

Étude du processus enseignement-apprentissage pour les notions de droites et de plans dans l'espace en Belgique : comment repenser la formation des enseignants ?

Céline Nihoul

Université de Mons
Département de Mathématique



6 mai 2022

Contexte du travail

- PUBLIC : élèves¹ de l'enseignement secondaire en Belgique.

1. Ils ont environ 17 ans.

Contexte du travail

- PUBLIC : élèves¹ de l'enseignement secondaire en Belgique.
- CONSTAT d'enseignant : difficultés récurrentes avec les droites et les plans dans l'espace (Nihoul, 2016).

1. Ils ont environ 17 ans.

Contexte du travail

- PUBLIC : élèves¹ de l'enseignement secondaire en Belgique.
- CONSTAT d'enseignant : difficultés récurrentes avec les droites et les plans dans l'espace (Nihoul, 2016).
- EXEMPLES :
 - $2x + 3y = 2 \iff \text{plan.}$
 - $\left\{ \left(\frac{14}{13}, \frac{19}{13}, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} \iff \text{droite.}$
 - $\frac{x-3}{2} = y = \frac{z}{2} \iff (x, y, z) = (3, 0, 0) + \lambda(2, 1, 2) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$

1. Ils ont environ 17 ans.

Contexte du travail

- PUBLIC : élèves¹ de l'enseignement secondaire en Belgique.
- CONSTAT d'enseignant : difficultés récurrentes avec les droites et les plans dans l'espace (Nihoul, 2016).
- EXEMPLES :
 - $2x + 3y = 2 \iff$ plan.
 - $\left\{ \left(\frac{14}{13}, \frac{19}{13}, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} \iff$ droite.
 - $\frac{x-3}{2} = y = \frac{z}{2} \iff (x, y, z) = (3, 0, 0) + \lambda(2, 1, 2)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Objectifs didactiques

- Mieux **comprendre** les difficultés des élèves.
- Trouver comment **agir** sur l'enseignement pour prendre en compte ces difficultés et favoriser les apprentissages.

1. Ils ont environ 17 ans.

Le cadre de la Théorie de l'Activité

Hypothèse théorique

Les activités des élèves sont considérées comme un intermédiaire pour caractériser leurs apprentissages (Robert & Rogalski, 2002).

MÉTHODOLOGIE :

Le cadre de la Théorie de l'Activité

Hypothèse théorique

Les activités des élèves sont considérées comme un intermédiaire pour caractériser leurs apprentissages (Robert & Rogalski, 2002).

MÉTHODOLOGIE :

- Mener en amont une **étude de relief** sur les notions (Pariès et al., 2007) : croisement des résultats entre une analyse cognitive, curriculaire et historico-épistémologique.
↪ Permet de déterminer les spécificités des notions à enseigner.

Le cadre de la Théorie de l'Activité

Hypothèse théorique

Les activités des élèves sont considérées comme un intermédiaire pour caractériser leurs apprentissages (Robert & Rogalski, 2002).

MÉTHODOLOGIE :

- Mener en amont une **étude de relief** sur les notions (Pariès et al., 2007) : croisement des résultats entre une analyse cognitive, curriculaire et historico-épistémologique.
↪ Permet de déterminer les spécificités des notions à enseigner.
- Étudier les scénarios proposés par les enseignants.
↪ Permet de déterminer les **activités attendues** *a priori* des élèves au regard des spécificités des notions.

Le cadre de la Théorie de l'Activité

Hypothèse théorique

Les activités des élèves sont considérées comme un intermédiaire pour caractériser leurs apprentissages (Robert & Rogalski, 2002).

MÉTHODOLOGIE :

- Mener en amont une **étude de relief** sur les notions (Pariès et al., 2007) : croisement des résultats entre une analyse cognitive, curriculaire et historico-épistémologique.
↪ Permet de déterminer les spécificités des notions à enseigner.
- Étudier les scénarios proposés par les enseignants.
↪ Permet de déterminer les **activités attendues** *a priori* des élèves au regard des spécificités des notions.
- Étudier les déroulements en classe.
↪ Permet de déterminer les **activités effectives** *a posteriori* des élèves au regard de celles attendues.

Quelques spécificités des notions (1/2)

Les notions de droites et de plans dans l'espace peuvent :

Quelques spécificités des notions (1/2)

Les notions de droites et de plans dans l'espace peuvent :

- intervenir dans plusieurs cadres géométriques (Douady, 1992).

GS	GV	GA
Prolongement d'une arête ou d'une face d'un cube.	$\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ $\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$	$(x, y, z) = \lambda(x_1, y_1, z_1)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ $(x, y, z) = \lambda(x_1, y_1, z_1) + \mu(x_2, y_2, z_2)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Quelques spécificités des notions (1/2)

Les notions de droites et de plans dans l'espace peuvent :

- intervenir dans plusieurs cadres géométriques (Douady, 1992).

GS	GV	GA
Prolongement d'une arête ou d'une face d'un cube.	$\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ $\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$	$(x, y, z) = \lambda(x_1, y_1, z_1)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ $(x, y, z) = \lambda(x_1, y_1, z_1) + \mu(x_2, y_2, z_2)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

- être décrites à partir de plusieurs registres (Duval, 1993).

Algébrique	Ensembliste	Dessin
$2x + 3y + 2z = 3$	$\{(x, 2x, x) x \in \mathbb{R}\}$ $\{(x, y, x + y) x, y \in \mathbb{R}\}$	

Quelques spécificités des notions (2/2)

- être décrites selon deux points de vue (Rogalski, 1995).

Paramétrique

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(2, 1, 3) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Cartésien

$$\frac{x-1}{2} = y - 2 = \frac{z-3}{3}$$

Quelques spécificités des notions (2/2)

- être décrites selon deux points de vue (Rogalski, 1995).

Paramétrique

Cartésien

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(2, 1, 3) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\frac{x-1}{2} = y - 2 = \frac{z-3}{3}$$

⇒ Une certaine flexibilité cognitive entre les cadres, les registres et les points de vue est attendue de la part des élèves.

Quelques spécificités des notions (2/2)

- être décrites selon deux points de vue (Rogalski, 1995).

Paramétrique

Cartésien

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(2, 1, 3) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\frac{x-1}{2} = y - 2 = \frac{z-3}{3}$$

⇒ Une certaine flexibilité cognitive entre les cadres, les registres et les points de vue est attendue de la part des élèves.

MAIS cette activité ne se développe pas automatiquement chez les élèves et nécessite un réel travail en classe (Artigue, Chartier & Dorier, 2000).

Question de recherche

Est-il possible de développer la flexibilité cognitive attendue pour les notions de droites et de plans dans l'espace dans l'enseignement secondaire en Belgique ?

Question de recherche

Est-il possible de développer la flexibilité cognitive attendue pour les notions de droites et de plans dans l'espace dans l'enseignement secondaire en Belgique ?

⇒ FOCUS dans cet exposé sur les cadres géométriques (GS, GV, GA).

Panorama des programmes scolaires

Panorama des programmes scolaires

GS du plan

4^e



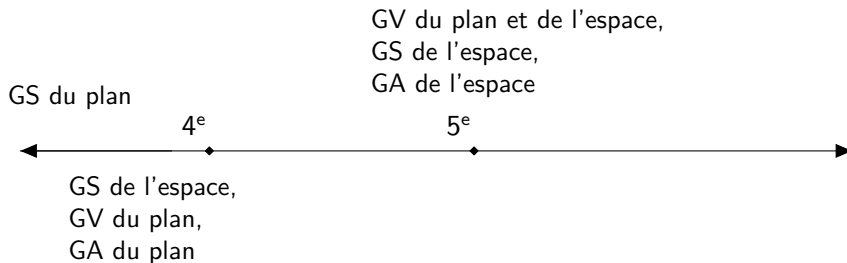
Panorama des programmes scolaires

GS du plan

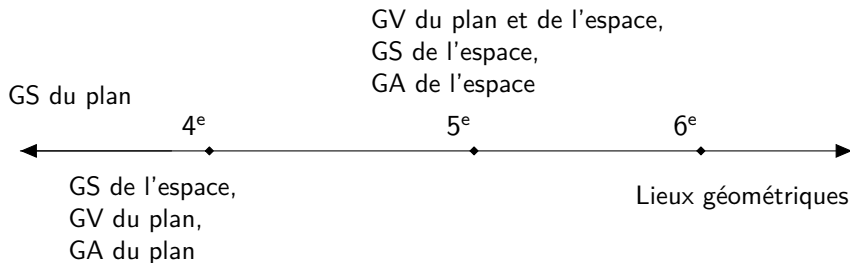
4^e

GS de l'espace,
GV du plan,
GA du plan

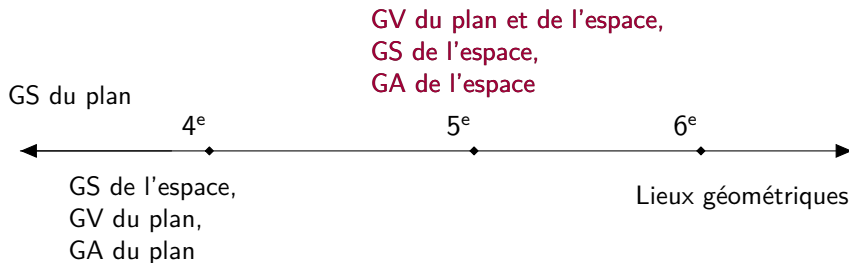
Panorama des programmes scolaires



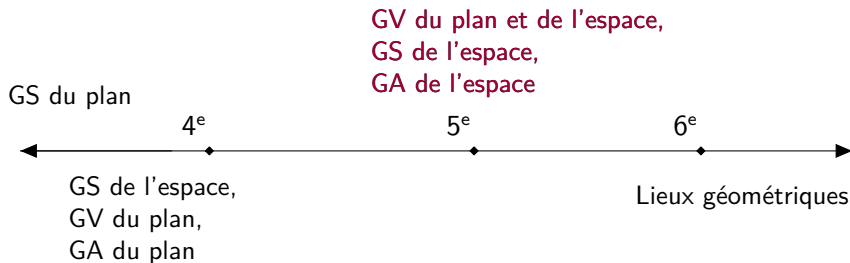
Panorama des programmes scolaires



Panorama des programmes scolaires

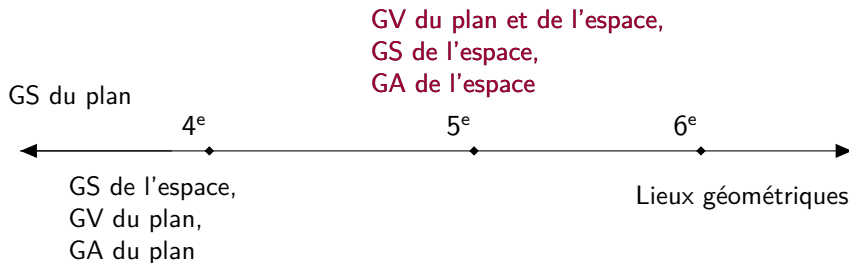


Panorama des programmes scolaires



- **COMPÉTENCES à développer :** Démontrer des propriétés géométriques en utilisant des outils synthétiques et/ou analytiques ; Caractériser analytiquement des droites et des plans ; Résoudre un problème géométrique en utilisant des équations de plans et de droites.

Panorama des programmes scolaires



- **COMPÉTENCES à développer :** Démontrer des propriétés géométriques en utilisant des outils synthétiques et/ou analytiques ; Caractériser analytiquement des droites et des plans ; Résoudre un problème géométrique en utilisant des équations de plans et de droites.

⇒ **Il est possible de développer une certaine flexibilité cognitive entre les cadres géométriques.**

Étude de terrain

ÉLÉMENTS MÉTHODOLOGIQUES :

- Analyse des scénarios et des déroulements correspondants proposés par 5 enseignants en termes d'activités des élèves.
- PROFIL des enseignants : $P_1, P_4 < 5$ ans, $P_3 \in [5, 10]$, $P_2, P_5 > 10$ ans.
- FORMATION des enseignants : Master en math (4 ou 5 années), 2 P ayant suivi une formation en didactique des mathématiques.

Hypothèse

L'utilisation d'outils numériques peut favoriser les changements de cadres dans ce chapitre de géométrie.

- OUTIL NUMÉRIQUE : projecteur pour P_3 , TBI pour P_4 et P_5 .
⇒ pas de formation pour et par le numérique, autoformation.

Analyse des tâches

	NbT	GS $\rightarrow$ GV	GS $\rightarrow$ GA	GV $\rightarrow$ GS	GV $\rightarrow$ GA	GA $\rightarrow$ GS	GA $\rightarrow$ GV
P_1	58	0	0	1	11	0	10
	52	0	0	1	11	0	8
P_2	37	2	0	0	17	0	8
	23	0	0	0	10	0	5
P_3	47	0	0	0	11	0	13
	35	0	0	0	8	0	7
P_4	77	0	0	1	13	0	14
	52	0	0	1	8	0	8
P_5	57	1	0	0	11	0	19
	41	0	0	0	9	0	10

a priori a posteriori

Bilan de l'étude de terrain

- Les 5 séquences étudiées sont similaires entre elles.
- Peu de jeux de cadres et principalement entre GV et GA.
- Les conditions de travail et le discours des enseignants en classe minorent les activités des élèves prévues *a priori*.
- L'utilisation du numérique ne se fait qu'à un niveau superficiel (Bottino & Furinghetti, 96).
↪ même scénario que dans un environnement P/C, mais c'est plus aisé et rapide (Artigue, 2007).

Bilan de l'étude de terrain

- Les 5 séquences étudiées sont similaires entre elles.
- Peu de jeux de cadres et principalement entre GV et GA.
- Les conditions de travail et le discours des enseignants en classe minorent les activités des élèves prévues *a priori*.
- L'utilisation du numérique ne se fait qu'à un niveau superficiel (Bottino & Furinghetti, 96).
↔ même scénario que dans un environnement P/C, mais c'est plus aisé et rapide (Artigue, 2007).

BUT : Élaborer une séquence tentant de développer cette flexibilité cognitive pour les notions de droites et de plans dans l'espace.

Extrait de l'activité d'introduction 2

Trouvez l'ensemble des solutions des systèmes suivants dans $\mathbb{R}^3$.

$$(S_3) \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$$

$$(S_5) \begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+2}{4} \\ 2x + 3y + 4z = 5 \end{cases}$$

$$(S_6) \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5 \\ 6x + 9y + 12z = 8 \end{cases}$$

Extrait de l'activité d'introduction 2

Trouvez l'ensemble des solutions des systèmes suivants dans $\mathbb{R}^3$.

$$(S_3) \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases} \quad (S_5) \begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+2}{4} \\ 2x + 3y + 4z = 5 \end{cases} \quad (S_6) \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5 \\ 6x + 9y + 12z = 8 \end{cases}$$

- ACTIVITÉS ATTENDUES : considérer un ensemble de triplets, représenter l'ensemble, identifier les objets, chercher les intersections éventuelles des objets, écrire l'ensemble des solutions.

Extrait de l'activité d'introduction 2

Trouvez l'ensemble des solutions des systèmes suivants dans $\mathbb{R}^3$.

$$(S_3) \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases} \quad (S_5) \begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+2}{4} \\ 2x + 3y + 4z = 5 \end{cases} \quad (S_6) \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5 \\ 6x + 9y + 12z = 8 \end{cases}$$

- **ACTIVITÉS ATTENDUES** : considérer un ensemble de triplets, représenter l'ensemble, identifier les objets, chercher les intersections éventuelles des objets, écrire l'ensemble des solutions.
- **RÔLES DONNÉS AUX TECHNOLOGIES** (Laborde, 2001) : les technologies aident à introduire de nouvelles notions mathématiques ; les phases d'institutionnalisation s'appuient sur des activités utilisant les technologies.

Exemple de tâche (1/2)

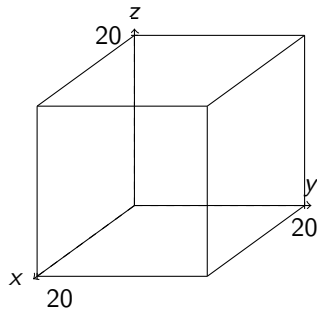
Enoncé de l'exercice 23

Une épreuve de sélection est organisée dans le cadre d'un jeu télévisé. Les candidats doivent répondre à trois questionnaires, côtés sur 20, mais avec des pondérations différentes. Le premier questionnaire porte sur l'histoire des sciences et des techniques (pondération 2), le deuxième sur la géographie de l'Europe (pondération 1) et le dernier comprend des questions de culture générale (pondération 2). Un candidat est sélectionné s'il a obtenu au moins 50 points sur 100. Les notes possibles des candidats dans chacune des matières sont représentées par les variables x (histoire des sciences et techniques), y (géographie) et z (culture générale). Un point $P(x, y, z)$ est associé à chaque candidat.

Exemple de tâche (2/2)

QUESTIONS :

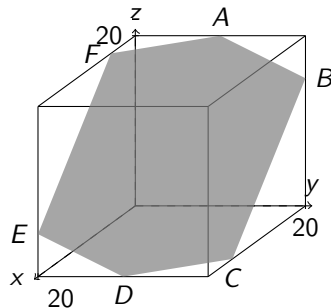
- Dans quelle partie de l'espace sont situés les points P ? Représentez-la.



Exemple de tâche (2/2)

QUESTIONS :

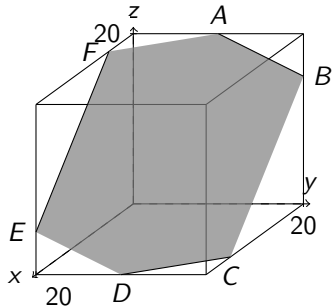
- Dans quelle partie de l'espace sont situés les points P ? Représentez-la.
- Dans quelle partie de l'espace sont situés les points associés aux candidats ayant obtenu 50 points ? Représentez-la.



Exemple de tâche (2/2)

QUESTIONS :

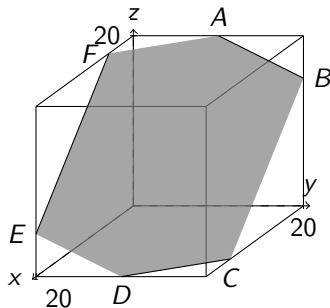
- Dans quelle partie de l'espace sont situés les points P ? Représentez-la.
- Dans quelle partie de l'espace sont situés les points associés aux candidats ayant obtenu 50 points ? Représentez-la.
- Est-il possible de trouver un candidat qui a eu 50 points à l'examen en ayant eu une note de 0 en histoire des sciences et des techniques ? Même question s'il a eu 0 en géographie, puis 0 en culture générale.



Exemple de tâche (2/2)

QUESTIONS :

- Dans quelle partie de l'espace sont situés les points P ? Représentez-la.
- Dans quelle partie de l'espace sont situés les points associés aux candidats ayant obtenu 50 points ? Représentez-la.
- Est-il possible de trouver un candidat qui a eu 50 points à l'examen en ayant eu une note de 0 en histoire des sciences et des techniques ? Même question s'il a eu 0 en géographie, puis 0 en culture générale.

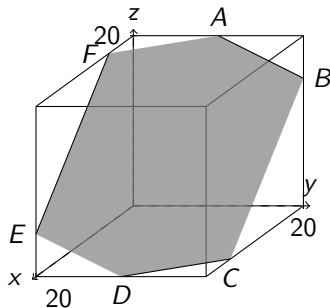


⇒ Des jeux de cadres systématiques entre GS, GV et GA sont attendus des élèves.

Exemple de tâche (2/2)

QUESTIONS :

- Dans quelle partie de l'espace sont situés les points P ? Représentez-la.
- Dans quelle partie de l'espace sont situés les points associés aux candidats ayant obtenu 50 points ? Représentez-la.
- Est-il possible de trouver un candidat qui a eu 50 points à l'examen en ayant eu une note de 0 en histoire des sciences et des techniques ? Même question s'il a eu 0 en géographie, puis 0 en culture générale.



⇒ Des jeux de cadres systématiques entre GS, GV et GA sont attendus des élèves.

RÔLE DONNÉ AUX TECHNOLOGIES : les technologies aident à l'entraînement sur des notions déjà apprises en cours P/C.

Inférences sur les apprentissages des élèves

- Une certaine flexibilité entre les cadres de la GS, la GV et la GA est développée chez les élèves.
- Des liens entre les équations et les objets géométriques de l'espace semblent être établis par les élèves.
⇒ le levier numérique semble favoriser ces liens.
- L'utilisation du numérique se fait à un niveau profond (Bottino & Furinghetti, 96) car la technologie aide à la construction des connaissances des élèves.

Bilan

■ La séquence élaborée

- intègre les spécificités issues des analyses didactiques menées en amont de l'enseignement.
- est différente de ce qui est déjà proposé aux élèves au vu de notre étude de terrain.
- est analysée en comparant les activités attendues des élèves à leurs activités possibles.
- semble bien favoriser les apprentissages des élèves (vs enseignement classique) même si des difficultés persistent.

Bilan

■ La séquence élaborée

- intègre les spécificités issues des analyses didactiques menées en amont de l'enseignement.
- est différente de ce qui est déjà proposé aux élèves au vu de notre étude de terrain.
- est analysée en comparant les activités attendues des élèves à leurs activités possibles.
- semble bien favoriser les apprentissages des élèves (vs enseignement classique) même si des difficultés persistent.

■ L'étude de terrain semble indiquer

- un manque de connaissances des enseignants en didactique des mathématiques.
- un manque de formation concernant l'intégration du numérique dans l'enseignement des mathématiques.

Bilan

■ La séquence élaborée

- intègre les spécificités issues des analyses didactiques menées en amont de l'enseignement.
- est différente de ce qui est déjà proposé aux élèves au vu de notre étude de terrain.
- est analysée en comparant les activités attendues des élèves à leurs activités possibles.
- semble bien favoriser les apprentissages des élèves (vs enseignement classique) même si des difficultés persistent.

■ L'étude de terrain semble indiquer

- un manque de connaissances des enseignants en didactique des mathématiques.
- un manque de formation concernant l'intégration du numérique dans l'enseignement des mathématiques.

■ PERSPECTIVE : étudier la formation initiale des enseignants en Belgique francophone (Bridoux & Nihoul, travaux en cours).

Travail en cours ...

La formation des futurs enseignants devrait

- les aider à changer de posture (Winsløw & Grønbaek, 2014) : étudiant → enseignant.
- les aider à adapter leurs connaissances mathématiques acquises à l'université en connaissances utiles à l'enseignement (Bloch, 1997).
- développer chez eux des connaissances sur les élèves, sur l'enseignement des contenus mathématiques, ... (Ball, Hoover & Phelps, 2008) MAIS aussi en didactique des mathématiques.
- permettre la construction de ressources avec le numérique pour un usage effectif en classe (Train, 2013).
- ...

Travail en cours ...

La formation des futurs enseignants devrait

- les aider à changer de posture (Winsløw & Grønbaek, 2014) : étudiant → enseignant.
- les aider à adapter leurs connaissances mathématiques acquises à l'université en connaissances utiles à l'enseignement (Bloch, 1997).
- développer chez eux des connaissances sur les élèves, sur l'enseignement des contenus mathématiques, ... (Ball, Hoover & Phelps, 2008) MAIS aussi en didactique des mathématiques.
- permettre la construction de ressources avec le numérique pour un usage effectif en classe (Train, 2013).
- ...

Cela ne semble pas être le cas ... Repenser la formation en ce sens !