UMONS Université de Mons

Options lookbacks dans le modèle binomial

complexys INSTITUT DE RECHERCHE SUR LES SYSTEMES COMPLEXES DE L'UMONS

Les options

Une **option européenne** est un instrument financier donnant le droit et non l'obligation d'effectuer une transaction à une date convenue à un prix fixé à l'avance. Les transactions sur lesquelles nous travaillons sont des achats ou des ventes d'actions. Le prix de l'option dépendra donc des fluctuations du prix d'une action.

Pour les **options lookbacks**, le prix fixé à l'avance est le prix minimal de l'action entre l'émission et l'échéance pour les options d'achat (call) et le prix maximal pour les options de vente (put).

Les paramètres influençant le prix de ces options :

- S_0, le prix de l'action au moment de l'émission,
- r, le taux d'intérêt sans risque du marché,
- σ, la volatilité de l'action,
- T, le moment d'échéance de l'option.

Démarche : on va couper la ligne du temps en n intervalles identiques, supposer que le prix de l'action ne peut varier que de deux manières à chacun des changements d'intervalles et calculer en chacun des états possibles le prix de l'option.

Exemple de la modélisation discrète pour 4 intervalles

Pour notre exemple, nous allons poser les valeurs suivantes pour les paramètres : $S_0 = 80$, $r = 0{,}08$, $\sigma = 0{,}2$ et $T = 1$. Dans le modèle de Cox-Ross-Rubinstein, ce choix va avoir pour conséquence que le facteur d'accroissement vaudra $u_4 = 1{,}1052$ et que le facteur de décroissement sera $d_4 = 0{,}9048$. Et enfin, pour respecter le principe d'absence d'arbitrage, la probabilité risque-neutre p_4 aura pour valeur 0,5759 et la probabilité d'accroissement dans l'arbre de Cheuk-Vorst qui en découle $q_4 = 0{,}6238$.

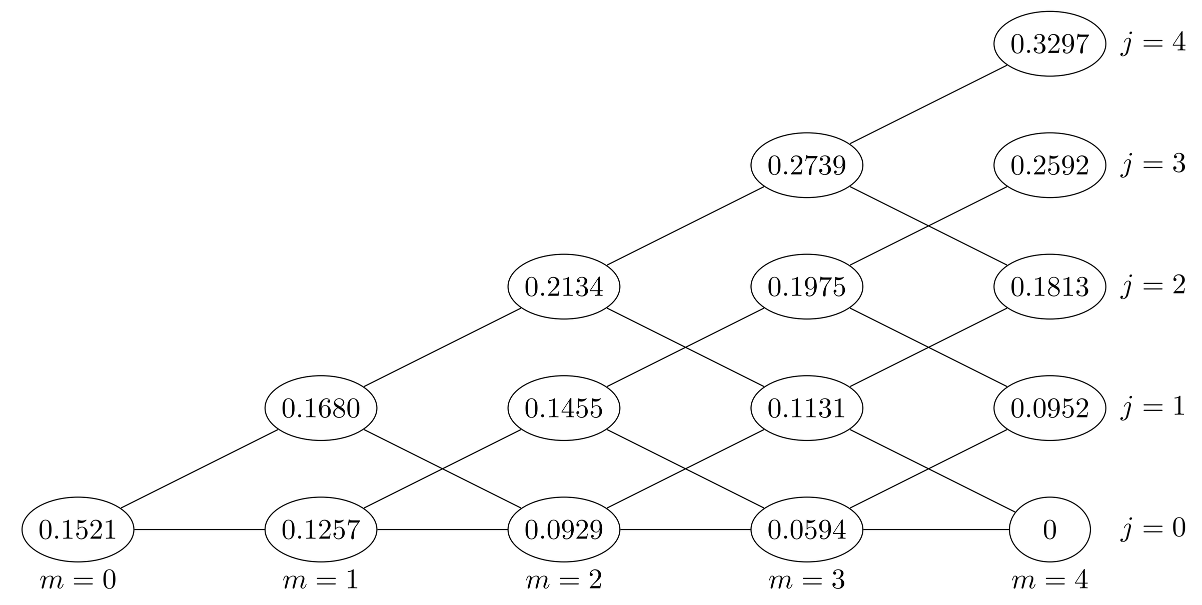

FIGURE 1. Arbre pour le call avec $n = 4$

Formule découlant de l'arbre

Le prix du call déduit de l'arbre de longueur n est

$$V_n(0,0) = \frac{Q_n(1-d_n)}{(1-Q_n)(1-Q_n d_n)}\phi_1 - \frac{1}{1-Q_n}\phi_2 + \frac{e^{-rT}}{1-Q_n d_n}\phi_3,$$

avec

- $Q_n = \frac{q_n}{1-q_n}$,
- $\phi_1 = \mathcal{B}_{n,q_n}(\lfloor n/2 \rfloor) - Q_n \mathcal{B}_{n,q_n}(\lfloor n/2 \rfloor - 1)$,
- $\phi_2 = Q_n \mathcal{B}_{n,1-q_n}(\lfloor n/2 \rfloor) - \mathcal{B}_{n,1-q_n}(\lfloor n/2 \rfloor - 1)$,
- $\phi_3 = Q_n d_n \mathcal{B}_{n,1-p_n}(\lfloor n/2 \rfloor) - u_n \mathcal{B}_{n,1-p_n}(\lfloor n/2 \rfloor - 1)$,

où $\mathcal{B}_{n,p}$ est la fonction de répartition de la loi binomiale de paramètres n et p c'est-à-dire

$$\mathcal{B}_{n,q}(k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

Convergence du modèle discret

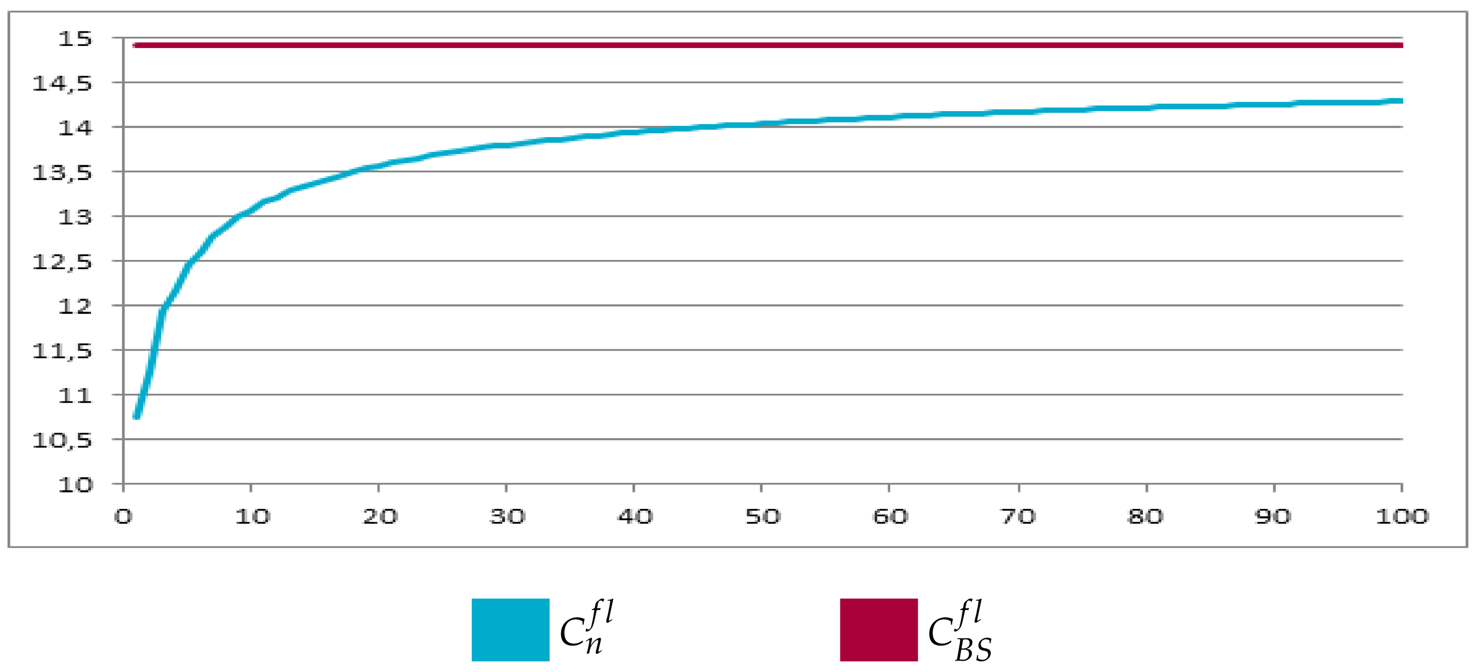

FIGURE 2. Comparaison entre les modèles de Cox-Ross-Rubinstein et de Black-Scholes

Erreurs d'approximation

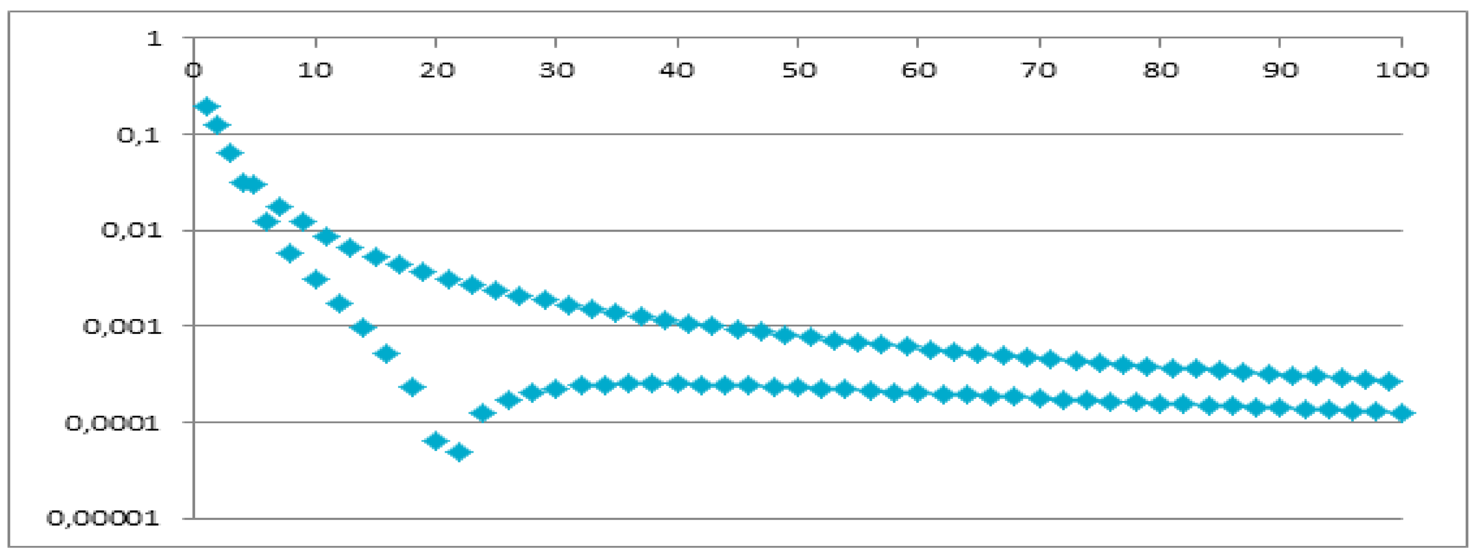

FIGURE 3. Différence entre le prix réel et l'approximation de second ordre

Construction de l'arbre pour le call (Cheuk-Vorst)

C'est un arbre (appelé V) où un nœud correspond au nombre d'étages j au-dessus du prix minimal du sous-jacent (depuis l'émission de l'option) atteint pour une trajectoire possible de ce sous-jacent. En d'autres termes, cela signifie que quand on se situe à l'étage j le sous-jacent vérifie

$$S_m = \min_{0 \le i \le m} S_i u_4^j$$

On se base du principe qu'en un nœud particulier (caractérisé par sa position (j,m)), le prix de l'option est $C_4^{fl} = S_m V_4(j,m)$. L'arbre se remplit de droite à gauche. Les nombres inscrits dans chacun des nœuds sont obtenus en utilisant les règles suivantes :

- $V_4(j,4) = 1 - u_4^j$,
- pour m allant de 3 à 0 ;
  - si $j = 0$, $V_4(0,m) = q_n V_4(1,m+1) + (1-q_n) V_4(0,m+1)$,
  - sinon, $V_4(j,m) = q_n V_4(j+1,m+1) + (1-q_n) V_4(j-1,m+1)$.

Pour notre exemple, le prix de l'option à l'émission est approximé par

$$C_4^{fl} = S_0 V_4(0,0) = 80.0{,}1521 = 12{,}1697.$$

Résultat pour le call (2013)

Soient S_0 le prix du sous-jacent au temps $t = 0$, r le taux d'intérêt sans risque, σ la volatilité du sous-jacent and T le moment d'échéance de l'option. Si $r \neq 0$ alors la formule asymptotique pour le prix de l'option lookback européenne avec un prix d'exercice variable évalué à partir du modèle binomial de Cox-Ross-Rubinstein est

$$C_n^{fl} = C_{BS}^{fl} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}(C_{BS}^{fl} - S_0)\frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$+ \left[\frac{\sigma^2 T}{12}\left(C_{BS}^{fl} + 2S_0\left[\Phi(a_1) - \mathrm{e}^{-rt}\Phi(a_2) - \frac{3}{2}\right]\right) + S_0\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{a_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right]\frac{1}{n}$$
$$+ O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

où

- Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite c'est-à-dire
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du,$$
- C_{BS}^{fl} est le prix donné par le modèle de Black-Scholes c'est-à-dire
$$C_{BS}^{fl} = S_0\left(1 + \frac{\sigma^2}{2r}\right)\Phi(a_1) - S_0 e^{-rT}\left(1 - \frac{\sigma^2}{2r}\right)\Phi(a_2) - S_0\frac{\sigma^2}{2r},$$
- $a_1 = (r/\sigma + \sigma/2)\sqrt{T}$,
- $a_2 = (r/\sigma - \sigma/2)\sqrt{T}$.

Application à l'exemple

Nombre de périodes n	1 000	5 000	10 000	50 000	100 000
C_n^{fl}	14,7183	14,8304	14,8571	14,8929	14,9014
C_{BS}^{fl}	14,9219	14,9219	14,9219	14,9219	14,9219
$(C_n^{fl} - C_{BS}^{fl})\sqrt{n}$	-6,4402	-6,4776	-6,4865	-6,4983	-6,5011
1er terme de l'approximation	-6,5078	-6,5078	-6,5078	-6,5078	-6,5078
$(C_n^{fl} - C_{BS}^{fl} - C_1/\sqrt{n})n$	2,1372	2,1339	2,1331	2,1318	2,1316
2ème terme de l'approximation	2,1308	2,1308	2,1308	2,1308	2,1308

Bibliographie

① CHEUK T.H.F., et VORST T.C.F. (1997) : Currency lookback options and observation frequency : a binomial approach. *J. Int. Money Finance* 16,173-187.

② COX J.C., ROSS S.A., et RUBINSTEIN M. (1979) : Option pricing : a simplified approach. *J. Finan. Econ.* 7,229-263.

③ GOLDMAN M.B., SOSIN H.B., et GATTO M.A. (1979) : Path dependant options :« buy at low, sell at the high ». *J. Finance* 34,1111-1127.

④ HEUWELYCKX F. (soumis) : Convergence of european lookback options with floating strike in the binomial model. `http://arxiv.org/abs/1302.2312`.

Faculté des Sciences

Université de Mons | Fabien Heuwelyckx | Institut Complexys, Département de Mathématique