

Jouer n'est pas qu'un jeu.

Mickaël Randour

F.R.S.-FNRS & UMONS – Université de Mons

Avril 2022

Département de Mathématique, Faculté des Sciences



Nous allons jouer...

But de l'exposé : vous faire découvrir la *théorie des jeux*.

Comment ?

- ▶ Besoin de vous pour participer à quelques petits jeux...
- ▶ Aperçu de quelques concepts clés.

N'hésitez pas à participer et intervenir !

Contexte : théorie des jeux

- Approche mathématique très générale.
- Interactions entre entités ou systèmes vues comme des jeux entre plusieurs joueurs.
- Nombreuses applications : informatique, économie, biologie, politique. . .

Des joueurs rationnels

Hypothèse fondamentale : les joueurs sont rationnels.

- ▷ Ils basent leurs décisions sur *les données disponibles*.
- ▷ Ils souhaitent maximiser leur *profit personnel*.
- ▷ Ils n'ont *pas de sentiment*, leurs choix ne sont pas influencés par l'amitié, la responsabilité sociale ou civique.

Aujourd'hui, soyez égoïstes ! Ce n'est qu'un jeu...

Un premier jeu : le jeu de Nim

- Deux joueurs.
- 13 allumettes.
- À tour de rôle, chaque joueur enlève 1, 2 ou 3 allumettes (pas zéro!).
- Celui qui retire la dernière allumette a perdu...

Un premier jeu : le jeu de Nim

- Deux joueurs.
- 13 allumettes.
- À tour de rôle, chaque joueur enlève 1, 2 ou 3 allumettes (pas zéro!).
- Celui qui retire la dernière allumette a perdu...

Qui a gagné ? Le perdant aurait-il pu gagner ?

Le jeu de Nim : match retour

- 12 allumettes.

Qui va gagner ? Prenons les paris !

Le jeu de Nim : match retour

- 12 allumettes.

Qui va gagner ? Prenons les paris !

Si je parie 100 euros sur ma victoire au jeu de Nim (12 allumettes), décidez vous de me laisser jouer en premier ? Et à 13 allumettes ?

Le jeu de Nim : match retour

- **12** allumettes.

Qui va gagner ? Prenons les paris !

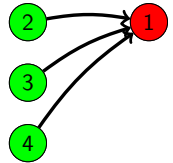
Si je parie 100 euros sur ma victoire au jeu de Nim (12 allumettes), décidez vous de me laisser jouer en premier ? Et à 13 allumettes ?

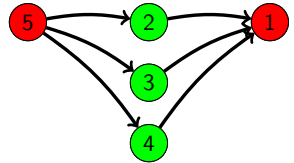
- Avec **4** allumettes ou **5** allumettes,

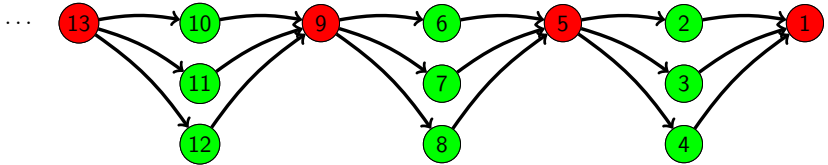
Comment être sûr de gagner ?

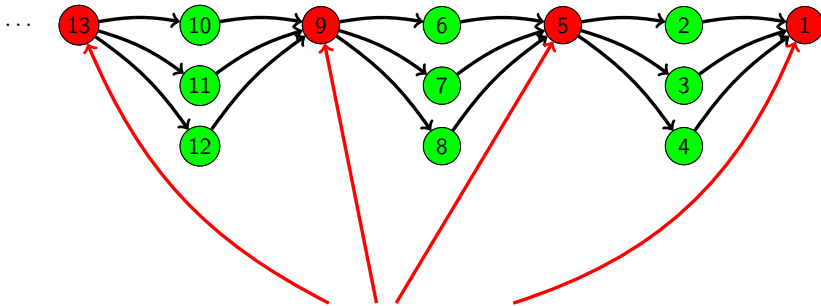
1











Positions perdantes.

Stratégie gagnante dans les autres positions.

Jeux déterminés

- En théorie des jeux, on dit que le jeu de Nim est **déterminé** : étant donné la situation de départ, un des joueurs peut gagner à coup sûr (à condition de jouer une stratégie adéquate!).

Jeux déterminés

- En théorie des jeux, on dit que le jeu de Nim est **déterminé** : étant donné la situation de départ, un des joueurs peut gagner à coup sûr (à condition de jouer une stratégie adéquate!).
- Pas passionnant comme jeu ! Et pourtant... c'est le cas de nombreux jeux comme *Puissance 4* par exemple.



Jeux déterminés

- En théorie des jeux, on dit que le jeu de Nim est **déterminé** : étant donné la situation de départ, un des joueurs peut gagner à coup sûr (à condition de jouer une stratégie adéquate!).
- Pas passionnant comme jeu ! Et pourtant... c'est le cas de nombreux jeux comme *Puissance 4* par exemple.
- Même *les échecs* sont concernés par ce type de résultats.



Jeux déterminés

- En théorie des jeux, on dit que le jeu de Nim est **déterminé** : étant donné la situation de départ, un des joueurs peut gagner à coup sûr (à condition de jouer une stratégie adéquate!).
- Pas passionnant comme jeu ! Et pourtant... c'est le cas de nombreux jeux comme *Puissance 4* par exemple.
- Même *les échecs* sont concernés par ce type de résultats.

Théorème de Zermelo pour les échecs

Soit le joueur blanc peut gagner à coup sûr, soit le joueur noir peut gagner à coup sûr, soit les deux peuvent assurer un match nul.

- ▶ Mais l'existence d'une stratégie n'implique pas qu'elle soit facile à calculer ! On ne la connaît toujours pas...

Autre modèle de jeu

- Ici, les joueurs choisissent leur action simultanément, **sans se concerter**.
- Chacun gagne (ou perd) un certain montant, nous ne sommes plus dans un modèle où l'un gagne la partie et l'autre la perd (comme le jeu de Nim) \rightsquigarrow chaque joueur cherche à maximiser son gain (minimiser sa perte).

Dilemme des pièces

- Deux joueurs (A et B) peuvent placer une pièce dans une machine (en secret).
- Si A place une pièce, B en reçoit trois, et inversement.
- La communication est impossible.

A / B	<i>Donner</i>	<i>Garder</i>
<i>Donner</i>	(3, 3)	(0, 4)
<i>Garder</i>	(4, 0)	(1, 1)

Jouons (choix secret).

Dilemme des pièces : analyse

**Les joueurs ont-ils agi de manière rationnelle ?
Pouvaient-ils faire mieux ?**

Dilemme des pièces : analyse

Les joueurs ont-ils agi de manière rationnelle ?

Pouvaient-ils faire mieux ?

En se parlant ? Essayons !

Dilemme des pièces : analyse

Les joueurs ont-ils agi de manière rationnelle ?

Pouvaient-ils faire mieux ?

En se parlant ? Essayons !

- ▷ Notion de *stratégie dominante* \rightsquigarrow quoi que fasse l'adversaire, il vaut mieux garder sa pièce !

A / B	Donner	Garder
Donner	(3, 3)	(0, 4)
Garder	(4, 0)	(1, 1)

Dilemme des pièces : analyse

Une coopération est-elle possible ?

Dilemme des pièces : analyse

Une coopération est-elle possible ?

- ▶ Le modèle classique de la théorie des jeux suppose que les individus sont égoïstes, et donc qu'il n'est pas possible de leur faire confiance.
- ▶ Pour certaines applications (p.ex. informatique), c'est la réalité. Pour d'autres (p.ex. économie, politique), c'est un vaste débat. . .

Dilemme des pièces répété

- ▶ Supposons maintenant que l'on joue le dilemme des pièces sans jamais s'arrêter.

Quelle stratégie adopteriez-vous ?

Dilemme des pièces répété

- ▶ Supposons maintenant que l'on joue le dilemme des pièces sans jamais s'arrêter.

Quelle stratégie adopteriez-vous ?

- ▶ Il est donc possible de pousser à la coopération en répétant le dilemme et en donnant la possibilité de punir l'autre joueur s'il a gardé sa pièce au coup précédent.

Dilemme des pièces répété

- ▶ Supposons maintenant que l'on joue le dilemme des pièces sans jamais s'arrêter.

Quelle stratégie adopteriez-vous ?

- ▶ Il est donc possible de pousser à la coopération en répétant le dilemme et en donnant la possibilité de punir l'autre joueur s'il a gardé sa pièce au coup précédent.
- ▶ Notion d'*équilibre de Nash* : aucun des deux joueurs n'a d'intérêt à changer de stratégie.

Monty Hall

Nouveau jeu.

- Trois boîtes, deux sont vides, la troisième contient une pièce.
- Le joueur choisit une boîte. Le présentateur ouvre une boîte vide (non choisie) et propose au joueur de changer de boîte.

Jouons !

Monty Hall : analyse

Le joueur a-t-il intérêt à changer de boîte ?

Monty Hall : analyse

Le joueur a-t-il intérêt à changer de boîte ?

Supposons que le joueur choisisse la 1ère boîte : trois cas sont possibles.



Monty Hall : analyse

Le joueur a-t-il intérêt à changer de boîte ?

Supposons que le joueur choisisse la 1ère boîte : trois cas sont possibles.



Monty Hall : analyse

Le joueur a-t-il intérêt à changer de boîte ?

Supposons que le joueur choisisse la 1ère boîte : trois cas sont possibles.



Dans deux cas sur trois, il vaut mieux changer de boîte !

Partage de butin



- Cinq pirates, A (le plus vieux), B, C, D et E (le plus jeune), partagent 100 pièces d'or.
- Le plus vieux (A) propose une répartition. Les cinq pirates votent.
- Si la majorité accepte (ou s'il y a égalité), le butin est réparti.
- Sinon, une mutinerie éclate et le plus vieux pirate est jeté à la mer. On recommence avec le nouvel aîné.

Jouons.

Partage de butin : analyse

Que pensez-vous de l'issue du jeu ? Votez sur ce que A aurait pu obtenir si tout le monde jouait rationnellement.

Partage de butin : analyse

Que pensez-vous de l'issue du jeu ? Votez sur ce que A aurait pu obtenir si tout le monde jouait rationnellement.

- ▶ Intuitivement, on pourrait penser que A doit être généreux envers les autres pirates, ou préparer son maillot. . .

Partage de butin : analyse

▷ Réfléchissons.

- Si seuls D et E restent, D prendra les 100 pièces d'or.



Partage de butin : analyse

▷ Réfléchissons.

- Si seuls D et E restent, D prendra les 100 pièces d'or.



Partage de butin : analyse

▷ Réfléchissons.

- Si seuls D et E restent, D prendra les 100 pièces d'or.



Partage de butin : analyse

▷ Réfléchissons.

- Si C, D et E restent, E se contente d'une seule pièce.



Partage de butin : analyse

▷ Réfléchissons.

- Si C, D et E restent, E se contente d'une seule pièce.



Partage de butin : analyse

▷ Réfléchissons.

- Si C, D et E restent, E se contente d'une seule pièce.



Partage de butin : analyse

▷ Réfléchissons.

- Si B, C, D et E restent, c'est D qui se contente d'une pièce.



Partage de butin : analyse

▷ Réfléchissons.

- Si B, C, D et E restent, c'est D qui se contente d'une pièce.



Partage de butin : analyse

▷ Réfléchissons.

- Si B, C, D et E restent, c'est D qui se contente d'une pièce.



Partage de butin : analyse

▷ Réfléchissons.

- Si tous sont encore là, C et E acceptent une unique pièce.



Partage de butin : analyse

▷ Réfléchissons.

- Si tous sont encore là, C et E acceptent une unique pièce.



Partage de butin : analyse

▷ Réfléchissons.

- Si tous sont encore là, C et E acceptent une unique pièce.



Partage de butin : analyse

▷ Réfléchissons.

- Si tous sont encore là, C et E acceptent une unique pièce.



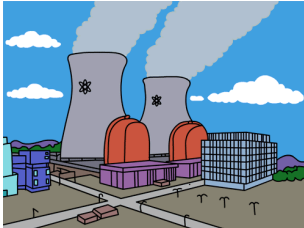
- ▷ Au final, nous avons A : 98, B : 0, C : 1, D : 0, E : 1.
▷ Étonnant ! Mais la seule issue rationnelle !

Extensions

- De nombreuses extensions existent, permettant de modéliser des situations plus complexes :
 - ▷ jeux à information imparfaite,
 - ▷ jeux à coalitions,
 - ▷ jeux répétés,
 - ▷ jeux sur graphes,
 - ▷ jeux probabilistes. . .
- La théorie est vraiment très riche. De nouveaux résultats apparaissent régulièrement.
- L'adéquation et la fidélité des modèles par rapport aux situations réelles dépendent des champs d'applications.

Informatique : fiabilité de systèmes critiques

- Certains systèmes ne tolèrent pas les bugs !



- ▷ Il faut s'assurer de leur *fiabilité* : ils doivent fonctionner quelles que soient les actions entreprises par leur *environnement* (p.ex. foudre).

Assurer la fiabilité via des jeux

- Modéliser les interactions entre le système et son environnement dans un jeu.
- Le système est un joueur ayant pour but de fonctionner correctement.
- L'environnement est un joueur adversaire ayant pour but de l'en empêcher.

Assurer la fiabilité via des jeux

- Modéliser les interactions entre le système et son environnement dans un jeu.
- Le système est un joueur ayant pour but de fonctionner correctement.
- L'environnement est un joueur adversaire ayant pour but de l'en empêcher.
- ▷ Si on trouve une stratégie qui gagne à tous les coups pour le système (cf. [jeu de Nim](#)), alors on sait comment contrôler le système pour qu'il soit toujours fiable, quoi qu'il arrive.
- ▷ La théorie des jeux fournit un cadre mathématique pour prouver formellement qu'un système est correct, et pour construire des systèmes corrects de manière automatisée.

Biologie : évolution

- Expliquer l'évolution des espèces via la théorie de jeux.
- P.ex. travaux de John Maynard Smith.
- Prend en compte la répartition des comportements (stratégies) dans une population pour expliquer son évolution.
- Permet p.ex. d'expliquer l'altruisme.

Biologie : évolution

- Expliquer l'évolution des espèces via la théorie de jeux.
- P.ex. travaux de John Maynard Smith.
- Prend en compte la répartition des comportements (stratégies) dans une population pour expliquer son évolution.
- Permet p.ex. d'expliquer l'altruisme.

Qui sont les adversaires ? (Dawkins)

Deux brontosaures essaient d'échapper à un tyrannosaure.

L'un dit : "Pourquoi nous fatiguons-nous ? Nous n'arriverons jamais à courir plus vite que le T-Rex !"

L'autre répond : "Je n'essaie pas de courir plus vite que le T-Rex, juste plus vite que toi !"

- ▶ La compétition est majoritairement intra-espèce !

Relations internationales, guerre froide et arsenal nucléaire

- La théorie des jeux sert aussi à analyser et prédire l'issue de tensions ou conflits entre nations.
- Elle est d'ailleurs parfois utilisée par les états pour établir leur doctrine stratégique.

Relations internationales, guerre froide et arsenal nucléaire

- La théorie des jeux sert aussi à analyser et prédire l'issue de tensions ou conflits entre nations.
- Elle est d'ailleurs parfois utilisée par les états pour établir leur doctrine stratégique.
- Certains vont très loin : ainsi, la possibilité de conflits nucléaires est étudiée en utilisant la théorie des jeux.
 - ▷ Certaines interprétations prétendent que la dissuasion nucléaire est le meilleur moyen... de garantir la paix ! En effet, le "coût" d'une utilisation serait tellement énorme que personne n'a intérêt à le risquer \rightsquigarrow situation d'équilibre pacifique.

Relations internationales, guerre froide et arsenal nucléaire

- La théorie des jeux sert aussi à analyser et prédire l'issue de tensions ou conflits entre nations.
- Elle est d'ailleurs parfois utilisée par les états pour établir leur doctrine stratégique.
- Certains vont très loin : ainsi, la possibilité de conflits nucléaires est étudiée en utilisant la théorie des jeux.
 - ▷ Certaines interprétations prétendent que la dissuasion nucléaire est le meilleur moyen... de garantir la paix ! En effet, le "coût" d'une utilisation serait tellement énorme que personne n'a intérêt à le risquer \rightsquigarrow situation d'équilibre pacifique.

Limites : peut-on être sûr que l'hypothèse de rationalité s'applique toujours ?

Économie : favoriser la concurrence

- Domaine de prédilection de la théorie des jeux, les entreprises étant vues comme rationnelles vis-à-vis du profit.
- Permet p.ex. de comprendre les situations de concurrence entre industries menant à des alliances et cartels (organisés ou de fait). Duopole de Cournot.
- Est vérifiée dans des situations réelles où des entreprises s'entendent pour se répartir un marché et bloquer les concurrents émergents, faussant ainsi la concurrence profitable aux consommateurs.

Merci à tous.

N'hésitez pas à discuter !