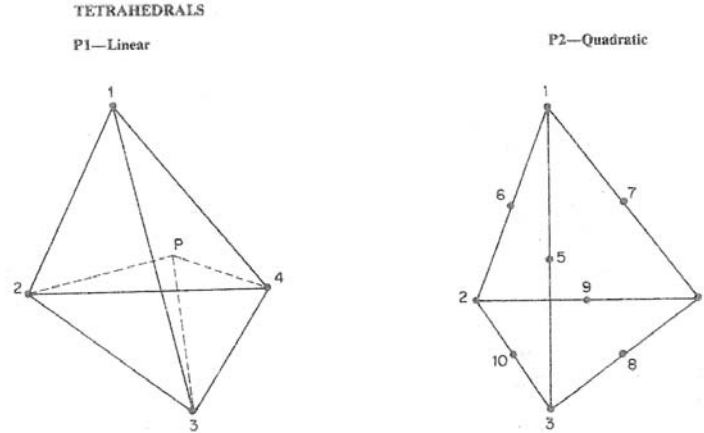


FIG. 4.5 – Deux éléments tétraédriques : à 4 ou 10 noeuds

figure 4.5) et dans le cas des hexaèdres, on aura des éléments à 8, 20 ou 32 noeuds (voir figure 4.6).

4.2.2 Fonctions de forme

La température à l'intérieur de l'élément est donnée par :

$$\tilde{t}^{(e)}(\vec{x}) = \sum_{j \in e} t_j N_j^{(e)}(\vec{x}) \quad (4.2.1)$$

les $N_j^{(e)}$ étant les fonctions de formes associées à l'élément (e). Ces fonctions de forme doivent être choisies a priori. En pratique, on adopte pour ces fonctions des fonctions polynomiales, définies à l'intérieur de chaque élément, et dont le degré dépend du nombre de noeuds qui servent à définir l'élément.

On a donc $N_j(\vec{x}) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + \dots$ (pour un élément à deux dimensions).

Ces fonctions de forme doivent, en outre, avoir les propriétés suivantes :

1. Elles sont définies localement, c'est-à-dire : $N_j^e(\vec{x}) = 0$ si $\vec{x} \notin e$
2. On a $N_i^e(\vec{x}_j) = \delta_{ij}$: $N_i^{(e)}(x_i, y_i, z_i) = 1$ et $N_i^{(e)}(x_j, y_j, z_j) = 0$ pour $j \neq i$
3. Elles doivent permettre d'approximer un champ uniforme sur l'élément. Dans ce cas, les t_i correspondant aux noeuds de l'élément sont égaux ($= t_0$) et on a : $\tilde{t}^{(e)}(\vec{x}) = t_0 = t_0(\sum_j N_j^{(e)}(\vec{x}))$ ce qui implique $\sum_{j \in e} N_j^{(e)}(\vec{x}) = 1 \forall \vec{x} \in (e)$
4. Les $N_j^{(e)}$ sont **linéairement indépendantes**.

L'expression des fonctions de forme, en particulier des coefficients a, b, c, ... des différents termes du polynôme utilisé, peut être déterminée facilement à partir de la propriété (2).

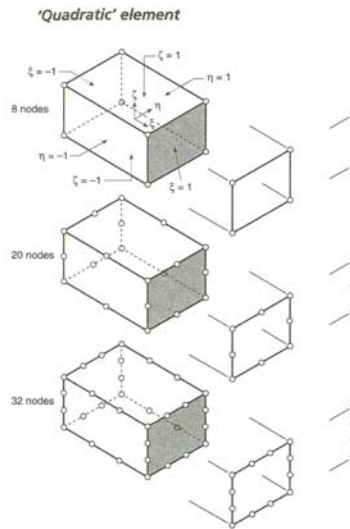


FIG. 4.6 – Trois éléments hexaédriques : à 8, 20 ou 32 noeuds

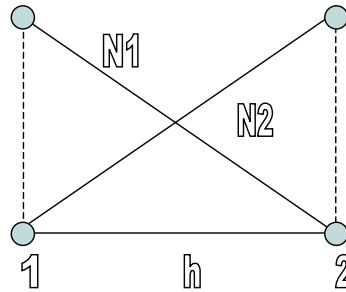


FIG. 4.7 – Fonctions de forme pour un élément 1D

Appliquons cela à un élément monodimensionnel à deux noeuds (élément linéaire - voir figure 4.7). On a dans ce cas :

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \\ N_2 &= \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

ce qui donne :

$$t = t_1 N_1 + t_2 N_2 = t_1 \left(1 - \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right) + t_2 \left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right) \quad (4.2.3)$$

c'est-à-dire une fonction linéaire entre t_1 et t_2 . Si on utilise la coordonnée locale $\xi = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$, on a

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= 1 - \xi \\ N_2(\xi) &= \xi \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Considérons ensuite un élément triangulaire plan (voir figure 4.8). Cet élément com-

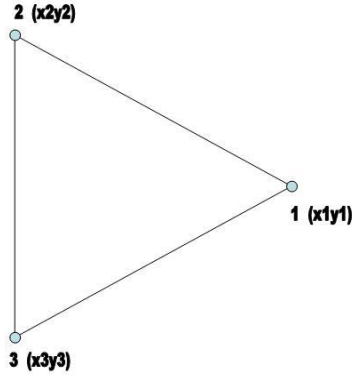


FIG. 4.8 – Élément triangulaire plan

porte trois noeuds, les fonctions de forme comportent donc 3 termes, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} N_1 &= a_1 + b_1x + c_1y \\ N_2 &= a_2 + b_2x + c_2y \\ N_3 &= a_3 + b_3x + c_3y \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Le problème consiste à déterminer les a_i , b_i et c_i . On a pour N_1 : $N_1(x_i, y_i) = \delta_{1i}$ c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} a_1 + b_1x_1 + c_1y_1 &= 1 \\ a_1 + b_1x_2 + c_1y_2 &= 0 \\ a_1 + b_1x_3 + c_1y_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.2.7)$$

ce qui donne, après solution du système,

$$\begin{aligned} b_1 &= (y_2 - y_3)/2\Delta \\ c_1 &= (x_3 - x_2)/2\Delta \\ a_1 &= (x_2y_3 - x_3y_2)/2\Delta \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

avec

$$2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 2. \text{ la surface du triangle} \quad (4.2.9)$$

et des expressions analogues pour les deux autres fonctions de forme.

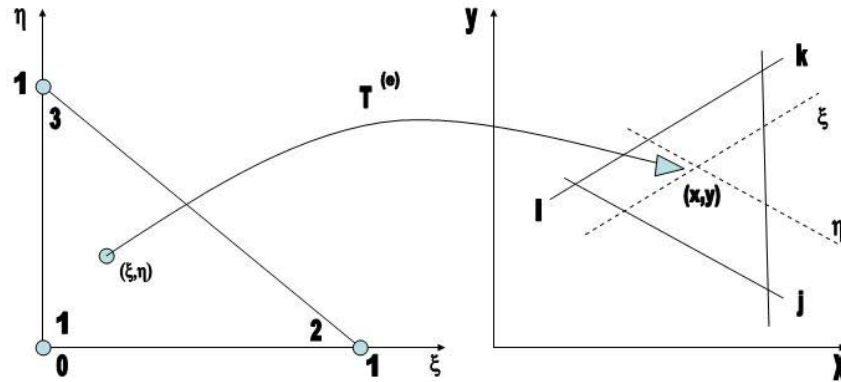


FIG. 4.9 – Correspondance élément de référence - élément réel

4.2.3 Élément de référence - Transformations

On peut également exprimer les fonctions de forme dans un système de coordonnées locales. L'expression de ces fonctions de forme est alors indépendante des valeurs particulières des coordonnées des noeuds.

Ceci revient à définir, pour chaque type d'élément, un élément de référence sur lequel sont définies les fonctions de forme en coordonnées locales. L'expression des fonctions de forme dans le système d'axes (x, y, z) est alors obtenue à l'aide d'une transformation géométrique. La transformation se met sous la forme :

$$T^{(e)} : \vec{x}^{(e)} = \vec{x}^{(e)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (4.2.10)$$

Pour un élément triangulaire, par exemple, les fonctions de forme de l'élément de référence sont :

$$\begin{cases} N_1^{(e)}(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta \\ N_2^{(e)}(\xi, \eta) = \xi \\ N_3^{(e)}(\xi, \eta) = \eta \end{cases} \quad (4.2.11)$$



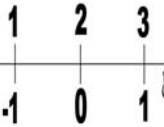
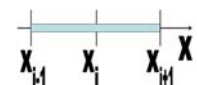
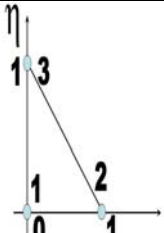

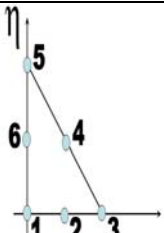

De manière générale, la transformation $\vec{x}^{(e)} = \vec{x}^{(e)}(\xi, \eta, \zeta)$ sera exprimée par des relations de la forme :


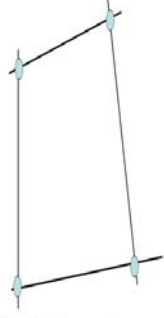
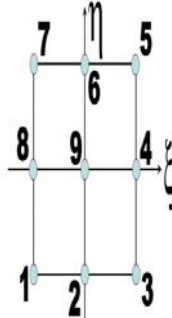
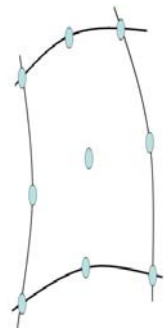
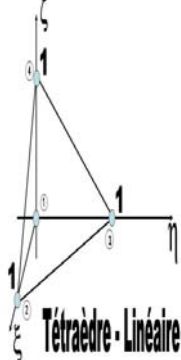

$$\begin{cases} x(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{j=1}^n x_j N_j^*(\xi, \eta, \zeta) \\ y(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{j=1}^n y_j N_j^*(\xi, \eta, \zeta) \\ z(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{j=1}^n z_j N_j^*(\xi, \eta, \zeta) \end{cases} \quad (4.2.12)$$

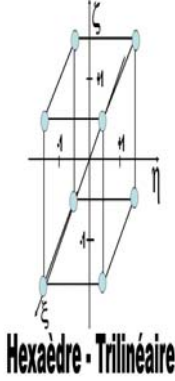
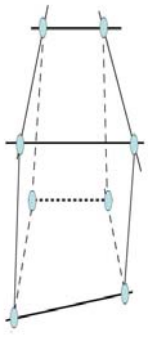
dans lesquelles les N_j^* sont des fonctions d'interpolation et n le nombre de points pour lesquels la correspondance $(x, y, z) \leftrightarrow (\xi, \eta, \zeta)$ est fixée.

Une transformation très importante en pratique est la **transformation isoparamétrique**, dans laquelle les fonctions d'interpolation N_j^* qui définissent la géométrie sont prises égales aux fonctions de forme N_j utilisées dans l'expression du champ de température approximatif, c'est-à-dire :

$$N_j^*(\xi, \eta, \zeta) = N_j^{(e)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (4.2.13)$$

Elément de référence	Fonctions de forme	Elément "réel" Transf. isoparamétrique
 <p>Linéaire</p>	$N_1(\xi) = 1 - \xi$ $N_2(\xi) = \xi$	
 <p>quadratique</p>	$N_1(\xi) = -0.5\xi(1 - \xi)$ $N_2(\xi) = 1 - \xi^2$ $N_3(\xi) = 0.5\xi(1 + \xi)$	
 <p>Triangle linéaire</p>	$N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$ $N_2(\xi, \eta) = \xi$ $N_3(\xi, \eta) = \eta$	 <p>triangle quelconque</p>
 <p>Triangle quadratique</p>	$N_1 = 1 - 3\xi - 3\eta + 2\xi^2 + 2\eta^2 + 4\xi\eta$ $N_2 = 4\xi - 4\xi^2 - 4\xi\eta$ $N_3 = -\xi + 2\xi^2$ $N_4 = 4\xi\eta$ $N_5 = -\eta + 2\eta^2$ $N_6 = 4\eta - 4\xi\eta - 4\eta^2$	 <p>triangle à côtés curvilignes</p>

Elément de référence	Fonctions de forme	Elément "réel" Transf. isoparamétrique
 <p>quadrilatère bilinéaire</p>	$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)$	 <p>Quadrilatère quelconque</p>
 <p>Elt lagrange biquadratique</p>	<p>coins $i = 1, 3, 5, 7$</p> $N_i = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi\xi_i)(\eta^2 + \eta\eta_i)$ <p>côtés $i = 2, 4, 6, 8$</p> $N_i = \frac{1}{2}\eta_i^2(\eta^2 - \eta\eta_i)(1 - \xi^2) + \frac{1}{2}\xi_i^2(\xi^2 - \xi\xi_i)(1 - \eta^2)$ <p>centre $i = 9$</p> $N_i = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$	
 <p>Tétraèdre - Linéaire</p>	$N_1 = 1 - \xi - \eta - \zeta$ $N_2 = \xi$ $N_3 = \eta$ $N_4 = \zeta$	

Elément de référence	Fonctions de forme	Elément "réel" Transf. isoparamétrique
 <p data-bbox="402 630 576 682">Hexaèdre - Trilinéaire</p>	$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i)$ $\xi_i = \pm 1$ $\eta_i = \pm 1$ $\zeta_i = \pm 1$	

4.3 Discrétisation des équations

L'application de la méthode des résidus pondérés à l'équation de conservation de l'énergie a conduit à la forme faible suivante :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} W_i (\rho c \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \tau}) dV + \int_{\Omega} W_i \rho \vec{u} c \vec{\nabla} \tilde{t} dV \\
 &= \int_{\Gamma} W_i (\lambda \frac{\partial \tilde{t}}{\partial n}) dS - \int_{\Omega} (\vec{\nabla} W_i) \lambda \vec{\nabla} \tilde{t} dV + \int_{\Omega} W_i q dV
 \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

C'est cette forme faible qui sert de base à la discrétisation des équations. Nous examinerons successivement le cas de la conductibilité thermique et le cas de l'équation d'advection - diffusion.

4.4 Discrétisation des équations - conductibilité thermique

4.4.1 Forme faible - méthode de Galerkin

Dans les cas de conductibilité thermique, on utilise la méthode de Galerkin. On a donc

$$W_i = N_i = \sum_{e \ni i} N_i^{(e)} \tag{4.4.1}$$

Les fonctions de pondération ont donc un support local. Elles sont différentes de 0 dans le sous-domaine comprenant l'ensemble des éléments qui contiennent le noeud i , et nulles partout ailleurs. Ce sous-domaine sera noté Ω_i (voir figure 4.10). La forme

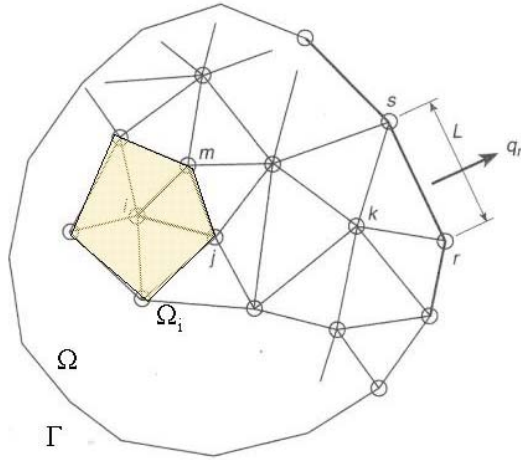


FIG. 4.10 – Discrétisation spatiale d'un domaine quelconque

faible s'écrit donc :

$$\int_{\Omega_i} N_i(\rho c \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \tau}) dV + \int_{\Omega_i} (\vec{\nabla} N_i) \lambda \vec{\nabla} \tilde{t} dV - \int_{\Gamma_i} N_i(\lambda \frac{\partial \tilde{t}}{\partial n}) dS = \int_{\Omega_i} N_i q dV \quad (4.4.2)$$

Le troisième terme de l'équation (intégrale de surface) n'étant différent de 0 que si le noeud i se trouve sur la limite extérieure du domaine.

Ce troisième terme permet d'introduire les conditions aux limites dans l'équation nodale du noeud i , s'il est sur la limite.

La frontière extérieure du domaine Γ peut être divisée en trois zones, sur lesquelles on applique des conditions aux limites différentes :

$$\begin{cases} \Gamma_1 : t \text{ fixé (C.L. type Dirichlet)} \\ \Gamma_2 : -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} = \phi_0 \text{ fixé (C.L. type Neumann)} \\ \Gamma_3 : -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} = K(t - t_f) \text{ (C.L. type Fourier)} \end{cases} \quad (4.4.3)$$

On a donc

$$\int_{\Gamma_i} N_i(\lambda \frac{\partial \tilde{t}}{\partial n}) dS = - \int_{\Gamma_{i2}} N_i \phi_0 dS - \int_{\Gamma_{i3}} N_i K(\tilde{t} - t_f) dS \quad (4.4.4)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} N_i(\rho c \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \tau}) dV + \int_{\Omega_i} (\vec{\nabla} N_i) \lambda \vec{\nabla} \tilde{t} dV + \int_{\Gamma_{i3}} N_i K \tilde{t} dS \\ = \int_{\Omega_i} N_i q dV - \int_{\Gamma_{i2}} N_i \phi_0 dS + \int_{\Gamma_{i3}} N_i K t_f dS \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

4.4.2 Problèmes stationnaires - Equation nodale

En stationnaire, on a

$$\int_{\Omega_i} (\vec{\nabla} N_i) \lambda \vec{\nabla} \tilde{t} dV + \int_{\Gamma_{i3}} N_i K \tilde{t} dS = \int_{\Omega_i} N_i q dV - \int_{\Gamma_{i2}} N_i \phi_0 dS + \int_{\Gamma_{i3}} N_i K t_f dS \quad (4.4.6)$$

En introduisant dans cette expression l'expression de \tilde{t}

$$\tilde{t} = \sum_j N_j t_j \quad (4.4.7)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \sum_j \left[\int_{\Omega_i} (\lambda \vec{\nabla} N_i \vec{\nabla} N_j) dV \right] t_j + \sum_j \left[\int_{\Gamma_{i3}} K N_i N_j dS \right] t_j \\ = \int_{\Omega_i} N_i q dV - \int_{\Gamma_{i2}} N_i \phi_0 dS + \int_{\Gamma_{i3}} N_i K t_f dS \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

L'équation nodale relative au noeud i peut donc s'écrire

$$\sum_{j \in \Omega_i} a_{ij} t_j = b_i \quad (4.4.9)$$

avec

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_{\Omega_i} \lambda \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dV + \int_{\Gamma_{i3}} K N_i N_j dS \\ b_i &= \int_{\Omega_i} N_i q dV - \int_{\Gamma_{i2}} N_i \phi_0 dS + \int_{\Gamma_{i3}} N_i K t_f dS \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

les t_j étant relatifs aux noeuds qui appartiennent au sous-domaine Ω_i contenant les éléments qui contiennent le noeud i .

4.4.3 Problèmes non-stationnaires - Equation nodale

En conductibilité non stationnaire, la même démarche conduit à l'équation nodale suivante :

$$\int_{\Omega_i} N_i (\rho c \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \tau}) dV + \sum_{j \in \Omega_i} a_{ij} t_j = b_i \quad (4.4.11)$$

L'approximation \tilde{t} est donnée par

$$\tilde{t} = \sum_j N_j t_j(\tau) \quad (4.4.12)$$

avec les t_j variant avec le temps.

En substituant, on a :

$$\sum_j \left[\int_{\Omega_i} N_i \rho c N_j dV \right] \frac{dt_j}{d\tau} + \sum_{j \in \Omega_i} a_{ij} t_j = b_i \quad (4.4.13)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{j \in \Omega_i} C_{ij} \frac{dt_j}{d\tau} + \sum_{j \in \Omega_i} a_{ij} t_j = b_i \quad (4.4.14)$$

avec $C_{ij} = \int_{\Omega_i} \rho c N_i N_j dV$ qui est la matrice capacité.

On obtient donc un système d'équations différentielles ordinaires. Pour intégrer ce système d'équations différentielles, on utilise le plus souvent une approximation aux différences finies de la dérivée temporelle.

L'équation discrétisée est donc :

$$\sum_j C_{ij} \left(\frac{t_j^+ - t_j^-}{\Delta\tau} \right) + \sum_j a_{ij} t_j = b_i \quad (4.4.15)$$

1. L'analogie d'une méthode explicite est obtenu en estimant le deuxième terme et le terme indépendant au début du pas de temps c'est-à-dire :

$$\sum_j C_{ij} \left(\frac{t_j^+ - t_j^-}{\Delta\tau} \right) + \sum_j a_{ij}^- t_j^- = b_i^- \quad (4.4.16)$$

$$\sum_j C_{ij} t_j^+ = b_i^- \Delta\tau - \sum_j (a_{ij}^- \Delta\tau - C_{ij}) t_j^- \quad (4.4.17)$$

Contrairement aux méthodes aux volumes finis ou aux différences finies, il est nécessaire de résoudre un système d'équations algébriques pour obtenir les valeurs des températures à la fin du pas de temps. Cela est dû au fait que les températures de tous les noeuds appartenant à Ω_i interviennent dans l'équation nodale.

On retrouve le schéma explicite en diagonalisant la matrice des coefficients des températures à la fin du pas de temps. La méthode utilisée ("mass lumping") consiste à remplacer le terme $\sum_j C_{ij} \left(\frac{t_j^+ - t_j^-}{\Delta\tau} \right)$ par l'approximation $(\sum_{j \in \Omega_i} C_{ij}) \left(\frac{t_j^+ - t_j^-}{\Delta\tau} \right)$. Avec ou sans diagonalisation, cette méthode devient instable pour des pas de temps trop élevés. On préfère donc généralement utiliser des méthodes implicites.

2. Une méthode implicite "pure" est obtenue en approximant les flux à la fin du pas de temps, c'est-à-dire en adoptant :

$$\sum_j C_{ij} \left(\frac{t_j^+ - t_j^-}{\Delta\tau} \right) + \sum_j a_{ij}^+ t_j^+ = b_i^+ \quad (4.4.18)$$

Cette méthode est inconditionnellement stable.

3. On peut généraliser les deux méthodes précédentes en pondérant les deux expressions précédentes. On obtient alors :

$$\sum_j C_{ij} \left(\frac{t_j^+ - t_j^-}{\Delta\tau} \right) + \theta \left(\sum_j a_{ij}^+ t_j^+ \right) + (1-\theta) \left(\sum_j a_{ij}^- t_j^- \right) = \theta b_i^+ + (1-\theta) b_i^- \quad (4.4.19)$$

4.5 Assemblage du système d'équations nodales - Calcul des coefficients

Pour effectuer le calcul des coefficients des équations nodales et l'écriture du système d'équations par "assemblage" des contributions des différents éléments, les différentes intégrales peuvent être calculées en sommant les intégrales calculées sur chaque élément, c'est-à-dire par exemple (en 2D) :

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_{\Omega_i} \lambda \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dV + \int_{\Gamma_{i,3}} K N_i N_j dS \\ &= \sum_{e \in \Omega_i} \left[\int_{\Omega_e} \lambda \left(\frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x} + \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial y} \right) dV + \int_{\Gamma_{e,3}} K N_i^{(e)} N_j^{(e)} dS \right] \\ a_{ij} &= \sum_{e \in \Omega_i} (a_{ij}^{(e)}) \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

Le calcul des contributions des différents éléments est effectué à partir des expressions des fonctions de forme exprimées dans le système de coordonnées locales (ξ, η) . Le calcul des différents coefficients des équations nodales nécessite donc

- l'expression des différentes intégrales dans le système ξ, η
- le calcul des valeurs des différentes intégrales

Le premier problème peut s'exprimer comme suit : soit la transformation suivante, définie sur l'élément (e)

$$\begin{cases} x^{(e)} = \sum_i N_i^{(e)}(\xi, \eta) x_i \\ y^{(e)} = \sum_i N_i^{(e)}(\xi, \eta) y_i \end{cases} \quad (4.5.2)$$

Quelles sont les expressions de : C_{ij} , a_{ij} et b_i ?

Les dérivées sont données par

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = J_e^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (4.5.3)$$

avec $J_e =$ Jacobien de la transformation

$$J_e = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i x_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \sum_i y_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \sum_i x_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \sum_i y_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (4.5.4)$$

et

$$J_e^{-1} = \frac{1}{|J_e|} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix} \quad (4.5.5)$$

On a de même, pour l'élément de volume $d\Omega = dx dy = |J_e| d\xi d\eta$. Ces différentes expressions permettent d'exprimer les intégrales dans le système de coordonnées (ξ, η) . On obtient donc après transformation des intégrales de la forme :

$$\int_{\Omega_e} G(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (4.5.6)$$

c'est-à-dire pour les éléments rectangulaires dans $(\xi, \eta) : \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} G(\xi, \eta) d\xi d\eta$ et pour des éléments triangulaires $\int_0^1 \int_0^{1-\eta} G(\xi, \eta) d\xi d\eta$.

L'expression des $G(\xi, \eta)$ peut être très compliquée. Aussi ces intégrales sont elles intégrées numériquement : on remplace les intégrales par des sommes pondérées des valeurs de la fonction à intégrer en un certain nombre de points. Cela donne :

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} G(\xi, \eta) d\xi d\eta \simeq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P_i P_j G(\xi_i, \eta_j) \quad (4.5.7)$$

pour un rectangle, et

$$\int_0^1 \int_0^{1-\eta} G(\xi, \eta) d\xi d\eta \simeq \sum_{i=1}^m P_i G(\xi_i, \eta_i) \quad (4.5.8)$$

pour un triangle. Les facteurs de pondération P_i et les coordonnées des points de définition de la fonction étant choisis pour obtenir une précision maximale.

Ces valeurs sont tabulées : formules de Gauss pour un rectangle, formules de Radon pour les triangles.

La précision de l'estimation des intégrales dépend du nombre de points choisis. Pour ne pas détruire la précision de l'estimation aux éléments finis, on peut montrer que :

- pour des problèmes bidimensionnels et des éléments rectangulaires, 1 point suffit pour les éléments linéaires et 2*2 points suffisent pour des éléments quadratiques
- pour des problèmes bidimensionnels et des éléments triangulaires, 1 point suffit pour les éléments linéaires et 3 points suffisent pour des éléments quadratiques
- pour des problèmes tridimensionnels et des éléments tétraédriques, 1 point suffit pour les éléments linéaires et 4 points suffisent pour les éléments quadratiques
- pour des problèmes tridimensionnels et des éléments hexaédriques, 1 point suffit pour les éléments linéaires et 2*2*2 points suffisent pour des éléments quadratiques

4.6 Discrétisation de l'équation d'advection - diffusion

4.6.1 Forme faible - méthode de Galerkin

La forme faible de l'équation de conservation de l'énergie, avec convection, s'écrit, dans le cas où $W_i = N_i$ (méthode de Galerkin) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} N_i(\rho c \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \tau}) dV + \int_{\Omega_i} \rho \tilde{u} N_i c \vec{\nabla} \tilde{t} dV + \int_{\Omega_i} (\vec{\nabla} N_i) \lambda \vec{\nabla} \tilde{t} dV \\ = \int_{\Gamma_i} N_i(\lambda \frac{\partial \tilde{t}}{\partial n}) dS + \int_{\Omega_i} N_i q dV \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

ce qui, après introduction des conditions aux limites, donne

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} N_i(\rho c \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \tau}) dV + \int_{\Omega_i} N_i(\rho \tilde{u} c \vec{\nabla} \tilde{t}) dV + \int_{\Omega_i} (\vec{\nabla} N_i) \lambda \vec{\nabla} \tilde{t} dV \\ + \int_{\Gamma_{i3}} N_i K \tilde{t} dS = \int_{\Omega_i} N_i q dV - \int_{\Gamma_{i2}} N_i \phi_0 dS + \int_{\Gamma_{i3}} N_i K t_f dS \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

4.6.2 Problèmes stationnaires - Equation nodale ($\rho c = \text{constante}$)

Après introduction de l'expression de \tilde{t} dans la forme faible, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_j \left[\int_{\Omega_i} (\lambda \vec{\nabla} N_i \vec{\nabla} N_j) dV \right] t_j + \sum_j \left[\int_{\Omega_i} (N_i \rho \tilde{u} c \vec{\nabla} N_j) dV \right] t_j \\ + \sum_j \left[\int_{\Gamma_{i3}} K N_i N_j dS \right] t_j = \int_{\Omega_i} N_i q dV - \int_{\Gamma_{i2}} N_i \phi_0 dS + \int_{\Gamma_{i3}} N_i K t_f dS \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

Appliquons cette expression à un cas monodimensionnel simple, avec des éléments linéaires, avec $q = 0$.

Pour un noeud intérieur, on a le schéma de la figure 4.11.

On a pour l'élément

$$\begin{aligned} (i-1) : N_{i-1} = 1 - \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \quad \text{et} \quad N_i = \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \\ (i) : N_i = 1 - \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \quad \text{et} \quad N_{i+1} = \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

$$\int_{\Omega_i} \lambda \vec{\nabla} N_i \vec{\nabla} N_j dV = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \lambda \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dV + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \lambda \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dV \quad (4.6.5)$$

Pour $j = i-1$, on a

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \lambda \left(\frac{1}{x_i - x_{i-1}} \right) \left(\frac{-1}{x_i - x_{i-1}} \right) dV + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \lambda \frac{dN_i}{dx} \cdot 0 \cdot dV = -\frac{\lambda}{x_i - x_{i-1}} \quad (4.6.6)$$

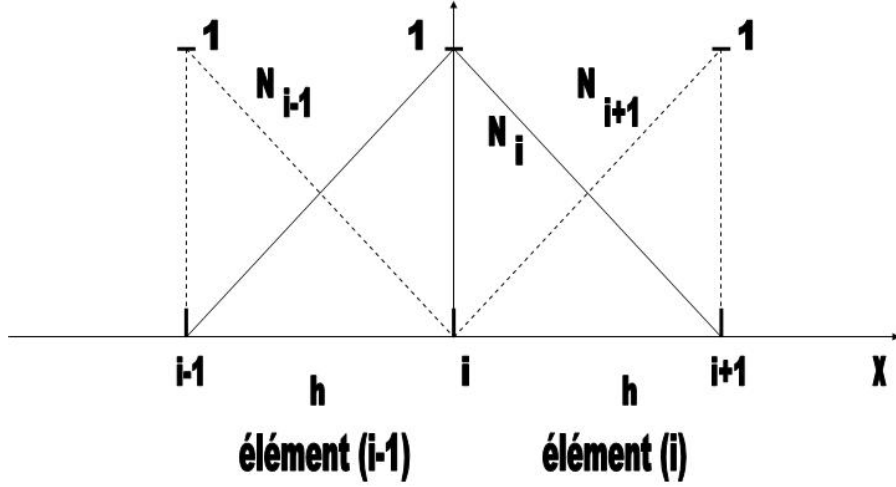


FIG. 4.11 – Fonctions de forme - noeud intérieur

Pour $j = i$, on a

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \lambda \left(\frac{1}{x_i - x_{i-1}} \right) \left(\frac{1}{x_i - x_{i-1}} \right) dV + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \lambda \left(-\frac{1}{x_{i+1} - x_i} \right)^2 dV \quad (4.6.7)$$

$$= \frac{\lambda}{x_i - x_{i-1}} + \frac{\lambda}{x_{i+1} - x_i}$$

et pour $j = i + 1$, on a

$$0 + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \lambda \left(-\frac{1}{x_{i+1} - x_i} \right) \left(\frac{1}{x_{i+1} - x_i} \right) dV = -\frac{\lambda}{x_{i+1} - x_i} \quad (4.6.8)$$

$$\int_{\Omega_i} (N_i \rho \vec{u} c \vec{\nabla} N_j) dV = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho \vec{u} c N_i \frac{dN_j}{dx} dV + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho \vec{u} c N_i \frac{dN_j}{dx} dV \quad (4.6.9)$$

Pour $j = i - 1$, on a

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho \vec{u} c \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \left(-\frac{1}{x_i - x_{i-1}} \right) dV + 0 = -\frac{\rho \vec{u} c (x_i - x_{i-1})^2}{2 (x_i - x_{i-1})^2} = -\frac{\rho \vec{u} c}{2} \quad (4.6.10)$$

Pour $j = i$, on a

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho \vec{u} c \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{1}{x_i - x_{i-1}} dV + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho \vec{u} c \left(1 - \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right) \cdot \left(\frac{-1}{x_{i+1} - x_i} \right) dV$$

$$= \frac{\rho \vec{u} c (x_i - x_{i-1})^2}{2 (x_i - x_{i-1})^2} - \frac{\rho \vec{u} c (x_i - x_{i+1})^2}{2 (x_{i+1} - x_i)^2} = 0 \quad (4.6.11)$$

et pour $j = i + 1$ on a

$$0 + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho \vec{u} c \left(1 - \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right) \cdot \frac{1}{x_{i+1} - x_i} dV = \frac{\rho \vec{u} c}{2} \quad (4.6.12)$$

L'équation du noeud i s'écrit donc ($x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i = \Delta x$) :

$$t_{i-1} \left(-\frac{\lambda}{\Delta x} - \frac{\rho \vec{u} c}{2} \right) + t_i \left(\frac{2\lambda}{\Delta x} \right) + t_{i+1} \left(-\frac{\lambda}{\Delta x} + \frac{\rho \vec{u} c}{2} \right) = 0 \quad (4.6.13)$$

expression identique à celle obtenue par la méthode aux volumes finis avec des profils linéaires entre les noeuds. La valeur de t_i est donc donnée par ($t_{i-1} < t_{i+1}$) :

$$t_i = \frac{t_{i+1} + t_{i-1}}{2} + \frac{\rho u c \Delta x}{\lambda} \frac{t_{i-1} - t_{i+1}}{4} \quad (4.6.14)$$

Si on a $\frac{\rho u c \Delta x}{\lambda} \geq 2$, $t_i \leq t_{i-1}$ et si $\frac{\rho u c \Delta x}{\lambda} \leq -2$, $t_i \geq t_{i+1}$ qui sont des solutions non physiques ! On retrouve donc la limitation des méthodes aux volumes finis : la méthode de Galerkin avec des éléments linéaires conduit à des solutions non physiques si $|Peclet| \geq 2$.

4.6.3 Modification de la méthode de Galerkin - "Upwinding"

Le problème lié à la discrétisation des flux convectifs par la méthode de Galerkin étant analogue au problème rencontré dans les méthodes aux volumes finis, une solution analogue a été recherchée. Cette solution consiste à augmenter le "poids" de la température en amont de l'écoulement dans le calcul des flux.

Pour ce faire, on utilise des fonctions de pondération différentes des fonctions de forme utilisées pour approximer le champ de température. L'expression de ces fonctions de pondération dépendra de la valeur de la vitesse du fluide.

Pour un problème monodimensionnel, l'expression de la forme faible de l'équation de conservation de l'énergie s'écrit, avec $W_i \neq N_i$ (problème stationnaire)

$$\int_{\Omega_i} (\rho \vec{u} c) W_i \vec{\nabla}(\tilde{t}) dV + \int_{\Omega_i} (\vec{\nabla} W_i) \lambda (\vec{\nabla} \tilde{t}) dV = \int_{\Gamma_i} W_i \left(\lambda \frac{\partial \tilde{t}}{\partial n} \right) dS + \int_{\Omega_i} W_i q dV \quad (4.6.15)$$

c'est-à-dire, en supposant que $q = 0$ et $\lambda \frac{\partial \tilde{t}}{\partial n} = 0$ là où la température n'est pas imposée,

$$\int_{\Omega_i} \rho u c W_i \frac{\partial}{\partial x}(\tilde{t}) dV + \int_{\Omega_i} \frac{\partial W_i}{\partial x} \lambda \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x} dV = 0 \quad (4.6.16)$$

c'est-à-dire si $\tilde{t} = \sum_j t_j N_j$

$$\sum_j \left(\int_{\Omega_i} \rho u W_i \frac{\partial N_j}{\partial x} c dV \right) t_j + \sum_j \left(\int_{\Omega_i} \lambda \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dV \right) t_j = 0 \quad (4.6.17)$$

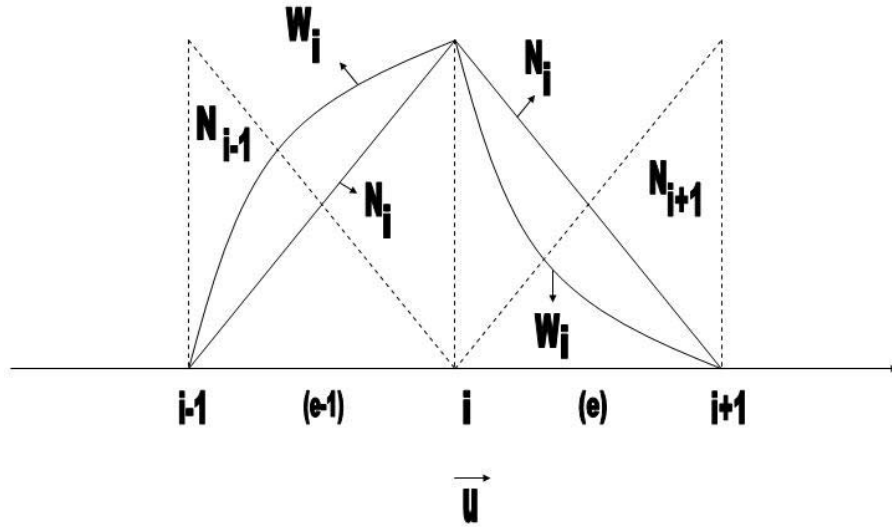


FIG. 4.12 – Fonctions de forme - noeud intérieur - upwinding

Supposons que les N_j soient linéaires, et $u > 0$ (voir figure 4.12) : on augmente le "poids" de la température amont en utilisant pour W_i une fonction de la forme :

$$\begin{cases} W_i^{(e-1)} = N_i^{(e-1)} + \alpha F(x) \\ W_i^{(e)} = N_i^{(e)} - \alpha F(x) \end{cases} \quad (4.6.18)$$

dans lesquelles $F(x)$ est une fonction positive telle que

$$\begin{cases} F(x) = 0 \text{ aux noeuds} \\ \int_0^h F(x) dx = \frac{1}{2}h \text{ pour chaque élément} \end{cases} \quad (4.6.19)$$

avec h la longueur de l'élément et α est positif si u est positif, négatif sinon. On a également $|\alpha| \leq 1$.

On adopte pour $F(x) = -\frac{3}{h^2}x(x-h)$ avec $(0 \leq x \leq h)$. Avec cette expression, on obtient pour le noeud i l'équation suivante :

$$\left(1 + \frac{\rho u c \Delta x}{2\lambda}(\alpha + 1)\right)t_{i-1} - \left(2 + \frac{\rho u c \Delta x}{\lambda}\alpha\right)t_i + \left(1 + \frac{\rho u c \Delta x}{2\lambda}(\alpha - 1)\right)t_{i+1} = 0 \quad (4.6.20)$$

Pour $\alpha = 0$, l'expression est identique à ce que l'on obtient avec un profil linéaire et pour $\alpha = 1$, l'équation est identique à ce qu'on obtient par une méthode aux volumes finis, avec "upwinding".

Les solutions obtenues restent physiques pour les valeurs suivantes de α :

$$\begin{aligned} & \text{Si } Peclet < 2 \text{ il faut } \alpha = 0 \\ & \text{Si } Peclet \geq 2 \text{ il faut } \alpha \geq 1 - \frac{2}{Pe} \end{aligned} \quad (4.6.21)$$

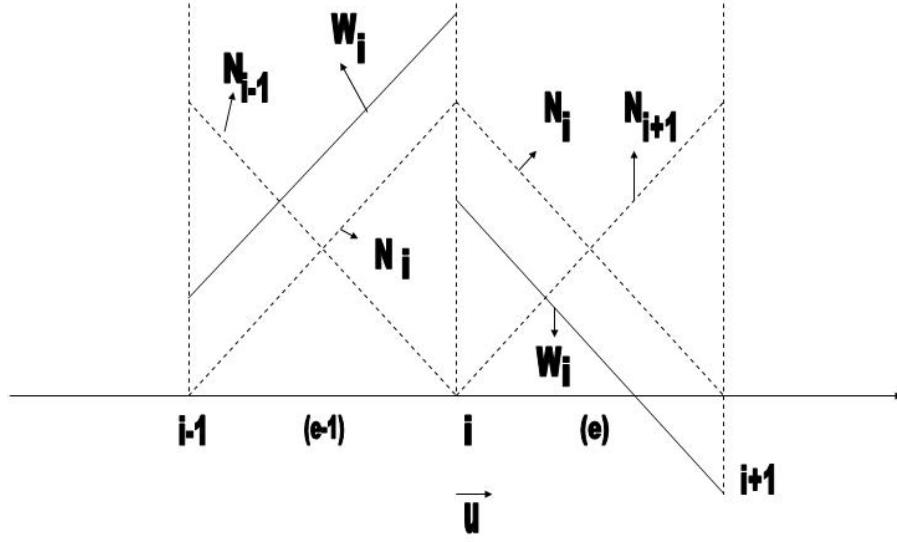


FIG. 4.13 – Fonctions de pondération simplifiées

L'erreur de la solution est nulle pour $\alpha = \coth\left(\frac{\rho u c \Delta x}{2\lambda}\right) - \frac{2\lambda}{\rho u c \Delta x}$.

Pour des éléments de tailles différentes, on utilisera, pour l'élément comprenant les noeuds i et j :

$$W_i = N_i + \alpha_{ij} F(x) \quad (4.6.22)$$

avec $\alpha_{ij} > 0$ si $u_{ij} < 0$ (u_{ij} est la vitesse de i vers j - elle est positive si u est orientée vers j) et $\alpha_{ij} < 0$ si $u_{ij} > 0$.

Le même résultat peut être obtenu par l'utilisation de fonctions de pondération de forme plus simple (voir figure 4.13). Elles sont données par :

$$\begin{cases} W_i^{(e-1)} = N_i^{(e-1)} + \frac{\alpha h_{(e-1)}}{2} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)^{(e-1)} \\ W_i^{(e)} = N_i^{(e)} + \frac{\alpha h_{(e)}}{2} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)^{(e)} \end{cases} \quad (4.6.23)$$

α est positif si u est positif, négatif sinon. On a également $|\alpha| \leq 1$. En introduisant ces expressions dans l'expression des résidus pondérés, on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_j \left(\int_{\Omega_i} \rho u c N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} dV \right) t_j + \sum_j \left(\int_{\Omega_i} \frac{\alpha h}{2} \rho u c \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dV \right) t_j \\ & + \sum_j \left(\int_{\Omega_i} \lambda \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dV \right) t_j + \sum_j \left(\int_{\Omega_i} \frac{\alpha h}{2} \lambda \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial N_j}{\partial x} dV \right) t_j = 0 \end{aligned} \quad (4.6.24)$$

avec le dernier terme du membre de gauche qui s'annule car la fonction N_i est linéaire ($\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} = 0$).

Cette relation peut également s'écrire :

$$\sum_j \left(\int_{\Omega_i} \rho c N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} dV \right) t_j + \sum_j \left(\int_{\Omega_i} \left(\lambda + \frac{\alpha h}{2} \rho c \right) \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dV \right) t_j = 0 \quad (4.6.25)$$

Cette expression est identique à celle que l'on obtiendrait en appliquant la méthode de Galerkin à la discrétisation de l'équation différentielle suivante :

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(\lambda + \lambda^*) \frac{\partial t}{\partial x} \right] \quad (4.6.26)$$

avec $\lambda^* = \frac{\alpha h}{2} \rho c$ qui représente la "diffusion artificielle" (toujours positive).

Le "coefficient de diffusion artificielle" dépend de la vitesse du fluide et de la taille des éléments et tend vers zéro en même temps que celle-ci. L'équation différentielle tend donc vers l'équation initiale lorsque la taille des éléments diminue.

Cette méthode a été étendue à des éléments bidimensionnels en utilisant un tenseur de diffusion artificielle à la place de la diffusion scalaire utilisée dans le cas monodimensionnel. La fonction de pondération utilisée dans ce cas peut s'écrire :

$$W_i = N_i + \left(\frac{\alpha h}{2} \frac{1}{|\vec{u}|} \right) \vec{u} \vec{\nabla} N_i \quad (4.6.27)$$

avec h, la "longueur" de l'élément, donnée par :

$$h = \frac{1}{|\vec{u}|} (|u| \Delta x - |v| \Delta y) \quad (4.6.28)$$

pour des éléments rectangulaires.

L'application de ces méthodes "d'upwinding" conduit finalement à un système d'équations nodales de la forme :

$$\sum_{j \in \Omega_i} a_{ij} t_j = b_i \quad (4.6.29)$$

avec

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_{\Omega_i} \lambda \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dV \\ &+ \int_{\Gamma_i} \rho c W_i \left(u \frac{\partial N_j}{\partial x} + v \frac{\partial N_j}{\partial y} + w \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dV + \int_{\Gamma_{i3}} K N_i N_j dS \\ b_i &= \int_{\Omega_i} N_i q dV - \int_{\Gamma_{i2}} N_i \phi_0 dS + \int_{\Gamma_{i3}} N_i K t_f dS \end{aligned} \quad (4.6.30)$$

4.7 Solution du système d'équations nodales

4.7.1 Structure et propriétés du système $[A][t]=[b]$

1. Tout comme les systèmes d'équations résultant d'une discrétisation aux volumes finis, le système d'équations nodales

- comporte un nombre important d'équations
 - a une matrice des coefficients $[A]$ très lacunaire (nombreux zéros par ligne)
 - a une matrice $[A]$ à diagonale dominante
2. Contrairement aux méthodes aux volumes finis, le nombre de coefficients non nuls, par ligne de $[A]$ est généralement variable, parce que le maillage est généralement non structuré. Ce nombre dépend du type d'élément utilisé.
 3. Pour les problèmes de conductibilité thermique, la matrice $[A]$ est symétrique. En convection, l'"upwinding" ($W_i \neq N_i$) conduit à une matrice non symétrique.

4.7.2 Méthodes itératives utilisées

La structure du système d'équations nodales permet l'utilisation de méthodes itératives par point (de type Gauss-Seidel) mais exclut généralement l'utilisation de méthodes itératives par ligne.

La convergence de la méthode de Gauss-Seidel se dégradant très rapidement lorsque le nombre de noeuds augmente, elle est rarement utilisée en pratique.

4.7.3 Méthodes directes

Les méthodes directes utilisées pour résoudre le système d'équations nodales dérivent de l'algorithme de Gauss. Il s'agit de méthodes spécialisées qui tiennent compte de la structure bandée de la matrice ainsi que de sa symétrie éventuelle (cas de la conduction).

Si l'algorithme utilise la structure bandée de la matrice, on veillera à numéroter les noeuds de façon à minimiser la largeur de bande. Si la différence maximale entre les numéros des noeuds d'un même élément est $b - 1$, la demi-largeur de bande sera égale à b . Des algorithmes existent qui permettent la numérotation automatique des noeuds de façon à minimiser la largeur de bande.

Chapitre 5

Application aux problèmes de convection

5.1 Convection forcée laminaire - équations

Dans les développements de ce chapitre, nous faisons l'hypothèse d'un fluide incompressible et nous supposons que les propriétés physiques sont constantes. Il s'agit de résoudre les équations de

- conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = 0 \quad \text{car incompressible} \quad (5.1.1)$$

- conservation de la quantité de mouvement

- en x

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial \tau} + \vec{\nabla}(\rho u \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \vec{\nabla}(\mu \vec{\nabla} u) + S_{u,\mu} \quad (5.1.2)$$

avec $S_{u,\mu} = \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu \frac{\partial w}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial x}(\frac{2}{3}\mu \vec{\nabla} \vec{v}) = 0$ (à cause de l'équation de continuité)

- en y

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial \tau} + \vec{\nabla}(\rho v \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \vec{\nabla}(\mu \vec{\nabla} v) + S_{v,\mu} \quad (5.1.3)$$

avec $S_{v,\mu} = 0$

- en z

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial \tau} + \vec{\nabla}(\rho w \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \vec{\nabla}(\mu \vec{\nabla} w) + S_{w,\mu} \quad (5.1.4)$$

avec $S_{w,\mu} = 0$

- conservation de l'énergie

$$\frac{\partial(\rho c_p t)}{\partial \tau} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v} c_p t) = \vec{\nabla}(\lambda \vec{\nabla} t) + q \quad (5.1.5)$$

TAB. 5.1 – Equations de conservation

Principe	ϕ	ϕ^*	Γ_ϕ	\dot{S}_ϕ
Masse	1	-	-	-
Qté de mvt /x	u	u	μ	$-\frac{\partial p}{\partial x} + \dot{S}_u$
Qté de mvt /y	v	v	μ	$-\frac{\partial p}{\partial y} + \dot{S}_v$
Energie	h	T	k	\dot{S}_h
Energie	h	h	$\frac{k}{c}$	\dot{S}_h
Energie (c constante)	cT	T	k	\dot{S}_h
Energie (c constante)	T	T	$\frac{k}{c}$	$\frac{\dot{S}_h}{c}$

Toutes ces équations de conservation (5.1.1, 5.1.2, 5.1.3, 5.1.4 et 5.1.5) ont une forme commune, qui correspond à l'équation d'advection - diffusion qui dans le cas bidimensionnel stationnaire peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \phi) = \frac{\partial}{\partial x}(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi^*}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi^*}{\partial y}) + \dot{S}_\phi \quad (5.1.6)$$

où ϕ représente la quantité scalaire conservée. Le membre de gauche de l'équation 5.1.6 représente le transport de ϕ dû à la convection et le membre de droite exprime le transfert de ϕ dû à la diffusion et aux sources internes. Celui-ci fait intervenir un potentiel ϕ^* qui peut être différent de ϕ . Nous pouvons mettre cette équation sous la forme générale :

$$\vec{\nabla} \vec{J}_\phi = \dot{S}_\phi \quad (5.1.7)$$

où \dot{S}_ϕ est le terme source et \vec{J}_ϕ , le flux d'advection - diffusion combiné de la variable scalaire dépendante :

$$\vec{J}_\phi = \vec{J}_c + \vec{J}_d = \rho \vec{v} \phi - \Gamma_\phi \vec{\nabla} \phi^* \quad (5.1.8)$$

En utilisant cette équation d'advection - diffusion, les équations de conservation (5.1.1, 5.1.2, 5.1.3 et 5.1.5) peuvent alors être obtenues à l'aide du tableau 5.1.

Pour l'équation de conservation de l'énergie, les conditions aux limites peuvent être de mêmes types que pour la conductibilité, c'est-à-dire :

- sur Γ_1 : $t=t_0$ fixée
- sur Γ_2 : $-\lambda \frac{\partial t}{\partial n} = \phi_0$ fixé
- sur Γ_3 : $-\lambda \frac{\partial t}{\partial n} = K_f(t - t_f)$

Pour les équations de conservation de quantité de mouvement, on peut fixer :

- soit u, v et w (vitesse imposée) (Ex. : paroi)
- soit v_n (vitesse normale à la limite) et $\frac{\partial v_t}{\partial n} = 0$ (gradient de vitesse tangentielle) (Ex. : axe de symétrie)

- soit $\frac{\partial v_n}{\partial n}$ et $\frac{\partial v_t}{\partial n}$
- soit v_t et $\frac{\partial v_n}{\partial n} = 0$ (Ex. : écoulement développé)

En fait, les conditions aux limites en t et en vitesse ne sont pas indépendantes et les conditions physiques possibles sont les suivantes :

- section d'entrée de l'écoulement : u, v, w, t connus
- à la paroi : u, v, w=0 et t ou $\frac{\partial t}{\partial n}$ imposés
- section de sortie : généralement, on fixe $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial t}{\partial n} = 0$ et on fixe généralement p
- axe ou plan de symétrie : $v_n = 0$ et $\frac{\partial v_t}{\partial n} = \frac{\partial t}{\partial n} = 0$

5.2 Application de la méthode aux volumes finis

5.2.1 Discrétisation spatiale

En maillage structuré, les caractéristiques du maillage utilisé pour résoudre des problèmes d'écoulement sont les suivantes :

- les maillages ne sont pas identiques pour toutes les variables du champ de vitesse : on parle de maillage décalé
- pour les éléments de volume associés à la température et la pression, on considère la méthode "B"(voir chapitre 3.2.1.)

5.2.2 Discrétisation des équations

Les différentes équations de conservation s'écrivent comme suit (voir figure 5.2) :

- Equation de continuité sur V_P :

$$(\rho u S)_e - (\rho u S)_w + (\rho v S)_n - (\rho v S)_s = 0 \quad (5.2.1)$$

- Equation de conservation de la quantité de mouvement
 - ρu sur le volume associé à u_e

$$\frac{d(\rho u V_e)}{d\tau} + \sum_j K_{ej}^u S_{ej}^u (u_e - u_j) = (p_P - p_E) S_e \quad (5.2.2)$$

c'est-à-dire après discrétisation temporelle

$$a_e^u u_e = \sum_{nb} a_{nb}^u u_{nb} + (p_P - p_E) S_e + b_e^u \quad (5.2.3)$$

- ρv sur le volume associé à v_n

$$a_n^v v_n = \sum_{nb} a_{nb}^v v_{nb} + (p_P - p_N) S_n + b_n^v \quad (5.2.4)$$

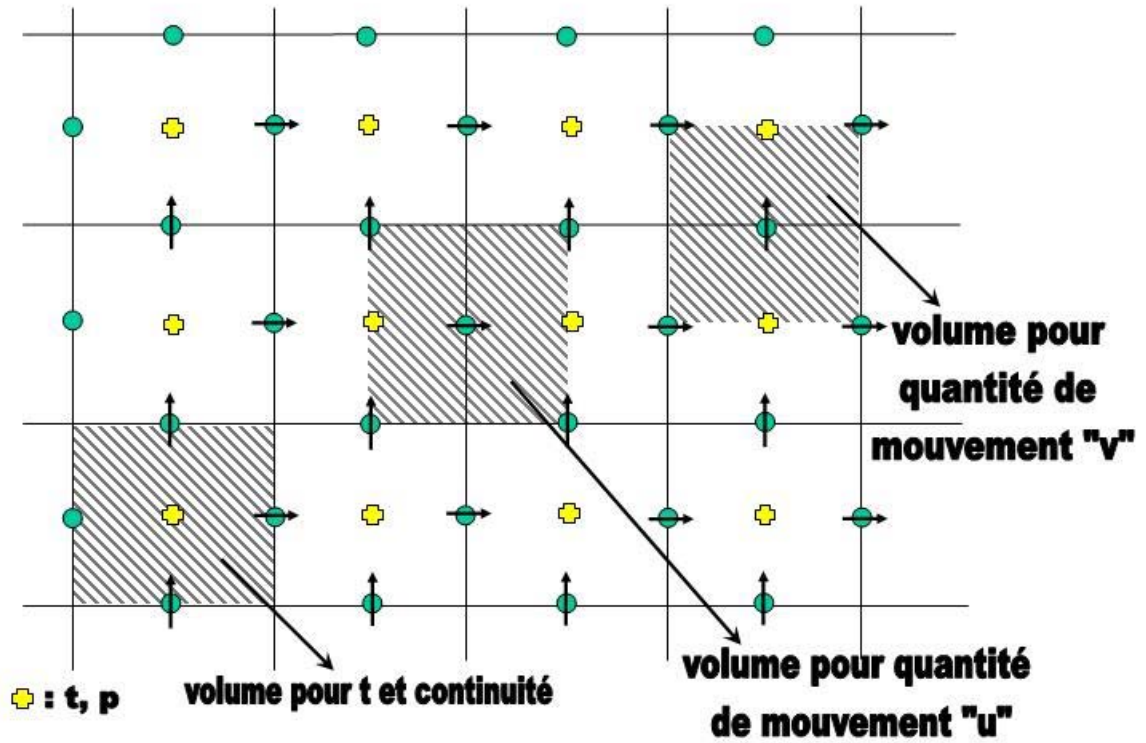


FIG. 5.1 – Description des maillages décalés

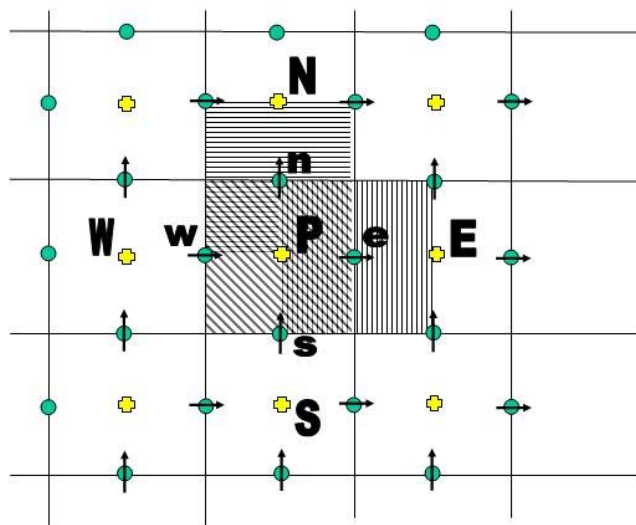


FIG. 5.2 – Volumes de contrôle pour l'équation du noeud P

- Equation de conservation de l'énergie sur l'élément de volume V_P

$$a_P^t t_P = \sum_{nb} a_{nb}^t t_{nb} + b_P^t \quad (5.2.5)$$

On obtient donc 4 (5 en tridimensionnel) systèmes d'équations nodales.

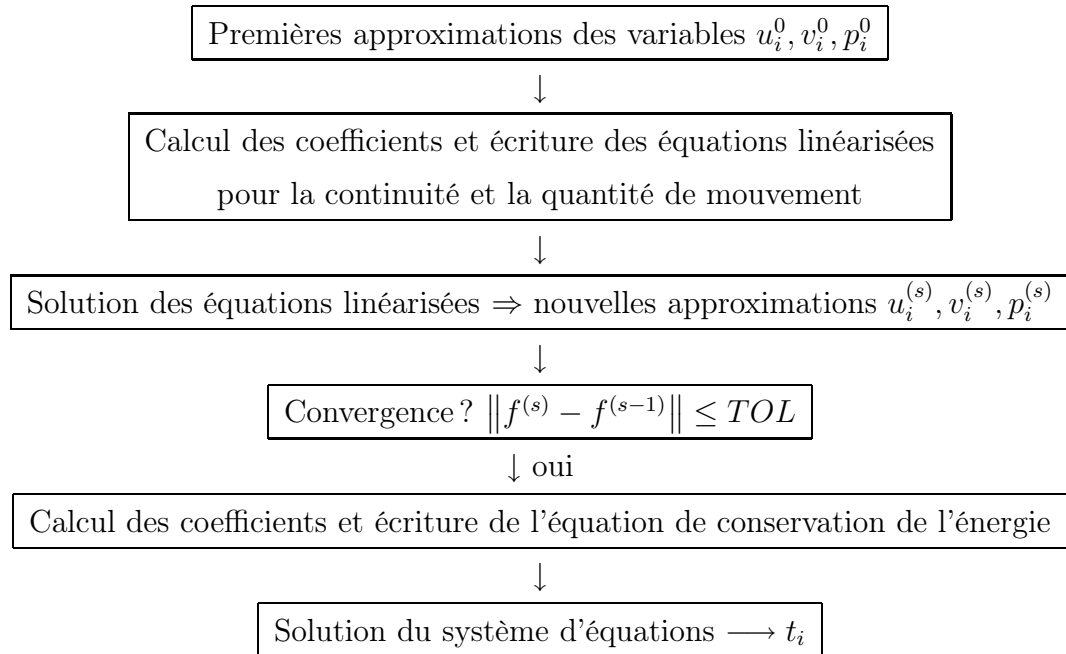
Ces systèmes sont **couplés** :

- la pression intervient dans les équations de conservation de la quantité de mouvement : couplage $p \leftrightarrow u, v$
- la vitesse intervient dans le calcul des coefficients de l'équation de l'énergie : couplage $u, v \leftrightarrow t$ (en l'absence de convection naturelle et pour des propriétés physiques constantes, le couplage est dans un seul sens : il faut connaître le champ de vitesse pour calculer le champ de température mais pas l'inverse)

De plus, les équations de conservation des quantités de mouvement sont non linéaires, les coefficients dépendent des vitesses. On a donc à résoudre 4 (ou 5) systèmes d'équations algébriques non linéaires couplés.

5.2.3 Solution des équations nodales - Linéarisation

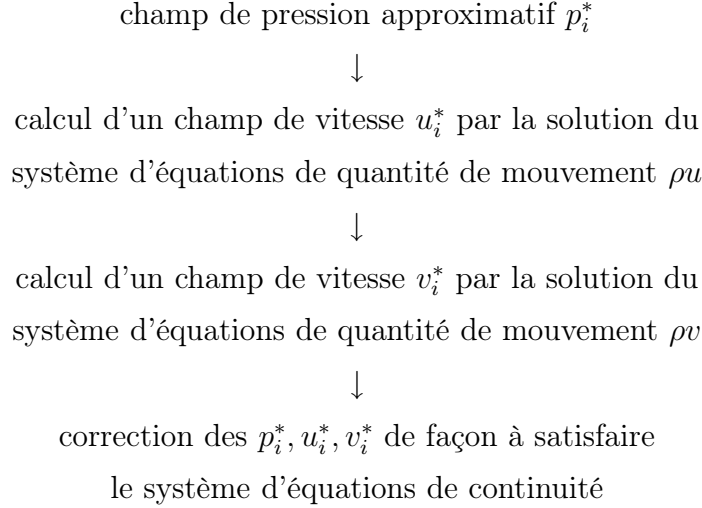
Les équations étant non linéaires, leur solution nécessite une méthode itérative dont l'algorithme global est le suivant :



Si la convergence de la solution des équations pour u , v et p n'est pas assurée, on applique la sous-relaxation à ces trois variables et on itère en recalculant les coefficients et en réécrivant les équations linéarisées pour la continuité et la conservation de la quantité de mouvement.

5.2.4 Solution des équations linéarisées - Algorithme SIMPLE

Il reste à résoudre 3 (ou 4) systèmes d'équations linéaires couplés. Une solution consisterait à rassembler ces 3 systèmes dans un seul gros système et à le résoudre par une méthode directe. Cette solution est trop coûteuse en temps de calcul. On recourt donc en pratique à des "méthodes itératives ségréguées" dont le principe est le suivant :



On résoud donc successivement les différents systèmes d'équations. Plusieurs algorithmes existent qui diffèrent surtout par la façon de corriger les p_i^*, u_i^*, v_i^* de façon à satisfaire la continuité. SIMPLE " **S**emi **I**mplicit **M**ethod for **P**ressure **L**inked **E**quations " est le plus ancien de ceux-ci. Nous allons l'examiner en détails.

Les valeurs u_i^* et v_i^* ne respectent pas l'équation de continuité. Elles doivent être corrigées, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
 u_i &= u_i^* + u'_i \\
 v_i &= v_i^* + v'_i
 \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

Ces corrections u'_i et v'_i doivent correspondre à un nouveau champ de pression p_i :

$$p_i = p_i^* + p'_i \tag{5.2.7}$$

Ces corrections sont calculées à partir des équations de continuité et de quantité de mouvement. On a

$$a_e^u u_e = \sum_{nb} a_{nb}^u u_{nb} + b_e^u + S_e(p_P - p_E) \tag{5.2.8}$$

et

$$a_e^u u_e^* = \sum_{nb} a_{nb}^u u_{nb}^* + b_e^u + S_e(p_P^* - p_E^*) \tag{5.2.9}$$

En soustrayant, on obtient

$$a_e^u u'_e = \sum_{nb} a_{nb}^u u'_{nb} + S_e(p'_P - p'_E) \quad (5.2.10)$$

et des expressions analogues pour v'_i .

Dans SIMPLE, on néglige le terme $\sum a_{nb}^u u'_{nb}$ ce qui conduit à

$$a_e^u u'_e = S_e(p'_P - p'_E) \quad (5.2.11)$$

et

$$u_e = u_e^* + d_e^u(p'_P - p'_E) \quad (5.2.12)$$

avec $d_e^u = \frac{S_e}{a_e^u}$ et des expressions analogues pour u_w, v_n, v_s .

En substituant dans l'équation de continuité, on obtient finalement :

$$a_P^p p'_P = a_E^p p'_E + a_W^p p'_W + a_N^p p'_N + a_S^p p'_S + b_P^p \quad (5.2.13)$$

c'est-à-dire :

$$a_P^p = \sum_{nb} a_{nb}^p p'_{nb} + b_P^p \quad (5.2.14)$$

avec

$$\begin{cases} a_E^p = (\rho S)_e d_e^u \\ a_P^p = \sum_{nb} a_{nb}^p \\ b_P^p = (\rho u^* S)_w - (\rho u^* S)_e + (\rho v^* S)_s - (\rho v^* S)_n \end{cases} \quad (5.2.15)$$

La solution de ce système permet le calcul des p'_i ce qui permet de corriger les vitesses u_i^* et v_i^* .

Pour les pressions, le terme négligé entraîne des corrections trop élevées, on ne corrige donc que partiellement la pression par :

$$p_P = p_P^* + \alpha_P p'_P \quad (5.2.16)$$

avec $\alpha < 1$ (≈ 0.8).

L'algorithme SIMPLE est donc le suivant :

$p_i^* = p_i^{s-1}$ <p>Solution de la quantité de mouvement suivant $u \Rightarrow u_i^*$ Solution de la quantité de mouvement suivant $v \Rightarrow v_i^*$ Ecriture de l'équation en p' Solution du système d'équations en $p' \Rightarrow p'_i$ Corrections $\begin{cases} u_i^s = u_i^* + d_i^u(\Delta p')_{i,u} \\ v_i^s = v_i^* + d_i^v(\Delta p')_{i,v} \\ p_i^s = p_i^* + \alpha_P p'_i \end{cases} \quad (5.2.17)$</p>
--

5.3 Convection naturelle

En convection naturelle, l'écoulement est dû aux différences de densité du fluide dues aux différences de température, dans un champ de force à distance, en particulier le champ de gravitation. Le champ de vitesse est donc dépendant du champ de température et les deux champs doivent être déterminés simultanément (couplage bidirectionnel $(u, v) \leftrightarrow t$).

La masse volumique ne peut plus être considérée comme constante et les équations doivent tenir compte de l'existence du champ de force à distance. Lorsque les différences de température sont faibles, on peut utiliser l'approximation de Boussinesq :

- la variation de ρ est supposée linéaire autour d'une valeur de référence t_0 :

$$\rho = \rho_0(1 - \beta(t - t_0))$$

avec le coefficient de dilatation volumique

$$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_p$$

- on néglige la variation de ρ avec la température dans les équations sauf dans le terme "moteur" des forces d'Archimède.

Cette approximation est valable si

$$\beta(t - t_0) \ll 1$$

Avec cette hypothèse, les équations qui régissent la convection naturelle s'écrivent (y = direction de la pesanteur) :

- Conservation de la masse

$$\vec{\nabla}(\rho_0 \vec{v}) = 0 \quad (5.3.1)$$

- Conservation de la quantité de mouvement

- en x :

$$\frac{\partial(\rho_0 u)}{\partial \tau} + \vec{\nabla}(\rho_0 u \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \vec{\nabla}(\mu \nabla u) \quad (5.3.2)$$

- en y :

$$\frac{\partial(\rho_0 v)}{\partial \tau} + \vec{\nabla}(\rho_0 v \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho_0(1 - \beta(t - t_0))g + \vec{\nabla}(\mu \nabla v) \quad (5.3.3)$$

c'est-à-dire :

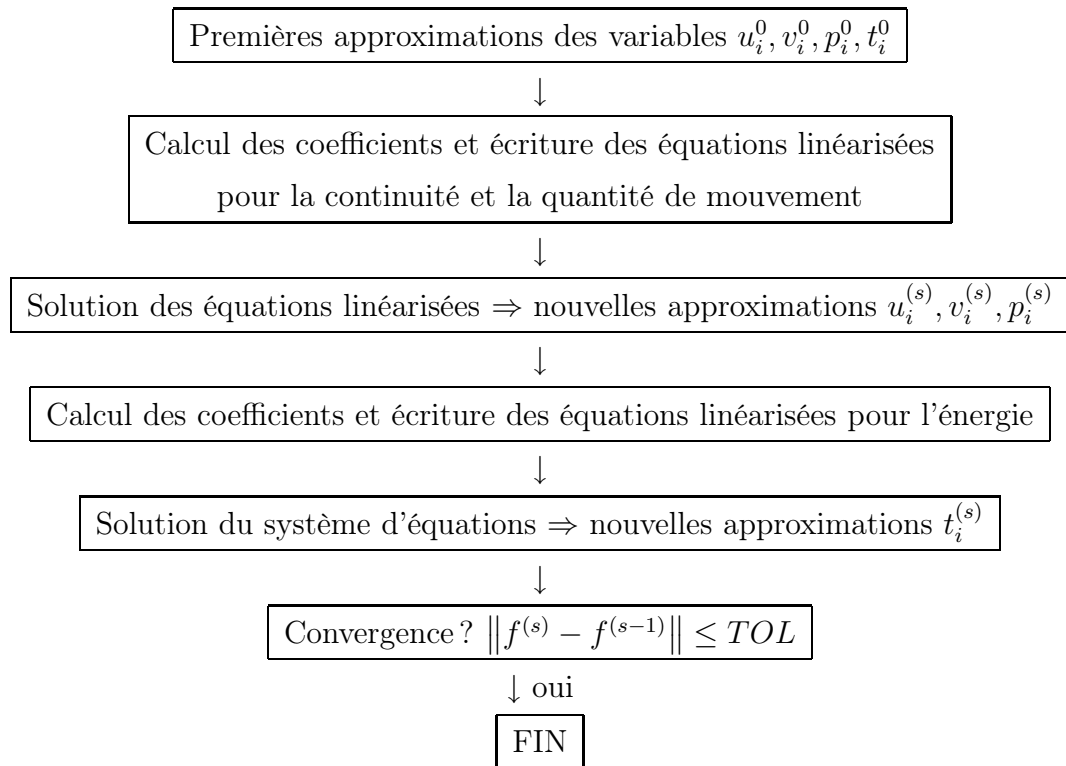
$$\frac{\partial(\rho_0 v)}{\partial \tau} + \vec{\nabla}(\rho_0 v \vec{v}) = -\frac{\partial}{\partial y}(p + \rho_0 g y) + \rho_0 g \beta(t - t_0) + \vec{\nabla}(\mu \nabla v) \quad (5.3.4)$$

– Conservation de l'énergie

$$\frac{\partial(\rho_0 c_p t)}{\partial \tau} + \vec{\nabla}(\rho_0 \vec{v} c_p t) = \vec{\nabla}(\lambda \vec{\nabla} t) + q \quad (5.3.5)$$

Le terme $\rho_0 g \beta(t - t_0)$ représente le terme d'Archimède, cause du mouvement. C'est par ce terme que les équations du mouvement et les équations de conservation de l'énergie sont couplées.

La résolution numérique de ces équations est effectuée à l'aide des mêmes algorithmes que ceux utilisés pour la convection forcée laminaire à une modification près : l'équation de l'énergie doit être linéarisée en même temps que l'équation du mouvement et résolue simultanément. L'algorithme global de la méthode itérative de résolution des équations nodales non-linéaires est donc le suivant :



Si la convergence de la solution des équations pour u , v , p et t n'est pas assurée, on applique la sous-relaxation à ces quatre variables et on itère en recalculant les coefficients et en réécrivant les équations linéarisées pour la continuité et la conservation de la quantité de mouvement.

Le couplage $(u, v) \leftrightarrow t$ rend généralement la convergence plus lente qu'en convection forcée.

5.4 Convection forcée turbulente

L'écoulement turbulent est caractérisé par des fluctuations très rapides de toutes les grandeurs (vitesse, pression, température). L'écoulement instantané peut toujours être calculé par les équations de Navier-Stokes, valables en régime laminaire. En pratique cependant, ce calcul est quasiment impossible : il nécessite des pas de temps et d'espace extrêmement petits et conduit à un volume de calculs à ce point important qu'aucun ordinateur actuel ne permet le calcul d'écoulements de portée pratique dans un temps raisonnable. De plus, même s'il était possible, ce calcul conduirait à des résultats de faible portée pratique. En effet, ce qui intéresse l'ingénieur, c'est l'écoulement moyen.

Celui-ci est obtenu en décomposant toutes les variables instantanées en valeurs moyennes et fluctuations, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u' \\ v &= \bar{v} + v' \\ t &= \bar{t} + t' \\ p &= \bar{p} + p' \end{aligned} \tag{5.4.1}$$

Les équations qui régissent les champs moyens sont obtenues en prenant les moyennes des équations de conservation. Pour un fluide incompressible, aux propriétés physiques constantes, on obtient :

– masse :

$$\frac{\partial(\rho\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial y} = 0$$

– quantité de mouvement :

– en x :

$$\frac{\partial(\rho\bar{u})}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\bar{u}^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\bar{u}\bar{v}) = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial x} + \vec{\nabla}(\mu\vec{\nabla}\bar{u}) - \frac{\partial}{\partial x}(\rho\overline{u'^2}) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho\overline{u'v'})$$

– en y :

$$\frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\bar{v}^2) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\bar{u}\bar{v}) = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial y} + \vec{\nabla}(\mu\vec{\nabla}\bar{v}) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho\overline{v'^2}) - \frac{\partial}{\partial x}(\rho\overline{u'v'})$$

Les deux derniers termes des membres de droite des équations de conservation de la quantité de mouvement sont appelés tensions de Reynolds. Ils représentent les transferts de quantité de mouvement dûs aux fluctuations turbulentes.

– énergie :

$$\frac{\partial(\rho c_p \bar{t})}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\bar{u}c_p\bar{t}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\bar{v}c_p\bar{t}) = \vec{\nabla}(\lambda\vec{\nabla}\bar{t}) + q - \frac{\partial}{\partial x}(\rho c_p \overline{u't'}) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho c_p \overline{v't'})$$

Les deux derniers termes du membre de droite de cette équation représentent le transfert de chaleur dû aux fluctuations turbulentes.

La solution des problèmes de transferts de chaleur convectifs en régime turbulent nécessite donc des expressions pour le calcul des flux turbulents de quantité de mouvement et de chaleur. La recherche de ces expressions est l'objet de la *modélisation de la turbulence*.

5.4.1 Modélisation de la turbulence - Hypothèse de Boussinesq

La modélisation de la turbulence est un thème de recherche en pleine "ébullition". De nombreux modèles existent pour le calcul des tensions de Reynolds et des flux de chaleur turbulents.

En pratique, on utilise généralement la formulation de Boussinesq pour ces flux. Celle-ci postule pour les flux turbulents une expression analogue aux flux "moléculaires" et conduit donc à l'introduction d'une viscosité turbulente et d'une conductivité thermique turbulente, définies par :

- Pour la viscosité turbulente

$$\begin{aligned} -\rho \overline{u'v'} &= \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \\ -\rho \overline{u'^2} &= 2\mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{2}{3}\rho k \\ -\rho \overline{v'^2} &= 2\mu_t \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \frac{2}{3}\rho k \end{aligned}$$

avec l'énergie cinétique massique turbulente

$$k = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$$

De manière générale, on aura :

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}$$

- Pour la conductivité thermique turbulente, on aura :

$$\begin{aligned} -\rho c_p \overline{u't'} &= \lambda_t \frac{\partial \bar{t}}{\partial x} \\ -\rho c_p \overline{v't'} &= \lambda_t \frac{\partial \bar{t}}{\partial y} \end{aligned}$$

L'introduction de ces expressions dans les équations de conservation qui régissent l'écoulement moyen donne :

– Continuité :

$$\frac{\partial(\rho\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial y} = 0$$

– Quantité de mouvement selon x :

$$\frac{\partial(\rho\bar{u})}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\bar{u}^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\bar{u}\bar{v}) = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial x} + \vec{\nabla}(\mu_e\vec{\nabla}\bar{u}) + S_{\bar{u},\mu}$$

avec

$$S_{\bar{u},\mu} = \frac{\partial}{\partial x}(\mu_t \frac{\partial\bar{u}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu_t \frac{\partial\bar{v}}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial x}(\frac{2}{3}\rho k)$$

– Quantité de mouvement selon y :

$$\frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\bar{v}^2) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\bar{u}\bar{v}) = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial y} + \vec{\nabla}(\mu_e\vec{\nabla}\bar{v}) + S_{\bar{v},\mu}$$

– Energie :

$$\frac{\partial(\rho c_p \bar{t})}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\bar{u}c_p \bar{t}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\bar{v}c_p \bar{t}) = \vec{\nabla}(\lambda_e\vec{\nabla}\bar{t}) + q$$

avec les grandeurs effectives : $\mu_e = \mu + \mu_t$ et $\lambda_e = \lambda + \lambda_t$. Ces expressions sont analogues à celles obtenues en laminaire, en remplaçant les propriétés "moléculaires" par des propriétés effectives. Elles peuvent donc être résolues par les mêmes algorithmes. Le problème est la détermination des viscosités et conductivités effectives, dont les valeurs varient d'un point à l'autre du domaine.

5.4.2 Détermination des propriétés turbulentes

L'analyse dimensionnelle montre que :

$$\begin{cases} [\nu_t] = \left[\frac{\mu_t}{\rho} \right] = L^2T^{-1} = L.LT^{-1} \\ [a_t] = \left[\frac{\lambda_t}{\rho c} \right] = L^2T^{-1} = L.LT^{-1} \end{cases} \quad (5.4.2)$$

A partir de ces considérations dimensionnelles et par analogie avec la théorie cinétique, on peut poser :

$$\mu_t = \rho\nu_t l_m \text{ et } \lambda_t = \rho c\nu_t l_t \quad (5.4.3)$$

Dans ces expressions, on trouve ν_t qui est une "vitesse turbulente" (échelle de vitesse), l_m qui est une échelle de longueur mécanique et l_t une échelle de longueur thermique. En divisant, on peut calculer le nombre de Prandtl turbulent :

$$Pr_t = \frac{\nu_t}{a_t} = \frac{l_m}{l_t} \quad (5.4.4)$$

Pour l'échelle de vitesse, on prend $\nu_t = \sqrt{k}$, c'est-à-dire la racine carrée de l'énergie cinétique massique turbulente, ce qui donne donc :

$$\mu_t = \rho\sqrt{k}l_m \text{ et } \lambda_t = \rho c\sqrt{k}l_t \quad (5.4.5)$$

L'énergie cinétique turbulente k est donnée par une équation de conservation. Celle-ci est obtenue à partir des équations de conservation de quantité de mouvement et de l'énergie mécanique. Moyennant quelques simplifications, cette équation s'écrit finalement :

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \bar{u}k) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \bar{v}k) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial y}\right) + P_k - \rho\epsilon \quad (5.4.6)$$

avec la production d'énergie cinétique turbulente (positive) :

$$P_k = \sum_{i,j} -\rho \overline{v'_i v'_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{v}_i) \right) \quad (5.4.7)$$

$$P_k = -\rho \overline{u'^2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) - \rho \overline{u'v'} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \rho \overline{v'^2} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \quad (5.4.8)$$

et la dissipation d'énergie cinétique turbulente (négative) :

$$-\epsilon = -\frac{\mu}{\rho} \left(\sum_{i,j} \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}} \right) \quad (5.4.9)$$

P_k correspond à la production d'énergie cinétique turbulente. Celle-ci est due aux contraintes de cisaillement $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$, $\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}$ et est maximale au voisinage des parois où ces contraintes sont maximales. ϵ correspond à la dissipation de l'énergie cinétique turbulente par l'effet de la viscosité moléculaire du fluide. Du point de vue dimensionnel, on voit que :

$$[\epsilon] = \left[\frac{\partial k}{\partial \tau} \right] = L^2 T^{-3} = L^3 T^{-3} \cdot L^{-1}$$

On peut donc poser

$$\epsilon \doteq \frac{k^{3/2}}{l_m}$$

Le calcul de μ_t et de λ_t nécessite donc la connaissance des valeurs locales des échelles de longueur l_m et l_t . Celles-ci ne sont connues que pour certains écoulements très simples. De manière générale, ces longueurs doivent être déterminées en même temps que l'écoulement.

En pratique, au lieu de chercher une équation pour les échelles de longueur, on préfère travailler à partir de ϵ . On a en effet

$$l_m \doteq \frac{k^{3/2}}{\epsilon}$$

En introduisant cette expression dans l'expression de la viscosité, on obtient :

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon}$$

avec la constante C_μ . L'équation de ϵ peut être obtenue, elle aussi, à partir des équations de conservation de la quantité de mouvement. Moyennant quelques simplifications, elle est mise sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho\epsilon) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\bar{u}\epsilon) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\bar{v}\epsilon) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon}\right)\frac{\partial\epsilon}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon}\right)\frac{\partial\epsilon}{\partial y}\right) + c_{1\epsilon}\frac{\epsilon}{k}P_k - \rho c_{2\epsilon}\frac{\epsilon^2}{k} \quad (5.4.10)$$

On obtient ainsi le modèle (k, ϵ) . Les constantes qui interviennent dans ce modèle ont été déterminées à partir de quelques situations expérimentales. Elles valent :

$$C_\mu = 0.09, \sigma_k \cong 1, \sigma_\epsilon = 1.3, c_{1\epsilon} = 1.4, c_{2\epsilon} = 1.92$$

Quant au coefficient de conductibilité thermique turbulente, il est généralement déterminé à partir du nombre de Prandtl turbulent. Celui-ci est généralement supposé constant. On a donc :

$$\lambda_t = \frac{\mu_t c_p}{Pr_t} \text{ avec } Pr_t \cong 0.9$$

5.4.3 Structure de l'écoulement turbulent près d'une paroi - Profils généralisés

Les équations du modèle (k, ϵ) , telles que décrites ci-dessus, ne sont pas valables dans le voisinage d'une paroi. Le modèle a été modifié de façon à permettre l'intégration jusqu'à la surface d'une paroi. Dans ce cas cependant, comme toutes les grandeurs varient très fort près d'une paroi, l'intégration nécessite une discrétisation très fine du domaine ce qui restreint l'utilisation de ces modèles modifiés à des problèmes simples, académiques.

En pratique, le modèle (k, ϵ) est utilisé au coeur de l'écoulement. On tient compte de la présence de parois par l'utilisation de *profils généralisés*. Si le gradient de pression est négligeable, le profil de vitesse au droit d'une paroi, parallèle à l'axe x par exemple est donné par une équation de la forme :

$$\bar{u} = f(\tau_p, y, \mu, \rho)$$

Sous forme adimensionnelle, on écrira :

$$\frac{\bar{u}}{u_f} = f\left(\frac{yu_f}{\nu}\right) \text{ c\`ad } u^+ = f(y^+)$$

avec la vitesse de frottement $u_f = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}}$ et τ_p la tension tangentielle à la paroi.

L'expérience montre que cette loi est indépendante de la configuration de l'écoulement (tube, plaque plane,...). Elle a la forme reprise sur la figure 5.4 Cette *loi de paroi* comprend trois zones :

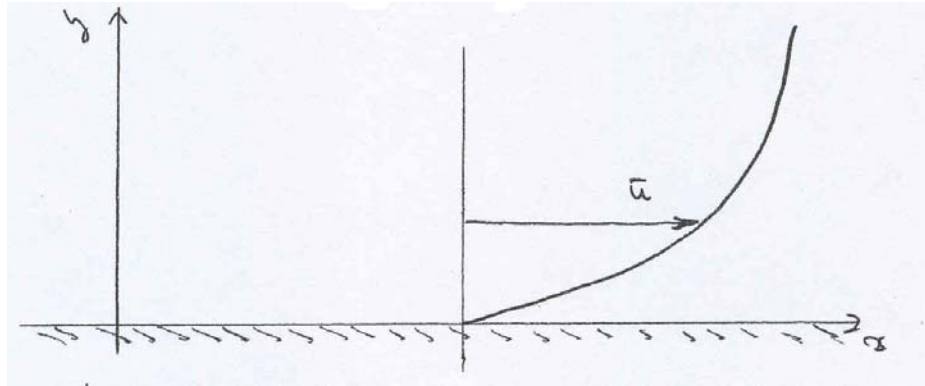


FIG. 5.3 – Profil de vitesse le long d'une paroi

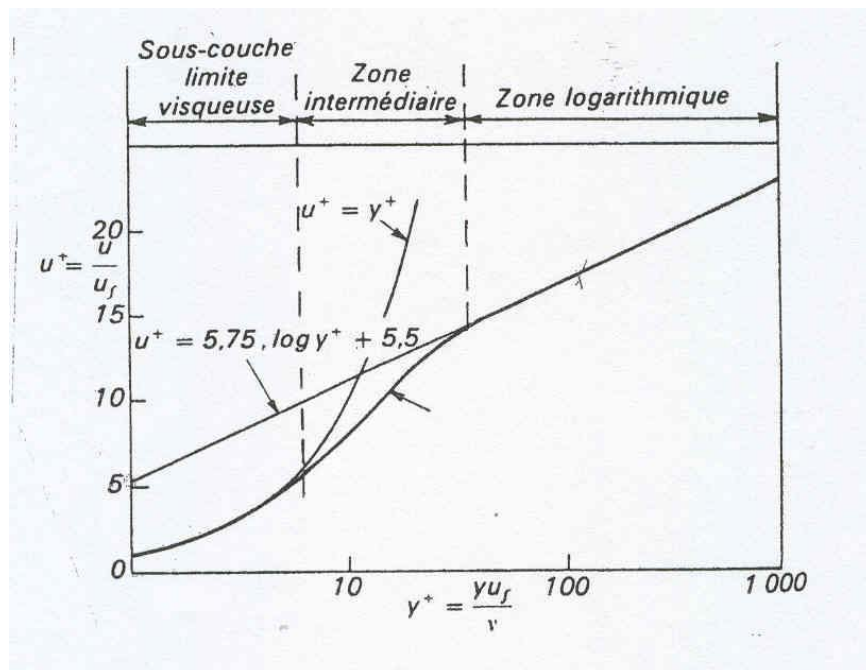


FIG. 5.4 – Loi de paroi

- $0 < \frac{yu_f}{\nu} < 5$: sous-couche limite visqueuse avec $\frac{\bar{u}}{u_f} = \frac{yu_f}{\nu}$
- $5 < \frac{yu_f}{\nu} < 40$: zone intermédiaire
- $40 < \frac{yu_f}{\nu} < qqes\ centaines$: zone logarithmique avec $\frac{\bar{u}}{u_f} = \frac{1}{K} \ln\left(\frac{yu_f}{\nu}\right) + 5.5$ et la constante de von Karmann $K = 0.4$. Dans la zone logarithmique, $l_m \div y$

Le profil de température est donné, de manière analogue, par une équation de la forme :

$$\bar{t} = f(\phi_p, t_p, y, \lambda, \rho c_p, u)$$

Ou sous forme adimensionnelle :

$$\frac{\bar{t} - t_p}{\phi_p / (\rho_p c_p u_f)} = f\left(\frac{yu_f}{a}\right)$$

c'est-à-dire $\overline{\delta T^+} = f(y^{++})$. Cette loi de paroi comprend également trois zones :

- $0 < \frac{yu_f}{a} < 5$: sous-couche limite "conductive" avec $\frac{\bar{t} - t_p}{\phi_p / (\rho_p c_p u_f)} = \frac{yu_f}{a}$
- $5 < \frac{yu_f}{a} < 40$: zone intermédiaire
- $40 < \frac{yu_f}{a} < qqes\ centaines$: zone logarithmique avec $\frac{\bar{t} - t_p}{\phi_p / (\rho_p c_p u_f)} = \frac{1}{K'} \ln\left(\frac{yu_f}{a}\right) + C'$. Dans cette zone, $l_t \div y$ ($K' \cong 0.44$).

Remarques

- D'autres expressions sont parfois utilisées pour les profils généralisés et notamment :

$$\frac{\bar{u}}{u_f} = \frac{1}{K} \ln\left(E \frac{yu_f}{\nu}\right)$$

avec $K = 0.4$ et le facteur E dépend de la rugosité. Il vaut 9 pour une paroi lisse.

- La solution des équations de k et ϵ nécessite des conditions aux limites à l'entrée, à la sortie et sur toutes les autres surfaces. Dans les sections d'entrée, on impose des valeurs de k et ϵ . Dans les sections de sortie, on fixe $\frac{\partial k}{\partial n} = \frac{\partial \epsilon}{\partial n} = 0$. Le long d'un axe de symétrie, on aura $\frac{\partial k}{\partial n} = \frac{\partial \epsilon}{\partial n} = 0$.

5.4.4 Solution numérique des transferts convectifs turbulents

Nous n'envisagerons ici que l'utilisation d'une méthode aux volumes finis. La discrétisation spatiale est gérée comme pour les écoulements laminaires. Les valeurs nodales de k et ϵ (et μ_t , λ_t) sont stockées aux noeuds placés aux centres des éléments de volume. Les différentes équations de conservation, y compris celles du modèle (k, ϵ) sont discrétisées comme en convection laminaire. Un traitement particulier est appliqué aux noeuds associés à des éléments de volume contigus à des limites de type paroi.

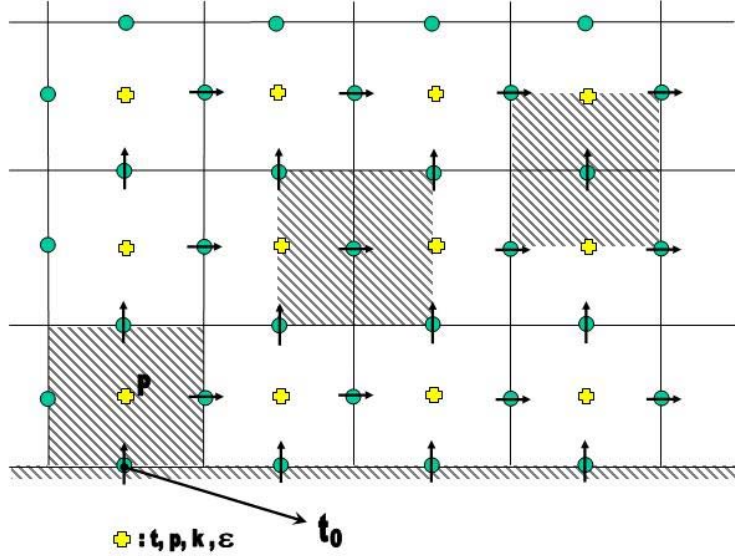


FIG. 5.5 – Discrétisation spatiale

Pour k , on suppose avoir *équilibre local* c'est-à-dire :

$$P = \rho\epsilon$$

c'est-à-dire

$$\mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 = \rho\epsilon$$

$$\rho\epsilon = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\tau_0^2}{\mu_t}$$

Cela donne

$$\tau_0^2 = \rho\epsilon\mu_t = \rho\epsilon C_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon}$$

ou enfin :

$$u_f = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = C_\mu^{1/4} k^{1/2}$$

– Pour u , on impose la valeur de la tension tangentielle à la paroi, donnée par le profil généralisé, c'est-à-dire :

$$\tau_0 = \rho u_f^2 = \rho u_f \cdot \frac{u_f}{u_P} \cdot u_P$$

avec la vitesse au point P, u_P . C'est-à-dire :

$$\tau_0 = \rho C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} \frac{u_P}{\left(\frac{1}{K} \ln \left(\frac{y_P C_\mu^{1/4} k_P^{1/2}}{\nu} \right) + 5.5 \right)}$$

- De même, pour t , on impose la valeur du flux à la paroi par :

$$\phi_0 = \frac{\rho_p c_p C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} (t_P - t_0)}{\left(\frac{1}{K'} \ln \left(\frac{y_P C_\mu^{1/4} k_P^{1/2}}{\nu} \right) + 5.5 \right)}$$

- L'équation de k s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u k) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v k) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\mu + \frac{\mu_e}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\mu + \frac{\mu_e}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right) + P_k - \rho \epsilon$$

Lors de la discrétisation, il faut évaluer, e.a., $-\int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y} \rho \epsilon dy dx$. Dans la couche limite, $\rho \epsilon = P = \tau \frac{\partial u}{\partial y}$ varie fort. On a donc :

$$\int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y} \rho \epsilon dy dx \cong \tau \frac{\bar{u}_P}{y_P} \Delta y \Delta x$$

si la vitesse à la paroi u_{paroi} est nulle.

$$\int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y} \rho \epsilon dy dx \cong \rho u_f^2 \frac{\bar{u}_P}{u_f} \frac{u_f}{y_P} \Delta y \Delta x \cong \frac{\rho u_f^3 \bar{u}_P}{y_P u_f} \Delta y \Delta x$$

Ce qui donne finalement :

$$\int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y} \rho \epsilon dy dx \cong \rho \frac{C_\mu^{3/4} k_P^{3/2}}{y_P} \left(\frac{1}{K'} \ln \left(\frac{y_P C_\mu^{1/4} k_P^{1/2}}{\nu} \right) + 5.5 \right) \Delta y \Delta x$$

k_P est obtenu en résolvant l'équation de k dans laquelle on suppose que $\frac{\partial k}{\partial y} = 0$ à la paroi.

- Pour ϵ , on impose directement la valeur de ϵ_P , à partir du profil généralisé :

$$\epsilon_P = (-\overline{u'v'}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\tau_f}{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = u_f^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

Si on introduit le profil généralisé, cela donne :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{u_f}{K} \frac{1}{\frac{y u_f}{\nu}} \frac{u_f}{\nu} = \frac{u_f}{K y}$$

et donc :

$$\epsilon_P = \frac{u_f^3}{K y} = \frac{C_\mu^{3/4} k_P^{3/2}}{K y_P}$$

Chapitre 6

Le transfert de chaleur par rayonnement

6.1 Rappel de quelques définitions

6.1.1 Emission d'un corps athermane

Considérons (voir figure 6.1) une surface élémentaire ΔS centrée sur un point P à la surface d'un corps solide opaque rayonnant dans l'espace. Soit $\Delta\Phi$ le flux de chaleur (en W) relatif à tous les rayons émis par ΔS dans toutes les directions d'un même côté du plan tangent (soit dans un angle solide 2π). L'émission par unité d'aire autour de P s'appelle *exitance* (on précise parfois "totale" pour rappeler que toutes les longueurs d'ondes émises λ sont considérées). Elle est donc définie par :

$$M = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta S} \text{ (en } W/m^2 \text{)} = f(\text{matériau}, T \text{ en } P)$$

L'exitance est une fonction d'état. Elle considère l'énergie émise pour toutes les longueurs d'onde et toutes les directions d'un même côté du plan tangent.

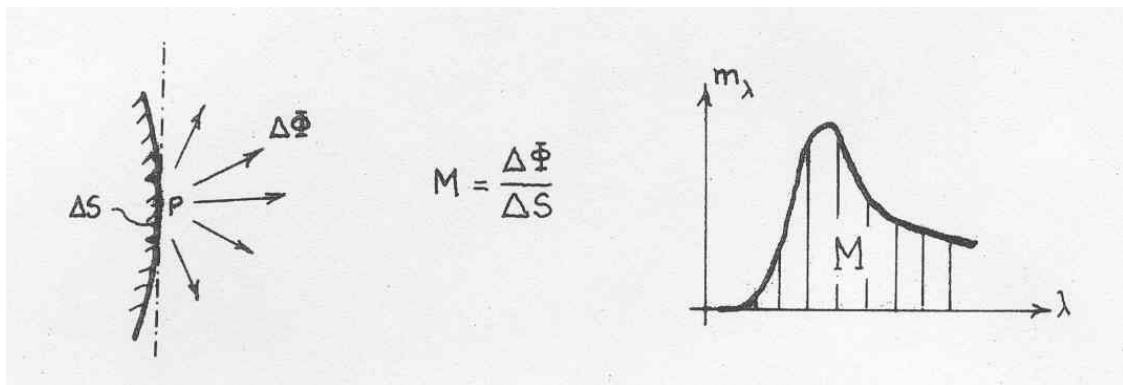


FIG. 6.1 – Exitance

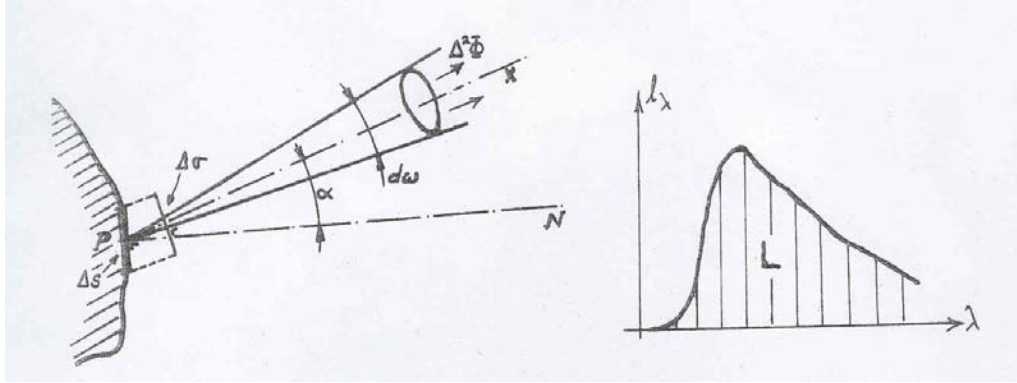


FIG. 6.2 – Luminance

Le flux polychromatique $\Delta\Phi$ peut ensuite être décomposé selon la longueur d'onde λ . Si $\Delta^2\Phi_\lambda$ représente la fraction comprise dans l'intervalle élémentaire $\lambda, \lambda + \Delta\lambda$, la densité spectrale d'exittance ou simplement *exittance spectrale* m_λ est définie par :

$$m_\lambda = \lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ \Delta\lambda \rightarrow 0}} \frac{\Delta^2\Phi_\lambda}{\Delta S \cdot \Delta\lambda} \text{ (en } W/m^3 \text{ ou } W/m^2 \cdot \mu m) = f(\lambda, \text{matériau}, T \text{ en } P)$$

La fonction m_λ fournit le spectre de M (voir figure 6.1).

On définit la *luminance* (totale) du point P dans la direction PN comme le flux par unité d'angle solide et par unité de surface projetée (voir figure 6.2) :

$$L = \lim_{\substack{\Delta\sigma \rightarrow 0 \\ \Delta\omega \rightarrow 0}} \frac{\Delta^2\Phi}{\Delta\sigma \cdot \Delta\omega} \text{ (en } W/m^2 \cdot sr) = f(\alpha, \text{matériau}, T \text{ en } P)$$

La surface projetée vaut : $\Delta\sigma = \Delta S \cdot \cos\alpha$.

Enfin, il est possible de décomposer la luminance selon la longueur d'onde et définir la densité spectrale de luminance ou simplement *luminance spectrale* par :

$$l_\lambda = \lim_{\substack{\Delta\sigma \rightarrow 0 \\ \Delta\lambda \rightarrow 0 \\ \Delta\omega \rightarrow 0}} \frac{\Delta^3\Phi_\lambda}{\Delta\sigma \cdot \Delta\lambda \cdot \Delta\omega} \text{ (en } W/m^2 \cdot \mu m \cdot sr) = f(\lambda, \text{matériau}, T \text{ en } P)$$

pour un corps lambertien.

$$L = \int_0^\infty l_\lambda d\lambda$$

La luminance spectrale est évidemment la grandeur qui contient le plus d'informa-

tion : par intégration, on peut obtenir toutes les autres grandeurs.

$$M = \int_{2\pi} L \cos \alpha d\Omega$$

Si le rayonnement est isotrope, on peut considérer la loi de Lambert :

$$M = \pi L$$

Si le corps est noir, les différentes propriétés deviennent :

$$\begin{cases} M_0 = \sigma T^4 \\ L_0 = \frac{\sigma}{\pi} T^4 \\ l_{0\lambda} = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{c_2/\lambda T} - 1} \end{cases}$$

Dans le cas d'un corps non noir,

$$l_\lambda = \epsilon_\lambda l_{0\lambda}$$

6.1.2 Propagation dans un milieu diathermane

Il faut préalablement définir une grandeur permettant de caractériser l'intensité des rayons passant par un point P donné d'un diathermane. Cette grandeur doit être définie pour toute direction PN . On considère le flux d'énergie $\Delta^2 \Phi$ traversant un élément d'aire $\Delta\sigma$ normal à PN et contenu dans un angle solide $\Delta\omega$ centré sur PN (voir figure 6.3).

On définit la densité de flux énergétique F en un point P dans la direction PN par :

$$F = \lim_{\substack{\Delta\omega \rightarrow 0 \\ \Delta\sigma \rightarrow 0}} \frac{\Delta^2 \Phi}{\Delta\omega \cdot \Delta\sigma} \text{ (en } W/m^2 \cdot sr \text{)}$$

F est l'analogie de l'intensité radiative I . Comme précédemment, on peut procéder à la décomposition selon λ de l'énergie F en définissant la densité spectrale de flux au point P dans la direction PN :

$$f_\lambda = \lim_{\substack{\Delta\sigma \rightarrow 0 \\ \Delta\lambda \rightarrow 0 \\ \Delta\omega \rightarrow 0}} \frac{\Delta^3 \Phi_\lambda}{\Delta\sigma \cdot \Delta\lambda \cdot \Delta\omega} \text{ (en } W/m^2 \cdot \mu m \cdot sr \text{)}$$

avec

$$F = \int_0^\infty f_\lambda \cdot d\lambda$$

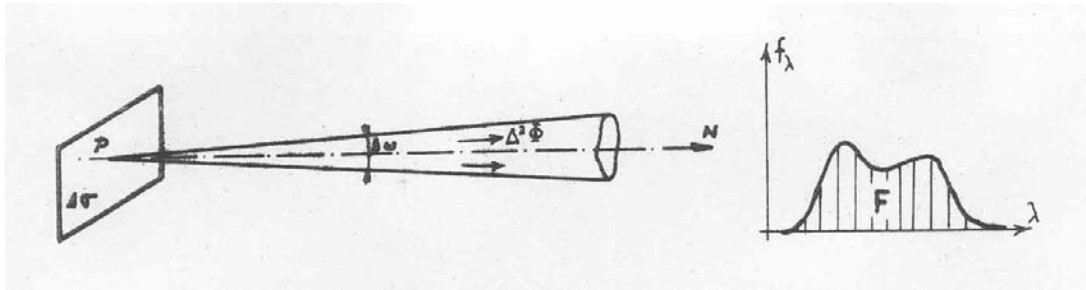


FIG. 6.3 – Propagation

f_λ est l'analogie de l'intensité radiative spectrale I_λ . La densité de flux énergétique F a donc les mêmes dimensions qu'une luminance L . Leur signification physique est cependant essentiellement différente :

- la luminance est une propriété d'un point P d'une surface solide. C'est une fonction d'état car elle dépend uniquement de l'état de la surface considérée. Elle correspond à une direction déterminée dans un angle solide 2π (hémisphère).
- la densité de flux énergétique est une propriété en un point P d'un diathermane. Ce n'est pas une fonction d'état, elle ne dépend pas des conditions au point P mais des corps rayonnants se trouvant autour du point P . Elle correspond à une direction déterminée dans un angle 4π (sphère complète).

Dans un milieu non absorbant et non émetteur (parfait diathermane), f_λ se conserve le long de tout rayon.

$$\frac{df_\lambda}{ds} = 0$$

Par contre, un rayon se déplaçant dans un milieu partiellement diathermane s'affaiblit progressivement par absorption, c'est-à-dire par transformation de l'énergie radiante en chaleur fournie aux molécules situées le long du trajet du rayon. On définit le *facteur d'absorption linéaire du diathermane* par :

$$\frac{df_\lambda}{f_\lambda} = -a_\lambda \cdot dx \quad (a_\lambda \text{ en } m^{-1})$$

et on a donc :

$$\frac{df_\lambda}{ds} = -a_\lambda \cdot f_\lambda$$

6.1.3 Absorption par une surface

Soit un rayon monochromatique d'intensité unitaire ($f_\lambda = 1$) incident sur la surface du corps étudié.

- Une fraction α_λ du rayon est absorbée par la surface, c'est-à-dire transformée en chaleur. α_λ est le *facteur spectral d'absorption*.

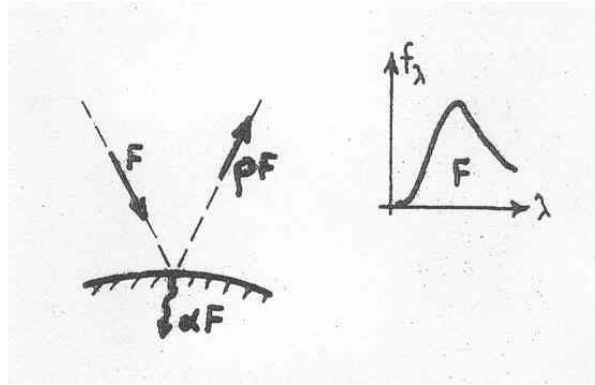


FIG. 6.4 – Absorption

- Une fraction ρ_λ est réfléchi. ρ_λ est le *facteur spectral de réflexion*.
- Une fraction τ_λ est transmise en travers du corps. τ_λ est le *facteur spectral de transmission*.

Le facteur d'absorption global α est défini par :

$$\alpha = \frac{\int_0^\infty \alpha_\lambda \cdot f_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty f_\lambda d\lambda} = \frac{\int_0^\infty \alpha_\lambda \cdot f_\lambda d\lambda}{F}$$

Le facteur d'absorption global α n'est pas une propriété intrinsèque du matériau. Il dépend de la composition spectrale du rayonnement incident. On a également :

$$\alpha_\lambda = \epsilon_\lambda$$

Pour un corps gris,

$$\alpha = \alpha_\lambda = \epsilon_\lambda = \epsilon$$

6.2 Equation de transfert du rayonnement

Tout corps se trouvant à une température supérieure à 0 Kelvin émet un rayonnement thermique, dont l'intensité totale est proportionnelle à la puissance quatrième de la température absolue. Le rayonnement émis par le corps se propage dans un milieu caractérisé par ses propriétés d'émission et d'absorption. Le champ de rayonnement est caractérisé par la valeur de la luminance ou intensité $I(x, y, z, s)$ en tout point (x, y, z) du milieu et dans chaque direction s . De manière générale, la luminance dépend de la longueur d'onde du rayonnement mais elle peut être considérée directement en grandeur totale lorsque le milieu de transmission et les limites du domaine sont gris. Dans ce cas, pour déterminer l'intensité de rayonnement $I(x, y, z, s)$ en tout point d'un domaine, il faut résoudre l'équation de transfert radiatif (E.T.R.) intégral

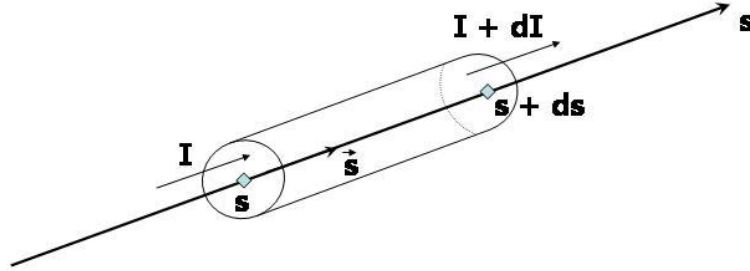


FIG. 6.5 – Bilan d'énergie radiative

- différentielle en tout point de ce domaine. L'E.T.R. exprime la conservation de la luminance énergétique dans une direction et, éventuellement, à une longueur d'onde données (voir figure 6.5). Elle s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{dI(\vec{r}, \vec{s})}{ds} = -(\kappa_a + \kappa_s)I(\vec{r}, \vec{s}) + \kappa_a I_0(T) + \frac{\kappa_s}{4\pi} \int_{4\pi} p(\vec{s}' \rightarrow \vec{s}) I(\vec{r}, \vec{s}') d\Omega' \quad (6.2.1)$$

avec

- I : intensité de rayonnement dans la direction s ($W/m^2 sr$)
- κ_a : coefficient d'absorption du milieu (m^{-1})
- κ_s : coefficient de diffusion du milieu (" scattering " : équivalent d'une réflexion de volume, change la direction des rayons) (m^{-1})
- $I_0(T)$: intensité de rayonnement du corps noir à la température du milieu ($= \frac{\sigma T^4}{\pi}$: loi de Stefan - Boltzmann) ($W/m^2 sr$)
- $p(\vec{s}' \rightarrow \vec{s})$: fonction de phase du transfert d'énergie de la direction d'entrée \vec{s}' à la direction de sortie \vec{s}
- $d\Omega$: angle solide élémentaire autour de la direction de propagation
- s : coordonnée dans la direction de propagation

Le membre de gauche de l'équation 6.2.1 exprime la variation d'intensité I le long de la coordonnée s dans l'angle $d\Omega$. Le premier terme du membre de droite représente la diminution de l'intensité due à l'absorption et à la diffusion du milieu. Le second terme exprime l'augmentation de l'intensité I due à l'émission du milieu et le dernier

terme représente la variation de I due à la diffusion interne. Nous considérerons ici que le milieu étudié n'est pas diffusant ; c'est d'ailleurs pratiquement le cas pour les problèmes que l'on est amené à traiter quand on s'intéresse à la combustion du gaz naturel par exemple (fours de cuisson céramique, fours de recuit continu en sidérurgie,...).

Dans le cas d'un milieu gris non diffusant, l'équation de transfert radiatif s'écrit alors :

$$\frac{dI}{ds} = -\kappa I + \kappa I_0(T) = -\kappa I + \kappa \frac{\sigma T^4}{\pi} \quad (6.2.2)$$

De manière générale, l'équation 6.2.2 peut se mettre sous la forme suivante :

$$\vec{s}(\nabla I_s) = -\kappa I_s + \kappa I_0(T)$$

avec le vecteur unitaire \vec{s} orienté dans la direction s .

L'intégration de l'équation du transfert nécessite la valeur de I au début du rayon, c'est-à-dire sur une paroi. La valeur de $I_\lambda(s)$ au point P dépend des rayons provenant de tous les points de la cavité qui se réfléchissent sur dS ainsi que du rayonnement émis par la surface autour du point P . On retrouve là la caractéristique du transfert de chaleur par rayonnement : le bilan thermique en un point dépend des températures de tous les autres points, instantanément.

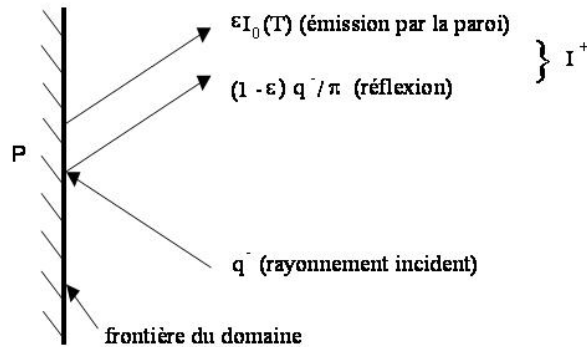


FIG. 6.6 – Caractéristique du rayonnement à la paroi

Si les limites du domaine sont des surfaces parfaitement diffuses, les conditions aux limites sont données par l'expression de la luminance spectrale apparente au point P

dans la direction s :

$$I_{\lambda}^{+}(\vec{s}, P) = \epsilon_{\lambda} I_{0\lambda}(T_P) + \frac{1 - \epsilon_{\lambda}}{\pi} \int_{\vec{s}' \cdot \vec{n} < 0} I_{\lambda}^{-}(\vec{s}', P) |\vec{s}' \cdot \vec{n}| d\Omega' \quad (6.2.3)$$

avec

- I_{λ}^{+} : intensité spectrale de rayonnement quittant la surface
- I_{λ}^{-} : intensité spectrale de rayonnement incidente sur la surface
- $I_{0\lambda}$: intensité spectrale de rayonnement du corps noir à la température T_P de la surface
- ϵ_{λ} : facteur spectral d'émission de la surface

6.2.1 Cas du parfait diathermane

Si l'on considère un milieu parfaitement diathermane, $\alpha_{\lambda} = 0$. L'équation de transfert devient :

$$\frac{dI}{ds} = 0$$

L'intensité radiative est donc constante le long d'un rayon. On a donc :

$$\begin{aligned} I_{\lambda}^{-}(\vec{s}', P) &= I_{\lambda}^{+}(\vec{s}', P') \\ I_{\lambda}^{+}(\vec{s}, P) &= \epsilon_{\lambda} I_{0\lambda}(T_P) + \frac{1 - \epsilon_{\lambda}}{\pi} \int_{\vec{s}' \cdot \vec{n} < 0} I_{\lambda}^{+}(\vec{s}', P') |\vec{s}' \cdot \vec{n}| d\Omega' \\ I_{\lambda}^{+}(\vec{s}, P) &= \epsilon_{\lambda} I_{0\lambda}(T_P) + \frac{1 - \epsilon_{\lambda}}{\pi} \int_{\vec{s}' \cdot \vec{n} < 0} I_{\lambda}^{+}(\vec{s}', P') \cos\theta d\Omega' \\ I_{\lambda}^{+}(\vec{s}, P) &= \epsilon_{\lambda} I_{0\lambda}(T_P) + (1 - \epsilon_{\lambda}) \int_S I_{\lambda}^{+}(\vec{s}', P') \frac{\cos\theta \cos\theta' dS'}{\pi d_{PP'}^2} \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$I_{\lambda}^{+}(\vec{s}, P) = \epsilon_{\lambda} I_{0\lambda}(T_P) + (1 - \epsilon_{\lambda}) \int_S I_{\lambda}^{+}(\vec{s}', P') dF_{SS'}$$

En décomposant la surface de la cavité en éléments de surface (zones) S_i sur lesquels les propriétés sont uniformes, et en tenant compte de l'expression donnant l'exitance apparente,

$$J_i = \int_0^{\infty} \pi I_{\lambda}^{+}(P_i) d\lambda$$

on a, pour des surfaces grises, en intégrant sur λ et sur S_i :

$$J_i S_i = \epsilon_i \sigma T_i^4 S_i + (1 - \epsilon_i) \left(\sum_j J_j \bar{i} \bar{j} \right)$$

c'est-à-dire

$$\sum_j J_j \left(\bar{i} \bar{j} - \delta_{ij} \frac{S_i}{\rho_i} \right) = -\frac{\epsilon_i S_i}{\rho_i} \sigma T_i^4$$

Cette dernière expression est à la base du calcul des flux radiatifs dans une enceinte constituée de parois grises, par la méthode des zones.

6.3 Couplage du rayonnement avec les autres modes

Le transfert de chaleur par rayonnement est généralement couplé à d'autres modes de transfert : conduction et convection.

6.3.1 Flux radiatif

Lorsque le rayonnement rencontre la surface d'un milieu diathermane, il donne lieu à un flux radiatif qui s'écrit (en considérant la normale à la surface \vec{n}) :

$$\phi^R(P) = \int_0^\infty \left(\int_{2\pi} I_\lambda^+(\vec{s}, P) \vec{s} \cdot \vec{n} d\Omega \right) d\lambda - \int_0^\infty \left(\int_{2\pi} I_\lambda^-(\vec{s}', P) \vec{s}' \cdot \vec{n} d\Omega' \right) d\lambda$$

$$\phi^R(P) = \int_0^\infty \left[\int_{2\pi} I_\lambda^+(\vec{s}, P) \cos\theta d\Omega - \int_{2\pi} I_\lambda^-(\vec{s}', P) \cos\theta d\Omega' \right] d\lambda$$

6.3.2 Puissance volumique radiative dissipée

Au sein d'un milieu diathermane absorbant, le rayonnement donne lieu à une puissance volumique dissipée égale à :

$$q^R(P) = - \int_0^\infty \left(\int_{4\pi} \frac{dI_\lambda}{ds} d\Omega \right) d\lambda$$

$$q^R(P) = - \int_0^\infty \left(\int_{4\pi} \vec{s} \cdot \vec{\nabla} I_\lambda d\Omega \right) d\lambda$$

6.4 Solution numérique - Méthode des transferts discrets

La méthode des transferts discrets a été développée principalement pour le calcul des transferts radiatifs dans les chambres de combustion. Cette méthode privilégie la discrétisation angulaire du rayonnement aux parois. L'idée est de suivre un rayon (càd une intensité) à la fois, plutôt que de résoudre toutes les intensités à travers le domaine. Selon ses auteurs, la méthode des transferts discrets est rapide, exacte, économique, applicable aux géométries complexes. Elle est d'une approche physique simple, facile d'application, elle ne nécessite pas de connaissances mathématiques spéciales et son degré de précision est laissé à l'appréciation de l'utilisateur.

6.4.1 Principes

Le domaine est divisé en volumes de contrôle (zones) et la frontière est décomposée en éléments de surface.

Le schéma 6.7 en deux dimensions simplifie la description de la méthode, qui reste applicable à des géométries tridimensionnelles de forme quelconque. Les cellules (volumes de contrôle) utilisées peuvent être différentes ou identiques aux cellules utilisées pour le calcul des autres modes de transfert au sein du milieu. Elles ne sont pas né-

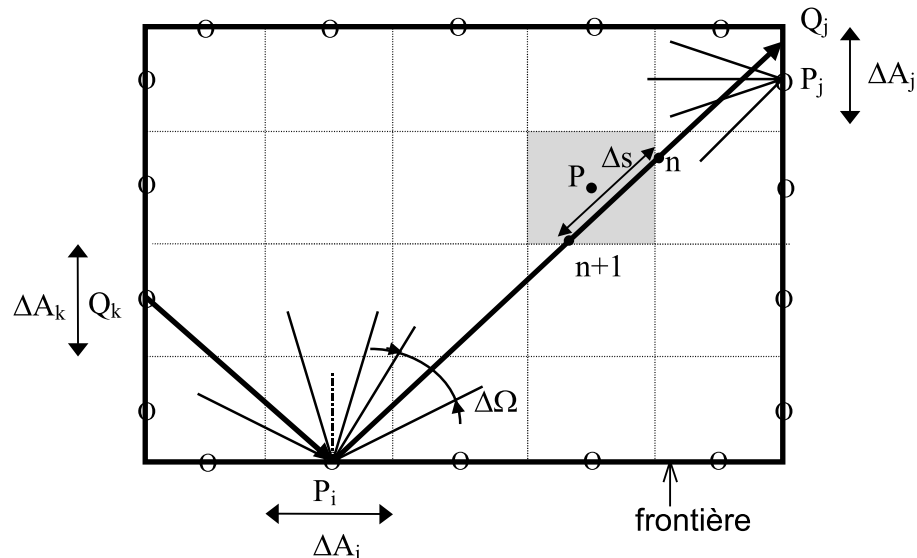


FIG. 6.7 – Schéma de principe de la méthode des transferts discrets

cessairement rectangulaires ni toutes identiques. La méthode pourra donc s'appliquer aux maillages non structurés, moyennant les adaptations requises. Les frontières du domaine sont supposées grises et émettent et réfléchissent de manière diffuse.

La discrétisation du rayonnement se fait à partir des parois du domaine : on lance des rayons dans des directions données à partir de points localisés sur la frontière.

Dans un milieu gris, l'équation de transfert radiatif (E.T.R.) s'écrit :

$$\frac{dI}{ds} = -\kappa I + \kappa I_0(T) \quad (6.4.1)$$

L'évolution de l'intensité de rayonnement le long de chaque rayon est calculée en résolvant l'E.T.R (6.4.1). Cette évolution dépend de la variation de température le long du rayon, qui est obtenue à partir des températures nodales sur le maillage utilisé pour approcher le champ de température dans le domaine de calcul. Le principe général de la méthode tient en les 7 points suivants :

1. Discrétisation de l'enceinte :

- le volume intérieur est divisé en éléments de volume
- la frontière est divisée en éléments de surface ΔA_i (les points P_i sont normalement positionnés de façon arbitraire sur les côtés de la cavité ; si l'on utilise les mêmes volumes de contrôle que pour le calcul de l'écoulement, on place en général les P_i au milieu des côtés des volumes de contrôle).

2. Discrétisation de l'hémisphère autour de chaque point P_i , en N_θ éléments d'angle solide $\Delta\Omega$ (3D).

3. On suppose toute l'énergie des rayons contenus dans $\Delta\Omega$ concentrée dans le rayon moyen, qui seul définit les échanges des rayons contenus dans $\Delta\Omega$. En particulier, on suppose ces rayons issus d'une source concentrée en P_i .

4. On suppose que tous les rayons contenus dans chaque angle solide $\Delta\Omega$ ont une intensité I (W/m^2 surface apparente $.sr$) uniforme. Le rayon moyen $P_i Q_j$ est représentatif du faisceau $\Delta\Omega$.

5. On dénombre les N_θ points Q_j , points d'intersection avec les limites de l'enceinte des rayons associés à chaque élément de surface ΔA_i . Chaque Q_j se trouve sur un élément de surface ΔA_j .

6. On définit la densité de flux sortant (radiosité ou exitance apparente) pour chaque élément de surface ΔA_i (voir figure 6.8) :

$$\dot{q}_i^+ = \epsilon_i \sigma T_i^4 + (1 - \epsilon_i) \dot{q}_i^- \quad (6.4.2)$$

Les \dot{q}_i^- (flux surfaciques incidents) sont exprimés en fonction des \dot{q}_j^+ .

7. On intègre l'équation de transfert le long de chaque rayon : on calcule l'évolution de I le long du rayon et on calcule la contribution de chaque rayon au terme source relatif aux éléments de volume traversés par le rayon.

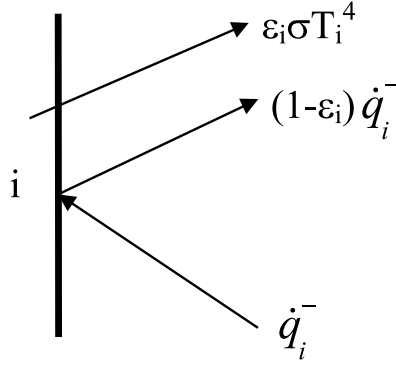


FIG. 6.8 – Le rayonnement à la paroi

6.4.2 Intégration le long d'un rayon

Supposons T constante sur la distance Δs . Multiplions l'équation de transfert radiatif par $e^{\kappa s}$. On a :

$$e^{\kappa s} \frac{dI}{ds} = -\kappa e^{\kappa s} I + \kappa \frac{\sigma T^4}{\pi} e^{\kappa s}$$

c'est-à-dire :

$$\left(\frac{dI}{\kappa ds} + I \right) e^{\kappa s} = \frac{\sigma T^4}{\pi} e^{\kappa s}$$

$$\frac{1}{\kappa} \frac{d}{ds} (I e^{\kappa s}) = \frac{1}{\kappa} \frac{d}{ds} \left(\frac{\sigma T^4}{\pi} e^{\kappa s} \right)$$

Cette équation devient, en intégrant entre s_n et s_{n+1} :

$$I_{n+1} e^{\kappa s_{n+1}} - I_n e^{\kappa s_n} = \frac{\sigma T^4}{\pi} (e^{\kappa s_{n+1}} - e^{\kappa s_n})$$

Nous avons finalement la relation de récurrence :

$$I_{n+1} = \frac{\sigma T^4}{\pi} (1 - e^{-\kappa \Delta s}) + I_n e^{-\kappa \Delta s}$$

Cette relation est utilisée pour calculer l'évolution de l'intensité le long de chaque rayon moyen $Q_j P_i$, les points $n, n+1, \dots$ étant situés à l'intersection du rayon avec les limites des éléments de volume.

Cette intégration nécessite les valeurs des intensités aux points Q_j , points de départ des rayons. Celles-ci sont obtenues à partir de l'expression des conditions aux limites.

6.4.3 Conditions aux limites

On suppose que l'intensité I au point Q_j est identique à l'intensité I au point P_j appartenant au même côté (voir figure 6.7) : $I(Q_j) = I_{P_j}$.

Pour une surface grise et lambertienne, on a :

$$I_{Q_j} \cong I_{P_j} = \frac{\dot{q}_j^+}{\pi} = \epsilon_j \frac{\sigma T_j^4}{\pi} + (1 - \epsilon_j) \frac{\dot{q}_j^-}{\pi}$$

avec

$$\dot{q}_j^- = \sum_{Q_k \text{ vus par } P_j} I_{Q_k P_j} |\vec{u}_{Q_k P_j} \cdot \vec{n}_j| \Delta \Omega_{P_j Q_k}$$

$$\dot{q}_j^- = \sum_{Q_k \text{ vus par } P_j} I_{Q_k P_j} \cos \theta_k \Delta \Omega_{P_j Q_k}$$

\dot{q}_j^- représente le flux surfacique radiatif incident sur la paroi. On remarque immédiatement qu'à moins d'avoir uniquement des parois noires sur tout le domaine, les intensités à la paroi dépendent des intensités de tous les autres rayons : les calculs seront donc itératifs.

Si le flux net ($\phi_{net} = \phi^+ - \phi^-$) est imposé à la paroi, la condition aux limites s'écrit :

$$I_{P_j} = \frac{\phi^+}{\pi} = \frac{\phi^-}{\pi} + \frac{\phi_{net}}{\pi}$$

6.4.4 Calcul de la puissance dissipée

Une fois que toutes les intensités sont obtenues, le terme source radiatif dans l'équation de conservation de l'énergie peut être facilement évalué. La contribution du rayon $P_i Q_j$ au terme source de l'élément (e) s'écrit :

$$S_{P_i Q_j}^e = (I_n - I_{n+1}) \cdot (\vec{n} \cdot \vec{u}_{P_i Q_j}) \Delta A_i \Delta \Omega_{P_i Q_j}$$

En fait, cette relation n'est vraie que si l'élément de volume chevauche complètement le faisceau. Sinon, seule une fraction du faisceau intercepte l'élément de volume. Il faudrait donc pondérer le terme source et le répartir entre plusieurs éléments voisins. En pratique, on laisse tomber cette pondération. Si l'erreur liée à cette approximation est trop importante, on préfère adopter un maillage angulaire plus fin.

Le terme source total associé au volume V_P est obtenu en sommant les contributions de tous les rayons qui le traversent (rem : il s'agit directement du terme source à incorporer dans l'équation nodale relative à l'élément de volume. Il s'agit d'une puissance, pas d'une puissance volumique.) :

$$S_T^P = \sum_{P_i Q_j} S_{P_i Q_j}^P = V_P \cdot q_P$$

La précision des résultats obtenus lors de l'application de la méthode des transferts discrets dépend évidemment du nombre de rayons émis à partir des éléments de

la surface frontière et le temps de calcul augmente avec le nombre de rayons. Il faut également noter que cette méthode nécessite le calcul de nombreux points (les intersections des rayons avec les côtés des volumes de contrôle) et le stockage de toute cette information.

Enfin, la méthode semble applicable quelle que soit la géométrie du cas étudié et elle n'est pas réduite à la seule étude des maillages structurés.