Étude didactique des pratiques enseignantes pour l'enseignement des équations de droites et de plans dans l'espace : quels impacts sur les apprentissages des élèves ?

Céline Nihoul

Université de Mons
Département de Mathématique

UMONS

Faculté des Sciences

LDAR
LABORATOIRE DE DIDACTIQUE ANDRÉ REVUZ

26 novembre 2021

Plan

Plan

Contexte du travail

- Point de départ : cours de Mathématiques élémentaires (transition secondaire-université).

Contexte du travail

- Point de départ : cours de Mathématiques élémentaires (transition secondaire-université).
- Public : étudiants en BAB1 des filières mathématique, informatique et physique ($\pm$ 130 étudiants).

Contexte du travail

- Point de départ : cours de Mathématiques élémentaires (transition secondaire-université).
- Public : étudiants en BAB1 des filières mathématique, informatique et physique ($\pm$ 130 étudiants).
- Constat d'enseignant : difficultés récurrentes des étudiants avec les droites et les plans dans l'espace (Nihoul, 2016).

Contexte du travail

- Point de départ : cours de Mathématiques élémentaires (transition secondaire-université).
- Public : étudiants en BAB1 des filières mathématique, informatique et physique ($\pm$ 130 étudiants).
- Constat d'enseignant : difficultés récurrentes des étudiants avec les droites et les plans dans l'espace (Nihoul, 2016).
- Exemples :
  - $2x + 3y = 2 \leftrightsquigarrow$ plan.
  - $\left\{ \left(\frac{14}{13}, \frac{19}{13}, \alpha \right) \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\} \leftrightsquigarrow$ droite.
  - $\frac{x-3}{2} = y = \frac{z}{2} \leftrightsquigarrow (x, y, z) = (3, 0, 0) + \lambda(2, 1, 2)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Contexte du travail

- Point de départ : cours de Mathématiques élémentaires (transition secondaire-université).
- Public : étudiants en BAB1 des filières mathématique, informatique et physique ($\pm$ 130 étudiants).
- Constat d'enseignant : difficultés récurrentes des étudiants avec les droites et les plans dans l'espace (Nihoul, 2016).
- Exemples :
  - $2x + 3y = 2 \leftrightsquigarrow$ plan.
  - $\left\{ \left(\frac{14}{13}, \frac{19}{13}, \alpha \right) \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \leftrightsquigarrow$ droite.
  - $\frac{x-3}{2} = y = \frac{z}{2} \leftrightsquigarrow (x, y, z) = (3, 0, 0) + \lambda(2, 1, 2)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Objectifs didactiques

- Mieux **comprendre** les difficultés des étudiants.
- Trouver comment **agir** sur l'enseignement pour prendre en compte ces difficultés et favoriser les apprentissages.

Contexte du travail

- POINT DE DÉPART : cours de Mathématiques élémentaires (transition secondaire-université).
- PUBLIC : étudiants en BAB1 des filières mathématique, informatique et physique ($\pm$ 130 étudiants).
- CONSTAT d'enseignant : difficultés récurrentes des étudiants avec les droites et les plans dans l'espace (Nihoul, 2016).
- EXEMPLES :
  - $2x + 3y = 2 \leftrightsquigarrow$ plan.
  - $\left\{ \left(\frac{14}{13}, \frac{19}{13}, \alpha \right) \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\} \leftrightsquigarrow$ droite.
  - $\frac{x-3}{2} = y = \frac{z}{2} \leftrightsquigarrow (x, y, z) = (3, 0, 0) + \lambda(2, 1, 2)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Objectifs didactiques

- Mieux **comprendre** les difficultés des étudiants.
- Trouver comment **agir** sur l'enseignement pour prendre en compte ces difficultés et favoriser les apprentissages.

- CHAMP DE RECHERCHE : la didactique des mathématiques.

La didactique des mathématiques

Définition (Douady, 1984)

La didactique des mathématiques est l'étude de processus de transmission et d'acquisition des différents contenus de cette science, et qui propose de décrire et d'expliquer les phénomènes relatifs aux rapports entre son enseignement et son apprentissage.

$\Rightarrow$ recherches sur les difficultés des élèves, sur les pratiques enseignantes, sur les TICE, sur les difficultés d'apprentissage,... avec une entrée **disciplinaire** !

Comment mieux comprendre les difficultés des étudiants ?

- Étudier les spécificités mathématiques des notions visées :
  - Quel travail mathématique est attendu sur ces notions ?
  - Quelles sont les notions qui gravitent autour des notions visées ?
  - Quelles sont les difficultés repérées sur ces notions dans les travaux de recherche ?
  - Quelle est la place des notions dans le programme scolaire ?
  - Comment les notions ont-elles émergées et se sont développées ?

Comment mieux comprendre les difficultés des étudiants ?

- Étudier les spécificités mathématiques des notions visées :
  - Quel travail mathématique est attendu sur ces notions ?
  - Quelles sont les notions qui gravitent autour des notions visées ?
  - Quelles sont les difficultés repérées sur ces notions dans les travaux de recherche ?
  - Quelle est la place des notions dans le programme scolaire ?
  - Comment les notions ont-elles émergées et se sont développées ?

$\hookrightarrow$ **étude de relief** sur les notions (Pariès et al., 2007) : croisement des résultats entre une analyse cognitive, curriculaire et historico-épistémologique.

Comment mieux comprendre les difficultés des étudiants ?

- Étudier les spécificités mathématiques des notions visées :
  - Quel travail mathématique est attendu sur ces notions ?
  - Quelles sont les notions qui gravitent autour des notions visées ?
  - Quelles sont les difficultés repérées sur ces notions dans les travaux de recherche ?
  - Quelle est la place des notions dans le programme scolaire ?
  - Comment les notions ont-elles émergées et se sont développées ?

↪ **étude de relief** sur les notions (Pariès et al., 2007) : croisement des résultats entre une analyse cognitive, curriculaire et historico-épistémologique.

Comment mieux comprendre les difficultés des étudiants ?

- Étudier les spécificités mathématiques des notions visées :
  - Quel travail mathématique est attendu sur ces notions ?
  - Quelles sont les notions qui gravitent autour des notions visées ?
  - Quelles sont les difficultés repérées sur ces notions dans les travaux de recherche ?
  - Quelle est la place des notions dans le programme scolaire ?
  - Comment les notions ont-elles émergées et se sont développées ?

  ↪ **étude de relief** sur les notions (Pariès et al., 2007) : croisement des résultats entre une analyse cognitive, curriculaire et historico-épistémologique.
- Analyser le travail mathématique proposé dans :
  - Les manuels scolaires.
  - Les classes.

Plan

Étude cognitive

Éléments méthodologiques

- Analyse des notions en jeu d'un point de vue mathématique.
- Lecture de nombreux travaux de recherche.
- Diagnostic du cours de Mathématiques élémentaires.

Le point de vue du mathématicien (1/2)

Les notions de droites et de plans dans l'espace peuvent :

Le point de vue du mathématicien (1/2)

Les notions de droites et de plans dans l'espace peuvent :

- intervenir dans plusieurs cadres géométriques (Douady, 1992).

GS	GV	GA
Prolongement d'une arête ou d'une face d'un cube.	$\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$	$(x, y, z) = \lambda(x_1, y_1, z_1)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ $(x, y, z) = \lambda(x_1, y_1, z_1)$ $+\mu(x_2, y_2, z_2)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Le point de vue du mathématicien (1/2)

Les notions de droites et de plans dans l'espace peuvent :

- intervenir dans plusieurs cadres géométriques (Douady, 1992).

GS	GV	GA
Prolongement d'une arête ou d'une face d'un cube.	$\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$	$(x, y, z) = \lambda(x_1, y_1, z_1)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ $(x, y, z) = \lambda(x_1, y_1, z_1)$ $+\mu(x_2, y_2, z_2)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

- être décrites à partir de plusieurs registres (Duval, 1993).

Algébrique	Ensembliste	Dessin
$2x + 3y + 2z = 3$	$\{(x, 2x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\{(x, y, x + y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$	

Le point de vue du mathématicien (2/2)

- être décrites selon deux points de vue (Rogalski, 1995).

Paramétrique	Cartésien
$(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(2, 1, 3)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$	$\frac{x-1}{2} = y - 2 = \frac{z-3}{3}$

Le point de vue du mathématicien (2/2)

- être décrites selon deux points de vue (Rogalski, 1995).

Paramétrique	Cartésien
$(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(2, 1, 3)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$	$\frac{x-1}{2} = y - 2 = \frac{z-3}{3}$

$\Rightarrow$ Multiples représentations des notions en termes de registres et de points de vue, et ce, dans plusieurs cadres géométriques.

Diagnostic du cours de ME (1/3)

L'interprétation géométrique des équations

Production d'un étudiant

L'équation $2x + 3y = 2$ décrit une droite.

Difficultés repérées :

Diagnostic du cours de ME (1/3)

L'interprétation géométrique des équations

Production d'un étudiant

L'équation $2x + 3y = 2$ décrit une droite.

DIFFICULTÉS REPÉRÉES :

- Reconnaître qu'une équation de la forme $ax + by = d$ décrit un plan dans l'espace (Schneider & Lebeau, 2010).
  $\hookrightarrow$ un ensemble de triplets (x, y, z) vérifiant l'équation $2x + 3y = 2$.

Diagnostic du cours de ME (1/3)

L'interprétation géométrique des équations

Production d'un étudiant

L'équation $2x + 3y = 2$ décrit une droite.

DIFFICULTÉS REPÉRÉES :

- Reconnaître qu'une équation de la forme $ax + by = d$ décrit un plan dans l'espace (Schneider & Lebeau, 2010).
  $\hookrightarrow$ un ensemble de triplets (x, y, z) vérifiant l'équation $2x + 3y = 2$.
- Confondre les différents statuts des lettres tels que les variables et les cœfficients (Maurel, 2001).
  $\hookrightarrow$ seuls les triplets de la forme $(x, \frac{2-2x}{3}, 0)$ sont pris en compte.

Diagnostic du cours de ME (1/3)

L'interprétation géométrique des équations

Production d'un étudiant

L'équation $2x + 3y = 2$ décrit une droite.

Difficultés repérées :

- Reconnaître qu'une équation de la forme $ax + by = d$ décrit un plan dans l'espace (Schneider & Lebeau, 2010).
  $\hookrightarrow$ un ensemble de triplets (x, y, z) vérifiant l'équation $2x + 3y = 2$.
- Confondre les différents statuts des lettres tels que les variables et les cœfficients (Maurel, 2001).
  $\hookrightarrow$ seuls les triplets de la forme $(x, \frac{2-2x}{3}, 0)$ sont pris en compte.
- Décrire un objet comme un ensemble de points.
  $\hookrightarrow$ l'ensemble $\{(x, \frac{2-2x}{3}, z) | x, z \in \mathbb{R}\}$.

  $\Rightarrow$ Conversion entre les registres algébrique et ensembliste.

Diagnostic du cours de ME (2/3)

L'interprétation géométrique des ensembles

Production d'un étudiant

L'ensemble $A = \{(\frac{14}{13}, \frac{19}{13}, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ décrit un plan.

DIFFICULTÉS REPÉRÉES :

Diagnostic du cours de ME (2/3)

L'interprétation géométrique des ensembles

Production d'un étudiant

L'ensemble $A = \{(\frac{14}{13}, \frac{19}{13}, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ décrit un plan.

Difficultés repérées :

- Reconnaître les objets décrits par des ensembles de points (Nihoul, 2016).
  $\hookrightarrow$ A décrit une droite.

Diagnostic du cours de ME (2/3)

L'interprétation géométrique des ensembles

Production d'un étudiant

L'ensemble $A = \{(\frac{14}{13}, \frac{19}{13}, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ décrit un plan.

DIFFICULTÉS REPÉRÉES :

- Reconnaître les objets décrits par des ensembles de points (Nihoul, 2016).
  $\hookrightarrow$ A décrit une droite.
- Mobiliser les notions de théorie des ensembles (Dieudonné et al., 2011).
  $\hookrightarrow$ traduire $(x, y, z) \in A$.

Diagnostic du cours de ME (2/3)

L'interprétation géométrique des ensembles

Production d'un étudiant

L'ensemble $A = \{(\frac{14}{13}, \frac{19}{13}, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ décrit un plan.

DIFFICULTÉS REPÉRÉES :

- Reconnaître les objets décrits par des ensembles de points (Nihoul, 2016).
  $\hookrightarrow$ A décrit une droite.
- Mobiliser les notions de théorie des ensembles (Dieudonné et al., 2011).
  $\hookrightarrow$ traduire $(x, y, z) \in A$.
- Associer à l'ensemble de points une équation paramétrique de la droite.
  $\hookrightarrow$ $(x, y, z) = (\frac{14}{13}, \frac{19}{13}, 0) + \alpha(0, 0, 1)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
  $\Rightarrow$ Conversion entre les registres ensembliste et algébrique.
  $\Rightarrow$ Mobilisation de connaissances antérieures sur les vecteurs.

Diagnostic du cours de ME (3/3)

Les changements de points de vue

Production d'un étudiant

Une équation paramétrique du plan $\alpha \equiv 2x + 3y + 4z = 34$ est $\begin{cases} \lambda = \frac{3\mu+4\delta}{2} \\ \mu = \frac{2\lambda+4\delta}{3} \\ \delta = \frac{2\lambda+3\mu}{4}. \end{cases}$

Difficulté repérée :

Diagnostic du cours de ME (3/3)

Les changements de points de vue

Production d'un étudiant

Une équation paramétrique du plan $\alpha \equiv 2x + 3y + 4z = 34$ est $\begin{cases} \lambda = \frac{3\mu+4\delta}{2} \\ \mu = \frac{2\lambda+4\delta}{3} \\ \delta = \frac{2\lambda+3\mu}{4}. \end{cases}$

DIFFICULTÉ REPÉRÉE :

- Changer de points de vue dans le sens cartésien/paramétrique (Nihoul, 2018).

Diagnostic du cours de ME (3/3)

Les changements de points de vue

Production d'un étudiant

Une équation paramétrique du plan $\alpha \equiv 2x + 3y + 4z = 34$ est $\begin{cases} \lambda = \frac{3\mu+4\delta}{2} \\ \mu = \frac{2\lambda+4\delta}{3} \\ \delta = \frac{2\lambda+3\mu}{4} \end{cases}$.

Difficulté repérée :

- Changer de points de vue dans le sens cartésien/paramétrique (Nihoul, 2018).
- Mobiliser la notion de rang et de dimension (Nihoul, 2021).
  $\hookrightarrow$ deux paramètres à introduire.

Premières spécificités des notions

- Les aspects syntaxique et sémantique des équations doivent être articulés (Kouki, 2008).
  $\hookrightarrow$ notion paramathématique (Chevallard, 1985).
  $\hookrightarrow$ rôle d'étiquette dans l'enseignement belge (Schneider, 1988).
  $\Rightarrow$ Manque de questionnement des étudiants au niveau des équations.

Premières spécificités des notions

- Les aspects syntaxique et sémantique des équations doivent être articulés (Kouki, 2008).
  $\hookrightarrow$ notion paramathématique (Chevallard, 1985).
  $\hookrightarrow$ rôle d'étiquette dans l'enseignement belge (Schneider, 1988).
  $\Rightarrow$ Manque de questionnement des étudiants au niveau des équations.
- Les aspects « description » et « reconnaissance » doivent être articulés pour que les apprenants interprètent géométriquement les objets.

Premières spécificités des notions

- Les aspects syntaxique et sémantique des équations doivent être articulés (Kouki, 2008).
  $\hookrightarrow$ notion paramathématique (Chevallard, 1985).
  $\hookrightarrow$ rôle d'étiquette dans l'enseignement belge (Schneider, 1988).
  $\Rightarrow$ Manque de questionnement des étudiants au niveau des équations.
- Les aspects « description » et « reconnaissance » doivent être articulés pour que les apprenants interprètent géométriquement les objets.
- Multiples représentations des notions en termes de cadres (GS, GV, GA), de registres (algébrique, ensembliste, langue naturelle) et de points de vue (paramétrique, cartésien).
  $\Rightarrow$ Un réel travail doit être effectué en phase d'apprentissage pour développer la flexibilité cognitive nécessaire (Artigue, Chartier, & Dorier, 2000).

Étude historico-épistémologique

- FOCUS : la naissance de la géométrie analytique.
- Appui sur :

Étude historico-épistémologique

- FOCUS : la naissance de la géométrie analytique.
- Appui sur :
  - des travaux d'histoire des mathématiques (Bourbaki, 1969 ; Dieudonné, 1978) : établir un panorama général de l'émergence et de l'évolution des notions de géométrie analytique.

Étude historico-épistémologique

- FOCUS : la naissance de la géométrie analytique.
- Appui sur :
  - des travaux d'histoire des mathématiques (Bourbaki, 1969 ; Dieudonné, 1978) : établir un panorama général de l'émergence et de l'évolution des notions de géométrie analytique.
  - des travaux de Dorier (1990, 1993, 1997, 2000) : étudier les pratiques des mathématiciens avant la naissance de la GA, dégager des éléments sur la naissance de la GA.

Étude historico-épistémologique

- FOCUS : la naissance de la géométrie analytique.
- Appui sur :
  - des travaux d'histoire des mathématiques (Bourbaki, 1969 ; Dieudonné, 1978) : établir un panorama général de l'émergence et de l'évolution des notions de géométrie analytique.
  - des travaux de Dorier (1990, 1993, 1997, 2000) : étudier les pratiques des mathématiciens avant la naissance de la GA, dégager des éléments sur la naissance de la GA.
  - des textes originaux (Descartes, 1637) : préciser la méthode cartésienne pour comprendre comment les droites et les plans ont été décrits par des équations.

Genèse et développement historiques (1/5)

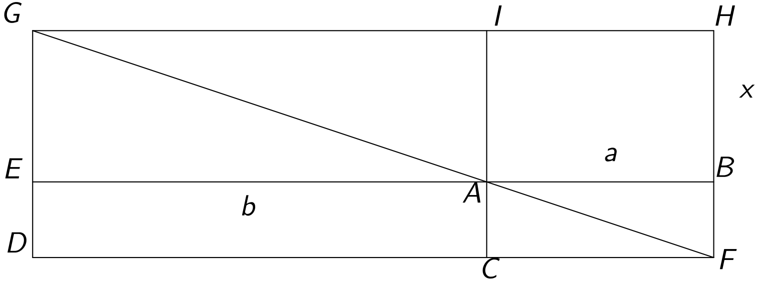
La Géométrie avant 1637

- Les équations se résolvaient grâce à la Géométrie.
  $\hookrightarrow$ Géométrisation de l'Algèbre.

Genèse et développement historiques (1/5)

La Géométrie avant 1637

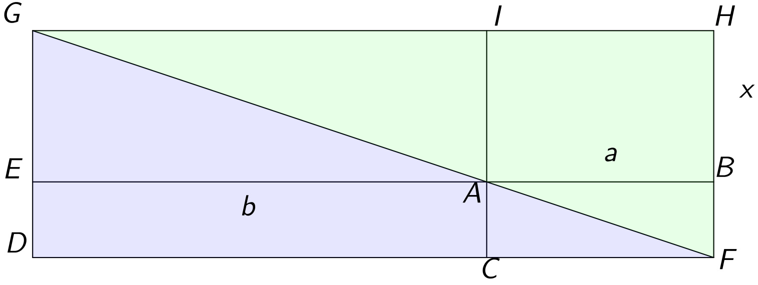
- Les équations se résolvaient grâce à la Géométrie.
  $\hookrightarrow$ Géométrisation de l'Algèbre.
- Exemple : Résolution d'une équation de la forme $ax = b$ par Euclide (Heath, 1956).



Genèse et développement historiques (1/5)

La Géométrie avant 1637

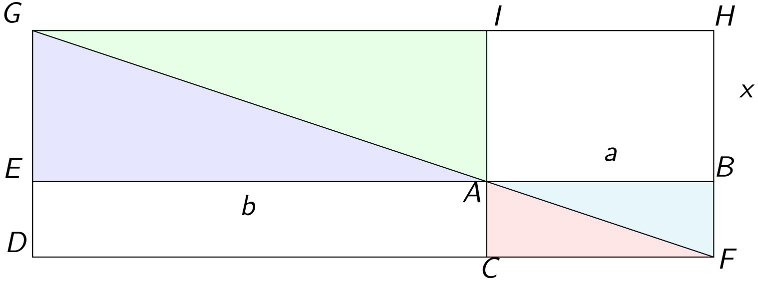
- Les équations se résolvaient grâce à la Géométrie.
  $\hookrightarrow$ Géométrisation de l'Algèbre.
- EXEMPLE : Résolution d'une équation de la forme $ax = b$ par Euclide (Heath, 1956).



Genèse et développement historiques (1/5)

La Géométrie avant 1637

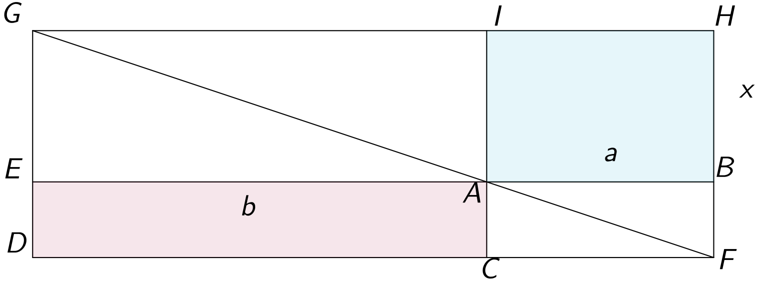
- Les équations se résolvaient grâce à la Géométrie.
  $\hookrightarrow$ Géométrisation de l'Algèbre.
- EXEMPLE : Résolution d'une équation de la forme $ax = b$ par Euclide (Heath, 1956).



Genèse et développement historiques (1/5)

La Géométrie avant 1637

- Les équations se résolvaient grâce à la Géométrie.
  $\hookrightarrow$ Géométrisation de l'Algèbre.
- EXEMPLE : Résolution d'une équation de la forme $ax = b$ par Euclide (Heath, 1956).



Genèse et développement historiques (2/5)

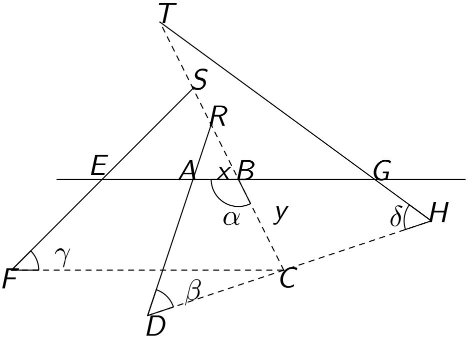
La Géométrie en 1637

- Descartes veut résoudre des problèmes géométriques grâce aux équations.
  $\hookrightarrow$ Algébrisation de la Géométrie.

Genèse et développement historiques (2/5)

La Géométrie en 1637

- Descartes veut résoudre des problèmes géométriques grâce aux équations.
  $\hookrightarrow$ Algébrisation de la Géométrie.
- EXEMPLE : Le problème de Pappus à 4 lignes (Descartes, 1637).

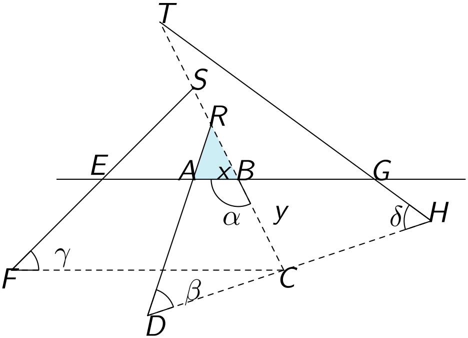


- Données : FE, AB, AD, GH, α, β, γ, δ.
- Posons $AB = x$, $CB = y$ et z le segment unitaire.
- $\frac{AB}{BR} = \frac{z}{b}$. D'où, $BR = \frac{bx}{z}$.

Genèse et développement historiques (2/5)

La Géométrie en 1637

- Descartes veut résoudre des problèmes géométriques grâce aux équations.
  $\hookrightarrow$ Algébrisation de la Géométrie.
- EXEMPLE : Le problème de Pappus à 4 lignes (Descartes, 1637).



- Données : FE, AB, AD, GH, α, β, γ, δ.
- Posons $AB = x$, $CB = y$ et z le segment unitaire.
- $\frac{AB}{BR} = \frac{z}{b}$. D'où, $BR = \frac{bx}{z}$.

Genèse et développement historiques (3/5)

La Géométrie après 1637

- Les droites et les plans sont décrits par des équations pour résoudre des problèmes géométriques (fin XVII^{e}).
- Intérêt majeur pour la partie analytique de la méthode cartésienne (résolution d'équations).
- CRITIQUES sur la partie analytique : éloigne du sens géométrique, jette un voile sur la perception visuelle du problème (Dorier, 1990).
- Proposition de Leibniz : effectuer des parallèles entre la GS et la GA.

> *Réconcilier algèbre et géométrie en prenant en compte dans une méthode de nature analytique le côté intuitif de la méthode synthétique (Dorier, 1990, p. 42).*

- PISTE : relier davantage la géométrie synthétique à la géométrie analytique.

Genèse et développement historiques (4/5)

Le point de vue paramétrique

- La genèse du point de vue paramétrique est liée à celle de la notion de rang (Alves-Dias, 1998).
- La notion de rang émerge en plus d'un siècle grâce à l'étude des systèmes linéaires (Dorier, 1993).
- PANORAMA :

Genèse et développement historiques (4/5)

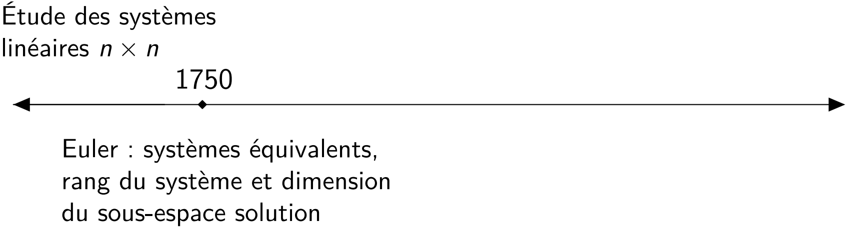
Le point de vue paramétrique

- La genèse du point de vue paramétrique est liée à celle de la notion de rang (Alves-Dias, 1998).
- La notion de rang émerge en plus d'un siècle grâce à l'étude des systèmes linéaires (Dorier, 1993).
- PANORAMA :

Genèse et développement historiques (4/5)

Le point de vue paramétrique

- La genèse du point de vue paramétrique est liée à celle de la notion de rang (Alves-Dias, 1998).
- La notion de rang émerge en plus d'un siècle grâce à l'étude des systèmes linéaires (Dorier, 1993).
- Panorama :



Genèse et développement historiques (4/5)

Le point de vue paramétrique

- La genèse du point de vue paramétrique est liée à celle de la notion de rang (Alves-Dias, 1998).
- La notion de rang émerge en plus d'un siècle grâce à l'étude des systèmes linéaires (Dorier, 1993).
- PANORAMA :

Étude des systèmes linéaires $n \times n$

1750 — Euler : systèmes équivalents, rang du système et dimension du sous-espace solution

1861 — Smith : système homogène $n \times (n+m)$, nombre maximal de solutions indépendantes

Genèse et développement historiques (4/5)

Le point de vue paramétrique

- La genèse du point de vue paramétrique est liée à celle de la notion de rang (Alves-Dias, 1998).
- La notion de rang émerge en plus d'un siècle grâce à l'étude des systèmes linéaires (Dorier, 1993).
- PANORAMA :

Étude des systèmes linéaires $n \times n$

1750 — Euler : systèmes équivalents, rang du système et dimension du sous-espace solution

1861 — Smith : système homogène $n \times (n + m)$, nombre maximal de solutions indépendantes

1864 — Baltzer : systèmes indéterminés, nombre d'équations indépendantes et taille de l'ensemble des solutions

Genèse et développement historiques (4/5)

Le point de vue paramétrique

- La genèse du point de vue paramétrique est liée à celle de la notion de rang (Alves-Dias, 1998).
- La notion de rang émerge en plus d'un siècle grâce à l'étude des systèmes linéaires (Dorier, 1993).
- PANORAMA :

Étude des systèmes linéaires $n \times n$

1750 : Euler : systèmes équivalents, rang du système et dimension du sous-espace solution

1861 : Smith : système homogène $n \times (n+m)$, nombre maximal de solutions indépendantes

1864 : Baltzer : systèmes indéterminés, nombre d'équations indépendantes et taille de l'ensemble des solutions

1879 : Frobenius : système homogène $m \times n$ avec $m < n$, ensembles des solutions

Genèse et développement historiques (5/5)

Le point de vue paramétrique

- Le point de vue paramétrique émerge
  - après le point de vue cartésien.
  - d'abord en GV (Mobïus, 1818) et puis en GA.
  - à partir d'un questionnement sur les conditions d'existence des solutions de systèmes linéaires indéterminés.
- L'articulation des points de vue se fait
  - d'abord dans le sens cartésien/paramétrique.
  - uniquement lorsque le nombre minimal d'équations indépendantes du système a été relié au nombre minimal de vecteurs qui engendrent l'ensemble des solutions (Alves-Dias, 1998).

Étude historico-épistémologique

Aspects frappants

- Les objets sont décrits par des équations dans l'objectif de résoudre des problèmes géométriques.
- La manipulation des équations peut amener une perte du côté géométrique du problème.
  $\hookrightarrow$ jeux entre les cadres de la GS et de la GA.
- La notion de rang joue un rôle important dans l'émergence du point de vue paramétrique.
  $\hookrightarrow$ moyen de contrôle sur le nombre de vecteurs et de paramètres à utiliser.
- L'étude des systèmes d'équations et de leurs solutions a été nécessaire pour l'émergence de la notion de rang.

Étude curriculaire

Éléments méthodologiques

- OBJECTIF : étudier l'organisation des connaissances en géométrie analytique dans l'espace.
  ↪ Mettre en évidence les rapports entre ce qui est nouveau et ce qui a déjà été travaillé.
- Analyse des référentiels pour la Belgique francophone.
- Analyse des programmes de la FWB.

Les référentiels de l'enseignement secondaire (1/2)

Mathématiques pour scientifiques : 3e degré de transition (5e année)		
5S UAA7	**Unité d'acquis d'apprentissage**	*Géométrie synthétique et analytique de l'espace*

Compétences à développer

DÉMONTRER DES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES EN UTILISANT DES OUTILS SYNTHÉTIQUES ET/OU ANALYTIQUES
CARACTÉRISER ANALYTIQUEMENT DES DROITES ET DES PLANS
RÉSOUDRE UN PROBLÈME GÉOMÉTRIQUE EN UTILISANT DES ÉQUATIONS DE PLANS ET DE DROITES

Processus		Ressources
Appliquer • *Déterminer des équations vectorielles, paramétriques et cartésiennes de droites et de plans.* • *Représenter, à partir de leurs équations, des droites et des plans parallèles à un des axes du repère* • *Déterminer l'équation d'une droite ou d'un plan à partir de sa représentation dans un repère* • *Calculer la distance entre deux points, un point et une droite, entre un point et un plan, entre deux droites parallèles, entre deux plans parallèles, entre deux droites gauches.* • *Rechercher l'équation d'un plan médiateur* • *Déterminer l'intersection de trois plans, de deux droites, d'une droite et d'un plan et en déduire leurs positions relatives*	**Transférer** • *Démontrer une propriété géométrique par une méthode synthétique* • *Démontrer une propriété géométrique par une méthode analytique* • *Discuter, en fonction d'un paramètre, l'intersection d'une droite avec une famille de plans ou d'un plan avec une famille de droites*	Point de vue synthétique Droites orthogonales Droite perpendiculaire à un plan Plans perpendiculaires Critère d'orthogonalité de deux droites Critère de perpendicularité d'une droite et d'un plan, de deux plans Construction de la perpendiculaire commune à deux droites gauches Distance Plan médiateur et propriété Point de vue analytique Vecteur directeur d'une droite Vecteurs directeurs d'un plan Équations vectorielle, paramétriques, cartésiennes d'une droite Équations vectorielle, paramétriques, cartésiennes d'un plan Équation d'un plan sous forme d'un déterminant Propriétés du déterminant utiles à la détermination de l'équation d'un plan Calcul d'un déterminant par la méthode des mineurs Vecteur normal à un plan Condition de parallélisme et d'orthogonalité de deux droites Condition de parallélisme et de perpendicularité de deux plans Condition de parallélisme et de perpendicularité d'une droite et d'un plan Distance entre deux points, entre un point et un plan
Connaitre • *Identifier des droites orthogonales, des droites perpendiculaires, des plans et droites perpendiculaires dans un polyèdre*		

Stratégies transversales
Rédiger, argumenter, structurer, démontrer
Mobiliser l'outil algébrique
Utiliser l'outil informatique
Esquisser des figures de l'espace

Les référentiels de l'enseignement secondaire (1/2)

Mathématiques pour scientifiques : 3ᵉ degré de transition (5ᵉ année)		
5S UAA7	Unité d'acquis d'apprentissage	*Géométrie synthétique et analytique de l'espace*

Compétences à développer

DÉMONTRER DES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES EN UTILISANT DES OUTILS SYNTHÉTIQUES ET/OU ANALYTIQUES
CARACTÉRISER ANALYTIQUEMENT DES DROITES ET DES PLANS
RÉSOUDRE UN PROBLÈME GÉOMÉTRIQUE EN UTILISANT DES ÉQUATIONS DE PLANS ET DE DROITES

Processus		Ressources
Appliquer • *Déterminer des équations vectorielles, paramétriques et cartésiennes de droit* • *Représenter, à partir plans parallèles à un* • *Déterminer l'équatio de sa représentation* • *Calculer la distance e droite, entre un point parallèles, entre deux gauches.* • *Rechercher l'équatio* • *Déterminer l'intersec d'une droite et d'un p relatives* **Connaitre** • *Identifier des droites*	**Transférer** • *Démontrer une propriété géométrique par une méthode*	Point de vue synthétique Droites orthogonales n plan deux droites é d'une droite et d'un plan, diculaire commune à deux é oite lan métriques, cartésiennes métriques, cartésiennes rme d'un déterminant utiles à la détermination Calcul d'un déterminant par la méthode des mineurs Vecteur normal à un plan Condition de parallélisme et d'orthogonalité de deux droites Condition de parallélisme et de perpendicularité de deux plans Condition de parallélisme et de perpendicularité d'une droite et d'un plan Distance entre deux points, entre un point et un plan

Stratégies transversales
Rédiger, argumenter, structurer, démontrer
Mobiliser l'outil algébrique
Utiliser l'outil informatique
Esquisser des figures de l'espace

Démontrer des propriétés géométriques en utilisant des outils synthétiques et/ou analytiques.
Caractériser analytiquement des droites et des plans.
Résoudre un problème géométrique en utilisant des équations de plans et de droites.

Les référentiels de l'enseignement secondaire (1/2)

Mathématiques pour scientifiques : 3e degré de transition (5e année)

5S UAA7	Unité d'acquis d'apprentissage	*Géométrie synthétique et analytique de l'espace*

Compétences à développer

DÉMONTRER DES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES EN UTILISANT DES OUTILS SYNTHÉTIQUES ET/OU ANALYTIQUES

CARACTÉRISER ANALYTIQUEMENT DES DROITES ET DES PLANS

RÉSOUDRE UN PROBLÈME GÉOMÉTRIQUE EN UTILISANT DES ÉQUATIONS DE PLANS ET DE DROITES

Vecteurs directeurs d'une droite et d'un plan.
Équations vectorielles, paramétriques et cartésiennes d'une droite et d'un plan.
Équation d'un plan sous forme de déterminant.
Vecteur normal à un plan.
Positions relatives de deux droites, de deux plans, d'une droite et d'un plan.

Ressources

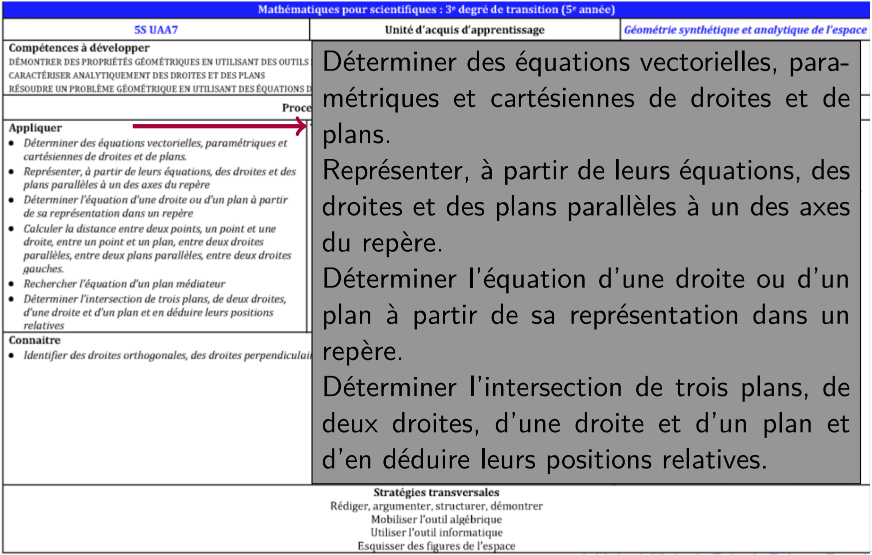
Point de vue synthétique
- Droites orthogonales
- Droite perpendiculaire à un plan
- Plans perpendiculaires
- Critère d'orthogonalité de deux droites
- Critère de perpendicularité d'une droite et d'un plan, de deux plans
- Construction de la perpendiculaire commune à deux droites gauches
- Distance
- Plan médiateur et propriété

Point de vue analytique
- Vecteur directeur d'une droite
- Vecteurs directeurs d'un plan
- Équations vectorielle, paramétriques, cartésiennes d'une droite
- Équations vectorielle, paramétriques, cartésiennes d'un plan
- Équation d'un plan sous forme d'un déterminant
- Propriétés du déterminant utiles à la détermination de l'équation d'un plan
- Calcul d'un déterminant par la méthode des mineurs
- Vecteur normal à un plan
- Condition de parallélisme et d'orthogonalité de deux droites
- Condition de parallélisme et de perpendicularité de deux plans
- Condition de parallélisme et de perpendicularité d'une droite et d'un plan
- Distance entre deux points, entre un point et un plan

Stratégies transversales

Rédiger, argumenter, structurer, démontrer
Mobiliser l'outil algébrique
Utiliser l'outil informatique
Esquisser des figures de l'espace

Les référentiels de l'enseignement secondaire (1/2)



Mathématiques pour scientifiques : 3ᵉ degré de transition (5ᵉ année)		
5S UAA7	Unité d'acquis d'apprentissage	*Géométrie synthétique et analytique de l'espace*

Compétences à développer

DÉMONTRER DES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES EN UTILISANT DES OUTILS

CARACTÉRISER ANALYTIQUEMENT DES DROITES ET DES PLANS

RÉSOUDRE UN PROBLÈME GÉOMÉTRIQUE EN UTILISANT DES ÉQUATIONS D

Proce

Appliquer

- *Déterminer des équations vectorielles, paramétriques et cartésiennes de droites et de plans.*
- *Représenter, à partir de leurs équations, des droites et des plans parallèles à un des axes du repère*
- *Déterminer l'équation d'une droite ou d'un plan à partir de sa représentation dans un repère*
- *Calculer la distance entre deux points, un point et une droite, entre un point et un plan, entre deux droites parallèles, entre deux plans parallèles, entre deux droites gauches.*
- *Rechercher l'équation d'un plan médiateur*
- *Déterminer l'intersection de trois plans, de deux droites, d'une droite et d'un plan et en déduire leurs positions relatives*

Connaitre

- *Identifier des droites orthogonales, des droites perpendiculai*

Stratégies transversales

Rédiger, argumenter, structurer, démontrer

Mobiliser l'outil algébrique

Utiliser l'outil informatique

Esquisser des figures de l'espace

Déterminer des équations vectorielles, paramétriques et cartésiennes de droites et de plans.

Représenter, à partir de leurs équations, des droites et des plans parallèles à un des axes du repère.

Déterminer l'équation d'une droite ou d'un plan à partir de sa représentation dans un repère.

Déterminer l'intersection de trois plans, de deux droites, d'une droite et d'un plan et d'en déduire leurs positions relatives.

Les référentiels de l'enseignement secondaire (2/2)

Etre capable de raisonner, de justifier, de démontrer, d'argumenter est indispensable dans un monde en perpétuelle évolution. Dans une perspective d'apprentissage tout au long de la vie, il permet d'acquérir un esprit critique, une démarche scientifique et une faculté d'adaptation. L'élève sera régulièrement invité à les exercer lors d'activités telles que comparer diverses méthodes de résolution, [. . .], examiner la plausibilité d'une solution [. . .] (p. 8).

Là où la géométrie synthétique est plus difficile à mettre en œuvre, la géométrie analytique se révèle être un outil puissant de démonstration qui permet de résoudre plus simplement certains problèmes. Toutefois, elle peut masquer le côté visuel des objets de l'espace (p. 46).

Quelques résultats

- L'aspect sémantique des équations semble peu abordé.
- Les aspects « description » et « reconnaissance » des objets à partir d'équations peuvent être travaillés.
- Seul l'aspect « reconnaissance » des objets à partir d'ensembles semble présent.
- Une certaine flexibilité peut être développée en termes :
  - de cadres géométriques : jeux entre la GS et la GA.
  - de registres : conversions entre le registre algébrique, de la langue naturelle et graphique.
- L'articulation des points de vue n'est pas préconisée par les référentiels.
- La notion de rang est absente des référentiels.

Plan

Méthodologie

- OBJECTIF : analyser le travail mathématique proposé aux élèves.

Méthodologie

- OBJECTIF : analyser le travail mathématique proposé aux élèves.
- Analyse de plusieurs manuels belges francophones (Nihoul, 2018) : *Espace math* (2004), *Actimath*(2015), *CQFD* (2014), *CQFD* (2019).

Méthodologie

- OBJECTIF : analyser le travail mathématique proposé aux élèves.
- Analyse de plusieurs manuels belges francophones (Nihoul, 2018) : *Espace math* (2004), *Actimath*(2015), *CQFD* (2014), *CQFD* (2019).
- Analyse des scénarios d'enseignement proposés par plusieurs enseignants et de leurs déroulements en classe :
  - 5 enseignants : P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5.
  - Étude des moments de cours et des phases d'exercices.

Cadre de la théorie de l'activité

- OUTILS THÉORIQUES : les activités[1] des élèves, considérées dans notre cadre théorique (TA) comme un intermédiaire pour caractériser les apprentissages.

1. Ce que les élèves font, pensent et disent mais aussi ce qu'ils ne pensent pas, ne disent pas ou ne font pas (Robert et al., 2012).

Cadre de la théorie de l'activité

- Outils théoriques : les activités [1] des élèves, considérées dans notre cadre théorique (TA) comme un intermédiaire pour caractériser les apprentissages.
- Méthodologie : comparer les activités attendues (*a priori*) des élèves et celles effectives (*a posteriori*).

1. Ce que les élèves font, pensent et disent mais aussi ce qu'ils ne pensent pas, ne disent pas ou ne font pas (Robert et al., 2012).

Cadre de la théorie de l'activité

- OUTILS THÉORIQUES : les activités[1] des élèves, considérées dans notre cadre théorique (TA) comme un intermédiaire pour caractériser les apprentissages.
- MÉTHODOLOGIE : comparer les activités attendues (*a priori*) des élèves et celles effectives (*a posteriori*).

Hypothèses théoriques

- La qualité des interventions de l'enseignant en classe peut influencer les activités des élèves (Abboud-Blanchard et al., 2017).
- L'enseignant essaie durant les moments de cours de faire progresser les connaissances des élèves en restant « proche » d'eux, c'est-à-dire en activant des connexions entre les mots et le travail déjà fait (Bridoux et al., 2016).

1. Ce que les élèves font, pensent et disent mais aussi ce qu'ils ne pensent pas, ne disent pas ou ne font pas (Robert et al., 2012).

L'analyse des moments de cours et des exercices

- Analyse *a priori :*
  - MOMENTS DE COURS : étudier les traitements internes (cadres, registres, points de vue), les occasions de proximités (Robert & Vandebrouck, 2014) entre les connaissances nouvelles et les connaissances anciennes des élèves ou le travail qu'ils ont déjà fait.
  - EXERCICES : étudier les adaptations des connaissances (Robert, 1998) telles que l'organisation des raisonnements, les mises en relation, les choix de méthodes, les traitements internes, . . .
- Analyse *a posteriori :*
  - MOMENTS DE COURS : étudier les proximités tentées (ou non) dans le discours de l'enseignant en classe.
  - EXERCICES : étudier les exercices effectivement résolus, leur ordre, la nature du travail imposé (recherche, discussion, correction, collectif, individuel,. . .) et les aides proposées par l'enseignant (Robert, 2007).

Les proximités-en-acte : exemples

- Une occasion de proximité ascendante (OPA) : du particulier vers le général.

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(4, 5, 6) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Les proximités-en-acte : exemples

- Une occasion de proximité ascendante (OPA) : du particulier vers le général.

$$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + \lambda(v_1, v_2, v_3) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\uparrow$$

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(4, 5, 6) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Les proximités-en-acte : exemples

- Une occasion de proximité ascendante (OPA) : du particulier vers le général.
- Une occasion de proximité descendante (OPD) : du général vers le particulier.

$$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + \lambda(v_1, v_2, v_3) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\uparrow$$

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(4, 5, 6) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Les proximités-en-acte : exemples

- Une occasion de proximité ascendante (OPA) : du particulier vers le général.
- Une occasion de proximité descendante (OPD) : du général vers le particulier.

$$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + \lambda(v_1, v_2, v_3) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\downarrow \uparrow$$

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(4, 5, 6) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Les proximités-en-acte : exemples

- Une occasion de proximité ascendante (OPA) : du particulier vers le général.
- Une occasion de proximité descendante (OPD) : du général vers le particulier.
- Une occasion de proximité horizontale (OPH) : même niveau de généralité.

$$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + \lambda(v_1, v_2, v_3) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\downarrow \uparrow$$

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(4, 5, 6) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Les proximités-en-acte : exemples

- Une occasion de proximité ascendante (OPA) : du particulier vers le général.
- Une occasion de proximité descendante (OPD) : du général vers le particulier.
- Une occasion de proximité horizontale (OPH) : même niveau de généralité.

$$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + \lambda(v_1, v_2, v_3) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\downarrow \uparrow$$

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(4, 5, 6) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2 + 5\lambda \\ z = 3 + 6\lambda \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Étude de terrain (1/6)

Les moments de cours

Extrait P_4

Soit d une droite comprenant le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et vecteur directeur $\overrightarrow{u}(u_1, u_2, u_3)$

- Si $u_1 = 0$, $u_2 \neq 0$ et $u_3 \neq 0$, alors $d \equiv \begin{cases} x = x_A \\ \dfrac{y - y_A}{u_2} = \dfrac{z - z_A}{u_3} \end{cases}$

  La droite d est alors incluse à un plan parallèle au plan Oyz.

Étude de terrain (1/6)

Les moments de cours

Extrait P_4

Soit d une droite comprenant le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et vecteur directeur $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$

- Si $u_1 = 0$, $u_2 \neq 0$ et $u_3 \neq 0$, alors $d \equiv \begin{cases} x = x_A \\ \dfrac{y - y_A}{u_2} = \dfrac{z - z_A}{u_3} \end{cases}$

  La droite d est alors incluse à un plan parallèle au plan Oyz.

Analyse a priori :

- Liens à effectuer entre l'exemple et le point théorique : OPA.
- Absence d'explications concernant les conversions de registres : OPH.
- Mise en jeu des connaissances des cadres de la GS, GV et GA : OPH.

Étude de terrain (2/6)

Les moments de cours

Extrait P_4 (1')

Alors, ici, je vous ai donné tous les cas. Les trois premiers cas, c'est si une de mes composantes est nulle. Alors, j'aurai un système de cette forme-ci. Je dis système mais ça reste quand même une équation cartésienne. Pourquoi ? Parce que j'ai plus de paramètre k*. D'accord ? Donc on s'adapte et ça revient vraiment à ce qu'on a dit. Et donc, ces droites, elles ont la particularité d'être incluses à un plan parallèle, évidemment vous adaptez en fonction de la composante qui est nulle.*

Étude de terrain (2/6)

Les moments de cours

Extrait P_4 (1')

Alors, ici, je vous ai donné tous les cas. Les trois premiers cas, c'est si une de mes composantes est nulle. Alors, j'aurai un système de cette forme-ci. Je dis système mais ça reste quand même une équation cartésienne. Pourquoi ? Parce que j'ai plus de paramètre k. D'accord ? Donc on s'adapte et ça revient vraiment à ce qu'on a dit. Et donc, ces droites, elles ont la particularité d'être incluses à un plan parallèle, évidemment vous adaptez en fonction de la composante qui est nulle.

Analyse a posteriori :

- Peu de liens entre l'exemple réalisé et le point théorique : occasion de proximités manquée.
- Aucun rapprochement tenté avec les connaissances des élèves en GS et GV : occasion de proximités manquée.
- Pas d'explication sur les conversions de registres : occasion de proximités manquée.
- Commentaire ajouté sur l'articulation des points de vue dans le sens paramétrique/cartésien.

Étude de terrain (3/6)

Les exercices

Extrait P_2

Déterminer les équations paramétriques et cartésiennes du plan passant par $A(1,3,7)$, $B(5,2,1)$, $C(7,8,9)$.

Étude de terrain (3/6)

Les exercices

Extrait P_2

Déterminer les équations paramétriques et cartésiennes du plan passant par $A(1,3,7)$, $B(5,2,1)$, $C(7,8,9)$.

ANALYSE A PRIORI :

- Organisation du raisonnement : déterminer deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan, écrire une EP du plan, écrire une EC du plan.
- Choix de méthodes P/C : éliminer les paramètres, calculer un déterminant.
- Connaissances mobilisées : systèmes, déterminants, vecteurs, EP et EC de plans.
- Traitements internes : conversion de registres, changement de cadres, articulation des points de vue.

Étude de terrain (4/6)

Les exercices

ANALYSE A POSTERIORI (11'40) :

- Nature du travail : recherche collective.
- Jeu de questions/réponses entre l'enseignant et les élèves.
- Prise en charge de nombreuses adaptations des connaissances par l'enseignant : organisation du raisonnement, choix de méthodes, articulation des points de vue.
- Des aides procédurales sont données par l'enseignant.
- Les activités des élèves sont minorées : écouter, recopier, mobiliser les connaissances anciennes sur les déterminants et nouvelles sur les EP de plans, changement de cadres.

Étude de terrain (5/6)

Les exercices

Extrait P_5

Étudie la position relative des plans $\alpha \equiv 3y + 2x = 1 + 5z$ et $\beta \equiv x = 2 + 2y + z$.

Étude de terrain (5/6)

Les exercices

Extrait P_5

Étudie la position relative des plans $\alpha \equiv 3y + 2x = 1 + 5z$ et $\beta \equiv x = 2 + 2y + z$.

ANALYSE A PRIORI :

- Organisation du raisonnement : résoudre un système, écrire l'ensemble des solutions, déterminer la position relative des plans.
- Connaissances mobilisées : systèmes, ensembles, positions relatives de deux plans, EC plans, EP droites.
- Traitements internes : conversions de registres, changement de cadres.
- La reconnaissance des objets géométriques peut être travaillée.

Étude de terrain (6/6)

Les exercices

Analyse a posteriori : (16')

- Rappels sur les connaissances antérieures de GS par l'enseignant : tentatives de proximités horizontales.
- Nature du travail : recherche collective.
- Jeu de questions/réponses entre l'enseignant et les élèves.
- Prise en charge de nombreuses adaptations des connaissances par l'enseignant.
- Des aides procédurales sont données par l'enseignant.
- Les activités des élèves sont minorées : écouter, recopier, répondre brièvement aux questions.
- La reconnaissance des objets n'est pas travaillée.

Premiers résultats

- Les 5 scénarios étudiés sont similaires entre eux et aux manuels scolaires.

Premiers résultats

- Les 5 scénarios étudiés sont similaires entre eux et aux manuels scolaires.
- L'aspect « reconnaissance » n'est abordé que pour les équations cartésiennes de droites particulières (3/5 P).

Premiers résultats

- Les 5 scénarios étudiés sont similaires entre eux et aux manuels scolaires.
- L'aspect « reconnaissance » n'est abordé que pour les équations cartésiennes de droites particulières (3/5 P).
- Présence des cadres de la GS et la GA dans tous les scénarios MAIS :

Premiers résultats

- Les 5 scénarios étudiés sont similaires entre eux et aux manuels scolaires.
- L'aspect « reconnaissance » n'est abordé que pour les équations cartésiennes de droites particulières (3/5 P).
- Présence des cadres de la GS et la GA dans tous les scénarios MAIS :
  - les jeux de cadres restent ponctuels et souvent dans le sens GS $\rightarrow$ GA.
  - pas de parallèle entre les outils et les démarches des 2 cadres (1/5 P).

Premiers résultats

- Les 5 scénarios étudiés sont similaires entre eux et aux manuels scolaires.
- L'aspect « reconnaissance » n'est abordé que pour les équations cartésiennes de droites particulières (3/5 P).
- Présence des cadres de la GS et la GA dans tous les scénarios MAIS :
  - les jeux de cadres restent ponctuels et souvent dans le sens GS $\rightarrow$ GA.
  - pas de parallèle entre les outils et les démarches des 2 cadres (1/5 P).
- Présence des points de vue paramétrique et cartésien MAIS leur articulation s'effectue principalement dans le sens paramétrique/cartésien.

Premiers résultats

- Les 5 scénarios étudiés sont similaires entre eux et aux manuels scolaires.
- L'aspect « reconnaissance » n'est abordé que pour les équations cartésiennes de droites particulières (3/5 P).
- Présence des cadres de la GS et la GA dans tous les scénarios MAIS :
  - les jeux de cadres restent ponctuels et souvent dans le sens GS $\rightarrow$ GA.
  - pas de parallèle entre les outils et les démarches des 2 cadres (1/5 P).
- Présence des points de vue paramétrique et cartésien MAIS leur articulation s'effectue principalement dans le sens paramétrique/cartésien.
- Peu d'explications sont proposées sur les traitements internes à réaliser dans les documents MAIS elles sont prises en compte par le discours de l'enseignant en classe (proximités, aides).
  $\Rightarrow$ Pas d'impact sur les activités des élèves.

Premiers résultats

- Les 5 scénarios étudiés sont similaires entre eux et aux manuels scolaires.
- L'aspect « reconnaissance » n'est abordé que pour les équations cartésiennes de droites particulières (3/5 P).
- Présence des cadres de la GS et la GA dans tous les scénarios MAIS :
  - les jeux de cadres restent ponctuels et souvent dans le sens GS $\rightarrow$ GA.
  - pas de parallèle entre les outils et les démarches des 2 cadres (1/5 P).
- Présence des points de vue paramétrique et cartésien MAIS leur articulation s'effectue principalement dans le sens paramétrique/cartésien.
- Peu d'explications sont proposées sur les traitements internes à réaliser dans les documents MAIS elles sont prises en compte par le discours de l'enseignant en classe (proximités, aides).
  $\Rightarrow$ Pas d'impact sur les activités des élèves.
- Les conditions de travail et les aides procédurales apportées par les enseignants minorent les activités des élèves prévues *a priori*.

Bilan de l'étude de terrain

Les activités possibles des élèves

- Décrire les objets géométriques par des équations dans les deux points de vue.
- Mobiliser leurs connaissances des cadres de GS, GV et GA.
- Articuler les points de vue dans le sens paramétrique/cartésien.

Bilan de l'étude de terrain

Les activités possibles des élèves

- Décrire les objets géométriques par des équations dans les deux points de vue.
- Mobiliser leurs connaissances des cadres de GS, GV et GA.
- Articuler les points de vue dans le sens paramétrique/cartésien.

Nouveau questionnement

Est-il possible d'agir sur l'enseignement de ces notions pour prendre en compte les difficultés des apprenants et favoriser les apprentissages ?

Plan

Comment agir sur l'enseignement ?

- OBJECTIF : Élaborer une séquence d'enseignement sur ces notions permettant de développer l'interprétation géométrique des élèves et d'articuler les deux points de vue.
- Prendre appui sur les résultats et les leviers issus :
  - de l'étude de relief sur les notions à enseigner ;
  - d'une analyse des manuels scolaires ;
  - d'une étude de terrain.
- Expérimenter la séquence.
- Proposer une évaluation pour déduire les apprentissages potentiels des élèves à la suite de l'expérimentation.

Extrait d'un moment de cours (1/2)

Tâche introductive 2

Recherchez graphiquement l'ensemble des solutions des systèmes suivants dans $\mathbb{R}^3$.

$$(S_1)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4z-3=2z+1 \\ y=0 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4y+4=0 \end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases} x=y \\ y=z \end{cases}$$

$$(S_4)\begin{cases} x=\frac{y}{2}=z-2 \\ z=2 \end{cases} \qquad (S_5)\begin{cases} \frac{x-1}{3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+2}{4} \\ 2x+3y+4z=5 \end{cases} \qquad (S_6)\begin{cases} 2x+3y+4z=5 \\ 6x+9y+12z=8 \end{cases}$$

Extrait d'un moment de cours (1/2)

Tâche introductive 2

Recherchez graphiquement l'ensemble des solutions des systèmes suivants dans $\mathbb{R}^3$.

$$(S_1)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4z-3=2z+1 \\ y=0 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4y+4=0 \end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases} x=y \\ y=z \end{cases}$$

$$(S_4)\begin{cases} x=\frac{y}{2}=z-2 \\ z=2 \end{cases} \qquad (S_5)\begin{cases} \frac{x-1}{3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+2}{4} \\ 2x+3y+4z=5 \end{cases} \qquad (S_6)\begin{cases} 2x+3y+4z=5 \\ 6x+9y+12z=8 \end{cases}$$

- Activités attendues : considérer un ensemble de triplets, représenter l'ensemble, identifier les objets, chercher les intersections éventuelles des objets, écrire l'ensemble des solutions.

Extrait d'un moment de cours (1/2)

Tâche introductive 2

Recherchez graphiquement l'ensemble des solutions des systèmes suivants dans $\mathbb{R}^3$.

$$(S_1)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4z-3=2z+1 \\ y=0 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x+5=2x+3 \\ 4y+4=0 \end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases} x=y \\ y=z \end{cases}$$

$$(S_4)\begin{cases} x=\frac{y}{2}=z-2 \\ z=2 \end{cases} \qquad (S_5)\begin{cases} \frac{x-1}{3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+2}{4} \\ 2x+3y+4z=5 \end{cases} \qquad (S_6)\begin{cases} 2x+3y+4z=5 \\ 6x+9y+12z=8 \end{cases}$$

- Activités attendues : considérer un ensemble de triplets, représenter l'ensemble, identifier les objets, chercher les intersections éventuelles des objets, écrire l'ensemble des solutions.
- Gestion : discussion collective entrecoupée de phases de recherche individuelle, tentatives de proximités par l'enseignant avec ce que les élèves connaissent ou ont déjà fait.

Extrait d'un moment de cours (2/2)

Tâche introductive 2 - S_4 (66'20)

$$(S_4)\begin{cases} x = \frac{y}{2} = z - 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

Extrait d'un moment de cours (2/2)

Tâche introductive 2 - S_4 (66'20)

$$(S_4)\begin{cases} x = \frac{y}{2} = z - 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

- Aide : la double égalité est écrite sous forme de système.

Extrait d'un moment de cours (2/2)

Tâche introductive 2 - S_4 (66'20)

$$(S_4)\begin{cases} x = \frac{y}{2} = z - 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

- Aide : la double égalité est écrite sous forme de système.
- Organisation du raisonnement : considérer des ensembles de triplets, reconnaître les objets décrits, déterminer la position relative de la droite et du plan.

Extrait d'un moment de cours (2/2)

Tâche introductive 2 - S_4 (66'20)

$$(S_4)\ \begin{cases} x = \frac{y}{2} = z - 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

- Aide : la double égalité est écrite sous forme de système.
- Organisation du raisonnement : considérer des ensembles de triplets, reconnaître les objets décrits, déterminer la position relative de la droite et du plan.
- Connaissances mobilisées : positions relatives, vecteurs, colinéarité, produit scalaire, EC de plans particuliers, EP de droites.

Extrait d'un moment de cours (2/2)

Tâche introductive 2 - S_4 (66'20)

$$(S_4)\begin{cases} x = \frac{y}{2} = z - 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

- Aide : la double égalité est écrite sous forme de système.
- Organisation du raisonnement : considérer des ensembles de triplets, reconnaître les objets décrits, déterminer la position relative de la droite et du plan.
- Connaissances mobilisées : positions relatives, vecteurs, colinéarité, produit scalaire, EC de plans particuliers, EP de droites.
- Traitements internes : changements de cadres, conversions de registres, articulations des points de vue.

Extrait d'un moment de cours (2/2)

Tâche introductive 2 - S_4 (66'20)

$$(S_4)\begin{cases} x = \frac{y}{2} = z - 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

- Aide : la double égalité est écrite sous forme de système.
- Organisation du raisonnement : considérer des ensembles de triplets, reconnaître les objets décrits, déterminer la position relative de la droite et du plan.
- Connaissances mobilisées : positions relatives, vecteurs, colinéarité, produit scalaire, EC de plans particuliers, EP de droites.
- Traitements internes : changements de cadres, conversions de registres, articulations des points de vue.
- Les élèves ne parviennent à montrer que les équations $x = \frac{y}{2} = z - 2$ représentent une droite.

Extrait d'un moment de cours (2/2)

Tâche introductive 2 - S_4 (66'20)

$$(S_4)\begin{cases} x = \frac{y}{2} = z - 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

- Aide : la double égalité est écrite sous forme de système.
- Organisation du raisonnement : considérer des ensembles de triplets, reconnaître les objets décrits, déterminer la position relative de la droite et du plan.
- Connaissances mobilisées : positions relatives, vecteurs, colinéarité, produit scalaire, EC de plans particuliers, EP de droites.
- Traitements internes : changements de cadres, conversions de registres, articulations des points de vue.
- Les élèves ne parviennent à montrer que les équations $x = \frac{y}{2} = z - 2$ représentent une droite.
- Aides : appui sur la définition d'une droite en GS et en GV, des dessins, des gestes.

Extrait d'un moment de cours (2/2)

Tâche introductive 2 - S_4 (66'20)

$$(S_4)\begin{cases} x = \frac{y}{2} = z - 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

- Aide : la double égalité est écrite sous forme de système.
- Organisation du raisonnement : considérer des ensembles de triplets, reconnaître les objets décrits, déterminer la position relative de la droite et du plan.
- Connaissances mobilisées : positions relatives, vecteurs, colinéarité, produit scalaire, EC de plans particuliers, EP de droites.
- Traitements internes : changements de cadres, conversions de registres, articulations des points de vue.
- Les élèves ne parviennent à montrer que les équations $x = \frac{y}{2} = z - 2$ représentent une droite.
- Aides : appui sur la définition d'une droite en GS et en GV, des dessins, des gestes.
- Activités possibles conformes à celles prévues *a priori*.

Exemples d'exercices proposés (1/2)

Exercice 15

Soient les plans $\alpha \equiv 2x + y + z = 1$, $\beta \equiv x + y + z = 2$ et $\gamma \equiv x + y + z = 0$. Recherchez l'ensemble des points d'intersection de ces trois plans. Expliquez votre démarche.

Exemples d'exercices proposés (1/2)

Exercice 15

Soient les plans $\alpha \equiv 2x + y + z = 1$, $\beta \equiv x + y + z = 2$ et $\gamma \equiv x + y + z = 0$. Recherchez l'ensemble des points d'intersection de ces trois plans. Expliquez votre démarche.

- Organisation du raisonnement : étudier la position relative des plans, déterminer l'ensemble des points d'intersection.

Exemples d'exercices proposés (1/2)

Exercice 15

Soient les plans $\alpha \equiv 2x + y + z = 1$, $\beta \equiv x + y + z = 2$ et $\gamma \equiv x + y + z = 0$. Recherchez l'ensemble des points d'intersection de ces trois plans. Expliquez votre démarche.

- Organisation du raisonnement : étudier la position relative des plans, déterminer l'ensemble des points d'intersection.
- Connaissances mobilisées : colinéarité, positions relatives, EC de plan.

Exemples d'exercices proposés (1/2)

Exercice 15

Soient les plans $\alpha \equiv 2x + y + z = 1$, $\beta \equiv x + y + z = 2$ et $\gamma \equiv x + y + z = 0$. Recherchez l'ensemble des points d'intersection de ces trois plans. Expliquez votre démarche.

- Organisation du raisonnement : étudier la position relative des plans, déterminer l'ensemble des points d'intersection.
- Connaissances mobilisées : colinéarité, positions relatives, EC de plan.
- Traitements internes : conversions de registres, changement de cadres.

Exemples d'exercices proposés (1/2)

Exercice 15

Soient les plans $\alpha \equiv 2x + y + z = 1$, $\beta \equiv x + y + z = 2$ et $\gamma \equiv x + y + z = 0$. Recherchez l'ensemble des points d'intersection de ces trois plans. Expliquez votre démarche.

- Organisation du raisonnement : étudier la position relative des plans, déterminer l'ensemble des points d'intersection.
- Connaissances mobilisées : colinéarité, positions relatives, EC de plan.
- Traitements internes : conversions de registres, changement de cadres.
- Exercice laissé à la charge des élèves et ne pose pas de difficulté particulière.

Exemples d'exercices proposés (1/2)

Exercice 15

Soient les plans $\alpha \equiv 2x + y + z = 1$, $\beta \equiv x + y + z = 2$ et $\gamma \equiv x + y + z = 0$. Recherchez l'ensemble des points d'intersection de ces trois plans. Expliquez votre démarche.

- Organisation du raisonnement : étudier la position relative des plans, déterminer l'ensemble des points d'intersection.
- Connaissances mobilisées : colinéarité, positions relatives, EC de plan.
- Traitements internes : conversions de registres, changement de cadres.
- Exercice laissé à la charge des élèves et ne pose pas de difficulté particulière.
- Activités possibles conformes à celles prévues *a priori*.

Exemples d'exercices proposés (2/2)

Exercice 18

Soit le système

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 3x + 2y - 5z = 2 \end{cases}$$

Décrivez géométriquement l'ensemble des solutions de ce système. Expliquez votre démarche. Déterminez ensuite algébriquement quel est cet ensemble de solutions.

Exemples d'exercices proposés (2/2)

Exercice 18

Soit le système

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 3x + 2y - 5z = 2 \end{cases}$$

Décrivez géométriquement l'ensemble des solutions de ce système. Expliquez votre démarche. Déterminez ensuite algébriquement quel est cet ensemble de solutions.

- Organisation du raisonnement : reconnaître les objets, déterminer leur position relative, résoudre le système.

Exemples d'exercices proposés (2/2)

Exercice 18

Soit le système

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 3x + 2y - 5z = 2 \end{cases}$$

Décrivez géométriquement l'ensemble des solutions de ce système. Expliquez votre démarche. Déterminez ensuite algébriquement quel est cet ensemble de solutions.

- Organisation du raisonnement : reconnaître les objets, déterminer leur position relative, résoudre le système.
- Connaissances mobilisées : systèmes, positions relatives, EC de plans, EP de droites.

Exemples d'exercices proposés (2/2)

Exercice 18

Soit le système

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 3x + 2y - 5z = 2 \end{cases}$$

Décrivez géométriquement l'ensemble des solutions de ce système. Expliquez votre démarche. Déterminez ensuite algébriquement quel est cet ensemble de solutions.

- Organisation du raisonnement : reconnaître les objets, déterminer leur position relative, résoudre le système.
- Connaissances mobilisées : systèmes, positions relatives, EC de plans, EP de droites.
- Traitements internes : conversions de registres, changement de cadres.

Exemples d'exercices proposés (2/2)

Exercice 18

Soit le système

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 3x + 2y - 5z = 2 \end{cases}$$

Décrivez géométriquement l'ensemble des solutions de ce système. Expliquez votre démarche. Déterminez ensuite algébriquement quel est cet ensemble de solutions.

- Organisation du raisonnement : reconnaître les objets, déterminer leur position relative, résoudre le système.
- Connaissances mobilisées : systèmes, positions relatives, EC de plans, EP de droites.
- Traitements internes : conversions de registres, changement de cadres.
- Discussion collective au lieu d'un travail en autonomie.

Exemples d'exercices proposés (2/2)

Exercice 18

Soit le système

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 3x + 2y - 5z = 2 \end{cases}$$

Décrivez géométriquement l'ensemble des solutions de ce système. Expliquez votre démarche. Déterminez ensuite algébriquement quel est cet ensemble de solutions.

- Organisation du raisonnement : reconnaître les objets, déterminer leur position relative, résoudre le système.
- Connaissances mobilisées : systèmes, positions relatives, EC de plans, EP de droites.
- Traitements internes : conversions de registres, changement de cadres.
- Discussion collective au lieu d'un travail en autonomie.
- Les élèves ne parviennent pas à résoudre un système simplement indéterminé.

Exemples d'exercices proposés (2/2)

Exercice 18

Soit le système

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 3x + 2y - 5z = 2 \end{cases}$$

Décrivez géométriquement l'ensemble des solutions de ce système. Expliquez votre démarche. Déterminez ensuite algébriquement quel est cet ensemble de solutions.

- Organisation du raisonnement : reconnaître les objets, déterminer leur position relative, résoudre le système.
- Connaissances mobilisées : systèmes, positions relatives, EC de plans, EP de droites.
- Traitements internes : conversions de registres, changement de cadres.
- Discussion collective au lieu d'un travail en autonomie.
- Les élèves ne parviennent pas à résoudre un système simplement indéterminé.
- Aide : rappels sur la résolution de systèmes.

Exemples d'exercices proposés (2/2)

Exercice 18

Soit le système

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 3x + 2y - 5z = 2 \end{cases}$$

Décrivez géométriquement l'ensemble des solutions de ce système. Expliquez votre démarche. Déterminez ensuite algébriquement quel est cet ensemble de solutions.

- Organisation du raisonnement : reconnaître les objets, déterminer leur position relative, résoudre le système.
- Connaissances mobilisées : systèmes, positions relatives, EC de plans, EP de droites.
- Traitements internes : conversions de registres, changement de cadres.
- Discussion collective au lieu d'un travail en autonomie.
- Les élèves ne parviennent pas à résoudre un système simplement indéterminé.
- Aide : rappels sur la résolution de systèmes.
- Activités possibles non conformes à celles prévues *a priori*.

Hypothèses sur les apprentissages

- L'interprétation géométrique des objets à partir des équations semble bien maîtrisée par les élèves.
- L'interprétation géométrique des objets à partir d'ensembles reste une source de difficultés pour les élèves.
- Le recours aux proximités dans le discours de l'enseignant semble favoriser les apprentissages des élèves (organiser leur raisonnement, jeux de cadres, intégrer les connaissances nouvelles dans le bagage mathématique des élèves, donner du sens aux équations, surmonter certaines difficultés).

Plan

Questionnaire

Questions 1 et 2 : Interprétation géométrique

Dites si l'objet de l'espace $\mathbb{R}^3$ décrit par une équation, un système d'équations ou un ensemble est une droite ou un plan.

1. $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 2 \\ 4x + 6y + 8z = 4 \end{cases}$
2. $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | (a, b, c) \text{ est simultanément orthogonal à } (1, -1, 1) \text{ et } (1, 2, 1)\}$

Exemples de productions d'élèves (1/2)

Question 1

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 2 \\ 4x + 6y + 8z = 4 \end{cases}$$

Exemples de productions d'élèves (1/2)

Question 1

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 2 \\ 4x + 6y + 8z = 4 \end{cases}$$

- « α et β sont parallèles confondus car les vecteurs sont colinéaires. $\exists k \in \mathbb{R}_0, (4, 6, 8) = k(2, 3, 4),\ k = 2$ » (E_3).
- « 2 plans $\parallel$ confondus $\rightarrow$ plan » (E_7).
- « Cela va donner une droite car on nous donne 2 équations cartésiennes et dans un système comme cela, ça va nous donner l'intersection de 2 plans donc une droite » (E_1).
- « équations cartésiennes du plan qui sont colinéaires. Donc pas d'intersection entre ces 2 plans » (E_5).

Exemples de productions d'élèves (2/2)

Question 2

$\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | (a, b, c)$ est simultanément orthogonal à $(1, -1, 1)$ et $(1, 2, 1)\}$

Exemples de productions d'élèves (2/2)

Question 2

$\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | (a, b, c)$ est simultanément orthogonal à $(1, -1, 1)$ et $(1, 2, 1)\}$

- « Cela va être une droite car nous avons 2 conditions, il faut que (a, b, c) soit orthogonal à $(1, -1, 1)$ et $(1, 2, 1)$. Donc nous avons plus beaucoup de points. Donc cela va donner une droite » (E_1).
- « $(a, b, c) \cdot (1, -1, 1) = 0 \Rightarrow a - b + c = 0$
  $(a, b, c) \cdot (1, 2, 1) = 0 \Rightarrow a + 2b + c = 0$
  Ce n'est ni un plan, ni une droite car on ne trouve pas la même équation de plan. » (E_3).

Questionnaire

Question 3 : Articulation des points de vue

Donnez une équation paramétrique du plan α parallèle au plan $\beta \equiv 2x + 3y + 4z = 8$ et comprenant le point $A(1, 4, 5)$.

Questionnaire

Question 3 : Articulation des points de vue

Donnez une équation paramétrique du plan α parallèle au plan $\beta \equiv 2x + 3y + 4z = 8$ et comprenant le point $A(1, 4, 5)$.

ANALYSE A PRIORI :

- Choix de méthodes : EC $\rightarrow$ EP du plan α ou EC $\rightarrow$ EP du plan β.
- Organisation du raisonnement : traduire le parallélisme, écrire une EC du plan α ou une EP du plan β, déterminer une EP du plan α.
- Connaissances mobilisées : positions relatives, colinéarité, systèmes, vecteurs directeurs et normaux, EP et EC de plans.
- Traitements internes : conversion de registres, articulation des points de vue.

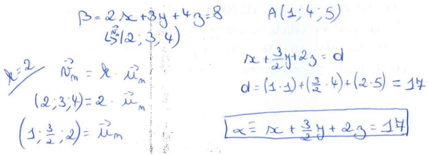


Figure – Extrait E_1

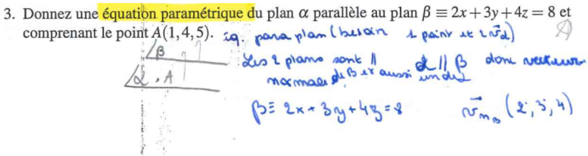

3. Donnez une équation paramétrique du plan α parallèle au plan $\beta \equiv 2x+3y+4z=8$ et comprenant le point $A(1,4,5)$.

Figure – Extrait E_2

Inférences sur les apprentissages des élèves

- L'interprétation géométrique des objets à partir des équations semble maîtrisée par la majorité des élèves.
- La « reconnaissance » des objets à partir d'ensemble est encore problématique pour la plupart des élèves.
  $\Rightarrow$ Difficultés dans la manipulation des ensembles et dans l'organisation des raisonnements.
  $\Rightarrow$ Travail ponctuel dans le registre ensembliste non porteur de sens.
- Il est difficile de se prononcer sur l'articulation des points de vue dans le sens cartésien/paramétrique.
  $\Rightarrow$ Problématique dans les questionnaires mais réalisée en toute autonomie en classe.
- Les proximités tentées semblent donc bien favoriser l'intégration de l'interprétation géométrique et de la flexibilité entre les cadres et les points de vue chez les élèves.

Plan

Bilan de la recherche

- POINT DE DÉPART : difficultés repérées dans l'interprétation géométrique des objets et l'articulation des points de vue.

Bilan de la recherche

- Point de départ : difficultés repérées dans l'interprétation géométrique des objets et l'articulation des points de vue.
- Objectifs : mieux comprendre ces difficultés et trouver comment favoriser les apprentissages des élèves sur ces notions.

Bilan de la recherche

- Point de départ : difficultés repérées dans l'interprétation géométrique des objets et l'articulation des points de vue.
- Objectifs : mieux comprendre ces difficultés et trouver comment favoriser les apprentissages des élèves sur ces notions.
- Comprendre :
  - Croiser les résultats des analyses cognitive, curriculaire, historique et épistémologique.
  - Analyser le travail mathématique proposé dans les manuels scolaires et au sein des classes.

Bilan de la recherche

- Point de départ : difficultés repérées dans l'interprétation géométrique des objets et l'articulation des points de vue.
- Objectifs : mieux comprendre ces difficultés et trouver comment favoriser les apprentissages des élèves sur ces notions.
- Comprendre :
  - Croiser les résultats des analyses cognitive, curriculaire, historique et épistémologique.
  - Analyser le travail mathématique proposé dans les manuels scolaires et au sein des classes.
- Agir : la séquence
  - intègre des leviers issus des analyses didactiques menées en amont de l'enseignement.
  - est différente de ce qui est déjà proposé aux élèves au vu de notre étude de terrain.
  - est analysée en comparant les activités attendues des élèves à leurs activités possibles.

Bilan de la recherche

- Point de départ : difficultés repérées dans l'interprétation géométrique des objets et l'articulation des points de vue.
- Objectifs : mieux comprendre ces difficultés et trouver comment favoriser les apprentissages des élèves sur ces notions.
- Comprendre :
  - Croiser les résultats des analyses cognitive, curriculaire, historique et épistémologique.
  - Analyser le travail mathématique proposé dans les manuels scolaires et au sein des classes.
- Agir : la séquence
  - intègre des leviers issus des analyses didactiques menées en amont de l'enseignement.
  - est différente de ce qui est déjà proposé aux élèves au vu de notre étude de terrain.
  - est analysée en comparant les activités attendues des élèves à leurs activités possibles.
- Expérimentation : les leviers choisis semblent bien favoriser les apprentissages des élèves (vs enseignement classique) même si des difficultés persistent.

Limites et perspectives

- LIMITES du travail :
  - Séquence expérimentée qu'une seule fois sur un petit nombre d'élèves.
  - Un travail régulier doit être proposé sur les notions de théorie des ensembles.

Limites et perspectives

- LIMITES du travail :
  - Séquence expérimentée qu'une seule fois sur un petit nombre d'élèves.
  - Un travail régulier doit être proposé sur les notions de théorie des ensembles.
- PERSPECTIVES :
  - Expérimenter plusieurs fois la séquence (varier les conditions).
  - Mener des entretiens individuels avec les élèves.
  - Transférer l'analyse des pratiques enseignantes à d'autres notions/domaines.

Limites et perspectives

- LIMITES du travail :
  - Séquence expérimentée qu'une seule fois sur un petit nombre d'élèves.
  - Un travail régulier doit être proposé sur les notions de théorie des ensembles.
- PERSPECTIVES :
  - Expérimenter plusieurs fois la séquence (varier les conditions).
  - Mener des entretiens individuels avec les élèves.
  - Transférer l'analyse des pratiques enseignantes à d'autres notions/domaines.
  - Proposer des formations aux enseignants :
    - présentant les difficultés répertoriées chez les élèves pour ces notions,
    - introduisant certains outils didactiques tels que les cadres et les registres.
    - mettant en évidence certains manques dans l'enseignement pour favoriser la conceptualisation des notions chez les élèves (articulation des points de vue, notions de rang et de dimension, . . .).
    - proposant certaines pistes pouvant favoriser les apprentissages des élèves sur les notions de droites et de plans dans l'espace.