

THÈSE DE DOCTORAT
présentée en vue de l'obtention du titre de
DOCTEUR EN SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

par
Geoffrey LOSSA

**Modélisation des incertitudes géométriques et matérielles pour la
caractérisation des composants magnétiques bobinés moyenne
fréquence**

préparée au laboratoire de Génie Électrique de l'Université de Mons

Octobre 2021

Membres du Jury :

- | | |
|--|----------------|
| M. Thierry DUTOIT, Professeur à l'Université de Mons | - Président |
| M. Stéphane CLÉNET, Professeur des universités à l'ENSAM | |
| M. Christophe GEUZAINÉ, Professeur à l'Université de Liège | |
| M. Jacques LOBRY, Professeur à l'Université de Mons | |
| M. Innocent NIYONZIMA, Professeur à l'Université Grenoble Alpes | |
| Mme Ruth SABARIEGO, Professeur à la Katholieke Universiteit Leuven | |
| M. François VALLÉE, Professeur à l'Université de Mons | - Secrétaire |
| M. Olivier DEBLECKER, Professeur à l'Université de Mons | - Promoteur |
| M. Zacharie DE GRÈVE, Professeur à l'Université de Mons | - Co-promoteur |

À mes parents,
Unen et Ungyertho

Remerciements

La qualité et la pertinence d'un travail de thèse dépendent non seulement du doctorant mais également de l'encadrement. Mes profonds remerciements s'adressent vers le Prof. Deblecker et le Prof. De Grève pour leurs soutiens, orientations et remarques apportés tout au long de ce doctorat.

Je n'oublie pas le Prof. Lobry et le Prof. Vallée qui font partie des précurseurs de cette thèse et de ceux qui m'ont accompagné durant ce long périple : depuis mon intégration à l'Université de Mons jusqu'à ce doctorat.

Merci particulièrement à E. Bury et à T. Lahaye du service Génie électrique de la FPMs pour leurs aides si précieuses lors de mes validations expérimentales et travaux pratiques assurés au sein de leur labo.

Je remercie les membres de jury pour leur suivi rigoureux et l'intérêt qu'ils ont manifesté dans l'examen de ce travail de thèse.

Je remercie également le service Physique générale de la FPMs pour l'ambiance quotidienne dans laquelle j'ai eu à réaliser des tâches pédagogiques. Que le Prof. Moiny reçoive ici mes sincères remerciements pour m'avoir accepté comme assistant dans le service. Mes pensées vont également vers mes collègues de service (Edith, Anne-catherine, Calvin, Frédéric, Benoît₁, Benoît₂) pour l'excellente collaboration.

Je tiens à exprimer ma gratitude aux Prof. Dular et Geuzaine du département Génie électrique et informatique de l'Université de Liège pour leurs disponibilités et précieuses discussions découlant de leur connaissance approfondie.

Je manque des mots pour exprimer ma gratitude à mes parents Unen et Ungyertho pour leur amour inconditionnel et l'éducation transmise. Particulièrement, mes pensées se tournent vers mon défunt père qui m'a toujours stimulé et encouragé d'aller plus loin dans les études depuis mon enfance. Qu'il trouve ici ma profonde reconnaissance et qu'il soit fier de ses efforts.

Pour finir, je remercie tout mon entourage (S. Alami, J. Kayembe, G. Nenungo, I. Kilonda, O.Y. Besa, Et al.), ma famille (Pierre, Georgine, Akelo, Olivier, Serge, Hervé, Hugues et Merveille) ainsi que Rosine, Ethan et Andy de m'avoir accompagné pendant ces deux dernières années qui ont été parfois difficiles pour moi.

Mons, Octobre 2021

Geoffrey Lossa

Table des matières

Liste des abréviations	xvii
1 Introduction générale	1
1.1 Contexte de l'étude	1
1.2 Méthode de propagation des incertitudes	2
1.2.1 Méthodes intrusives	4
1.2.2 Quelques méthodes non intrusives	4
1.3 Challenge à relever	7
1.4 Enjeux et objectifs de la thèse	9
1.5 Objectif poursuivi	11
1.6 Intérêt économique du sujet	12
1.7 Subdivision du rapport de thèse	14
2 Modèle déterministe	17
2.1 Introduction	17
2.2 Équations de <i>Maxwell</i>	18
2.3 Problème magnétodynamique	19
2.3.1 Cas général	20
2.3.2 Formulation magnétodynamique $\mathbf{t}-\omega$	20
2.3.3 Cas test d'un inducteur	22
2.3.4 Formulation magnétodynamique $\mathbf{a}-v$	24
2.3.5 Cas test d'un inducteur	26
2.4 Problème électrostatique	29
2.4.1 Introduction	29
2.4.2 Formulation du problème électrostatique	29
2.5 Prise en compte des pertes magnétiques	31
2.5.1 Propriétés magnétiques des ferrites	31
2.5.2 Lois constitutives dans les ferrites	32
2.6 Modélisation des pertes ferrites	33
2.6.1 Cas test d'un inducteur bobiné	36
2.7 Conclusion	36
3 Méthodes de propagation des incertitudes	39
3.1 Introduction	39
3.2 Méthode de Monte Carlo	41
3.3 Expansion en polynômes de chaos	42
3.4 Construction de la base polynomiale	43

3.5	Quelques schémas de troncature basiques	44
3.5.1	Schéma de troncature hyperbolique	44
3.5.2	Schéma à restriction d'interaction	46
3.6	Détermination des coefficients PCE	47
3.6.1	Algorithme LAR (Least Angle Regression)	49
3.6.2	Algorithme OMP	50
3.6.3	Cas test : détermination des substituts PCE des paramètres RL d'un inducteur bobiné	50
3.7	Analyse de la sensibilité	52
3.8	Conclusion	55
4	Modélisation des incertitudes géométrique et matérielle dans les composants magnétiques bobinés	57
4.1	Introduction	57
4.2	Incertitudes géométriques	58
4.2.1	Algorithme dit de forces virtuelles (ou "Virtual Forces Algorithm")	59
4.2.2	Algorithme de construction spire par spire	60
4.3	Illustration de la mise en œuvre des deux algorithmes	61
4.4	Influence d'une permutation sur les paramètres RLC d'un in- ducteur bobiné	65
4.5	Influence des incertitudes liées aux positions de conducteurs sur les paramètres RLC	67
4.6	Modélisation d'incertitudes matérielles	70
4.7	Influence des incertitudes matérielles sur les paramètres RLC .	72
4.8	Conclusion	73
5	Réduction dimensionnelle de l'entrée aléatoire et Substitution stochastique	77
5.1	Introduction	77
5.2	Définition du Volume Représentatif Élémentaire	78
5.3	Technique d'homogénéisation	80
5.3.1	Équations de Maxwell à résoudre	80
5.3.2	Détermination des propriétés équivalentes (approche par équivalence énergétique)	86
5.4	Construction du substitut PCE	87
5.4.1	Mise en œuvre	87
5.4.2	Choix de la taille du VRE	91
5.4.3	Extraction des paramètres RL à partir du modèle ho- mogénéisé	94

5.5	Cas test : extraction des paramètres RL d'un inducteur bobiné au moyen de l'approche hybride	97
5.5.1	Avantages des substituts en PCE	97
5.5.2	Application de l'approche hybride	97
5.5.3	Construction des substituts PCE	98
5.6	Conclusion	99
6	Validation expérimentale et Analyse de sensibilité	101
6.1	Introduction	101
6.2	Présentation du lot d'inducteurs sous test	102
6.3	Description du test-bench utilisé pour la mesure d'impédance	102
6.4	Validation expérimentale à partir des courbes d'impédances	105
6.5	Validation expérimentale fondée sur la comparaison des paramètres R et L	108
6.6	Analyse de sensibilité	112
6.6.1	Paramètres influant sur L	113
6.6.2	Paramètres influant sur R	114
6.7	Conclusion	115
7	Conclusion générale	117
7.1	Perspectives	122
7.2	Publications personnelles	123
	Annexes	125
A	PCE à base adaptative	127
A.1	Outil de calcul PCE à base adaptée	127
B	Indices de Sobol basés sur une simulation Monte Carlo	129
C	Modèles analytiques de calcul de paramètres RL d'un inducteur bobiné	133
C.1	Introduction	133
C.2	Variation de la résistance en fonction de la fréquence	133
C.3	Expression analytique de l'inductance	136
C.4	Application des formules analytiques au cas de l'inducteur MC-SCH895 - 680KU	137
D	Indicateurs de comparaison entre distributions	141
D.1	Comparaison de distributions de probabilité	141
D.1.1	Moments statistiques d'ordre k	141

D.1.2	Distance de <i>Wasserstein</i>	143
Références		147

Liste des figures

1.1	Différents cadres de prise en compte des incertitudes.	2
1.2	Schéma de circuit d'un convertisseur DC-DC type Flyback . .	9
1.3	Exemple d'illustration des incertitudes géométriques sur l'agencement des conducteurs d'un bobinage à cinq couches . .	12
2.1	Problème général de magnétodynamique	20
2.2	Supports des fonctions de base <i>cohomologie</i> H^1 associées à une coupure	23
2.3	Parties réelles et imaginaires de la composante \underline{j}_z (gauche) de densité de courant \underline{j} (gauche) et du champ magnétique \underline{h} (droite), avant correction des flux de courants liée à l'orientation des coupures à 1 MHz.	23
2.4	Parties réelles de la composante \underline{j}_z de densité de courant (gauche) et du champ magnétique \underline{h} (droite) + Norme $ \underline{j} $ de la densité de courant (milieu) après correction des flux de courants via l'orientation des coupures à 1 MHz.	24
2.5	Évolution des paramètres RL extraits à partir de la formulation magnétodynamique $\mathbf{t} - \omega$, en fonction de la fréquence.	25
2.6	Parties réelles de la composante \underline{j}_z de densité de courant (gauche) et du champ magnétique \underline{h} (droite) + Norme $ \underline{j} $ de la densité de courant (milieu) à 1 MHz obtenues à partir de la formulation magnétodynamique $\mathbf{a} - v$	27
2.7	Comparaison des paramètres RL extraits des formulations mag- nétodynamiques $\mathbf{a} - v$ et $\mathbf{t} - \omega$	28
2.8	Convergence des paramètres R (gauche) et L (droite) avec le raffinement du maillage à 300 kHz	28
2.9	Problème d'électrostatique sur un domaine Ω . Les domaines de type Ω_c^C à potentiel constant, peuvent être soustraits du domaine d'étude	30
2.10	Représentation des pertes magnétiques par une perméabilité magnétique complexe [23]	33
2.11	Parties réelle et imaginaire de la perméabilité complexe en fonc- tion de la fréquence pour du ferrite NiZn 4B2 de chez FerroxCube	34
2.12	Densité des pertes par courants induits (gauche) et des pertes magnétiques (droite) à 1 MHz pour le cas d'étude	37
3.1	Illustration des incertitudes sur positions et diamètres des con- ducteurs à partir d'une section plane de la fenêtre de bobinage	40

3.2	Termes des bases retenues en faisant varier les valeurs de p et q dans l'expansion polynomiale de chaos (combinaison d'indices α_i en abscisse et ordonnée)	45
3.3	Représentation graphique de quelques polynômes multivari-ables de l'expansion PCE (sans prise en compte du facteur de normalisation) : cas de deux variables aléatoires	46
3.4	Géométrie du modèle 2D (inducteur avec noyau ferrite à entrefer, gauche) et carte (droite) de la partie réelle de densité de courant sur les conducteurs	51
3.5	Validation des méta-modèles PCE pour les paramètres R (droite) et L (gauche) à 1 MHz	52
3.6	Histogrammes des paramètres R (droite) et L (gauche) à 1 MHz déterminés à partir des substituts PCE	53
4.1	Vue en coupe de deux enroulements bobinés à la main pour une fenêtre de bobinage de $9,18 \times 4,0 = 36,72 \text{ mm}^2$ [68].	58
4.2	Illustration des situations normale (a), de permutation (b) et d'insertion (c) au sein d'un bobinage discontinu	59
4.3	Principe de l'algorithme VFA	60
4.4	Algorithme bobinage spire par spire : redéploiement du dernier conducteur d'une couche, lors d'un recouvrement avec un conducteur de la même couche	61
4.5	Principe de simulation de construction d'un bobinage	62
4.6	Déploiements de conducteurs initial (gauche) et final (droite) utilisant l'algorithme VFA	63
4.7	Deux distributions de bobinage obtenues par simulation de construction spire par spire	65
4.8	Évolution des paramètres RLC pour les situations avec et sans swap	66
4.9	Comparaison de l'évolution du potentiel électrique entre les situations avec et sans swap	66
4.10	Géométrie prise en compte pour la propagation des incertitudes liées aux positions de conducteurs dans la fenêtre de bobinage.	67
4.11	Évolutions des paramètres RLC superposées à leur distribution sous forme des cartes colorées, en fonction de la fréquence	68
4.12	Histogrammes de paramètres RLC (avec des densités de probabilité en ordonnée) relevés à 1 MHz	68
4.13	Évolution de moyennes de paramètres RLC relevés à 1 MHz en fonction du nombre d'itérations MC (critère d'arrêt)	69

4.14	Quelques lois comportementales : perméabilité et conductivité de la ferrite (gauche et milieu), et permittivité électrique d'un isolant en polyuréthane (droite).	72
4.15	Distribution des pertes joules à 1 MHz sur le domaine d'étude (gauche) et zoom sur les conducteurs (droite)	73
4.16	Évolutions des paramètres RLC superposées à leur distribution sous forme des cartes colorées, en fonction de la fréquence. . .	74
4.17	Histogrammes des paramètres RLC relevés à 1 MHz (Counts = nombre d'itérations MC)	74
5.1	Flow chart de construction d'un substitut PCE pour les paramètres RL	78
5.2	Illustration d'un VRE par des cellules élémentaires [83]	79
5.3	Illustration du processus d'homogénéisation dans le cas d'un milieu hétérogène aléatoire	80
5.4	Boucles de courants locales pour une sollicitation macroscopique d'induction magnétique différente de zéro (effet de proximité)	84
5.5	Boucles de courants locales pour une sollicitation macroscopique de densité de courant différente de zéro (effet de peau)	85
5.6	Processus de construction du substitut en PCE	87
5.7	Induction magnétique moyenne au sein du VRE et de la cellule élémentaire Ω_{cell}	89
5.8	Relâchement du maillage dans le cas des conducteurs bobinés (gauche) et maillage fin dans le cas des conducteurs massifs (droite)	90
5.9	Comparaison des réductivités équivalentes extraites de VRE pour différentes tailles de ce dernier.	92
5.10	Module de la densité de courant j_m pour différentes tailles de VRE, dans le cas d'une excitation par une induction magnétique $B_x = 1$ T	92
5.11	Maillage du VRE (droite) constitué de la fenêtre de bobinage et du domaine inducteur étudié (gauche)	93
5.12	Maillage et couplage circuit entre Z_{skin} et le domaine homogénéisé Ω_S (\underline{U} et \underline{I} étant respectivement la tension imposée, comme contrainte au niveau circuit, et le courant faiblement déduit de la Méthode des Éléments Finis (MEF))	94
5.13	SMC des paramètres RL extraits de modèles brut (en bas) et homogénéisé (en haut)	96
5.14	Distribution des paramètres R (gauche) et L (droite) à 1,2 MHz, extraits des modèles brute et homogénéisé	98

5.15	Histogrammes de paramètres R (gauche) et L (droite) extraits des modèles homogénéisés et des prédictions PCE à 1,2 MHz	100
6.1	Dimensions (gauche) et illustration (droite) du composant MCSH895-680KU étudié	102
6.2	Mesure à analyseur d'impédance Wayne kerr 6500B (gauche) et montage composant sur le bornier (droite)	103
6.3	Circuit équivalent du dispositif de mesure [90]	104
6.4	Schéma équivalent d'un inducteur [91]	105
6.5	Impédance de l'inducteur MCSH895-680KU relevée à analyseur Wayne kerr 6500B : module (gauche) et phase (droite). Lot de 295 inducteurs	107
6.6	Extraction des paramètres RLC (en haut) par la MEF et reconstruction de l'impédance (en bas) sur la gamme des fréquences disponibles à l'analyseur d'impédances + Comparaison avec l'expérience	107
6.7	Relevé du paramètre L à l'analyseur HP4195A (gauche) et détermination du même paramètre à partir d'un schéma équivalent basé sur les paramètres RLC extraits du modèle numérique EF (droite)	108
6.8	Distributions déduites des mesures expérimentales de l'impédance à 1 MHz (gauche) et de la fréquence de résonance (droite)	109
6.9	Évolutions des paramètres RL superposées à leurs distributions sous forme des cartes colorées : relevés à l'analyseur pour un lot de 299 inducteurs MCSCH895-680KU (gauche) et extraits des modèles stochastiques correspondants (droite)	110
6.10	Comparaison entre les distributions des paramètres RL issues des mesures expérimentales et du modèle stochastique pour les fréquences 537 kHz (au-dessus) et 1,02 MHz (en-dessous)	111
6.11	Évolution en fonction de la fréquence des indices de <i>Sobol'</i> totaux relatifs aux variables aléatoires à l'entrée des modèles stochastiques de R (droite) et de L (gauche).	115
C.1	Modèle d'enroulement utilisé par <i>Dowell</i> dans ses calculs [101]	135
C.2	Transformation de conducteurs ronds en conducteur unique [101]	135
C.3	Illustration d'une bobine monocouche de 100 spires jointives [109] (gauche) et paramètres géométriques d'une bobine multicouche [109] (droite)	138
C.4	Dimensions géométriques de l'inducteur MCSCH895-680KU	138

C.5	Comparaison entre modèle analytique de <i>Dowell</i> (en magenta) et mesures expérimentales (en bleu) du paramètre R	139
D.1	Illustration de l'asymétrie d'une distribution [111]	142
D.2	Quelques formes de distribution et les kurtosis correspondants [20]	143

Liste des tableaux

2.1	Extraction du paramètre R@ 768 kHz : sans les pertes (noyau idéal) et avec pertes ferrite (par courants induits et magnétiques) en plus.	36
3.1	Quelques familles polynomiales classiques mono variables . . .	44
4.1	Comparaison entre algorithmes de déploiement des nœuds pour la prise en compte des incertitudes géométriques de bobinage .	64
5.1	Comparaison des stratégies OLS et LAR pour le substitut PCE du paramètre R à 1,2 MHz	99
5.2	Comparaison entre les temps CPU consommés par les simulations MC* modèle de référence et substitut PCE.	99
6.1	Distance de <i>Wasserstein</i> entre distributions des paramètres RL pour deux fréquences particulières	112
C.1	Comparaison entre valeurs nominales et théoriques (modèles analytiques) de paramètres RL de l'inducteur MCSCH895-680KU139	

Liste des abréviations

SMC Simulation Monte Carlo	5
MC Monte Carlo	4
SSFEM Spectral Stochastic Finite Element Method	3
SFEM Stochastic Finite Element Method	4
NISP Non Intrusive Spectral Projection	3
EP Échantillonnage Préférentiel	5
VFA Virtual Force Algorithm	58
RLC Résistance Inductance Capacité	11
PCE Polynomial Chaos Expansion	8
VRE Volume Représentatif Élémentaire	78
SVE Statistical Volume Element	79
LAR Least Angle Regression	48
OMP Orthogonal Matching Pursuit	49
MEF Méthode des Éléments Finis	xi
MnZn Manganèse Zinc	10
NiZn Nickel Zinc	10
AC Alternating Current	38
DC Direct Current	38
EF Éléments Finis	1
UQLab Uncertainty Quantification Laboratory	47
Gmsh 3D finite element mesh generator	20
GetDP General Environment for the Treatment of Discrete Problems	22
RAM Random Access Memory	51

Introduction générale

1.1 Contexte de l'étude

Dans la majorité des problèmes récents de modélisation, la quantification des incertitudes est en train d'occuper une place de plus en plus importante. Les prédictions de scénarios basés sur les modèles déterministes sont en train d'être graduellement remplacées par des modèles stochastiques permettant de prendre en compte les incertitudes en entrée de ces derniers. Cependant cette douce transition se fait souvent à un prix conséquent vu l'énorme quantité d'informations à traiter qui entraîne généralement plusieurs évaluations coûteuses du modèle de calcul.

Dans les sciences appliquées en général, la prise en compte des incertitudes peut être étendue à différents cadres ou échelles d'existence d'un dispositif. Par exemple dans le cas de prédiction des performances d'une éolienne (*cf.* figure 1.1), les incertitudes peuvent être intégrées à divers niveaux ou cadres :

- Matériaux : propriétés matérielles mal connues (conductivité thermique, rugosité, module d'élasticité, etc.) ;
- Conception : défauts géométriques, d'assemblage, etc. ;
- Conditions opérationnelles : variabilité de paramètres environnementaux (température, vitesse du vent, incident d'exploitation, tension de décharge, etc.).

C'est dans le cadre de la modélisation électromagnétique (modèles numériques Éléments Finis (EF)) que nous allons travailler tout au long de cette thèse. Dans ce contexte, ce type d'approche présente les intérêts suivants :

- Identifier les données influentes (via l'analyse de sensibilité) afin de prioriser les recherches et développements;
- Améliorer la qualité du modèle numérique utilisé;
- Optimiser les performances du système étudié lors de son utilisation;

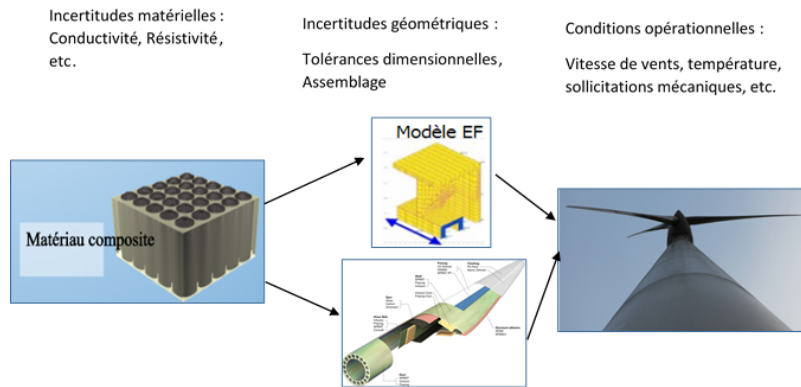


Figure 1.1: Différents cadres de prise en compte des incertitudes.

- Évaluer la sûreté de fonctionnement (calcul du risque de défaillance) du système étudié;
- Justifier les écarts qui peuvent être observés entre les résultats de simulation et les mesures expérimentales;
- Déterminer des tolérances lors du design d'équipements électriques (entrefer des machines électriques par exemple);
- Déterminer les causes de chute des performances opérationnelles et, accroître la robustesse d'équipements vis-à-vis du procédé de fabrication.
- Etc.

1.2 Méthode de propagation des incertitudes

Ces dernières décennies, on a assisté à l'émergence de modèles stochastiques dans plusieurs disciplines de l'ingénieur. Ce mouvement a été initié (avec un pic d'activités vers fin des années 90) dans le domaine mécanique où les incertitudes en entrée de modèles numériques portaient plus sur les sources (ou sollicitations) et les propriétés matérielles.

Parmi les approches proposées, on peut noter les approches par intervalles et par logique floue [1, 2, 3] qui consistent à représenter les incertitudes par des fonctions caractéristiques modélisant leur degré d'appartenance et à déterminer la fonction caractéristique de la sortie du modèle en propageant les incertitudes au travers de ce dernier.

D'autre part, l'approche dite probabiliste permet d'observer la variabilité de la réponse du modèle en propageant des entrées incertaines modélisées par

des variables ou des champs aléatoires au travers le modèle. Pour ce faire, chaque réponse modale est étendue sur une série de polynômes orthogonaux de paramètres d'entrée aléatoire [4, 5, 6].

Selon le type d'incertitudes, on retrouve dans la littérature plusieurs approches permettant d'aborder le problème de propagation des incertitudes dans un modèle. À l'égard des modèles numériques EF, on retrouve deux types d'approches : intrusive et non intrusive. Lorsqu'il s'agit de propager les incertitudes portant sur la loi de comportement de matériaux, les approches intrusives et non intrusives sont proposées dans la littérature. Le plus souvent, l'approche spectrale basée sur l'expansion en chaos polynomial est utilisée.

En effet dans [7], l'auteur traite un problème électromagnétique de propagation des incertitudes matérielles en utilisant deux approches différentes. D'une part, une approche intrusive portant sur la méthode éléments finis stochastiques spectraux - Spectral Stochastic Finite Element Method (SSFEM) et de l'autre part, une approche non intrusive portant sur la méthode de projection spectrale - Non Intrusive Spectral Projection (NISP). Pour l'approche intrusive, l'auteur propose des méthodes permettant de résoudre le système linéaire résultant de la double discrétisation (spatiale et stochastique) des formes faibles continues obtenues. Dans le cas de l'approche spectrale non intrusive, l'auteur détermine un substitut stochastique du modèle étudié défini comme une représentation fonctionnelle de la réponse $Y(\xi)$ du modèle $\mathcal{M}(\xi)$ via une décomposition de l'aléa sur un ensemble des fonctions $\{\psi_i\}_{i=0}^{\infty}$ et des coefficients déterministes $\{y_i\}_{i=0}^{\infty}$, tel que $Y(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i \psi_i(\xi)$. ξ est un vecteur constitué de variables aléatoires indépendantes ξ_i .

Dans [8, 9], les auteurs traitent un problème mécanique dont l'aléa porte sur l'interface géométrique entre deux sous-domaines de propriétés matérielles différentes en utilisant une technique intrusive dite MEF étendus. Elle consiste à utiliser un maillage non conforme au niveau de l'interface aléatoire qui ne dépend pas d'une réalisation de la géométrie. Ceci entraîne des traitements supplémentaires destinés à prendre en compte la discontinuité de champs aux interfaces à l'aide des fonctions d'enrichissement. La construction de ces dernières passent par celle de la fonction de *level-set* dont le choix peut conduire à un défaut de convergence optimale de l'approximation EF. Au final, on se retrouve avec une représentation implicite de la géométrie par une fonction *level-set* aléatoire définie sur un domaine fictif à prendre en compte dans les approximations EF au niveau spatial et sur le chaos polynomial au niveau stochastique.

Par contre dans [10, 11], la méthode de transformation est proposée pour résoudre un problème aux dérivées partielles où l'aléa porte sur les incertitudes géométriques au niveau de la frontière d'un domaine. Elle peut être étendue au cas où l'aléa porte sur les incertitudes au niveau des interfaces en-

tre sous-domaines [12, 13]. Elle consiste à utiliser une transformation aléatoire inversible du domaine aléatoire de départ $D(x, \xi)$ en un domaine de référence déterministe $E(X)$ disposant d'une loi équivalente de comportement aléatoire $\mu'(X, \xi)$. De cette façon, les méthodes intrusives et non intrusives peuvent être utilisées pour résoudre ce problème.

1.2.1 Méthodes intrusives

De manière générale dans ce type d'approche, les quantités scalaires ou tensorielles $H(X)$ sont considérées comme des champs aléatoires puisqu'elles dépendent des positions spatiales et de l'aléa ω , c'est-à-dire une variable aléatoire indexée sur l'espace géométrique. Elle peut être notée sous la forme $H(X, \omega)$, où ω exprime une réalisation de la variable aléatoire appartenant à un espace de probabilité. Ce champ est décomposé en une somme infinie tronquée de produits de variables aléatoires $\xi_i(\omega)$ par des modes géométriques $\Phi_i(x)$ multipliés par des amplitudes λ_i issues de valeurs propres de la décomposition spectrale (cf. décomposition de *Karhunen Loève* [14, 15]). Cette approche est qualifiée d'intrusive puisque les modes $\Phi_i(x)$ impliquent des propriétés matérielles variables sur l'élément fini, ce qui n'est pas d'habitude le cas dans le code de calcul EF. De plus, les inconnues λ_i ne sont plus des variables physiques directement accessibles. C'est le cas de la méthode des éléments finis stochastiques - Stochastic Finite Element Method (SFEM) [16]. Elle est d'une précision intéressante. Mais le seul souci est qu'elle peut conduire à des systèmes linéaires difficiles à résoudre et dont la matrice de rigidité est creuse et très large lorsque la dimension du vecteur aléatoire d'entrée est élevée.

1.2.2 Quelques méthodes non intrusives

Cette approche ne s'accompagne pas de modification du code de calcul EF. Chaque exécution du code EF est effectuée pour une réalisation des variables aléatoires. Les plus connues sont les méthodes de Monte Carlo (MC), de perturbation, les polynômes de chaos, etc. [7, 17].

La méthode MC est devenue une méthode de référence pour décrire le comportement aléatoire des modèles numériques. Son seul désavantage est qu'elle nécessite un long temps de simulation en vue d'obtenir des conclusions fiables sur le modèle à analyser. Ce désavantage peut être réduit en partie en réalisant des calculs distribués. Son principe consiste à générer un grand nombre N de réalisations des M grandeurs d'entrée aléatoire du modèle $Y = \mathcal{M}(\xi)$ et, à traiter statistiquement les N réalisations Y_i de la solution aléatoire $Y(\xi)$.

1.2.2.1 Simulation Hypercube Latin

La méthode de simulation de l'Hypercube Latin peut être utilisée dans des études stochastiques des systèmes complexes [18, 19]. Son avantage par rapport à la méthode de MC est qu'elle réduit le nombre N de réalisations pour une précision similaire. En effet, le défaut avec la méthode de MC est le fait d'avoir un risque que les réalisations de l'échantillon utilisées se retrouvent sur une certaine région restreinte au dépend d'autres faiblement représentées. La stratification exige la connaissance de la fonction de répartition de la variable aléatoire d'entrée ξ_i . En divisant l'axe vertical de la fonction de répartition en N intervalles équidistants et par transformation inverse de la fonction de répartition $F_{\xi_j}^{-1}$, on obtient N intervalles pas nécessairement équidistants de l'axe horizontal. L'intervalle de réalisation de ξ_1 est ainsi stratifié en N intervalles équiprobables de probabilité $1/N$. Dans le cas de M variables aléatoires, on associe aléatoirement les N valeurs obtenues de ξ_1 avec les valeurs de la variable ξ_2 pour obtenir N couples de valeurs. Ces N couples sont à leur tour associés de manière aléatoire aux N valeurs de ξ_3 pour former N triplets. Le processus se poursuit ainsi de suite jusqu'à l'obtention de N M-uplets. En d'autres termes, on définit une matrice de permutation \mathbf{P} de taille NM contenant sur chaque colonne une permutation aléatoire de $\{1, \dots, N\}$ indices de sous intervalles de la variable ξ et une matrice \mathbf{A} de NM contenant des nombres aléatoires entre $[0, 1]$ et indépendants. Le i -ième point du plan d'expérience $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_M})$ est obtenu par :

$$x_{ij} = F_{\xi_j}^{-1} \left(\frac{1}{N} (P_{ij} - A_{ij}) \right) \quad (1.1)$$

1.2.2.2 Échantillonnage préférentiel

L'Échantillonnage Préférentiel (EP) est une variante de la Simulation Monte Carlo (SMC) permettant de réduire la variance de la grandeur recherchée. L'idée sous-jacente est que certaines valeurs prises par une variable aléatoire dans une simulation ont plus d'effet que d'autres sur l'estimateur recherché. Si ces valeurs se réalisent plus souvent, la variance de l'estimateur peut être réduite. Autrement dit, si on se fixe un niveau d'erreur donné, l'EP permet de diminuer théoriquement le nombre de simulations N par rapport à la méthode MC classique. Ainsi la méthode EP consiste à choisir une distribution qui encourage les valeurs importantes.

L'utilisation d'une distribution biaisée conduira à un estimateur biaisé si elle est appliquée directement aux simulations. Cependant les différentes simulations sont pondérées afin de corriger ce biais; l'estimateur EP est alors

sans biais. Le poids qui est donné à chaque simulation est le ratio de vraisemblance, qui est la densité de la vraie distribution par rapport à la distribution biaisée. Le point fondamental dans l'implémentation d'une simulation EP est le choix de la distribution biaisée. L'avantage peut être une énorme économie de temps de calculs alors que l'inconvénient pour une mauvaise distribution peut être des calculs plus longs qu'une SMC.

1.2.2.3 Méthodes d'approximation locale

Les méthodes d'approximation locales peuvent paraître comme des bonnes alternatives aux méthodes de SMC si la moyenne et la variance de la réponse aléatoire sont les seules quantités recherchées. Cependant, celles-ci ne sont applicables que lorsque les coefficients de variation des variables aléatoires d'entrée sont assez faibles. Dans la littérature, deux méthodes sont souvent décrites comme méthodes d'approximation locale : la méthode des perturbations et celle de *Neumann*.

La méthode des perturbations est basée sur le développement en séries de *Taylor* des grandeurs aléatoires dans le modèle numérique autour de leur moyenne [20]. Le calcul de la moyenne et de la variance nécessite alors le calcul des dérivées du modèle $\mathcal{M}(X)$ par rapport aux différentes variables aléatoires au point moyen ξ_0 . Ce qui peut devenir assez compliqué et coûteux et, peut limiter l'emploi de cette méthode uniquement à l'ordre 1 et pour des modèles ayant une certaine régularité. Au contraire, la méthode *Neumann* [19, 16] vise à décomposer en séries de *Neumann* l'opérateur définissant la réponse du modèle (solution tronquée à l'ordre p). Cette méthode est simple à mettre en œuvre mais coûteuse en termes de ressources de calcul car elle nécessite la détermination explicite de la matrice \mathbf{A}_0^{-1} , inverse de la matrice de raideur \mathbf{A} (cas des problèmes EF) construite à partir des valeurs moyennes de différentes entrées aléatoires ξ_0 du modèle. Dans les problèmes éléments finis, la matrice \mathbf{A} est souvent creuse mais son inverse (qui est une matrice pleine) peut être très coûteuse à calculer et à stocker en mémoire.

1.2.2.4 Expansion en polynômes de chaos

Initialement plus appliquée en mécanique, cette méthode se présente comme une généralisation du développement en séries de *Fourier* dans le domaine de champs aléatoires [21, 22, 16]. Le chaos polynomial est basé sur le principe de la construction des polynômes orthogonaux classiques. Le développement dans le chaos polynomial de la réponse aléatoire $Y(\theta)$ va consister en une combinaison linéaire de coefficients déterministes y_α et de polynômes multidimensionnels.

mensionnels $\psi_\alpha(\xi(\theta))$:

$$Y(\theta) = \sum_{\alpha \in N^M} y_\alpha \psi_\alpha(\xi(\theta)) \quad (1.2)$$

où les M -uplets α contiennent l'ordre des polynômes orthogonaux unidimensionnels ψ_{α_i} , associés à la mesure de probabilités f_{ξ_i} , utilisés pour construire les polynômes multidimensionnels ψ_α . θ est l'aléa appartenant à l'ensemble Θ des réalisations possibles d'une expérience aléatoire. Les polynômes sont orthogonaux par rapport à la mesure de probabilités $f_\xi = \prod f_{\xi_i}$ pour $1 \leq i \leq M$. Le choix des polynômes orthogonaux monodimensionnels est régi par le schéma de *Weiner* qui donne la correspondance entre la densité de probabilité de ξ_i et le type de polynômes monodimensionnels. Si la variable aléatoire ξ_i suit une loi uniforme alors on lui associe les polynômes de *Legendre* [17].

En pratique le développement (1.2) est tronqué à l'ordre p , c'est-à-dire on ne considère que les polynômes ψ_α de degré au plus égal à p . Ainsi le nombre total de termes de développement dans le chaos polynomial est égal à $P = \binom{M+p}{p} = \frac{(M+p)!}{M!p!}$. Dans la littérature, il existe plusieurs méthodes de détermination de coefficients y_α du développement dans le chaos polynomial. Nous les présenterons plus loin à la section 3.5 du chapitre 3.

1.3 Challenge à relever

Eu égard à l'état de l'art, l'usage des approches intrusives et non intrusives conduit à des solutions fiables de grande précision qui sont des fonctions explicites des variables aléatoires à l'entrée du modèle. Dans la majorité des problèmes mis en évidence, on retrouve des méthodes traitant des problèmes dont l'aléa porte sur les incertitudes géométriques au niveau de la frontière d'un domaine ou au niveau des interfaces entre sous-domaines [8, 9, 10, 11, 13]. Cependant, on ne retrouve pas encore des méthodes traitant des problèmes dont l'aléa portent sur les positions de sous-domaines inclus dans une région définie de l'espace, et en particulier en électromagnétisme. C'est ce type de problème que nous allons traiter tout au long de cette thèse.

De manière générale et naturelle, la résolution des problèmes stochastiques dont l'aléa porte sur la géométrie consiste à utiliser un code éléments finis déterministe embarqué dans une méthode stochastique classique telle que la méthode de MC ou des surfaces de réponse. Cependant, ces approches exigent un nombre important d'évaluations du modèle déterministe pour lequel un maillage conforme doit être systématiquement créé à chaque itération. Dans ce type de problèmes, il existe un couplage entre les dimensions aléatoires et spatiales qui ne concerne pas les problèmes où les incertitudes sont portées

par les lois de comportement. L'usage d'une approche intrusive n'est donc pas évident du fait de la difficulté d'approximation d'un champ aléatoire sous forme explicite.

Dans ce travail de thèse, nous nous tournerons vers une approche non intrusive. Nous allons chercher comment prendre en compte, non seulement les incertitudes géométriques liées aux positions des conducteurs dans la fenêtre de bobinage, mais aussi les incertitudes matérielles liées aux propriétés comportementales du noyau ferrite et de l'isolant des conducteurs d'un inducteur bobiné. Ce travail tire principalement son originalité :

- dans l'étendue de la plage fréquentielle le long de laquelle est menée l'étude stochastique. Celle-ci va du DC jusqu'à 1 MHz. Elle implique l'usage des modèles spécifiques pour la modélisation des incertitudes matérielles et la prise en compte des phénomènes électromagnétiques (pertes électriques et magnétiques) qui s'intensifient avec l'augmentation de la fréquence.
- dans la façon de modéliser les incertitudes géométriques liées aux positions des conducteurs et les incertitudes matérielles du noyau magnétique ferrite et de l'isolant conducteur. Nous allons proposer un algorithme de déploiement de conducteurs permettant de générer des patrons de bobinage représentatifs de la géométrie du modèle.
- dans l'approche utilisée permettant de propager toutes les incertitudes à moindre coût. Cette approche permet ici de réduire considérablement le nombre d'évaluations coûteuses du modèle numérique EF en transformant les incertitudes géométriques liées aux positions de conducteurs en incertitudes matérielles grâce à la technique d'homogénéisation. Ceci permet de réduire considérablement la dimension du vecteur entrée aléatoire du modèle et d'utiliser un substitut stochastique Polynomial Chaos Expansion (PCE) du modèle de départ.
- dans la validation expérimentale des résultats de simulation, à travers la mesure des paramètres d'intérêt sur un lot d'inducteurs acquis à partir d'un fournisseur. Cette validation porte sur la comparaison, des distributions déduites des mesures expérimentales et des simulations, via des paramètres statistiques tels que la distance de *Wasserstein* et des formes de distributions obtenues.

1.4 Enjeux et objectifs de la thèse

L'usage de composants magnétiques bobinés au niveau des équipements électroniques de puissance moyenne fréquence (de 1 kHz à quelques centaines de kHz) s'avère indispensable dans nombreuses applications industrielles de conversion ou de stockage d'énergie. Il est donc nécessaire d'optimiser leurs performances lors de la conception en vue d'être en adéquation avec les contraintes opérationnelles. Plusieurs progrès ont été réalisés ces dernières décennies dans cette optique. C'est surtout dans le domaine de l'aérospatiale où l'exigence de réduire le volume, et donc le poids de ces composants, et en même temps l'amélioration de leurs performances, nécessitent la recherche des solutions fiables et durables pour optimiser leurs fabrications. C'est le cas par exemple des alimentations à découpage (*cf.* figure 1.2), qui utilisent des composants magnétiques bobinés dans le but de réduire ou d'augmenter le niveau de tension de sortie et d'assurer l'isolation galvanique. La montée en fréquence de découpage de ces convertisseurs s'accompagne de plusieurs phénomènes indésirables [23], parmi lesquels :

- Les effets de peau et de proximité au niveau des conducteurs;
- L'augmentation de pertes magnétiques dans le noyau ferromagnétique ;
- L'influence de plus en plus marquée des capacités parasites qui doivent être prises en compte lors du dimensionnement du système.

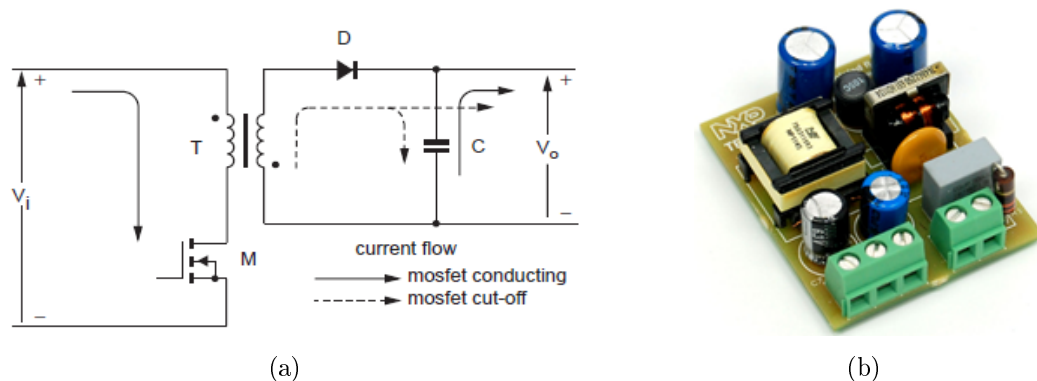


Figure 1.2: Schéma de circuit d'un convertisseur DC-DC type Flyback

Des nombreux efforts ont été menés ces dernières décennies dans la modélisation de ces phénomènes complexes, en vue de prédire et d'améliorer les performances des composants magnétiques bobinés (notamment ceux utilisés en électronique de puissance) [24, 25, 26]. En effet, la modélisation

des phénomènes complexes précités est rendue possible grâce à l'usage des méthodes numériques (comme par exemple la MEF, etc.) permettant de résoudre les équations de Maxwell régissant le fonctionnement des dispositifs électromagnétiques. Les progrès dans le domaine de l'analyse numérique et le développement des outils de calcul [27] et de représentation géométrique [28], ont permis de résoudre numériquement ces problèmes de modélisation (géométries complexes et prise en compte des lois de comportement non linéaires de matériaux). Avec l'accroissement de la capacité de calcul des ordinateurs, il est devenu possible de résoudre couramment des problèmes ayant plusieurs millions d'inconnues.

Le fait de travailler en haute fréquence, a permis de réduire l'encombrement et donc le poids des composants magnétiques bobinés. Ainsi, l'usage de noyaux magnétiques en ferrite [29, 30, 31] (de type Manganèse Zinc (MnZn) ou Nickel Zinc (NiZn)) s'accompagne de certains avantages par rapport aux alliages magnétiques classiques (tôles de type FeSi par exemple), parmi lesquels :

- Une faible masse volumique (de l'ordre de 4750 kg/m^3) ;
- Une perméabilité magnétique relative initiale élevée (de l'ordre de quelques milliers) ;
- Une résistivité électrique importante (jusqu'à $10 \text{ } \Omega\text{m}$) ;
- Une intéressante induction magnétique à saturation (pouvant atteindre 0,6 T en moyenne).

Malgré des efforts de modélisation investis jusqu'à aujourd'hui, on continue à observer des écarts entre les simulations à partir des paramètres extraits des modèles numériques et les mesures expérimentales effectuées sur ces composants. Dans une certaine mesure, ces différences peuvent s'expliquer à partir des paramètres d'entrée des modèles numériques qui sont mal connus. Plusieurs facteurs peuvent en être à l'origine : D'une part, les variations de paramètres environnementaux non contrôlés (température, pression, etc.) conduisent à de l'incertitude sur les lois de comportement des matériaux, et, d'autre part, les aléas associés aux procédés de production ou de fabrication d'équipements ainsi que le manque d'informations suffisamment précises peuvent rendre incertains certains paramètres d'entrée. Citons à titre d'exemple le cas d'équipements mécaniques fabriqués avec de nécessaires tolérances dimensionnelles, comme la distance d'entrefer dans les machines électriques, grandeur critique pouvant grandement influencer les performances [32]. On comprend bien que pour réduire ces écarts observés entre les modèles

numériques et l'expérience, il s'avère aussi essentiel de connaître l'influence de ces incertitudes sur les grandeurs d'intérêt.

En effet, le processus normal d'amélioration de la précision du modèle numérique déterministe devient futile si l'influence des incertitudes des paramètres d'entrée ne peut être prise en compte. Ainsi, doivent être développés des modèles prenant en compte les incertitudes sur les paramètres d'entrée. Des tels modèles tirent parti d'approches stochastiques. Ils permettent de propager les incertitudes de paramètres d'entrée aléatoires à travers le modèle numérique sur les sorties de ce modèle. Grâce à ces modèles stochastiques, des outils peuvent être développés dans le but d'améliorer la robustesse d'un processus de fabrication, par exemple en déterminant des tolérances sur certaines dimensions [33, 34]. L'évaluation de l'influence de la variabilité des paramètres d'entrée sur les paramètres de sortie étant possible, le design peut être orienté de façon à remplir les spécifications du produit. Cependant l'approche stochastique exige plusieurs évaluations du modèle numérique et plus de ressources de calcul pour modéliser la variabilité des paramètres d'entrée aléatoires.

1.5 Objectif poursuivi

Le but de ce travail est de prendre en compte l'influence des différents types d'incertitudes rencontrées dans l'extraction des paramètres Résistance Inductance Capacité (RLC) des composants magnétiques bobinés fonctionnant aux fréquences intermédiaires (de 1 kHz à quelques centaines de kHz), en utilisant des méthodes stochastiques afin de quantifier leurs influences sur les sorties d'intérêt et de déterminer les intervalles de confiance de ces dernières.

Dans un premier temps, il s'agira des incertitudes géométriques inhérentes au modèle numérique réaliste de composants magnétiques bobinés. Les incertitudes prises en compte seront par exemple liées aux positions de conducteurs dans la fenêtre de bobinage, (*cf.* figure 1.3), ou à la permutation de conducteurs entre couches de bobinage ou encore à l'insertion de conducteurs d'une couche dans une autre. Dans un second temps, les incertitudes matérielles liées aux lois de comportement de matériaux présents dans le composant, devront être prises en compte. En effet, la perméabilité magnétique, la permittivité et la résistivité électrique de certains matériaux ne sont connues qu'à un certain niveau de précision.

En fonction de la complexité des problèmes à résoudre, différentes approches stochastiques seront utilisées dans ce travail. Par la suite, les performances de ces différentes approches seront comparées quantitativement en vue de tirer un bilan en termes d'avantages et d'inconvénients de chaque méthode stochastique. L'application sera étendue aux simples inducteurs bobinés et

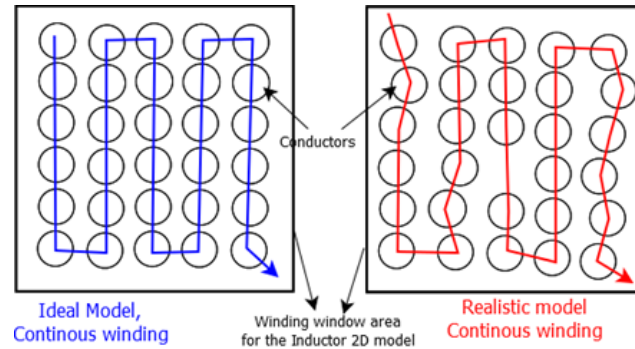


Figure 1.3: Exemple d'illustration des incertitudes géométriques sur l'agencement des conducteurs d'un bobinage à cinq couches

plus tard ou en perspective, aux cas des transformateurs utilisés en électronique de puissance.

En général, l'approche stochastique comprend quatre étapes principales dont :

- Le développement du modèle mathématique liant les entrées du problème aux sorties d'intérêt. Ce modèle peut être analytique ou basé sur un schéma numérique d'équations aux dérivées partielles (au travers par exemple de la MEF).
- La caractérisation et la modélisation de la variation de paramètres d'entrée aléatoires ; les incertitudes pouvant être de type matériel ou géométrique ou encore peuvent porter sur des grandeurs globales comme le courant ou la tension par exemple.
- La propagation des paramètres d'entrée à travers le modèle développé à la première étape. Cette étape permet de quantifier la variabilité des sorties du modèle.
- La caractérisation de la variabilité des sorties (moyenne, écart type, etc.) à partir des résultats obtenus à l'étape précédente.

1.6 Intérêt économique du sujet

Aujourd'hui, le recours à des composants magnétiques moyenne fréquence (du kHz au MHz) s'avère indispensable dans des nombreuses applications. On peut citer par exemple l'utilisation de transformateurs multi-enroulements à noyau ferrite dans la conception de certaines alimentations pour le secteur

spatial. Les applications sont de plus en plus nombreuses vu l'intérêt que présentent ces composants lorsqu'on a besoin de monter en fréquence de fonctionnement. Cependant, cette montée en fréquence s'accompagne de difficultés de conception accrues. En effet, lorsqu'on fonctionne à des fréquences supérieures au kHz, certains phénomènes électriques modifient le comportement de ces composants dans le circuit électrique, via l'apparition des effets de peau et de proximité, des pertes magnétiques et des capacités parasites, etc.

Il sera donc nécessaire de bien mesurer l'impact de tels phénomènes sur les paramètres globaux de ces composants de manière à pouvoir assurer un dimensionnement correct du convertisseur. On peut penser par exemple aux inductances de fuite des enroulements qui sont responsables de surtensions de commutation que doivent pouvoir supporter les composants à semi-conducteur. Les résistances de ces enroulements sont le siège des pertes Joule qui sont autant des sources de chaleur; les capacités parasites entre primaires et secondaires (voire entre spires au sein des enroulements), étant les sources de pertes diélectriques, etc. Ceci implique que les modèles de composants bobinés utilisés avec succès aux fréquences industrielles (50 Hz) doivent être revus aux différents niveaux de modélisation (matériau magnétique et enroulements). Vu la tendance de fonctionnement à des fréquences de découpage sans cesse plus élevées, il convient à l'heure actuelle d'envisager une modélisation jusqu'à quelques MHz.

Le manque de précision ou d'informations (incertitudes épistémiques et aléatoires) sur les paramètres d'entrée du modèle numérique peut avoir un impact négatif (des manques à gagner en production industrielle par exemple) sur les performances (couple, rendement, etc.) d'un moteur électrique lorsque la dimension de l'entrefer n'est pas optimale. En outre, la prise en compte d'incertitudes dans la modélisation numérique permet d'optimiser le design d'équipements et de mettre en évidence les paramètres d'entrée ayant une forte influence sur les performances du système à développer, de façon à prendre les meilleures décisions et à corriger (ou améliorer) certaines procédures (d'usinage par exemple) en fonction des tolérances déduites de cette optimisation (retour d'expérience).

Enfin, on voit aussi l'importance de la prise en compte d'incertitudes et/ou d'optimisation lorsqu'il s'agit de traiter des applications exigeantes prévues pour fonctionner en environnement sévère. C'est par exemple le cas de convertisseurs embarqués dans les satellites qui sont soumis à des températures extrêmes, allant de $-50\text{ }^{\circ}\text{C}$ à $150\text{ }^{\circ}\text{C}$ selon leur degré d'exposition au soleil. L'impact de cette variation sur les caractéristiques électriques et magnétiques de matériaux telles que la conductivité électrique et l'induction magnétique à laquelle le phénomène de saturation magnétique va se manifester, ne peut

être négligé.

Sur le plan purement technique, la qualité du modèle est non seulement un enjeu scientifique mais aussi un enjeu économique important, lorsque les résultats déterminent des lourds investissements. En effet, les études de sûreté, dont le calcul de risque de défaillance (fiabilité d'une structure, événements rares, etc.) et de marges (par rapport une réglementation), ainsi que l'optimisation de performances d'un système (conception) exigent l'utilisation des méthodes de prise en compte d'incertitudes en simulation numérique.

1.7 Subdivision du rapport de thèse

La suite de ce rapport est composée des chapitres suivants:

Le deuxième chapitre porte sur les formulations qui seront utilisées dans le but de développer un modèle numérique déterministe nécessaire aux applications ciblées dans ce travail. En effet, pour pouvoir propager les incertitudes des paramètres d'entrée vers les sorties du problème, la nécessité de développer un modèle liant les entrées aux sorties du problème s'impose. Les formulations mathématiques nécessaires à l'extraction des paramètres **RLC** des inducteurs bobinés, en fonction de la fréquence, sont présentées ici.

Dans le troisième chapitre, nous présentons les méthodes stochastiques en général. Elles permettent de propager les incertitudes d'entrée vers la sortie du modèle. Une de ces méthodes permettant de réduire le temps de calcul associé aux évaluations du modèle numérique est présentée dans ce chapitre. Il s'agit des substituts en polynômes de chaos. Ceux-ci ont l'avantage d'être moins coûteux en termes de ressources de calcul. Ils nous serviront plus tard dans ce travail pour mener une étude de sensibilité du modèle d'extraction de paramètres **RLC** vis-à-vis des différentes entrées aléatoires. Quelques concepts de sensibilité d'un modèle seront aussi présentés dans ce chapitre.

Au chapitre 4, nous proposons deux algorithmes permettant de modéliser les incertitudes géométriques de bobinage au sein d'un inducteur bobiné. La prise en compte d'incertitudes géométriques dans un modèle numérique est un problème qui est le plus souvent délicat à résoudre (surtout en ce qui concerne le bobinage) et nécessite de trouver des modèles suffisamment représentatifs du caractère aléatoire à prendre en compte. Leur implémentation et quelques cas d'illustration permettront de mieux asseoir les idées. Enfin, une comparaison entre les deux algorithmes précités sera établie en vue de tirer les avantages et les inconvénients.

Des modèles analytiques relatifs aux incertitudes matérielles seront aussi présentés dans ce chapitre, afin de rendre compte de la dépendance en fréquence des propriétés matérielles. Ainsi le modèle de *Debye* relatif à

la perméabilité magnétique ou à la permittivité électrique des diélectriques (isolant conducteur, noyau magnétique, etc.) sera présenté par la suite dans ce chapitre.

Au chapitre 5, nous mettons en oeuvre une technique de réduction de la dimensionalité de l'entrée aléatoire de notre modèle numérique. Celle-ci sera avantageusement utilisée pour faciliter la quantification des incertitudes du système. Cette technique fait appelle aux notions de volume représentatif élémentaire et d'homogénéisation que nous rappellerons dans ce chapitre. Une application sur un cas test d'inducteur bobiné sera traité dans le but de valider cette technique et présenter son intérêt. Les incertitudes prises en compte dans le cas test relèvent uniquement des positions aléatoires de conducteurs dans la fenêtre de bobinage. Ensuite, une discussions sera menée afin d'évaluer les performances de la technique de réduction de dimensionnalité développée dans ce travail à travers les distributions des paramètres de sortie *RLC* du modèle numérique.

Le sixième chapitre porte sur la validation expérimentale via des mesures d'impédance réalisées sur un lot d'inducteurs bobinés de même référence. Il s'agira de valider les résultats de simulation à travers les distributions des paramètres de sortie *RLC* ainsi d'autres critères de ressemblance, comme la distance de *Wasserstein*. Dans ce chapitre, des détails sur la procédure expérimentale et l'appareil de mesure (analyseur d'impédance) seront présentés au préalable. Il s'ensuivra une analyse de sensibilité sur la plage de fréquences d'intérêt du modèle numérique associé au composant étudié, l'objectif étant de comprendre l'influence de chaque entrée aléatoire sur les sorties de ce modèle. À la fin de ce chapitre, une conclusion d'ordre statistique sera présentée pour mettre en évidence l'influence des incertitudes géométriques et matérielles sur les paramètres *RLC* de l'inducteur bobiné considéré ici.

Enfin, nous rappellerons dans la conclusion générale les principaux objectifs du travail de thèse et ferons le bilan des résultats les plus marquants de cette étude. Les principales perspectives à court et long terme seront ensuite évoquées.

Modèle déterministe

2.1 Introduction

Dans ce travail, les modèles déterministes sont des modèles numériques déduits des équations de *Maxwell* qui vont lier les entrées aux sorties du notre système. Il s'agit d'un ensemble d'équations aux dérivées partielles qui régissent la distribution des champs électromagnétiques dans le domaine d'étude. Ces dernières sont constituées des formulations magnétodynamique en $\mathbf{a} - v$ (potentiels vecteur magnétique et scalaire électrique respectivement) et électrostatique en potentiel scalaire électrique v . De la formulation magnétodynamique, les paramètres résistance (R) et inductance (L) peuvent être déterminés à partir de la distribution des champs électromagnétiques ou de l'impédance du circuit. D'autre part, le paramètre C, image des capacités parasites, est extrait de l'énergie électrique, qui dépend elle-même de la distribution du champ électrique dans la partie non conductrice du domaine d'étude. En vue d'établir le couplage *faible* entre les deux problèmes, le problème électrostatique peut recevoir sous formes de contraintes, les potentiels électriques des conducteurs issus du premier problème.

Les paramètres RL peuvent aussi être déterminés à partir de la formulation $\mathbf{t} - \omega$ (potentiels vecteur électrique et scalaire magnétique) qui nécessite des coupures lorsque le domaine d'étude est multiplement connexe. Signalons ici notre apport dans cette thèse pour le cas du domaine 2D d'un inducteur multicouche nécessitant plusieurs coupures (autant de coupures qu'il y a de conducteurs). En effet, les fonctions de forme associées aux éléments d'arête au niveau des coupures nécessitent d'être convenablement orientées en vue de garantir l'effectivité du théorème d'*Ampère* autour de chaque conducteur et d'assurer le flux correct de courant [35, 36].

Dans ce qui suit, nous présentons les équations de *Maxwell* à partir desquelles sont déduites les différentes formulations éléments finis qui constituent les modèles numériques utilisés dans le cadre de cette thèse. La majorité de ces formulations ont été tirées de [37, 38]. Notre apport, qui a fait l'objet d'une publication [36] en ce qui concerne la résolution des problèmes des flux de courant liés à l'application de la formulation $\mathbf{t} - \omega$ dans le cas d'un inducteur multicouche, sera aussi présenté dans ce chapitre. D'autres

formulations alternatives seront également présentées à titre d'information, afin d'avoir une vue suffisamment large de la modélisation de composants magnétiques bobinés.

2.2 Équations de *Maxwell*

Les équations de *Maxwell* sont un système d'équations aux dérivées partielles qui lient les champs électrique et magnétique entre eux. Elles expriment d'une part la loi d'*Ampère* généralisée (équation (2.1a)) et la loi de *Faraday* (équation (2.1b)). Et d'autre part, les lois de conservation magnétique (théorème de *Gauss* du magnétisme, voir équation (2.1c)) et électrique (théorème de *Gauss* de l'électrostatique, voir équation (2.1d)).

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{d} \quad (2.1a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{b} \quad (2.1b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0 \quad (2.1c)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{d} = \rho_v \quad (2.1d)$$

où l'opérateur ∂_t représente la dérivée partielle par rapport au temps.

Les quatre vecteurs \mathbf{h} , \mathbf{b} , \mathbf{e} et \mathbf{d} sont appelés respectivement champ magnétique (A/m), induction magnétique (T), champ électrique (V/m) et déplacement électrique (C/m^2). \mathbf{j} est la densité de courants induits (A/m^2) pouvant inclure des sources de courant \mathbf{j}_s , ρ_v la densité volumique de charges électriques (C/m^3), et t le temps (s). Ces équations sont accompagnées des lois constitutives matérielles linéaires suivantes (cas des matériaux isotropes) :

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e} \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{b} = \mu \mathbf{h} \quad (2.2b)$$

$$\mathbf{d} = \varepsilon \mathbf{e} \quad (2.2c)$$

où σ est la conductivité électrique (S/m), μ est la perméabilité magnétique (H/m) et ε est la permittivité diélectrique (F/m).

Les quatre vecteurs champs électriques et magnétiques sont couplés à travers les équations de *Maxwell*, si bien qu'une solution directe sera en général impossible. Selon le problème envisagé, certains phénomènes peuvent être négligés pour aboutir à un système découplé plus simple à résoudre. En électromagnétisme, des modèles simplifiés peuvent être résolus en passant par des variables intermédiaires, appelées potentiels, à l'aide de méthodes numériques (comme la méthode des éléments finis par exemple). L'inconnue (ou champ)

déduite directement à partir d'une variable intermédiaire (ou potentiel), va vérifier les équations du système de façon forte (on parle aussi de formulation forte) alors que les autres inconnues doivent être vérifiées faiblement en passant par des méthodes numériques de résolution. Étant donné le sujet de ce travail, nous nous intéressons ici plus particulièrement aux problèmes électrostatique et magnétodynamique. Ceux-ci sont abordés dans la suite de ce chapitre.

2.3 Problème magnétodynamique

La résolution de ce problème permet de déterminer les courants induits dans des pièces conductrices massives et la distribution du champ magnétique qui sont dus soit à des aimants en mouvement, soit à des courants variants avec le temps. Il existe deux possibilités permettant de résoudre ce problème : on peut passer par des potentiels ou garder les champs mis en jeu dans la définition du problème. Nous allons présenter ici deux formulations qui sont les plus adaptées dans le cas où le problème comporte des conducteurs massifs. Il s'agit de la formulation en $\mathbf{t} - \omega$ et celle dite en $\mathbf{a} - v$. Ce problème est régi par les équations de *Maxwell* complétées par les lois de comportement magnétique et électrique suivantes :

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = \mathbf{j} \tag{2.3a}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{b} \tag{2.3b}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0 \tag{2.3c}$$

$$\mathbf{b} = \mu \mathbf{h} \tag{2.4a}$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e} \tag{2.4b}$$

où la densité de courant \mathbf{j} inclut les courants source. L'équation de conservation (2.3c) porte une partie de (2.3b) et est associée à cette dernière. Les équations (2.4a) et (2.4b) sont considérées respectivement comme la loi magnétique et la loi d'*Ohm*. Il est nécessaire de mentionner l'hypothèse quasi-statique permettant de négliger [37] l'intervention de la densité des courants de déplacement ($\partial \mathbf{d} / \partial t$) dans l'équation d'*Ampère* (2.1a) vu la plage de fréquence envisagée dans ce travail. Ceci est vrai lorsque les dimensions du système sont négligeables par rapport aux longueurs d'onde envisagées.

Dans le cas des modèles constitués de domaine multiplement connexe, l'usage des formulations en \mathbf{h} nécessite l'intervention de coupures dans le domaine non conducteur permettant de rendre le domaine simplement connexe

[35, 39]. Dans le cas du modèle 2D d'un inducteur multicouche, l'usage de la formulation $\mathbf{t} - \omega$ peut devenir rapidement encombrant à cause du nombre de coupures à réaliser de manière judicieuse et de leur orientation en vue d'assurer le bon flux de courant dans chaque conducteur. Un apport original dans ce sens a été formulé dans ce travail afin d'extraire les paramètres RL d'un inducteur bobiné [36] sans couplage circuit. La génération des coupures a été réalisé à l'aide d'un outil mathématique (*cf. cohomologie* [39]) implémenté dans l'application *3D finite element mesh generator (Gmsh)* [28], que nous décrirons plus loin dans ce rapport.

2.3.1 Cas général

Considérons le cas général où les courants induits \mathbf{j} règnent dans la partie conductrice Ω_C dont le complément non conducteur est noté Ω_C^C , si bien que $\Omega = \Omega_C \cup \Omega_C^C$. Si les conducteurs massifs appartiennent à Ω_C , alors les conducteurs bobinés sont les régions Ω_S , avec $\Omega_S \subset \Omega_C^C$. Cette distinction repose sur le fait que les courants induits doivent apparaître dans les conducteurs massifs alors que les courants fixés j_s doivent être imposés dans les conducteurs bobinés. Les conditions aux frontières relatives aux champs présents dans (2.3) sont définies sur des frontières généralement non connectées tel que $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_h \cup \Gamma_e$ (*cf. figure 2.1*).

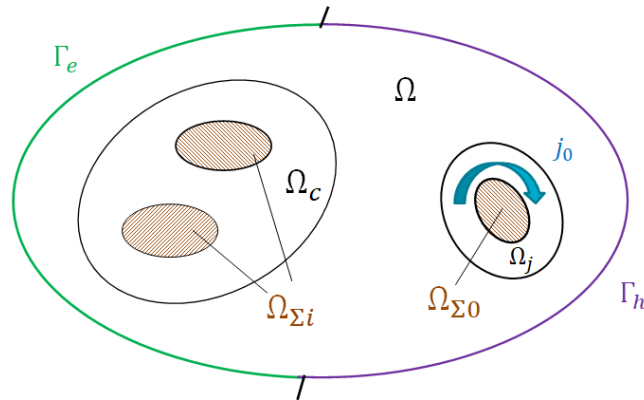


Figure 2.1: Problème général de magnétodynamique

2.3.2 Formulation magnétodynamique $\mathbf{t} - \omega$

Pour cette formulation, les conditions aux limites (2.5) peuvent être adoptées [40]:

$$\omega = Cte|_{\Gamma_h} \quad (2.5a)$$

$$\mu(\mathbf{t} - \text{grad}\omega) = 0|_{\Gamma_b} \quad (2.5b)$$

$$\sigma^{-1} \text{rot } \mathbf{t} \times \mathbf{n} = 0|_{\Gamma_e} \quad (2.5c)$$

$$\mathbf{t} \times \mathbf{n} = 0|_{\Gamma_j} \quad (2.5d)$$

Cependant, il n'est toujours pas possible d'assurer simultanément et *fortement* toutes ces conditions aux limites. De plus, il n'est pas évident de fixer des *jauges* pour ce type de formulation [41, 40] ($\mathbf{t} - \omega$ ou $\mathbf{a} - v$).

Les potentiels vecteur électrique \mathbf{t} et scalaire magnétique ω , sont définis par :

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \text{rot } \mathbf{t} \text{ et} \\ \mathbf{h} &= \mathbf{t} - \text{grad}\omega \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ainsi en réécrivant (2.3b) et (2.3c), on obtient :

$$\text{rot}(\sigma^{-1} \text{rot } \mathbf{t}) + \partial_t (\mu(\mathbf{t} - \text{grad}\omega)) = 0 \quad (2.7)$$

$$\text{div} (\mu(\mathbf{t} - \text{grad}\omega)) = 0; + \text{Jauge} \quad (2.8)$$

La loi de *Faraday* peut être résolue *faiblement* en imposant le vecteur potentiel \mathbf{t} dans un domaine simplement connexe. Dans le but d'assurer l'unicité de la valeur du potentiel scalaire ω , le vecteur potentiel électrique \mathbf{t} est introduit dans le domaine de coupure Ω_Σ tel que sa circulation le long d'un contour interne Ω_{Σ_i} ($i = 1, 2, \dots, c$; avec c le nombre de trous dans Ω_C^C rendu simplement connexe) fournisse le courant traversant dans le conducteur enfermé par ce contour. Comme le champ \mathbf{t} est un champ à rotationnel nul qui ne peut être exprimé comme le gradient d'un scalaire dans Ω_C^C , il peut être étendu sur un sous-espace de *forme*₁ appelé groupe de *cohomologie* d'ordre 1 $H^1(\Omega_C^C)$ [39]. Un espace discret W_{H1} peut être considéré dans Ω_Σ de la façon suivante : $W_{H1} = \{\mathbf{t} \in W^1(\Omega_\Sigma) \mid \mathbf{n} \times \mathbf{t} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{\Sigma_i}/\partial\Omega_C, \text{ et } \text{rot } \mathbf{t} = 0 \text{ dans } \Omega_{\Sigma_i}, i = 1, \dots, c\}$.

L'espace discret de \mathbf{t} dans les domaines de coupures est exprimé par $W_{\Sigma_i} = \sum_{e \in \mathbf{E}_{\Sigma_i}} \pm \mathbf{W}_e, i = 1, \dots, c$ où \mathbf{W}_e sont les fonctions de forme d'éléments d'arête; et \mathbf{E}_{Σ_i} est l'ensemble d'arêtes à travers la surface de coupure (couche de transition) Σ_i tel que :

- Les signes dépendent de l'orientation d'arêtes : un mauvais choix de cette fonction de base (choix de signes) peut entraîner des grandeurs globales ou locales n'ayant aucun sens physique, comme nous le verrons ci-dessous sur l'illustration. Ainsi, l'utilisateur de l'application *Gmsh* doit être impliqué dans le choix de ces fonctions de base *cohomologie*.
- Finalement, $\mathbf{W}_t^1 = \{\mathbf{t} \in \mathbf{W}^1(\Omega_c) \oplus \mathbf{W}_{H_1}(\Omega_\Sigma) \mid \mathbf{n} \times \mathbf{t} = 0 \text{ sur } \partial(\Omega_c \cup \Omega_\Sigma)\}$

Dans notre cas, l'application *Gmsh* utilisée permet de générer des coupures, et leurs fonctions de base H^1 associées dans le logiciel de calcul EF - General Environment for the Treatment of Discrete Problems (*GetDP*). Cette génération de coupures est réalisée indépendamment de leur orientation. Ceci peut entraîner la présence des flux de courants dans des mauvaises directions et ainsi entraîner des valeurs incorrectes sur les quantités globales ou locales en post-processing. La stratégie utilisée dans ce travail pour corriger les flux de courants consiste à résoudre ce problème en trois étapes :

- La première étape consiste à réaliser une modélisation avec calcul et analyse des flux de courant en post-processing dans chaque conducteur;
- La deuxième étape consiste à corriger les contraintes en courant dans chaque conducteur de manière à respecter l'orientation des éléments d'arête fournis par les groupes de *cohomologie* relatifs à chaque conducteur ;
- En troisième étape, une modélisation avec les bons flux de courants permet d'extraire les grandeurs globales et locales d'intérêt.

2.3.3 Cas test d'un inducteur

Pour illustrer l'application de cette correction des flux des courants dans le cas 2D d'un inducteur multicouche, nous allons extraire les paramètres RL d'un inducteur de 32 spires (dont 8 spires par couche) ayant un noyau en ferrite de perméabilité magnétique relative égale à 1500. Les conducteurs ont un diamètre de 0,315 mm. Étant donné la symétrie de ce système, un modèle 2D axisymétrique éléments finis est adopté. L'extraction des paramètres RL s'étend sur une plage de fréquence allant de 50 kHz à 1 MHz. Pour tenir compte des effets de peau et de proximité, le maillage est adapté en fonction de la fréquence de fonctionnement.

Afin de respecter la loi d'*Ampère* dans Ω_c^C et rendre ce domaine simplement connexe, des coupures Ω_{Σ_i} doivent être réalisées dans le domaine Ω_c^C . La figure 2.2 montre les supports des fonctions de base *cohomologie* associés à une coupure relative au dernier conducteur de la dernière couche. Celle-ci

est générée à partir du maillage éléments finis converti en complexe régulier H^1 . Lorsque nous nous servons de telles fonctions de base dans la formulation $\mathbf{t} - \omega$ de ce problème à valeurs aux limites, la densité de courants induits et le champ magnétique obtenus en résolvant sous *GetDP* n'expriment pas des distributions et effets physiques attendus (voir figures 2.3).

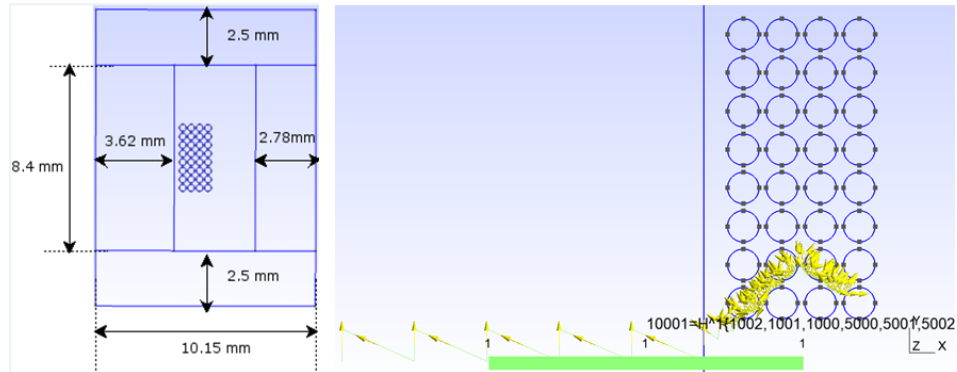


Figure 2.2: Supports des fonctions de base *cohomologie* H^1 associées à une coupure

En corrigeant le flux de courant dans chaque conducteur, nous arrivons à obtenir des distributions de courants et champs en accord avec les phénomènes physiques. Sur la figure 2.4 relatives aux simulations à 1 MHz, on peut effectivement observer les effets de peau et de proximité dans les conducteurs et une distribution réaliste du champ magnétique autour des conducteurs et dans le noyau magnétique.

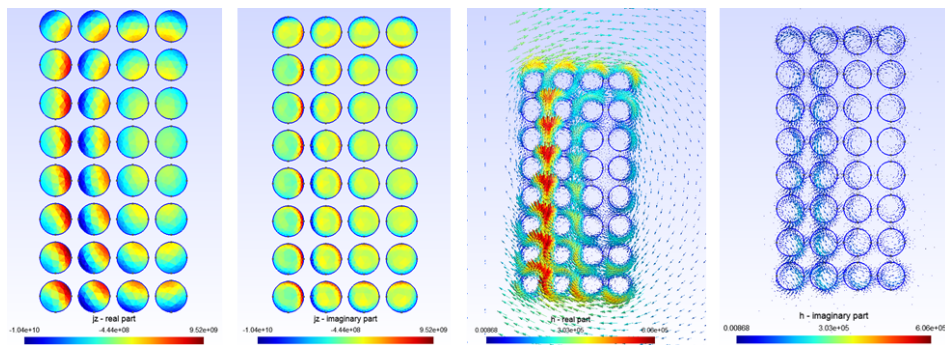


Figure 2.3: Parties réelles et imaginaires de la composante \mathbf{j}_z (gauche) de densité de courant \mathbf{j} (gauche) et du champ magnétique \mathbf{h} (droite), avant correction des flux de courants liée à l'orientation des coupures à 1 MHz.

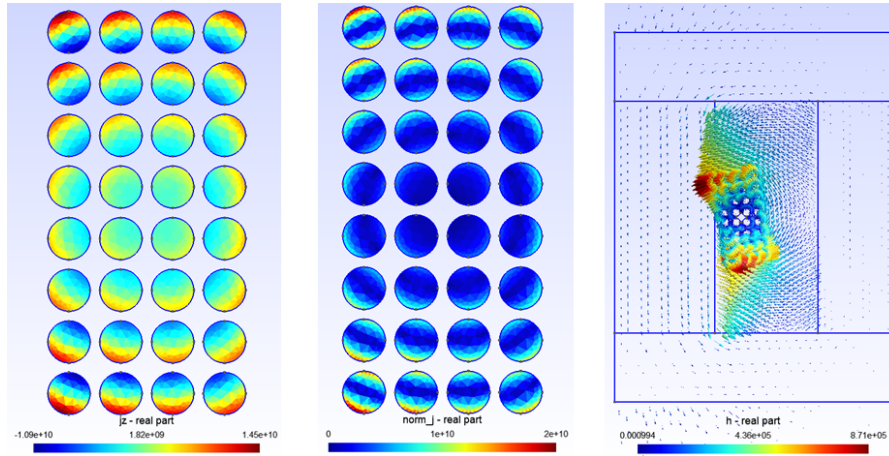


Figure 2.4: Parties réelles de la composante \underline{j}_z de densité de courant (gauche) et du champ magnétique \underline{h} (droite) + Norme $|\underline{j}|$ de la densité de courant (milieu) après correction des flux de courants via l'orientation des coupures à 1 MHz.

L'évolution des paramètres RL extraits de ce modèle (montrée à la figure 2.5) en fonction de la fréquence, reflète bien l'apparition des effets de peau et de proximité avec l'augmentation de la fréquence, où les courants induits ont tendance à circuler dans une section réduite des conducteurs. Ceci entraîne une augmentation de la résistance et une faible diminution de l'inductance avec l'augmentation de la fréquence.

Nous allons à présent comparer ces résultats à ceux obtenus par l'intermédiaire d'une autre formulation : la formulation $\mathbf{a} - v$ en potentiels vecteur magnétique \mathbf{a} et scalaire électrique v . Cette validation va pouvoir se poursuivre, plus tard dans ce rapport, en utilisant des modèles analytiques de calcul des paramètres RL qu'on retrouve dans la littérature (*cf.* Annexe C).

2.3.4 Formulation magnétodynamique $\mathbf{a}-v$

À partir de l'équation (2.3), il est possible de définir un potentiel vecteur magnétique \mathbf{a} tel que $\mathbf{b} = \text{rot } \mathbf{a}$. Ce qui permet de réécrire l'équation (2.3) sous la forme :

$$\text{rot}(\mathbf{e} + \partial \mathbf{a} / \partial t) = 0 \quad (2.9)$$

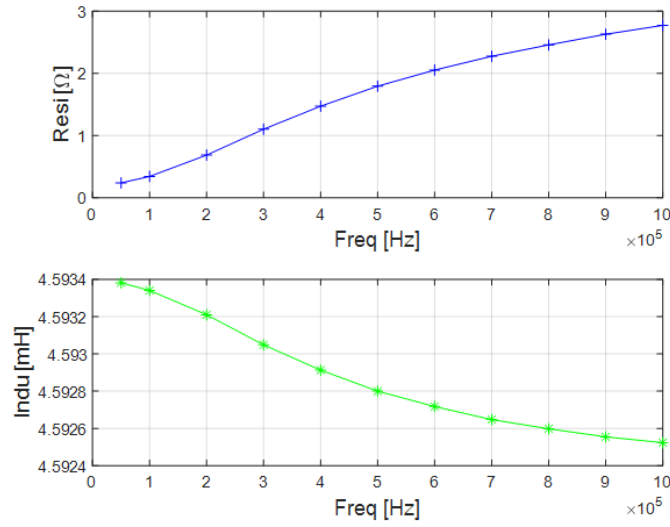


Figure 2.5: Évolution des paramètres RL extraits à partir de la formulation magnétodynamique $\mathbf{t} - \omega$, en fonction de la fréquence.

De cette façon, la somme des termes entre parenthèses dérive d'un potentiel scalaire v , tel que :

$$\mathbf{e} + \partial \mathbf{a} / \partial t = -\text{grad } v \quad (2.10)$$

L'introduction de ces deux potentiels permet de vérifier de façon forte les équations (2.3b) et (2.3c). En insérant cette équation dans celle d'Ampère (2.3a), on obtient l'équation (2.11) qui doit être vérifiée au mieux au moyen de méthodes numériques [23].

$$\text{rot} (\nu \text{rot } \mathbf{a}) + \sigma (\partial \mathbf{a} / \partial t) + \sigma \text{grad } v = \mathbf{j}_s \quad (2.11)$$

On montre dans [38, 23] que la solution de cette équation est unique à condition d'imposer :

- La valeur du potentiel \mathbf{a} sur le domaine Ω à l'instant initial (conditions initiales);
- La valeur de la composante tangentielle du champ magnétique $\mathbf{n} \times \mathbf{h}$ (condition de *Neumann*) sur toute la surface extérieure du domaine d'étude Ω , à tout instant $t > 0$.

Ainsi le problème magnétodynamique en $\mathbf{a} - v$ peut s'écrire, en adoptant des conditions aux limites homogènes :

$$\text{rot} (\nu \text{rot} \mathbf{a}) + \sigma (\partial \mathbf{a} / \partial t) + \sigma \text{grad} v = \mathbf{j}_s, \mathbf{n} \times \mathbf{h}|_{\Gamma_h} = 0 \quad (2.12)$$

La méthode des éléments finis permet d'exprimer les grandeurs locales (potentiels vecteurs et autres champs, \mathbf{h} par exemple) au travers d'espaces fonctionnels discrets bien adaptés à l'approximation des champs physiques. Ce qui permet de transformer les équations aux dérivées partielles en des systèmes d'équations linéaires à résoudre par des méthodes numériques bien adaptées (méthode des résidus pondérés par exemple [37]). La méthode des résidus pondérés permet de remplacer le problème initial aux dérivées partielles par un problème intégral équivalent qui peut être discrétisé à deux niveaux :

- En remplaçant les grandeurs locales vectorielles ou scalaires \mathbf{u} par une décomposition dans un espace fonctionnel discret et fini ;
- Et en choisissant un nombre fini de fonctions test w_i . Il existe plusieurs types de méthodes selon le choix de fonctions test retenu (collocation par sous-domaines, collocation par points, *Galerkin*, etc.).

Nous n'allons pas nous étaler sur ces différentes méthodes de discrétisation dans ce rapport de thèse. Par contre, nous allons utiliser la méthode *Galerkin* implémentée dans l'application *GetDP* pour extraire les paramètres RL de l'inducteur multicouche du cas test précédent (voir l'usage de la formulation $\mathbf{t} - \omega$). Il s'agit maintenant de la formulation en $\mathbf{a} - v$ avec prise en compte des équations de type circuit électrique. Cette formulation permet donc d'éviter les problèmes de génération de coupures et d'orientation de flux de courant dans les conducteurs massifs, typiques des formulations en \mathbf{h} .

Notons que pour prendre en compte le couplage circuit, il est nécessaire de faire abstraction d'un générateur dans cette formulation magnétodynamique. Nous invitons le lecteur à consulter les travaux [42, 23] pour de plus amples précisions.

2.3.5 Cas test d'un inducteur

Ce cas test illustre l'extraction des paramètres RL de l'inducteur bobiné traité à la sous-section 2.3.3 mais en utilisant plutôt la formulation $\mathbf{a} - v$.

Les distributions de champ magnétique et de la densité de courant dans les conducteurs à 1 MHz sont présentées à la figure 2.6. On retrouve les mêmes résultats que ceux obtenus avec la formulation $\mathbf{t} - \omega$. Les ordres de grandeur sont quasi les mêmes pour les deux formulations. Les évolutions en fonction

de la fréquence des paramètres RL extraits des deux formulations ($\mathbf{a} - v$ avec couplage circuit et $\mathbf{t} - \omega$) sont directement comparées sur la figure 2.7. La diminution de l'inductance avec la fréquence n'est pas tellement marquée (le paramètre L extrait des deux formulations ne varie presque pas). Cette diminution peut s'observer lorsqu'elles sont représentées séparément.

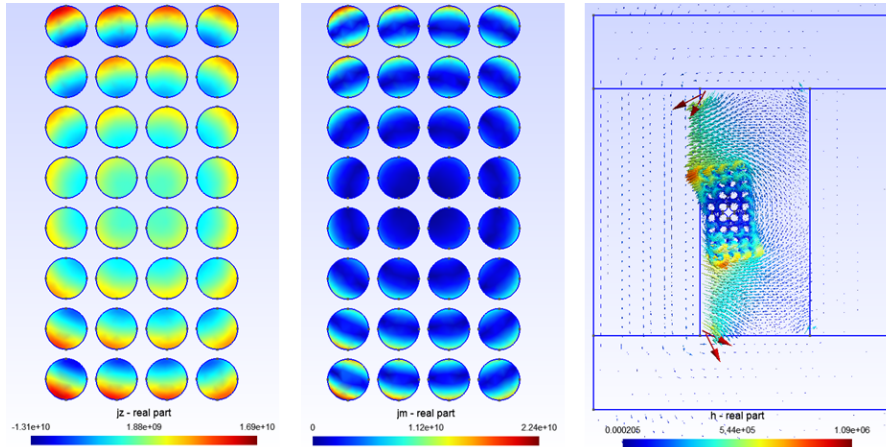


Figure 2.6: Parties réelles de la composante \underline{j}_z de densité de courant (gauche) et du champ magnétique \underline{h} (droite) + Norme $|\underline{j}|$ de la densité de courant (milieu) à 1 MHz obtenues à partir de la formulation magnétodynamique $\mathbf{a} - v$.

Signalons l'existence d'un écart entre les deux courbes de résistance en fonction de f , qui s'accroît avec l'apparition des phénomènes complexes (effets de peau et proximité, etc.). Cet écart est quasi constant dans le cas de l'inductance sur la gamme des fréquences envisagées (voir figure 2.7). Il est supérieur (environ 10%) à la variabilité observée sur L et peut être justifié par l'erreur numérique introduite par le maillage. Cette situation peut empirer lorsqu'on remaille à chaque calcul EF permettant d'extraire les paramètres RL. Mais pour les résultats présentés ici, cette précaution a bien été prise en compte.

Il est aussi possible de montrer la complémentarité numérique entre les deux formulations à travers les paramètres RL qui en sont extraits. En effet, les deux formulations permettent d'encadrer les valeurs que peuvent prendre les deux paramètres R et L pour une fréquence donnée. Une explication possible de ce constat est liée à la discrétisation géométrique du modèle d'étude. Ceci peut se vérifier en représentant l'évolution des paramètres RL en fonction du nombre d'éléments utilisés pour discrétiser le domaine comme illustré à la figure 2.8. Sur cette figure, on peut observer que les valeurs des paramètres

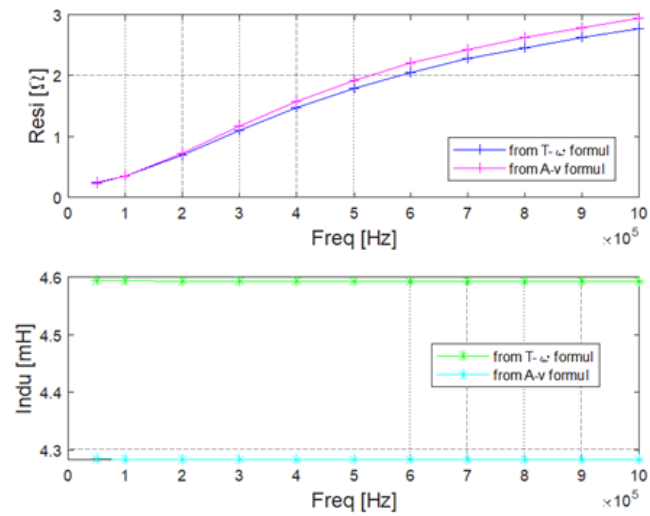


Figure 2.7: Comparaison des paramètres RL extraits des formulations magnétodynamiques $\mathbf{a} - v$ et $\mathbf{t} - \omega$

RL extraits de deux formulations tendent vers des valeurs proches lorsque le maillage est raffiné (la fréquence a été fixée ici à 300 kHz).

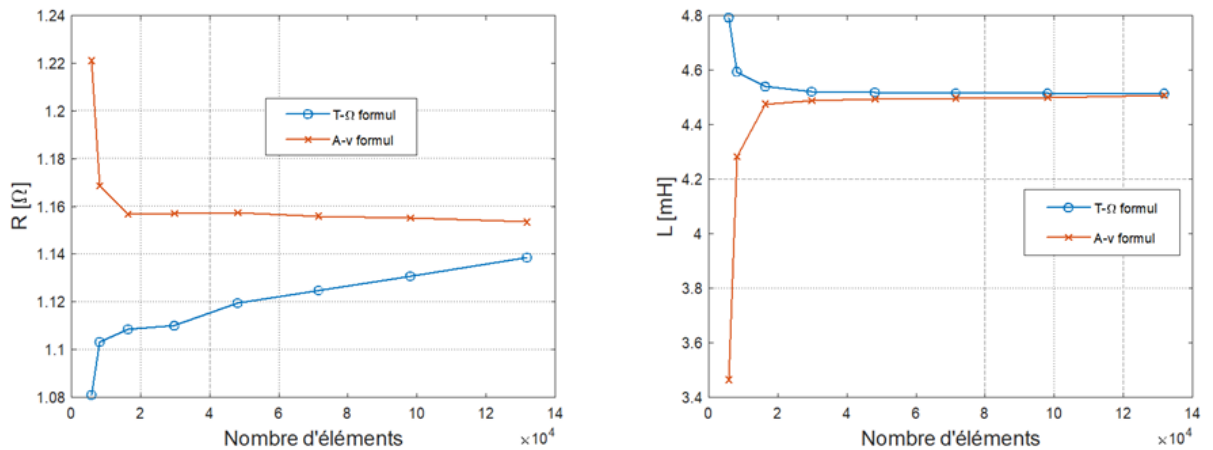


Figure 2.8: Convergence des paramètres R (gauche) et L (droite) avec le raffinement du maillage à 300 kHz

Le recours à ces deux formulations permet d'encadrer les valeurs des paramètres RL, plutôt que de les surestimer ou sous-estimer (selon la formulation envisagée). Néanmoins, chaque formulation présente des avantages

et des inconvénients. D'un côté, la formulation $\mathbf{t} - \omega$ est plus simple du fait du nombre de degrés de liberté réduit (cas 3D) auquel elle conduit. Cependant, elle est plus coûteuse en terme de charge de calcul, en raison de la génération des coupures. La formulation $\mathbf{a} - v$, quant à elle, conduit à la résolution de grands systèmes linéaires à matrice creuse dont la résolution numérique peut s'avérer relativement coûteuse en charge de calcul. Son avantage réside dans le fait qu'elle est pertinente dans le sens du couplage naturel qu'elle permet de garantir entre les grandeurs locales et globales [38].

2.4 Problème électrostatique

2.4.1 Introduction

Ce problème a pour finalité de déterminer les capacités parasites qui se manifestent significativement aux hautes fréquences et permet de rendre compte des pertes diélectriques dans l'inducteur. Afin d'observer l'évolution des capacités parasites en fonction de la fréquence, il est nécessaire d'imposer un couplage faible avec les phénomènes magnétiques par l'usage de potentiels électriques déduits du problème magnétodynamique. Ces potentiels vont constituer les sources du nouveau problème. Nous présentons ci-dessous la formulation en potentiel scalaire électrique en v , tirée de [23, 37].

Dans cette section, nous présentons de manière brève une formulation permettant d'extraire le paramètre C , image des capacités parasites localisées entre les spires de bobinage. Ce modèle numérique, associé au modèle magnétodynamique, permettra de déterminer l'impédance du modèle qui est en fait la grandeur globale mesurable à partir d'un analyseur d'impédance et du composant (inducteur dans notre cas).

2.4.2 Formulation du problème électrostatique

Soit :

$$\operatorname{rot} \mathbf{e} = 0 \tag{2.13a}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{d} = \rho \tag{2.13b}$$

$$\mathbf{d} = \varepsilon \mathbf{e} \tag{2.13c}$$

où \mathbf{e} est le champ électrique, \mathbf{d} le déplacement électrique, ρ la charge volumique et ε la permittivité diélectrique du milieu. L'équation (2.13a) montre que le champ électrique est irrotationnel. Il peut s'exprimer comme le gradient d'un

potentiel électrique v . On dit qu'il dérive d'un potentiel scalaire électrique :

$$\mathbf{e} = -\text{grad } v \quad (2.14)$$

De cette façon, c'est l'équation (2.13b) qui doit être vérifiée numériquement sur le domaine d'étude Ω par la méthode des éléments finis. Le domaine d'étude est constitué de deux sous-domaines (*cf.* figure 2.9): Ω_c , de frontière Γ_c , comprend les parties conductrices où les potentiels sont inconnus, et Ω_c^C , constitué des diélectriques. Dans ce problème, nous considérons que les conducteurs sont parfaits si bien que le champ électrique y est nul et le potentiel électrique reste constant en leur sein [37, 23]. Ainsi, le problème se ramène au calcul du potentiel v dans Ω_c^C uniquement, délimité par la frontière $\Gamma_c^C = \Gamma_e \cup \Gamma_d$ ($\Gamma_d = \Gamma_{d,ext} \cup \Gamma_c$). Les équations à résoudre en moyenne (exceptées celles entre parenthèses) sur le domaine d'étude se présentent comme suit :

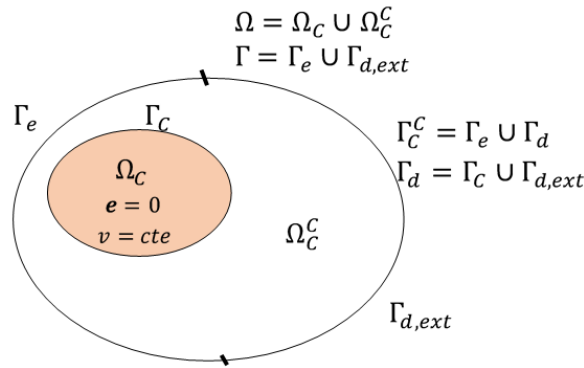


Figure 2.9: Problème d'électrostatique sur un domaine Ω . Les domaines de type Ω_c^C à potentiel constant, peuvent être soustraits du domaine d'étude

$$\text{div } \mathbf{d} = \rho, \quad (\text{rot } \mathbf{e} = 0) \quad (2.15a)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}|_{\Gamma_d} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{d}_s \quad (2.15b)$$

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{e}|_{\Gamma_e} = \mathbf{n} \times \mathbf{e}_s) \quad (2.15c)$$

On peut montrer que les champs \mathbf{e}_s et \mathbf{d}_s qui apparaissent dans les conditions aux limites (2.15b) et (2.15c), permettent d'imposer des grandeurs globales telles qu'une charge électrique via le flux du déplacement, ou un potentiel électrique, par la circulation du champ électrique [23]. La fixation du

potentiel v sur la frontière permet d'imposer la composante tangentielle de \mathbf{e} (condition de *Dirichlet*).

Nous invitons le lecteur à se référer aux travaux [37, 23] pour ce qui concerne le développement des formes faibles permettant d'obtenir le couplage entre grandeurs locales et globales. Ainsi, après résolution du problème électrostatique (connaissance de la distribution du potentiel électrique dans le domaine d'étude), il sera aisé de déterminer le paramètre C à partir de l'énergie électrique stockée dans la partie non conductrice du système considéré.

2.5 Prise en compte des pertes magnétiques

Les matériaux magnétiques rencontrés dans les composants bobinés mis en évidence dans ce travail sont en général des ferrites. Leur résistivité élevée ($> 1 \Omega m$) permet de réduire assez considérablement les pertes par courants induits. Par contre, ces dernières ne sont pas aussi négligeables comme nous le verrons par la suite dans ce chapitre. Nous verrons comment prendre en compte ces pertes à partir des formulations éléments finis qui constituent le modèle déterministe.

Nous allons commencer par présenter les lois constitutives qui régissent le comportement de ces matériaux magnétiques pour ensuite présenter l'approche éléments finis permettant de rendre compte des pertes magnétiques au niveau du paramètre R , image au niveau global des dissipations d'énergie. Pour finir, nous présenterons un cas d'étude constitué d'un inducteur (dont les détails sont les mêmes que ceux de la section 4.7) pour lequel une comparaison sera effectuée entre les cas avec et sans prise en compte des pertes magnétiques. Dans cette approche, nous ne prenons pas en compte la non-linéarité du matériau magnétique.

2.5.1 Propriétés magnétiques des ferrites

Contrairement aux ferrites durs utilisés comme des aimants permanents, les ferrites doux sont employés comme des noyaux magnétiques à faibles pertes dans les transformateurs et inductances de l'électronique de puissance. Malgré leur faible induction magnétique à saturation ($< 0,6 \text{ T}$), c'est leur performance à fréquences élevées et leur faible coût de fabrication qui font qu'ils soient plus appréciés que d'autres matériaux magnétiques. Les ferrites doux de l'électronique de puissance sont en général des oxydes à deux métaux (MeFe_2O_4 , où Me représente un métal divalent) dont l'un des deux est du fer trivalent (Fe^{3+}). On en retrouve trois familles selon qu'ils sont combinés à du manganèse (type MnZn) ou au nickel (type NiZn) ou autre métal mono-

valent ou trivalent voire même tétravalent (comme par exemple Li^+ , Mn^{3+} , Ti^{4+} , etc.) :

- Les ferrites **MnZn**, sont utilisés pour les fréquences allant de 10 kHz à 1 MHz dans les applications de conversion d'énergie et de traitement de signal. Leur résistivité est de l'ordre de $1 \Omega m$.
- Les ferrites **NiZn**, sont utilisés pour les fréquences entre 1 et 500 MHz dans les transformateurs et inducteurs. Leur résistivité est de l'ordre de $10^8 \Omega m$.
- Les ferrites hyperfréquences (fréquence variant entre 0,1 à 100 GHz) sont utilisés dans des composants hyperfréquences tels que les déphaseurs [43]. Ils présentent des résistivités d'environ $10^{10} \Omega m$.

Signalons que les ferrites sont des matériaux assez durs et fragiles [43]. Leur température de Curie (température à laquelle le matériau perd son aimantation permanente) varie entre 125 et 350 °C. Étant des mauvais conducteurs de chaleur, des mesures préventives doivent être prises en compte lors de leur conception en vue d'éviter l'apparition des points chauds au sein de ces composants de l'électronique de puissance. Leur masse volumique varie entre 5100 et 5400 kg/m^3 pour les ferrites **MnZn** et **NiZn** respectivement.

2.5.2 Lois constitutives dans les ferrites

Les pertes dans les ferrites sont fortement liées à la structure microscopique du matériau qui s'avère plus complexe [44] pour être traitée dans ce travail. Dans notre cas, nous nous contenterons des lois de comportement linéaires afin de ne pas compliquer les formulations éléments finis. D'autre part, les propriétés électromagnétiques des ferrites à étudier doivent rendre compte de leur évolution avec la fréquence dans le modèle éléments finis. On comprend bien que les lois constitutives seront des simples lois de type $\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}$ et $\mathbf{d} = \varepsilon \mathbf{e}$.

Les représentations complexes suivantes des propriétés électromagnétiques permettent de rendre compte naturellement des pertes ferrites dans notre cas :

$$\underline{\mu}(\omega) = \mu' - i\mu'' \quad (2.16a)$$

$$\underline{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon' - i\varepsilon'' \quad (2.16b)$$

Comme nous le verrons plus loin (voir section 4.6), les parties réelles représentent les parties de stockage d'énergie alors que les parties imaginaires

représentent la partie dissipative à une fréquence donnée et pour des champs magnétique et électrique faibles. De cette façon, les relations $\mathbf{b}(\mathbf{h})$ et $\mathbf{d}(\mathbf{e})$ représentent des ellipses dont l'aire est une image de la densité volumique des pertes (*cf.* figure 2.10). L'intersection de la caractéristique avec les axes n'a plus de sens physique ici. On ne peut plus parler de champ coercitif ou d'une induction rémanente.

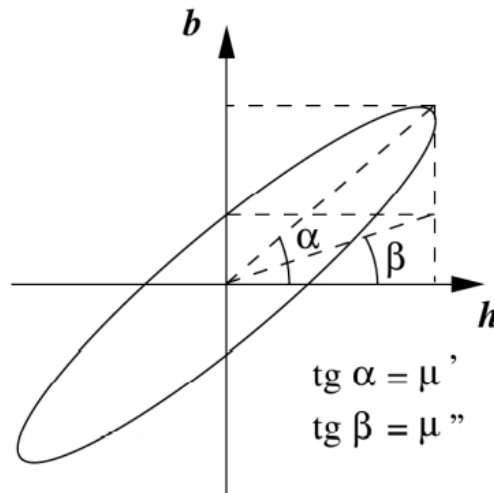


Figure 2.10: Représentation des pertes magnétiques par une perméabilité magnétique complexe [23]

2.6 Modélisation des pertes ferrites

Les pertes ferrites sont de deux natures. D'une part, les pertes magnétiques qui comprennent les pertes d'hystérésis (liées à la rotation irréversible des moments magnétiques) et les pertes résiduelles (liées au mouvement amorti des parois de Bloch [44]). Et d'autre part, les pertes par courants induits circulant dans le noyau et les pertes diélectriques associées à la rotation des dipôles électriques sous l'action d'un champ électrique alternatif. Du fait de leur résistivité élevée, on ne devrait pas s'attendre normalement à la présence des courants induits dans les ferrites. Leur résistivité n'étant pas infinie, la résistance entre deux points du noyau peut devenir assez mitigée. Elle est due essentiellement à des sauts d'électrons des ions Fe^{2+} aux ions Fe^{3+} placés en sites octaédriques ou structure de spinelle [45].

Les pertes magnétiques seront déterminées à partir d'une perméabilité complexe $\mu(\omega)$ et les pertes électriques, à partir d'une permittivité complexe

$\varepsilon(\omega)$. Ces lois de comportement matériau peuvent être retrouvées dans des datasheet ou catalogues des fournisseurs (voir le cas des ferrites NiZn de chez FerroxCube [30] par exemple, *cf.* figure 2.11).

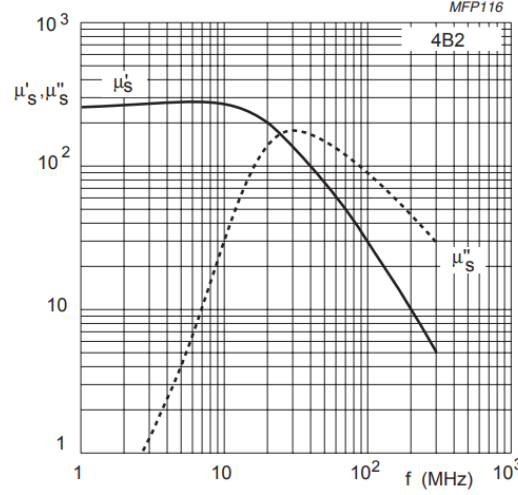


Figure 2.11: Parties réelle et imaginaire de la perméabilité complexe en fonction de la fréquence pour du ferrite NiZn 4B2 de chez FerroxCube

On peut représenter les pertes ferrites par une résistance en série ou en parallèle avec l'inductance idéale. Dans notre cas, nous allons adopter la représentation série par simplicité et car cette dernière s'apparente naturellement au modèle d'un inducteur comme il sera vérifié lors de la validation expérimentale au chapitre 6. Ainsi, une fois que les pertes ferrites mesurées ou connues, la résistance spécifique peut être déterminée à partir des équations :

$$P_{ferrite} = I^2 R_{ferrite} \text{ (représentation série)} \quad (2.17)$$

$$P_{ferrite} = V^2 / R_{ferrite} \text{ (représentation parallèle)} \quad (2.18)$$

où I et V représentent respectivement le courant circulant dans l'enroulement et la tension aux accès de l'inducteur.

L'approche globale pour modéliser les pertes ferrite se base sur le théorème de *Poynting* tel que présenté dans [46] :

$$\frac{d(W_e + W_m)}{dt} = P_{sources} - \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \mathbf{j} d\Omega - \int_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{e} \wedge \mathbf{h}) dS \quad (2.19)$$

où W_e représente l'énergie électrique, W_m l'énergie magnétique, P_{source} la puissance débitée par les sources, Ω un volume fermé délimité par une surface S de normale \mathbf{n} orientée vers l'extérieur. Dans le cas d'un milieu linéaire au repos et en l'absence des sources, la relation (2.19) devient :

$$\int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{e} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \mu \mathbf{h} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \mathbf{j} d\Omega = - \int_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{e} \wedge \mathbf{h}) dS \quad (2.20)$$

En passant aux substituts complexes et en introduisant la perméabilité et la permittivité complexes $\underline{\mu}(\omega)$ et $\underline{\varepsilon}(\omega)$, on obtient :

$$- \int_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{e} \wedge \mathbf{h}) dS = i\omega \int_{\Omega} \underline{\varepsilon} |\mathbf{e}|^2 d\Omega + i\omega \int_{\Omega} \underline{\mu} |\mathbf{h}|^2 d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \mathbf{j}^* d\Omega \quad (2.21)$$

En décomposant les lois constitutives en leurs parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\begin{aligned} - \int_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{e} \wedge \mathbf{h}) dS &= i\omega \int_{\Omega} \varepsilon' |\mathbf{e}|^2 d\Omega + i\omega \int_{\Omega} \mu' |\mathbf{h}|^2 d\Omega + \int_{\Omega} \omega \varepsilon'' |\mathbf{e}|^2 d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} \omega \mu'' |\mathbf{h}|^2 d\Omega + \int_{\Omega} \sigma |\mathbf{e}|^2 d\Omega \end{aligned} \quad (2.22)$$

Remarquons que les pertes joules sont obtenues par une intégrale habituelle. Alors que, les pertes magnétiques et électriques s'obtiennent à partir des intégrales faisant intervenir les parties imaginaires de $\underline{\mu}(\omega)$ et $\underline{\varepsilon}(\omega)$ respectivement. Il est fréquent de regrouper au sein d'un même terme global les pertes joules et électriques si bien que :

$$\begin{aligned} P_{p,elec+Joule} &= \int_{\Omega} \sigma |\mathbf{e}|^2 d\Omega + \int_{\Omega} \omega \varepsilon'' |\mathbf{e}|^2 d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma + \omega \varepsilon'') |\mathbf{e}|^2 d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \sigma_{eff}(\omega) |\mathbf{e}|^2 d\Omega \end{aligned} \quad (2.23)$$

où $\sigma_{eff}(\omega)$ représente la loi de variation de conductivité électrique en fonction de la fréquence. C'est cette conductivité effective qui est mesurée la plupart du temps par le spécialiste [47].

Au final, nous pouvons retenir deux expressions pour le calcul des pertes ferrite au niveau de la formulation magnétodynamique éléments finis :

$$P_{hyst+res} = \int_{\Omega} \omega \mu'' |\mathbf{h}|^2 d\Omega \quad (2.24)$$

$$P_{Joule} = \int_{\Omega} \sigma_{eff} |\mathbf{e}|^2 d\Omega \quad (2.25)$$

La première représente les pertes magnétiques d'hystérésis et résiduelles alors que la seconde les pertes par courants induits dans le noyau ferrite qui est modélisé ici comme un conducteur massif.

2.6.1 Cas test d'un inducteur bobiné

Une application intéressante serait celle de l'inducteur présenté au chapitre 4 où en plus de considérer les pertes ferrite par courants induits, nous tenons compte des pertes hystérésis et résiduelles. La figure 2.12 présente la densité des pertes magnétiques et par courants induits à une fréquence de 1 MHz. On peut y observer la densité des pertes par courants induits non négligeable. Par contre, la densité des pertes magnétiques semble être moins importante par rapport à celle des courants induits. La fréquence étant inférieure à la fréquence de relaxation du ferrite (type MnZn), les pertes magnétiques ne peuvent qu'être négligeables dans ce cas. Elles n'ont de l'impact que sur le paramètre R (*cf.* table 2.1). Notons qu'il ne faut pas perdre de vue l'existence des phénomènes de résonance dimensionnelle [48] qui peuvent être observés au sein des noyaux ferrites à cause de la propagation des ondes électromagnétiques à des fréquences de quelques centaines de kHz. Celle-ci se manifeste lorsqu'une dimension caractéristique du noyau ferrite (diamètre de la colonne centrale par exemple) est de l'ordre de quelques centimètres.

Table 2.1: Extraction du paramètre R@ 768 kHz : sans les pertes (noyau idéal) et avec pertes ferrite (par courants induits et magnétiques) en plus.

Ferrite idéal	$P_{hyst+res}$	P_{eddy}	Pertes en général
3,052 Ω	4,80 Ω	5,254 Ω	8,335 Ω

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques formulations éléments finis (modélisation en électromagnétisme) qui seront utilisées comme modèles déterministes dans la suite de cette thèse. Parmi ces dernières, nous retrouvons les formulations :

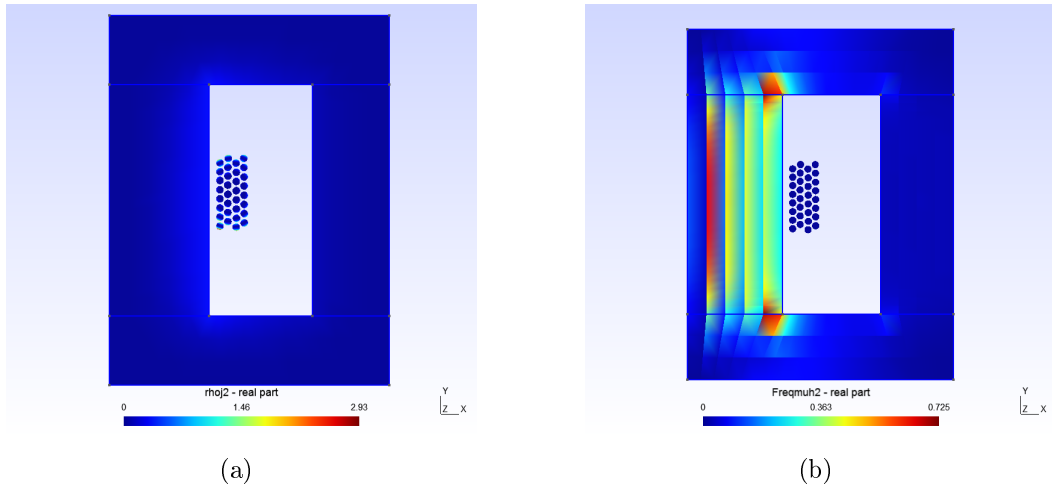


Figure 2.12: Densité des pertes par courants induits (gauche) et des pertes magnétiques (droite) à 1 MHz pour le cas d'étude

- magnétodynamiques (en $\mathbf{a} - v$ et en $\mathbf{t} - \omega$, avec courants induits) pour lesquelles il est possible de profiter du couplage entre les grandeurs locales (champs) et globales (courants et tensions) afin d'imposer certaines contraintes lors de la discrétisation par un choix judicieux des fonctions de forme (couplage des éléments nodaux et d'arêtes par exemple).
- électrostatique (en potentiel scalaire v) qui permet de résoudre le problème de potentiels flottants grâce à des fonctions de forme globales qui facilitent le calcul de certaines grandeurs globales telles que la charge d'un conducteur par exemple.

Signalons aussi que le fait de mener cette étude sur une plage des fréquences moyennes (de 100 Hz à 1MHz) exige de mailler judicieusement la géométrie du système en vue de prendre en compte les effets de peau et de proximité qui apparaissent avec l'élévation de la fréquence. Vu la symétrie de révolution de la géométrie de l'inducteur bobiné considéré, l'analyse 2D d'une section de la géométrie sera suffisante dans le cas qui nous concerne. Les conditions aux limites qui y sont associées doivent en tenir compte. Les contraintes de couplage circuit entre conducteurs devront être adaptées aussi en fonction des différents cas d'études.

Vu la plage de fréquences considérée, le modèle découplé utilisé est suffisamment pertinent pour l'application qui nous concerne. Néanmoins, il peut exister un faible couplage entre les deux phénomènes (électriques et magnétiques) entrant en jeu, et permettant d'extraire les paramètres RL et C, au travers des potentiels électriques de conducteurs déduits du problème magné-

todynamique en $\mathbf{a}-v$. Cette formulation est celle qui est retenue pour le reste de simulations en ce qui concerne l'extraction de paramètres RL à partir du modèle brut (avec maillage conséquent).

Nous avons montré que les pertes ferrite (d'hystérésis et résiduelles et par courants induits) n'étaient pas négligeables et qu'elles doivent être aussi incluses dans l'extraction du paramètre R en prenant soin de considérer le noyau ferrite comme un conducteur massif. La connaissance complète de la conductivité électrique du noyau ferrite passe par la connaissance de sa permittivité électrique. Elle comprend donc une partie Direct Current (DC) et une partie Alternating Current (AC) dépendant de la partie imaginaire de sa permittivité électrique. Cette façon de faire permet donc de rendre compte des pertes électriques sans tenir compte des courants de déplacement. En effet, le ferrite est constitué d'un amas des grains conducteurs séparés par des parties diélectriques qui en son sein peuvent entraîner des courants de déplacement capacitifs.

Méthodes de propagation des incertitudes

3.1 Introduction

Souvent dans les problèmes de modélisation numérique, plusieurs paramètres d'entrée ne sont connus qu'avec de faibles niveaux de précision. Ces paramètres d'entrée sont mal connus du fait d'insuffisance d'expertise dans le domaine concerné ou simplement par manque d'informations disponibles. C'est le cas notamment des incertitudes géométriques et matérielles rencontrées dans le cadre de la modélisation de composants magnétiques bobinés. Ces incertitudes peuvent entraîner des écarts non négligeables (au-delà des erreurs de discrétisation) entre les résultats de simulation et ceux tirés de l'expérience. Ainsi, la prise en compte d'incertitudes s'avère importante dans le but d'estimer la validité des simulations et de quantifier leur influence sur les paramètres de sortie. D'où la nécessité d'élaborer des méthodes stochastiques de propagation d'incertitudes dans les schémas numériques et des techniques et outils de résolution de ce type des problèmes.

Dans ce travail, nous nous focaliserons sur les incertitudes géométriques et matérielles relatives à la modélisation des composants magnétiques bobinés. Les positions des conducteurs dans la fenêtre de bobinage constituent un exemple d'incertitudes géométriques. En effet, un arrangement régulier des conducteurs dans la fenêtre de bobinage est supposé dans la plupart des modèles numériques [49, 50, 23], alors qu'en réalité, les conducteurs occupent des positions aléatoires autour de certains points dont les coordonnées sont connues (*cf.* figure 3.1). Une autre forme d'incertitude géométrique peut résulter du fait d'une permutation de position des conducteurs dans une couche de l'enroulement (par l'opérateur effectuant le bobinage par exemple). On observe des telles permutations dans les machines électriques. Celles-ci permettent de limiter les effets de peau et de proximité tout en maintenant l'aire en cuivre de conducteurs et le nombre de spires par encoches dans un certain rapport donné [51, 52]. De cette façon, on essaie d'éviter que les densités de courant soient inégalement réparties dans une encoche constituée des brins de conducteurs (mis en parallèle) dont les positions sont mal connues. Cette

situation peut entraîner des pertes par courants de circulation. Pour prendre en compte les incertitudes géométriques sur les positions de brins de conducteurs dans [53], l’auteur a suggéré des permutations des conducteurs dans une couche de l’enroulement dans l’encoche.



Figure 3.1: Illustration des incertitudes sur positions et diamètres des conducteurs à partir d’une section plane de la fenêtre de bobinage

Dans d’autres problèmes de modélisation par éléments finis, les frontières des domaines et les interfaces entre sous-domaines peuvent aussi être caractérisées par des variables aléatoires. On montre dans la littérature que ces problèmes de propagation d’incertitudes géométriques peuvent être transformés en problèmes de propagation d’incertitudes matérielles par certaines techniques bien adaptées (*cf.* méthode de transformation ou *random mapping* [53, 54], etc.). Plusieurs méthodes ou approches que nous présenterons ci-après, permettent d’aborder ou de résoudre les problèmes de propagation d’incertitudes.

Parmi ces différentes méthodes de propagation d’incertitudes, on distingue les méthodes intrusives des méthodes non intrusives. Les méthodes intrusives s’accompagnent des modifications du code déterministe pour calculer les paramètres de sortie du système. Elles nécessitent une implémentation spécifique à chaque problème physique considéré et des solveurs adaptés [7, 17, 16, 21, 22] (méthode spectrale de Galerkin par exemple, aussi appelée *spectral stochastic finite element method* SSFEM). Les méthodes dites non intrusives ne nécessitent quant à elles pas d’intervenir dans le code de calcul utilisé. Elles s’exécutent en considérant le modèle déterministe comme une boîte noire. C’est le cas notamment de la décomposition en polynômes de chaos [17, 55, 55], méthode à laquelle nous allons nous intéresser plus spécifiquement par la suite.

Dans ce travail, nous ne considérerons que les méthodes non intrusives pour pouvoir prendre en compte les incertitudes des paramètres d’entrée du modèle numérique. Ce choix est guidé par les avantages que présentent ces méthodes, dont la possibilité de distribuer facilement les calculs et la précision des résultats (supérieure à celle obtenue par l’approche intrusive, telle que l’approche de Galerkin en éléments finis stochastiques).

Dans un premier temps, nous allons privilégier la méthode de SMC comme

une méthode de référence [56] permettant de rendre compte de la propagation d'incertitudes. Par la suite, nous verrons comment alléger la charge de calcul par l'utilisation des substituts en polynômes de chaos. Ces derniers, une fois construits, ne demandent pas d'évaluations supplémentaires du modèle numérique déterministe [17] (l'exécution du code informatique associé à ce modèle étant souvent onéreuse en temps de calcul) s'il s'agit de mener une analyse de sensibilité du système. Ainsi, nous allons rappeler ci-dessous comment se construit un substitut en polynômes de chaos et comment en déduire les indices de *Sobol'* relatifs à l'analyse de sensibilité.

3.2 Méthode de Monte Carlo

La méthode Monte Carlo est un outil statistique pour déterminer la moyenne d'une variable aléatoire ou pour approcher la solution des problèmes mathématiques complexes (optimisation, calcul d'intégrales et différentielles, etc.) aussi précisément que possible. Son avantage est qu'elle est simple d'usage et qu'elle peut être appliquée à une multitude de problèmes et domaines (physique nucléaire, biologie, télécommunication, fiabilité d'un système, etc.).

Le principe d'une simulation MC consiste à utiliser un modèle déterministe $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$ de sorte que la quantité recherchée \hat{Y} s'exprime comme l'espérance $\mathbb{E}[Y]$ d'une variable aléatoire. L'espérance de cette variable aléatoire représente ce que l'on s'attend à trouver en moyenne si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois. Néanmoins, ceci nécessite une source d'aléa dont les bonnes propriétés statistiques ont été prouvées.

Lorsque le nombre d'itérations Monte Carlo N est suffisamment grand, il est possible d'estimer la moyenne $\hat{\mu}_Y$ et la variance $\hat{\sigma}_Y^2$ d'une variable aléatoire Y par :

$$\hat{\mu}_Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i \quad (3.1a)$$

$$\hat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{\mu}_Y)^2 \quad (3.1b)$$

Et on peut approcher l'intervalle de confiance à 95 % de la moyenne par :

$$\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i - 1,96 \cdot \frac{\sigma_y}{\sqrt{N}}, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i + 1,96 \cdot \frac{\sigma_y}{\sqrt{N}} \right] \quad (3.2)$$

Cette méthode non intrusive est facile à mettre en œuvre. Par contre, elle présente une vitesse de convergence assez lente. Ce qui la rend consommatrice en temps de calcul, surtout lorsque le modèle déterministe s'avère lourd. Il existe dans la littérature des méthodes permettant de réduire le nombre d'itérations MC telles que la méthode de l'hypercube latin [57, 18] et la méthode de l'échantillonnage préférentiel (appelée aussi *importance sampling*) [58, 18].

Ces différentes méthodes d'échantillonnage permettent d'estimer quelques grandeurs statistiques relatives à la réponse Y d'un modèle $\mathcal{M}(\mathbf{X})$. Cependant, il peut être utile de connaître l'expression explicite de $\mathcal{M}(\mathbf{X})$ en fonction de la variable aléatoire \mathbf{X} dans le but d'accélérer les calculs. C'est le cas des substituts polynomiaux à bases de dimension finie tels que les polynômes de chaos que nous présentons par la suite.

3.3 Expansion en polynômes de chaos

Les polynômes de chaos sont une technique de méta modélisation non intrusive qui permet de remplacer un modèle numérique par une approximation fonctionnelle étendue sur une base polynomiale finie appartenant à l'espace spectrale de ses entrées aléatoires X_i ($i = 1, \dots, M$). Par hypothèse, pour que cette expansion existe, il faut que le modèle numérique soit un modèle à variance finie. Si nous supposons que les composantes aléatoires du vecteur d'entrée sont indépendantes et qu'elles peuvent être décrites par une fonction densité de probabilité jointe $f_{\mathbf{X}}$, alors la réponse Y du modèle $\mathcal{M}(\mathbf{X})$ de variance

$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}} \mathcal{M}^2(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}} d\mathbf{x} < \infty, \quad (3.3)$$

peut être développée dans l'espace spectrale des composantes aléatoires sous la forme :

$$Y = \mathcal{M}(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^M} y_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{X}) \quad (3.4)$$

où les $\Psi_{\alpha}(\mathbf{X})$ sont des polynômes multi-variables orthogonaux selon $f_{\mathbf{X}}$, $\alpha \in \mathbb{N}^M$ est un multi-indice qui identifie les composantes de polynômes multi-variables Ψ_{α} et les $y_{\alpha} \in \mathbb{R}$, sont les coefficients correspondants.

En pratique, la somme dans l'équation (3.4) nécessite d'être tronquée en une somme finie. On parle alors d'expansion tronquée en polynômes de chaos

:

$$\mathcal{M}(\mathbf{X}) \approx \mathcal{M}^{PC}(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} y_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{X}) \quad (3.5)$$

où $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^M$ est l'ensemble des multi-indices sélectionnés. La construction d'un tel ensemble est souvent appelée schéma de troncature. Il en existe plusieurs. Nous nous limiterons dans ce rapport à deux schémas de troncature parmi les plus utilisés en pratique.

3.4 Construction de la base polynomiale

De façon classique, la base polynomiale dans l'équation (3.5) est construite à partir de polynômes orthogonaux monovariabiles $\Phi_k^{(i)}(x_i)$ répondant à la définition suivante :

$$\langle \Phi_j^{(i)}(x_i), \Phi_k^{(i)}(x_i) \rangle \triangleq \int \Phi_j^{(i)}(x_i) \Phi_k^{(i)}(x_i) f_{X_i}(x_i) dx_i = \delta_{jk} \quad (3.6)$$

où i donne l'indice de la variable d'entrée x_i selon laquelle ces polynômes sont orthogonaux et ainsi la famille polynomiale correspondante; j et k , les degrés des polynômes correspondants; f_{X_i} est la distribution marginale de l'entrée i ; δ_{jk} est le symbole de *Kronecker*. Cette définition du produit scalaire interne peut être interprétée comme la valeur espérée du produit des facteurs qui y interviennent.

Les polynômes multi-variables $\Psi_{\alpha}(\mathbf{X})$ sont alors assemblés comme le produit tensoriel de leurs composantes monovariabiles :

$$\Psi_{\alpha}(\mathbf{x}) \triangleq \prod_{i=1}^M \Phi_{\alpha_i}^{(i)}(x_i) \quad (3.7)$$

Il est possible de montrer que les polynômes multi-variables ainsi formés sont aussi orthogonaux entre eux. En effet,

$$\langle \Phi_{\alpha}, \Phi_{\beta} \rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad (3.8)$$

où $\delta_{\alpha\beta}$ est une extension du symbole de *Kronecker* dans le cas multidimensionnel.

De façon générale, les polynômes orthogonaux d'une famille relative à une distribution arbitraire $f(x)$ peuvent être générés à partir de relations de récurrence suivant un schéma donné (*Askey-Scheme* [55] par exemple). Nous ne nous étalerons pas dans ce rapport sur ces schémas et nous renvoyons le lecteur à la littérature consacrée à ce sujet [17]. La table 3.1 présente quelques familles classiques de polynômes monovariabiles (dédites suivant le schéma d'*Askey*) le plus souvent rencontrées dans la construction des substituts PCE.

Table 3.1: Quelques familles polynomiales classiques mono variables

Type de variable	Distribution	Polynômes orthogonaux	Base Hilbertienne $\Psi_k(x)$
Uniforme	$\mathbf{1}_{]-1,1[}(x)/2$	Legendre $P_k(x)$	$P_k(x)/\sqrt{\frac{1}{2k+1}}$
Gaussien	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$	Hermite $H_{ek}(x)$	$H_{ek}(x)/\sqrt{k!}$
Gamma	$x^\alpha e^{-x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$	Laguerre $L_k^a(x)$	$L_k^a(x)/\sqrt{\frac{\Gamma(k+a+1)}{k!}}$

3.5 Quelques schémas de troncature basiques

Le problème de troncature se pose comme suit :

Étant donné le degré total p de troncature du substitut en polynômes de chaos, quel est l'ensemble des tous les polynômes à M variables d'entrée dont le degré total est plus petit ou égal à p ?

On peut montrer que l'ensemble de tous ces polynômes est de cardinalité $P = \binom{M+p}{p}$ [17]. Il est désigné comme suit :

$$\mathcal{A}^{M,p} = \{\alpha \in \mathbb{N}^M : |\alpha| \leq p\} \quad (3.9)$$

avec $\text{card } \mathcal{A}^{M,p} \equiv P = \binom{M+p}{p}$.

Il existe plusieurs schémas de troncature. Certains sont adaptés de façon à bien convenir à certaines applications spécifiques. Dans le cadre de cette thèse, nous allons présenter les schémas à restriction maximum d'interaction et à norme hyperbolique, qui sont les mieux adaptés aux applications de cette thèse où la dimensionnalité du vecteur d'entrée aléatoire est assez élevée.

3.5.1 Schéma de troncature hyperbolique

Le schéma hyperbolique, appelé aussi q – norme, est une modification du schéma standard qui fait usage du paramètre q pour définir la troncature

[17, 55] comme suit :

$$\mathcal{A}^{M,p,q} = \{\alpha \in \mathcal{A}^{M,p} : \|\alpha\|_q \leq r\} \quad (3.10)$$

avec $\|\alpha\|_q = \left(\sum_{i=1}^M \alpha_i^q\right)^{1/q}$ (où $q \leq 1$ est le facteur hyperbolique). Lorsque $q = 1$, le schéma hyperbolique correspond exactement au schéma standard de l'équation (3.10). Pour $q < 1$, ce schéma de troncature comprend tous les termes de haut degré dans chaque variable, mais défavorise de façon équivalente les termes d'interaction d'ordre supérieur.

Par exemple dans le cas 2D, les termes retenus dans l'expansion polynomiale de chaos en faisant varier le degré p ($= 3, 4, 5, 6$) et le facteur hyperbolique q ($= 1, 0.75, 0.50$) sont représentés à la figure 3.2. Les axes x et y correspondent aux degrés partiels des polynômes en X_1 et X_2 respectivement.

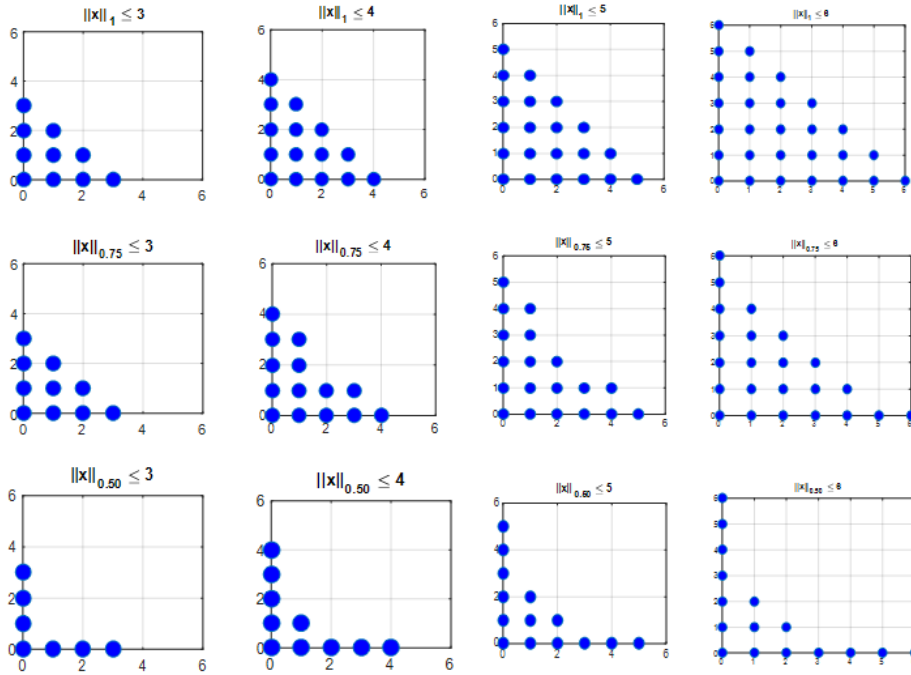


Figure 3.2: Termes des bases retenus en faisant varier les valeurs de p et q dans l'expansion polynomiale de chaos (combinaison d'indices α_i en abscisse et ordonnée)

En effectuant le produit tensoriel, on obtient les différents termes formant la base de la PCE. Dans le cas 2D (deux variables d'entrée aléatoires indépendantes X_1 et X_2 , de distribution marginale uniforme chacune définie sur $[-1, +1]$), et pour un degré maximal $p = 5$ et un facteur hyperbolique $q = 0.75$,

les différents termes multi-variables peuvent être obtenus en multipliant les différents polynômes en X_i de façon à ce que la somme des degrés (indices α_i) soit inférieure ou égale à p .

Par exemple les deux combinaisons suivantes d'indices α_i ((2, 2) et (4, 1)) permettent d'obtenir les termes multi-variables suivants dont les surfaces sont représentées en 3D sur la figure 1.3. Les polynômes mono-variables de départ sont issus de la suite des polynômes de Laguerre $P_{\alpha_i}(x_i)$, obtenus en utilisant une relation de récurrence relative à leur densité de probabilité génératrice (loi uniforme).

$$\Psi_{22}(x) = (3x_1^2/2 - 1/2) * (3x_2^2/2 - 1/2) \quad (3.11)$$

$$\Psi_{41}(x) = ((35x_1^4/8) - (15x_1^2/4) + 3/8) * (x_2) \quad (3.12)$$

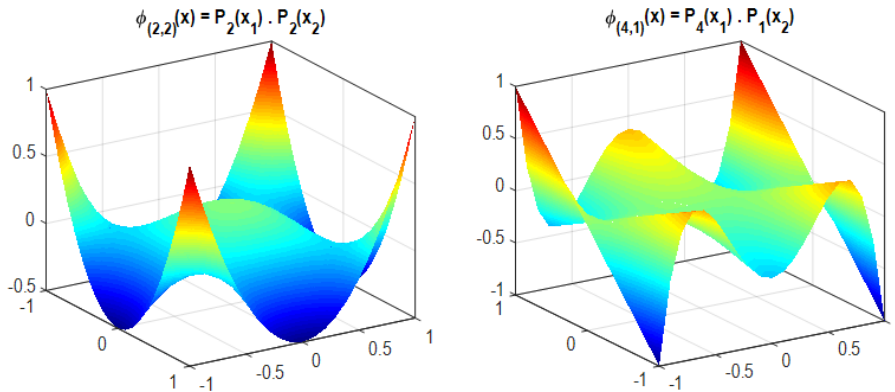


Figure 3.3: Représentation graphique de quelques polynômes multivariés de l'expansion PCE (sans prise en compte du facteur de normalisation) : cas de deux variables aléatoires

3.5.2 Schéma à restriction d'interaction

Un tel schéma est basé sur le choix d'un sous ensemble des termes définis dans (3.9) tels que l'indice généralisé α contienne au moins r non-zéros éléments. Ce schéma de troncature permet de réduire significativement la cardinalité de la base polynomiale en limitant les termes d'interactions, cardinalité qui peut

être assez élevée dans le cas d'une entrée comportant beaucoup de variables aléatoires. Ce sous ensemble est défini comme :

$$\mathcal{A}^{M,p,r} = \{\alpha \in \mathcal{A}^{M,p} : \|\alpha_0\| \leq r\} \quad (3.13)$$

où $\|\alpha_0\| = \sum_{i=1}^M 1_{\{\alpha_i > 0\}}$ est le rang du multi-indice α . Il définit l'ordre d'interaction et correspond au nombre des variables impliquées dans un polynôme multivariable $\Psi_\alpha(X)$.

En pratique, le nombre des points du plan d'expérience est limité. Ce qui peut aussi limiter la taille de la base polynomiale. Toutefois, pour une bonne approximation, cette base doit contenir assez d'éléments. C'est dans ce contexte que les *bases adaptatives* (ou PCE à base adaptative) sont utilisées et conviennent mieux à la plupart des problèmes de substitution stochastique. Ce type de stratégie consiste à choisir d'abord une première base parmi un ensemble de bases candidates, puis à générer graduellement de nouvelles bases en augmentant le degré max et en calculant l'approximation PCE correspondante et son erreur. Enfin, la meilleure PCE en terme d'erreur sera choisie. Dans cette stratégie, l'estimation de l'erreur de validation a posteriori est un outil important, car il permet d'estimer la fidélité de la PCE sans avoir recours à des évaluations coûteuses supplémentaires du modèle pour générer un nouvel ensemble de validation. Nous ne présenterons pas ici les détails sur un tel outil mais signalons qu'il sera d'usage dans nos problèmes de substitution stochastique grâce à l'outil Uncertainty Quantification Laboratory (UQLab) [59] qui est une application pouvant se plugger dans Matlab [60] afin de générer des substituts PCE. À titre informatif, l'erreur de validation croisée *leave-one-out*, est une technique intéressante qui contourne le problème de sur-dimensionnement PCE en utilisant la technique de validation croisée et la matrice expérimentale [17] (qui est le plus souvent calculable lorsque les résultats de minimisation par la méthode des moindres carrés sont disponibles).

Une fois la stratégie de troncature connue, il ne reste plus qu'à déterminer les coefficients y_α de la PCE. C'est l'objet de la section suivante où nous n'allons mettre en évidence que quelques méthodes non intrusives basées sur le post-processing du plan expérimental. Signalons qu'un plan expérimental est un ensemble d'échantillons de l'entrée aléatoire et de leurs évaluations correspondantes du modèle.

3.6 Détermination des coefficients PCE

La méthode la plus classique de détermination des coefficients PCE est la méthode de projection qui fait usage des intégrales multiples (c'est-à-dire à

plusieurs dimensions). Le nombre de nœuds d'intégration dépend de la dimension M de l'entrée aléatoire et du degré max p de la PCE selon l'expression:

$$N = (p + 1)^M \quad (3.14)$$

Ceci peut entraîner une explosion rapide du nombre d'évaluations du modèle numérique (souvent appelée *curse of dimensionality*). La détermination des coefficients PCE passe par la résolution du problème d'optimisation suivant :

$$\hat{\mathbf{y}} = \arg \min \mathbb{E}[(\mathbf{y}^T \Psi(\mathbf{X}) - \mathcal{M}(\mathbf{X}))^2], \quad (3.15)$$

Ce problème peut être résolu par la méthode classique des moindres carrés, à savoir :

$$\hat{\mathbf{y}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y}, \quad (3.16)$$

où $A_{ij} = \Psi_j(x^{(i)})$ est la matrice expérimentale qui contient les valeurs de toutes les bases polynomiales aux points du plan expérimental; $i = 1, \dots, N$; $j = 0, \dots, P - 1$.

Dans la majorité des modèles numériques, l'expérience [61] montre que l'ordre d'interaction entre les variables aléatoires d'entrée est faible. Cette situation est favorable à la construction de PCE dont l'ordre d'interaction entre les variables aléatoires est faible et on peut donc profiter de la stratégie adaptative en vue de construire des PCE "creux" [61]. **C'est cette technique qui va être utilisée dans ce travail vu la dimension élevée du vecteur d'entrée aléatoire.**

Pour prendre en compte ce fait (parcimonie d'effets) dans le problème initial d'optimisation, un terme de pénalité de la forme $\lambda \|\mathbf{y}\|_1$ a été associé au problème :

$$\hat{\mathbf{y}} = \arg \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{A}|}} \mathbb{E}[(\mathbf{y}^T \Psi(\mathbf{X}) - \mathcal{M}(\mathbf{X}))^2] + \lambda \|\mathbf{y}\|_1, \quad (3.17)$$

où le terme de régularisation $\|\hat{\mathbf{y}}\|_1 = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} |y_\alpha|$ force l'optimisation en faveur des solutions de faible rang. Dans ce contexte, l'algorithme du plus petit angle de régression (Least Angle Regression (LAR)) adapté à la détermination du substitut PCE est celle que nous allons présenter de façon succincte. Il sera retenu pour déterminer les coefficients PCE dans notre application (cas-test) par la suite. Il s'agit d'une démarche itérative où l'on fait évoluer de façon sélective les coefficients y_α .

3.6.1 Algorithme LAR (Least Angle Regression)

On part tout d'abord d'une initialisation des coefficients de la régression linéaire tel que:

- $y_\alpha = 0 \forall \alpha \in \mathcal{A}^{M_{p,q}}$, avec une base candidate Ψ_α , un ensemble actif \emptyset et un résidu $r_0 = \mathcal{Y}$.

L'ensemble actif est un sous-ensemble contenant les prédicteurs Ψ_{α_j} qui ont de l'influence sur le résultat final, c'est-à-dire la PCE à déterminer. L'algorithme itératif peut être décrit comme suit :

1. Trouver le prédicteur Ψ_{α_j} qui soit le plus corrélé avec le résidu actuel.
2. Déplacer tous les coefficients de l'ensemble actif courant vers leurs valeurs moindres carrés jusqu'à ce que leurs prédicteurs soient autant corrélés avec le résidu que ceux de la base candidate. Ce prédicteur sera aussi le plus corrélé avec le résidu dans la prochaine itération.
3. Calculer et stocker l'erreur pour l'actuelle itération.
4. Actualiser les coefficients actifs et déplacer les Ψ_{α_j} de la base candidate vers l'ensemble actif.
5. Répéter les étapes précédentes jusqu'à ce que la taille de l'ensemble actif soit égale à $m = \min(N, P - 1)$.

À la fin des itérations, la base candidate des prédicteurs ayant la plus petite erreur est sélectionnée comme la meilleure base polynomiale.

Signalons l'existence d'autres algorithmes permettant de déterminer les coefficients des PCE creux et qui tirent leurs avantages des inconvénients des autres ou de leur spécificité d'application. C'est le cas par exemple de l'algorithme SP (*Subspace Pursuit*) qui est adapté aux problèmes de faible dimension avec un plan expérimental de taille assez large. Ou celui de l'algorithme BCS (*Bayesian compressive sensing*) qui résout convenablement les problèmes de dimension élevée mais ne disposant pas de données en suffisance dans leur plan expérimental.

Comme alternative à l'algorithme LARS, l'algorithme Orthogonal Matching Pursuit (OMP) est aussi une stratégie itérative permettant de minimiser l'approximation résiduelle à chaque itération par projection du résidu sur la nouvelle base polynomiale [17]. Il permet de retrouver des bases polynomiales qui sont d'avantage corrélées avec l'approximation résiduelle que celles déterminées dans l'algorithme LARS. Son inconvénient est qu'il est plus gourmand en temps de calcul.

3.6.2 Algorithme OMP

En considérant que l'approximation résiduelle R_n correspond à la base polynomiale à n éléments Ψ_n , alors le résidu R_{n+1} correspondant à la base Ψ_{n+1} à $n + 1$ éléments est déterminé à partir de la relation d'orthogonalité suivante :

$$R_n = \langle R_n, \Psi_{n+1} \rangle \Psi_{n+1} + R_{n+1} \quad (3.18)$$

En projetant l'équation ci-dessus sur R_n , on obtient :

$$\|R_n\|^2 = |\langle R_n, \Psi_{n+1} \rangle|^2 + \|R_{n+1}\|^2 \quad (3.19)$$

Minimiser l'approximation résiduelle R_{n+1} à chaque itération de l'algorithme OMP, revient à choisir le polynôme $\Psi_{\alpha_{n+1}}$ tel que le problème suivant soit résolu :

$$\Psi_{n+1} = \arg \max_{\alpha \in \mathcal{A}} |\langle R_n, \Psi_{n+1} \rangle| \quad (3.20)$$

Dès que l'élément $\Psi_{\alpha_{n+1}}$ est déterminé, il est ajouté à l'ensemble actif des prédicteurs. Par la suite, l'ensemble des coefficients y_α est mis à jour à l'aide des moindres carrés ordinaires. Cette façon de procéder garantit ainsi, à chaque itération de l'OMP, l'orthogonalité de chaque approximation résiduelle par rapport à tous les prédicteurs de l'ensemble actif courant.

3.6.3 Cas test : détermination des substituts PCE des paramètres RL d'un inducteur bobiné

Nous prenons pour ce cas test, un modèle numérique (*cf.* chapitre 2) permettant d'extraire les paramètres RL d'un inducteur bobiné constitué de 32 spires dont le diamètre des conducteurs vaut 0,315 mm. Les incertitudes sont ici portées par la perméabilité magnétique et l'entrefer du noyau ferrite de l'inducteur, ainsi que par les positions des conducteurs dans la fenêtre de bobinage (voir figure 3.4), soit un vecteur d'entrées aléatoires de dimension égale à 66 ($= 2 \times 32 + 2$).

Notons que dans le cas d'un bobinage, les variables aléatoires liées aux positions de conducteurs dans la fenêtre de bobinage peuvent être fortement corrélées entre elles si bien que le nombre de variables indépendantes peut se retrouver fortement réduit (*cf.* théorie de l'Analyse en composantes principales indépendantes [62, 63]). Cette façon de faire peut aussi constituer une piste de solution en ce qui concerne la réduction de la dimension du vecteur entrée aléatoire.

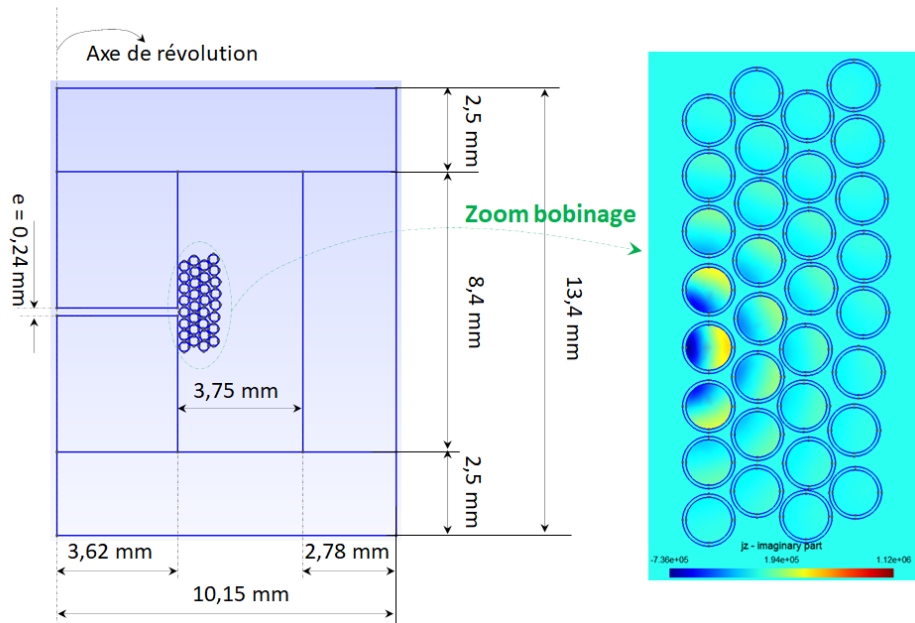


Figure 3.4: Géométrie du modèle 2D (inducteur avec noyau ferrite à entrefer, gauche) et carte (droite) de la partie réelle de densité de courant sur les conducteurs

Les configurations de bobinage sont ici générées en utilisant l'algorithme de construction spire par spire qui sera décrit plus loin dans ce travail. La perméabilité magnétique et l'entrefer du noyau ferrite suivent des lois de distribution uniformes dont les limites de variation sont déterminées à partir de la connaissance des erreurs relatives (20% pour la perméabilité et 10% pour l'entrefer).

Le plan expérimental, constitué d'un échantillon de 200 ensembles d'entrée X (variables aléatoires indépendantes) et de sortie Y (paramètres RL), nous a permis de construire les substituts PCE du modèle numérique à 1 MHz. Ces derniers sont construits par régression (cf. l'algorithme LAR sous *UQLab*) à partir d'une stratégie de troncature hyperbolique (dont q -norme = 1). Le degré maximum d'interaction entre les variables aléatoires vaut ici 2. La validation des PCE construites est faite quant à elle sur un autre lot de 1000 échantillons du vecteur aléatoire X et de leur propagation vers les modèles de substitution PCE. Le processus est assez rapide comparé à celui correspondant au modèle numérique de départ. En effet, pour une machine i7 de 8 Go de *Random Access Memory (RAM)* tournant à 3,4 GHz, le temps d'exécution requis pour cette validation est de 84 minutes (1,4 heures) pour les PCE contre 252 minutes (4,2 heures) pour le modèle numérique éléments finis à 1

MHz. Hormis la génération des échantillons des entrées aléatoires, qui coûte beaucoup à cause du déploiement des conducteurs, l'usage de la PCE s'avère intéressant pour l'étude de propagation des incertitudes.

La figure 3.5 présente l'évolution des paramètres RL obtenus via PCE en fonction de ceux obtenus à l'aide du modèle numérique à 1 MHz, tous deux évalués à partir du lot de validation de 1000 échantillons. On retrouve bien la fidélité de la PCE qui est plus marquée dans le cas du paramètre L qui dépend en grande partie des incertitudes matérielles (perméabilité magnétique et entrefer du noyau ferrite). Dans le cas du paramètre R, on observe une dispersion autour de la première bissectrice qui peut être expliquée par l'apparition d'autres phénomènes avec la montée en fréquence qui ne sont pas pris en compte dans cette analyse de propagation des incertitudes. Parmi ces phénomènes, on retrouve les effets de peau et de proximité dans les conducteurs qu'on ne sait pas contrôler avec la montée en fréquence [64]. Les distributions des paramètres RL à 1 MHz sont présentées à la figure 3.6 sous forme d'histogrammes. On peut se rendre compte d'une distribution uniforme pour le paramètre L qui, nous l'avons déjà dit, dépend en grande partie des incertitudes matérielles pour ce cas test. Alors que pour le paramètre R, une distribution normale rend plutôt compte des incertitudes géométriques et d'autres phénomènes que nous n'avons pas pris en compte dans cette analyse.

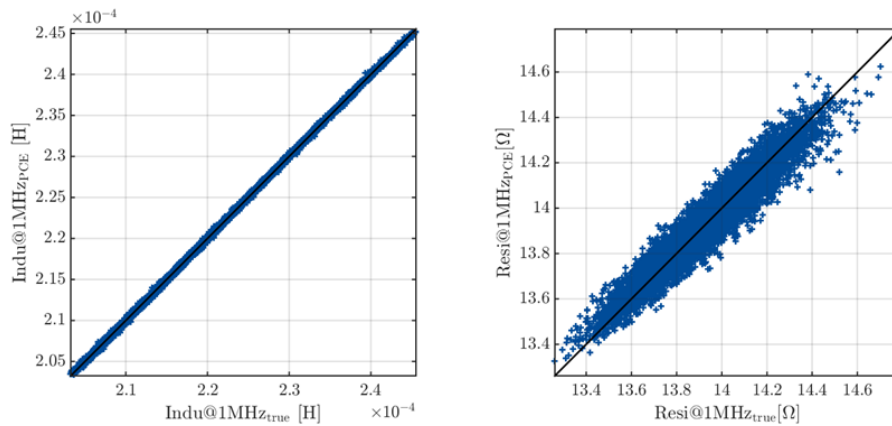


Figure 3.5: Validation des méta-modèles PCE pour les paramètres R (droite) et L (gauche) à 1 MHz

3.7 Analyse de la sensibilité

Une des propriétés importantes des PCE est que leurs coefficients renferment une information sur leur décomposition ANOVA (*Analysis Of Variance*) [65].

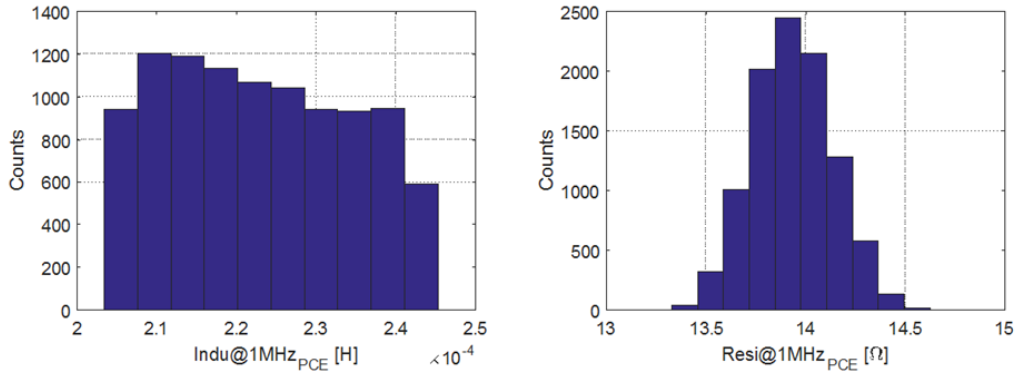


Figure 3.6: Histogrammes des paramètres R (droite) et L (gauche) à 1 MHz déterminés à partir des substituts PCE

En effet, une étude de sensibilité du modèle numérique (sur ses sorties aléatoires) peut être menée à partir du modèle stochastique de substitution PCE. Ceci présente un gros avantage lorsque la dimension de l'entrée aléatoire est assez élevée comme nous le verrons par la suite dans ce travail. Nous présentons dans cette section la façon de procéder en post-processing de la PCE construite. Ceci ne demande pas d'évaluations supplémentaires du modèle numérique qui peut être onéreux en ressources et en temps de calcul.

Lorsqu'on cherche à savoir comment la variabilité du modèle est affectée par la variabilité de chaque entrée aléatoire, l'analyse de sensibilité est la technique qui répond convenablement à cette question. Elle ne se limite pas seulement à fournir des telles informations mais elle peut aussi servir à mettre en évidence les entrées non importantes et aider ainsi à réduire la dimension du problème stochastique. Ce type d'analyse peut être exécuté selon une approche non intrusive, c'est-à-dire basée uniquement sur les évaluations de la réponse du modèle pour un certain échantillonnage des entrées du modèle.

De nos jours, plusieurs approches permettent de réaliser l'analyse de sensibilité. De façon générale, on peut se baser soit sur la corrélation entre les paramètres d'entrée avec ceux de sortie (corrélations basées sur les mesures), soit sur les valeurs des dérivées partielles du modèle en un point donné (méthodes linéaires) ou encore directement sur la distribution de la sortie du modèle.

L'analyse globale de sensibilité se base plus spécifiquement sur la décomposition de la variance de la réponse du modèle en termes des contributions de chaque paramètre d'entrée ou de leur combinaison. C'est le cas par exemple des indices de sensibilité de *Sobol* [66]. Les indices de *Sobol* sont traditionnellement calculés par SMC, ce qui rend cette méthode difficile à utiliser quand les modèles considérés sont coûteux en temps de calcul. Dans le but

de contourner cette difficulté, l'usage en post-processing de l'expansion en polynômes de chaos est avantageux (*cf.* [65]). C'est cette technique que nous allons mettre en évidence dans la suite de cette section. La décomposition de *Sobol* d'une expansion tronquée de polynômes de chaos

$$\hat{y} = \mathcal{M}^{PC}(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \hat{y}_\alpha \Psi_\alpha(x) \quad (3.21)$$

peut être établie analytiquement comme suit. L'expansion tronquée (3.21) peut être réarrangée de façon à refléter une décomposition en des termes d'ordres croissants. En définissant $\mathcal{I}_{i_1, \dots, i_s}$, l'ensemble des indices dans $\{\alpha \in \mathbb{N}^M : 0 \leq |\alpha| \leq p\}$ tel qu'uniquement les indices $\{i_1, \dots, i_s\}$ soient non nuls :

$$\mathcal{I}_{i_1, \dots, i_s} = \{\alpha \in \mathbb{N}^M : 0 \leq |\alpha| \leq p, \forall k \in \{1, \dots, M\} \setminus \{i_1, \dots, i_s\}, \alpha_k = 0\} \quad (3.22)$$

L'ensemble $\mathcal{I}_{i_1, \dots, i_s}$ correspond aux polynômes Ψ_α dépendant de tous les paramètres $\{X_{i_1}, \dots, X_{i_s}\}$ et uniquement que d'eux. En utilisant cette notation, il est possible de réordonner les termes de l'expansion en polynômes de chaos selon les variables dont ils dépendent :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_p(X) &= a_0 + \sum_{i=1}^M \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_i} a_\alpha \Psi_\alpha(X_i) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq M} \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{i_1, i_2}} a_\alpha \Psi_\alpha(X_{i_1}, X_{i_2}) + \dots \\ &+ \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq M} \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{i_1, \dots, i_s}} a_\alpha \Psi_\alpha(X_{i_1}, \dots, X_{i_s}) + \dots + \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{1, \dots, M}} a_\alpha \Psi_\alpha(X) \end{aligned} \quad (3.23)$$

On peut ensuite mettre en évidence la dépendance de chaque polynôme multi variable sur chaque sous-ensemble de paramètres d'entrée pour raison de clarté [66]. Cela va permettre de déduire la variance de la décomposition (3.23) de la façon suivante :

$$\mathbb{V}[\mathcal{M}(X)] \equiv D_p = \sum_{i=1}^M D_i + \sum_{1 \leq i < j \leq M} D_{i,j} + \dots + D_{1, \dots, M} \quad (3.24)$$

où les D_{i_1, \dots, i_s} font référence aux variances partielles et sont définis par :

$$D_{i_1, \dots, i_s} = \mathbb{V}[\mathcal{M}_{i_1, \dots, i_s}(X_{i_1}, \dots, X_{i_s})], \quad s = 1, \dots, M \quad (3.25)$$

Du fait de l'orthonormalité de la base polynomiale PCE, les termes du membre de droite de l'expression (3.23) satisfont à certaines propriétés si bien qu'il sera possible d'y identifier chaque terme comme suit :

$$\mathcal{M}_{i_1, \dots, i_s}(X_{i_1}, \dots, X_{i_s}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{i_1, \dots, i_s}} a_\alpha \Psi_\alpha(X_{i_1}, \dots, X_{i_s}) \quad (3.26)$$

De ces dernières expressions, il est possible de définir l'indice de sensibilité $\mathcal{S}_{i_1, \dots, i_s}^p$ de la réponse du modèle sur le sous-ensemble de variables d'entrée aléatoires $\{X_{i_1}, \dots, X_{i_s}\}$ par :

$$\mathcal{S}_{i_1, \dots, i_s}^p = \frac{D_{i_1, \dots, i_s}}{D_p} = \frac{1}{D_p} \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{i_1, \dots, i_s}} a_\alpha^2 \quad (3.27)$$

De plus, les indices de sensibilité totaux, basés aussi sur l'expansion PCE, peuvent être définis de manière à évaluer l'effet total d'un paramètre d'entrée comme suit :

$$\mathcal{S}_i^{T,p} = \sum_{\{i_1, \dots, i_s\} \in \mathcal{I}_i^+} \frac{D_{i_1, \dots, i_s}}{D_p} = \frac{1}{D_p} \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_i^+} a_\alpha^2 \quad (3.28)$$

où \mathcal{I}_i^+ indique l'ensemble de tous les indices faisant intervenir le i^{eme} paramètre d'entrée d'indice non nul, c'est-à-dire :

$$\mathcal{I}_i^+ \equiv \{\alpha \in \mathbb{N}^M : 0 \leq |\alpha| \leq p, \alpha_i \neq 0\} \quad (3.29)$$

3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté différentes méthodes stochastiques permettant de propager les incertitudes des paramètres d'entrée vers les sorties du modèle d'étude. Parmi ces méthodes, la méthode Monte Carlo reste une méthode de référence et peut nous aider à valider les résultats de simulation obtenus à travers d'autres méthodes.

Par contre, les méthodes d'approximation locale (méthode des perturbations et celle de *Neumann*) ne seront pas utiles dans le cadre de cette thèse vu le champ restreint d'applications qu'elles permettent de couvrir et le nombre limité de grandeurs statistiques (moyenne et variance) qu'on peut en tirer. Cependant, l'expansion en polynôme de chaos est une méthode digne d'intérêt pour les applications nécessitant de recourir à des modèles numériques complexes. Parmi les avantages de cette méthode, mentionnons la possibilité

de réduire le nombre d'évaluations du modèle numérique (en utilisant certaines techniques de construction des PCE "creux") et son traitement en post-processing en vue d'en tirer des conclusions relativement fiables sur le comportement du modèle (cas d'analyse de sensibilité par exemple).

L'existence de faibles interactions entre les variables aléatoires à l'entrée du modèle est un avantage qui favorise la construction des substituts en PCE creux. Elle entre en jeu de façon pertinente sur l'ordre du PCE à construire et intervient donc sur le nombre de points du plan expérimental (taille de l'échantillon). L'algorithme LAR de détermination de coefficients PCE est d'ailleurs basé sur ce fait. Son application au cas test présenté dans ce chapitre, nous a permis de réduire le nombre d'appels du modèle déterministe coûteux en temps de calcul.

Rappelons qu'il existe deux grandes familles d'approches permettant de déterminer les coefficients de polynômes de chaos : les approches spectrales intrusives et les approches spectrales non intrusives. Pour les méthodes non intrusives, il n'y a pas nécessité de modification du code déterministe pour obtenir les caractéristiques statistiques de la réponse du modèle numérique à partir des entrées aléatoires (méthodes de Monte Carlo, d'Hypercube Latin, etc.). A l'instar des méthodes spectrales non intrusives (méthodes de collocation, méthodes de régression, projection spectrale non intrusive NISP, etc.), la méthode spectrale de *Galerkin* (aussi appelée "spectral stochastic finite element method" SSFEM) est qualifiée d'intrusive car elle permet d'obtenir des formes faibles discrètes sur la dimension spatiale et sur la dimension aléatoire à partir des formes faibles continues.

Modélisation des incertitudes géométrique et matérielle dans les composants magnétiques bobinés

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques modèles permettant de mettre en évidence les incertitudes géométriques et matérielles spécifiques aux composants magnétiques bobinés. Ces dernières peuvent être prises en compte au travers de modèles mathématiques (cas d'incertitudes matérielles) ou d'algorithmes permettant de déployer des conducteurs dans une région de l'espace bien définie (cas d'incertitudes géométriques). Il est nécessaire de mentionner ici notre apport dans ce contexte, notamment pour la modélisation des incertitudes géométriques liées aux positions des conducteurs (*cf.* sous-section 4.2.2). Ce type de modélisation est quasi-inexistante dans la communauté scientifique, plus précisément dans le domaine de la modélisation numérique. Concernant les incertitudes matérielles, nous sommes partis de modèles existants de telle sorte à prendre en compte la dispersion aléatoire des propriétés magnétique et électrique des matériaux constitutifs d'un inducteur bobiné.

Signalons l'existence dans la littérature [67], des méthodes ou procédures déterministes relevant de problèmes d'optimisation combinatoire dans lesquels les cercles doivent être rangés sans recouvrement dans un conteneur (rectangulaire ou circulaire). Dans ces problèmes, la fonction objective consiste à maximiser la densité de remplissage ou de couverture, c'est-à-dire la fraction de la surface totale occupée par tous les cercles par rapport à la surface du conteneur. L'aspect déterministe de ces procédures nous empêche de les adapter dans le cas qui nous concerne, c'est-à-dire des positions aléatoires autour d'un pattern précis.

4.2 Incertitudes géométriques

Comme mentionné plus haut (*cf.* Introduction générale), dans le cas des modèles 2D, les positions des conducteurs dans la fenêtre de bobinage ne sont jamais connues avec précision (*cf.* figure 4.1). Ce type d'incertitude est très fréquent dans les modèles numériques permettant de mettre en évidence des phénomènes électromagnétiques tels que les effets de peau et de proximité au sein du bobinage des composants magnétiques bobinés. Nous verrons plus loin comment ces incertitudes peuvent fortement influencer les sorties du modèle numérique d'intérêt. Dans le bobinage d'un inducteur, on peut retrouver plusieurs situations d'incertitudes géométriques [64]. C'est le cas par exemple de permutation des conducteurs au sein d'une même couche ou de l'insertion d'un conducteur appartenant à une couche A dans une couche B voisine. On parle respectivement de permutation ou d'insertion (voir figure 4.2)



Figure 4.1: Vue en coupe de deux enroulements bobinés à la main pour une fenêtre de bobinage de $9,18 \times 4,0 = 36,72 \text{ mm}^2$ [68].

Pour prendre en compte les incertitudes géométriques liées aux positions des conducteurs dans la fenêtre de bobinage, nous avons pensé classiquement à adapter l'algorithme dit des forces virtuelles (Virtual Force Algorithm (VFA)) qui est un algorithme utilisé dans le domaine du déploiement des capteurs dans un réseau de communication [69]. Vu les inconvénients de ce dernier, nous avons ensuite développé un algorithme de déploiement de nœuds dans une région de l'espace en nous inspirant de la manœuvre de bobinage telle qu'elle est serait réalisée par un opérateur. L'algorithme imaginé permet de reconstituer le bobinage spire par spire et couche après couche, bien sûr avec quelques petites restrictions ou hypothèses.

Signalons que pour les algorithmes de constitution de bobinage présentés ci-après, les conducteurs sont supposés conserver leur numéro d'ordre normal, contrairement aux cas de permutation et d'insertion d'un conducteur dans une autre couche. Le cas d'insertion sera analysé plus loin dans ce chapitre en vue de mettre en évidence son influence sur la réponse du modèle numérique (dont la sortie sera constituée des paramètres RLC d'un inducteur bobiné). Le diamètre de conducteurs peut aussi faire partie des incertitudes géométriques.

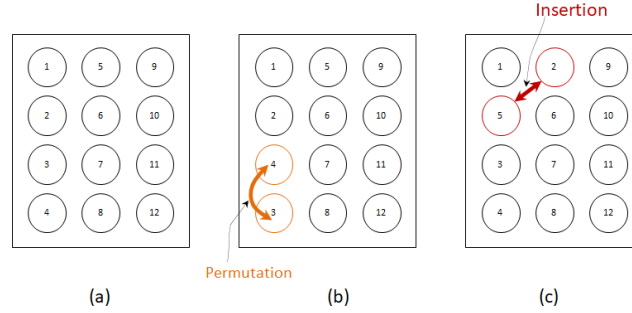


Figure 4.2: Illustration des situations normale (a), de permutation (b) et d'insertion (c) au sein d'un bobinage discontinu

Ce type d'incertitude résulte par exemple de l'écrasement de conducteurs les uns sur les autres lors du bobinage. Il peut-être combiné aux incertitudes liées aux positions de conducteurs, comme nous le verrons plus loin dans ce travail.

4.2.1 Algorithme dit de forces virtuelles (ou “Virtual Forces Algorithm”)

Soit un ensemble de nœuds pouvant interagir mutuellement entre eux au travers des forces de *Van der Waals* [69, 70]. Ces forces d'interaction mutuelle dépendent de la distance entre les nœuds et possèdent un poids fonction de la nature de ces forces (répulsion ou attraction). Lorsque deux nœuds i et j sont proches entre eux (distance d_{ij} plus petite que celle d'équilibre D_{th}), ils seront soumis à des forces de répulsion \mathbf{F}_{ij} . Dans le cas où ils sont plus éloignés (distance d_{ij} plus grande que D_{th}), il seront soumis à des forces d'attraction \mathbf{F}_{ij} (cf. figure 4.3).

$$\mathbf{F}_{ij} = \begin{cases} W_a (d_{ij} - D_{th})^{-2} \mathbf{u}_{ij} & \text{if } d_{ij} > D_{th} \\ 0 & \text{if } d_{ij} = D_{th} \\ -W_r (d_{ij}^{-2} - D_{th}^{-2}) \mathbf{u}_{ij} & \text{if } d_{ij} < D_{th} \end{cases} \quad (4.1)$$

où W_a et W_r représentent respectivement les poids de forces d'attraction et de répulsion. \mathbf{u}_{ij} est un vecteur unitaire orienté du nœud i vers le nœud j .

La force agissant sur un nœud résulte de la superposition des forces d'interaction mutuelle en lieu avec les nœuds voisins. Ainsi chaque nœud sera soumis à une force résultante qui va l'entraîner à se déplacer dans une direction et d'une distance bien définies. Après un certain nombre d'itérations (fonction du critère d'arrêt imposé), les nœuds vont s'agencer suivant une configuration aléatoire proche d'un ensemble de positions régulièrement ordonné

(configuration “hexagonale régulière”). Il faut aussi noter que les nœuds ne sont pas autorisés de se retrouver en dehors de la région de l’espace définie pour l’application de l’algorithme, à savoir typiquement la fenêtre de bobinage. Ceci peut être implémenté facilement par l’ajout de contraintes. Cet algorithme présente quelques inconvénients qui seront mis en évidence plus loin au travers d’une application.

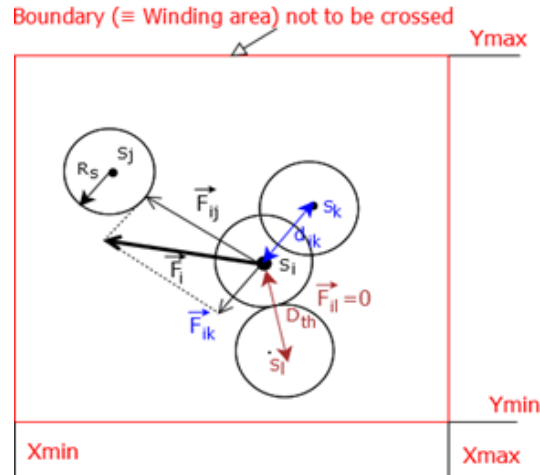


Figure 4.3: Principe de l’algorithme VFA

4.2.2 Algorithme de construction spire par spire

Suivant cet algorithme, les conducteurs sont déployés spire après spire. Son principe est illustré sur la figure 4.5 et comprend les actions suivantes.

- 1) Les conducteurs de la première couche sont ceux qui sont déployés en premier lieu. Pour ceux-ci, on n’observe d’incertitudes que suivant leur position verticale car ils sont posés contre la colonne centrale du noyau magnétique.
- 2) Les conducteurs de la deuxième couche et des couches suivantes, exceptés leurs derniers conducteurs (par exemple, le conducteur X sur la figure 4.5), sont déployés de façon à s’écraser sur les conducteurs de couches précédentes en gardant deux points de tangence avec ces dernières.
- 3) Dans le cas où il y a recouvrement entre deux conducteurs, il faut redéployer le conducteur correspondant à la spire encours de déploiement de façon à garder deux points de tangence (dont un avec le conducteur de la même couche que lui).

- 4) Les derniers conducteurs de la deuxième couche et des couches suivantes, sont positionnés de façon à présenter une incertitude d'angle δ_θ et un point de tangence avec le conducteur correspondant de la couche précédente (voir figure 4.4).
- 5) En cas de recouvrement avec le conducteur de la même couche, un redéploiement est réalisée de façon à contracter deux points de tangence (avec le conducteur de la même couche et son correspondant de la couche précédente)

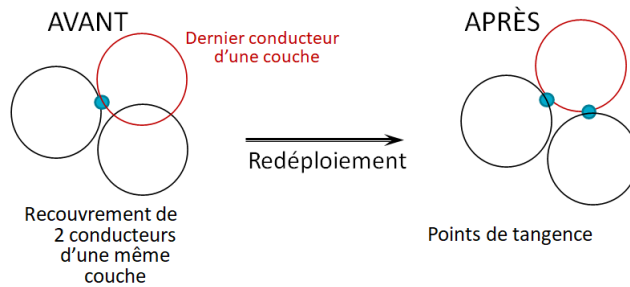


Figure 4.4: Algorithme bobinage spire par spire : redéploiement du dernier conducteur d'une couche, lors d'un recouvrement avec un conducteur de la même couche

Les paramètres à imposer lors du déploiement, ne comprennent que les tolérances δ_y (incertitude suivant l'axe vertical y pour les conducteurs de la première couche) et δ_θ (incertitude angulaire relative aux derniers conducteurs des couches 2 à n (= nombre total de couches du bobinage)).

4.3 Illustration de la mise en œuvre des deux algorithmes

Les deux algorithmes sont illustrés sur un même cas test afin de pouvoir comparer leur facilité d'implémentation et leur performance (temps d'exécution, qualité de la configuration obtenue, etc.). Il s'agit du déploiement de 81 conducteurs dans une fenêtre de bobinage à deux dimensions, de taille $3 \times 3 \text{ mm}^2$. Le diamètre D des conducteurs vaut quant à lui $0,315 \text{ mm}$.

Pour l'algorithme VFA, la distance seuil D_{th} est fixé à $0,343 \text{ mm}$ alors que les poids W_a et W_r de forces d'interaction mutuelle valent 1 et 104 respectivement. Le choix de valeurs pour les différents paramètres du VFA est normalement basé sur un problème d'optimisation où la fonction objective consiste à

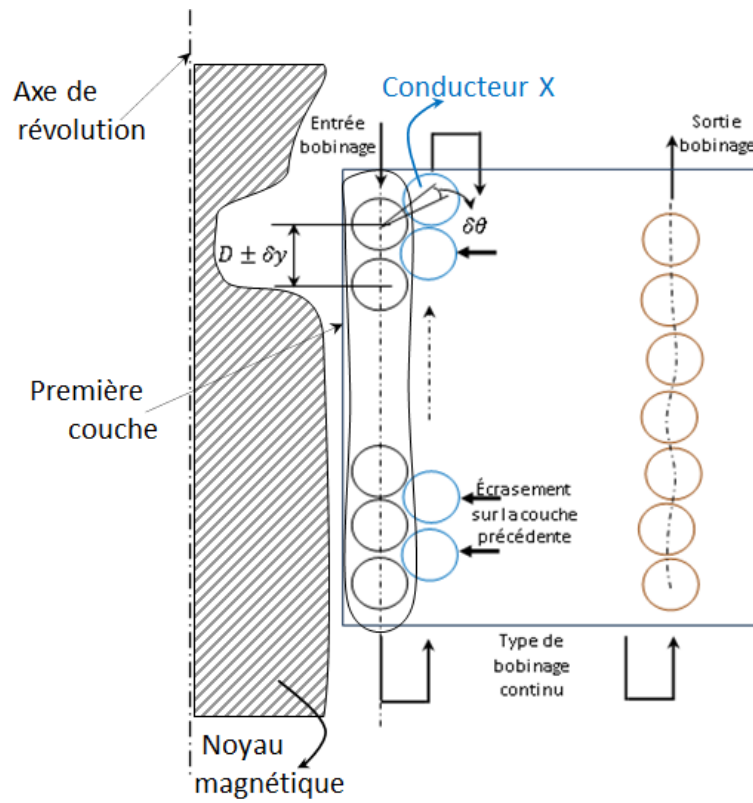


Figure 4.5: Principe de simulation de construction d'un bobinage

maximiser la couverture de la région d'espace d'intérêt. Pour ce cas test, nous les avons obtenues par essais (faire varier uniquement W_r) et observations. Le déploiement initial correspond à un état perturbé (aléatoire) où l'on peut aussi observer des recouvrements entre les conducteurs. Le critère d'arrêt consiste à vérifier qu'il n'y ait plus de recouvrement entre les conducteurs, c'est-à-dire que la distance entre deux conducteurs soit supérieure à 0,325 mm. L'état final (configuration hexagonale, cf. figure 4.6) du déploiement VFA est obtenu après 247 itérations correspondant à un temps d'exécution de 19 secondes.

Dans le cas du déploiement via simulation de construction spire par spire, la configuration finale (cf. figure 4.7) est obtenue presque instantanément et présente un aspect plus réaliste où les conducteurs s'écrasent sur ceux de la couche précédente.

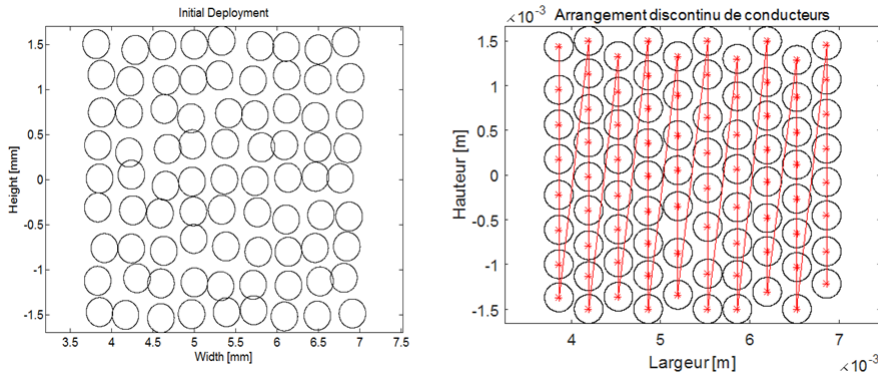


Figure 4.6: Déploiements de conducteurs initial (gauche) et final (droite) utilisant l'algorithme VFA

Concernant l'algorithme de construction bobinage spire par spire, les deux paramètres δ_y (pour la 1ère couche) et δ_θ (pour les derniers conducteurs des couches autres que la première) ont été fixé à 0,028 mm et 5° respectivement. Le pattern final hexagonal a été obtenu après 1,38 secondes. Une comparaison entre les deux algorithmes suivant différents critères est présentée dans le tableau 4.1 ci-dessous. Suivant ce tableau, on remarque bien l'intérêt d'utiliser l'algorithme de construction spire par spire de par l'aspect plus réaliste du bobinage généré mais aussi le faible temps d'exécution requis par rapport à l'algorithme VFA. Ainsi, on conçoit l'intérêt de privilégier l'algorithme de construction de bobinage spire par spire lors des études stochastiques de prise en compte d'incertitudes géométriques en vue de l'extraction des paramètres RLC de composants magnétiques bobinés.

Table 4.1: Comparaison entre algorithmes de déploiement des noeuds pour la prise en compte des incertitudes géométriques de bobinage

Critères	Virtual Force Algorithm	Simulation bobinage	construction
Implémentation *	Calculs complexes (forces mutuelles, vitesses, déplacements, etc.)	Complexe (cas de recouvrement, dernier conducteur des couches 2 et plus).	
Durée d'exécution **	Plusieurs itérations (250 itérations en moyenne, pour 3,2 s)	Quasi instantané	
Nombre des paramètres utiles	Plusieurs paramètres de contrôle	2 paramètres	
État initial	Pattern régulier perturbé de façon aléatoire	Pas d'état initial à générer	
Critère d'arrêt	Distance seuil entre les noeuds	Aucun	
Aspet qualitatif du bobinage	Pas assez représentatif (tendance à converger vers un état privilégié)	Plus réaliste	

* Sous Matlab [71]. ** Les temps de calcul sont obtenus sur un ordinateur équipé d'un processeur i7 de 8 Go de RAM tournant à 3,4 GHz.

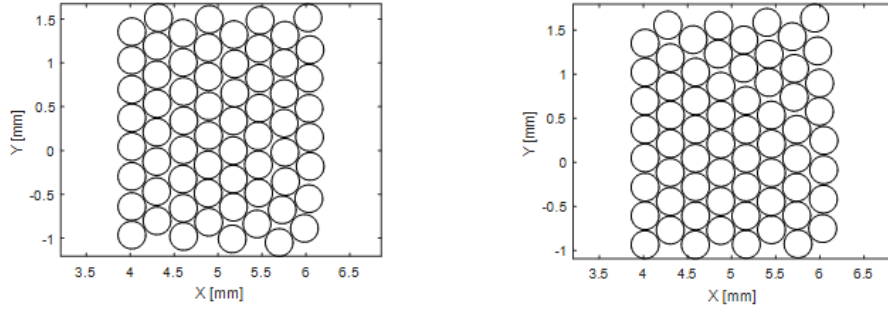


Figure 4.7: Deux distributions de bobinage obtenues par simulation de construction spire par spire

4.4 Influence d'une permutation sur les paramètres RLC d'un inducteur bobiné

La situation de permutation, pour cette analyse d'incertitudes, consiste en l'inversion des positions de deux conducteurs de la dernière couche du bobinage. Cette situation peut être prise en compte dans le modèle numérique 2D d'extraction des paramètres RLC (Résistance, Inductance et Capacité parasite) [64] d'un inducteur bobiné. Ce modèle numérique est constitué d'une formulation magnétodynamique en régime harmonique pour l'extraction des paramètres RL, et d'une formulation électrostatique pour l'extraction du paramètre C (*cf.* chapitre 2). La prise en compte du swap est faite en adaptant les équations du couplage circuit de la formulation magnétodynamique [23]. Le problème électrostatique est couplé faiblement au problème précédent à partir des potentiels électriques des conducteurs déduits du problème magnétodynamique. En d'autres termes, ces potentiels électriques sont imposés comme contraintes dans le problème électrostatique.

Les simulations sont effectuées ici sur un inducteur (de géométrie axysymétrique) de 64 spires (dont 8 conducteurs par couche) sans noyau magnétique sur une gamme de fréquences allant de 500 Hz à 1 MHz. Les conducteurs sont déployés en utilisant l'algorithme VFA. L'imposition de la permutation s'effectue par une numérotation des conducteurs correspondant à la situation sur cette dernière couche. En comparant les deux situations (avec et sans permutation) à partir des paramètres extraits (*cf.* figure 4.8), nous n'observons de différences que sur la capacité parasite calculée. Ceci s'explique par la dépendance du problème électrostatique vis-à-vis de la distribution du potentiel électrique le long des conducteurs (*cf.* figure 4.9). Cet écart reste quasi-constant sur toute la plage de fréquences considérée.

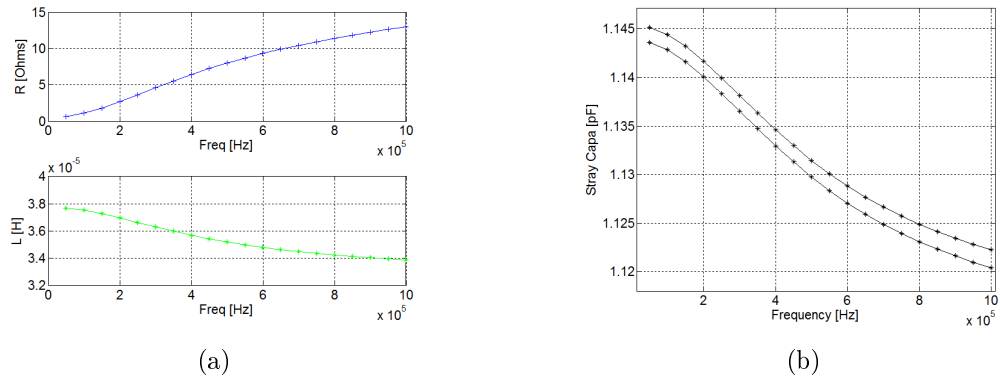


Figure 4.8: Évolution des paramètres RLC pour les situations avec et sans swap

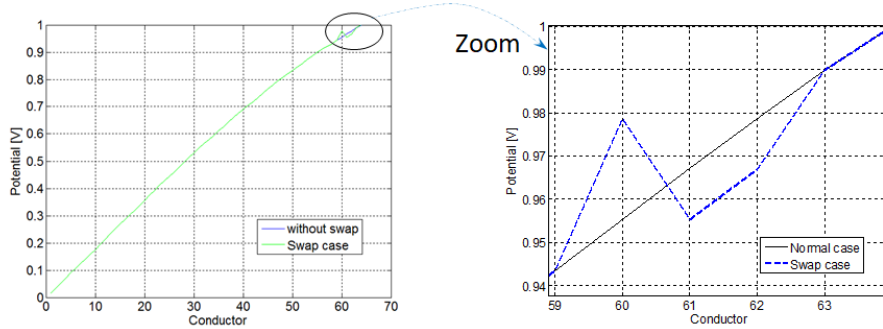


Figure 4.9: Comparaison de l'évolution du potentiel électrique entre les situations avec et sans swap

4.5 Influence des incertitudes liées aux positions de conducteurs sur les paramètres RLC

Dans cette application, les incertitudes géométriques liées aux positions de conducteurs dans la fenêtre de bobinage sont prises en compte dans l'extraction de paramètres RLC d'un inducteur bobiné constitué d'un noyau ferrite de type MnZn. Le noyau magnétique sans entrefer est considéré idéal ici, c'est-à-dire sans pertes magnétiques et électriques (en considérant une perméabilité magnétique relative réelle de 1000 et une conductivité électrique nulle). Pour cette analyse, un modèle 2D (voir les dimensions sur la figure 4.10) est suffisant vu la symétrie de révolution que présente la géométrie de l'inducteur. Les conducteurs en cuivre possèdent un diamètre de 0,315 mm. Leur déploiement est assuré en utilisant l'algorithme de bobinage spire par spire.

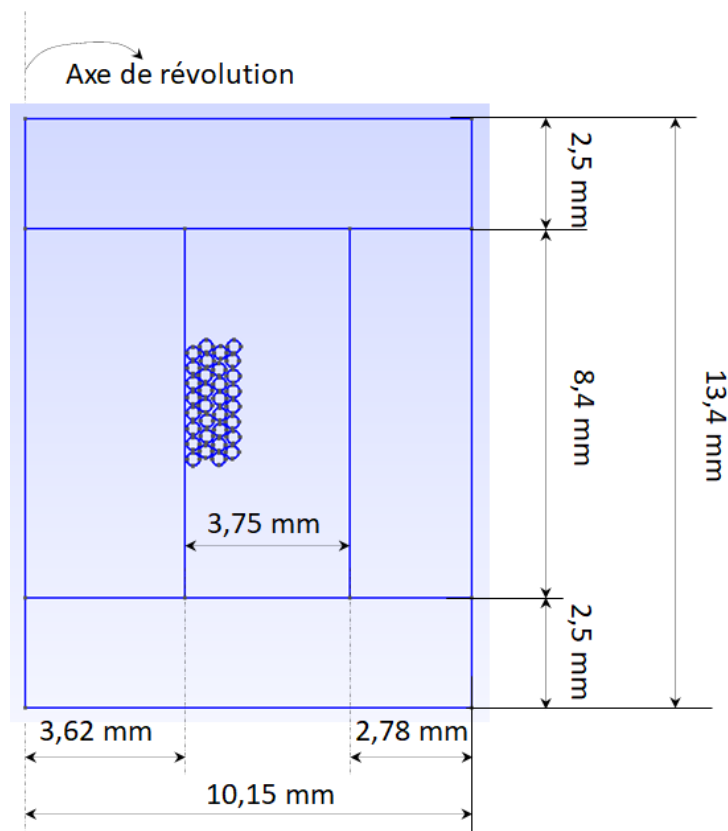


Figure 4.10: Géométrie prise en compte pour la propagation des incertitudes liées aux positions de conducteurs dans la fenêtre de bobinage.

Les résultats présentés à la figure 4.11 relèvent d'une simulation MC de

390 itérations. Selon cette figure, on peut observer une augmentation de la dispersion du paramètre R due à l'apparition des effets de peau et de proximité avec l'augmentation de la fréquence. Les paramètres L et C conservent quant à elles une dispersion quasi constante tout au long de la plage de fréquences de l'analyse. Sur cette figure, les dispersions de différents paramètres sont superposées sous forme de cartes colorées à leurs évolutions. Leurs échelles (*cf.* figure 4.11) représentent le nombre de réalisations de chaque valeur liée à chaque paramètre d'intérêt.

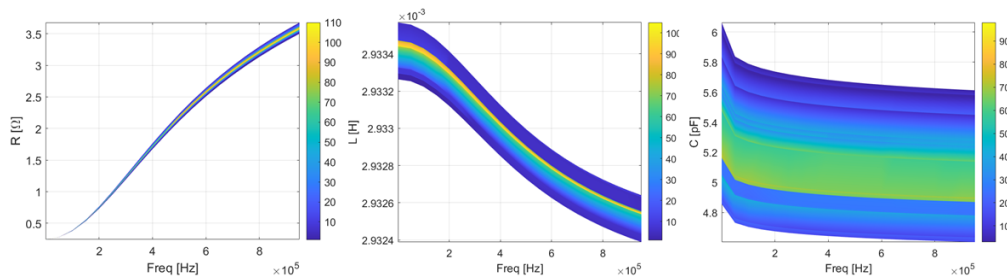


Figure 4.11: Évolutions des paramètres RLC superposées à leur distribution sous forme des cartes colorées, en fonction de la fréquence

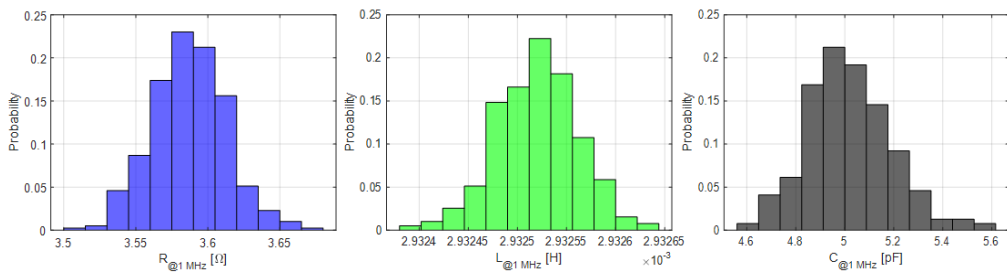


Figure 4.12: Histogrammes de paramètres RLC (avec des densités de probabilité en ordonnée) relevés à 1 MHz

Le critère d'arrêt pour cette simulation *MC* est basé sur la convergence de la moyenne de chaque paramètre d'intérêt. Selon ce critère, on peut se rendre compte de la suffisance du nombre d'itérations *MC* au travers de la figure 4.13 qui présente l'évolution de la moyenne de chaque paramètre en fonction du nombre d'itérations *MC*. Un zoom à la fréquence de 1 MHz sur les distributions de paramètres RLC peut être observé à la figure 4.12. On peut y remarquer des distributions normales qui sont à l'image des incertitudes liées aux positions de conducteurs dans la fenêtre de bobinage.

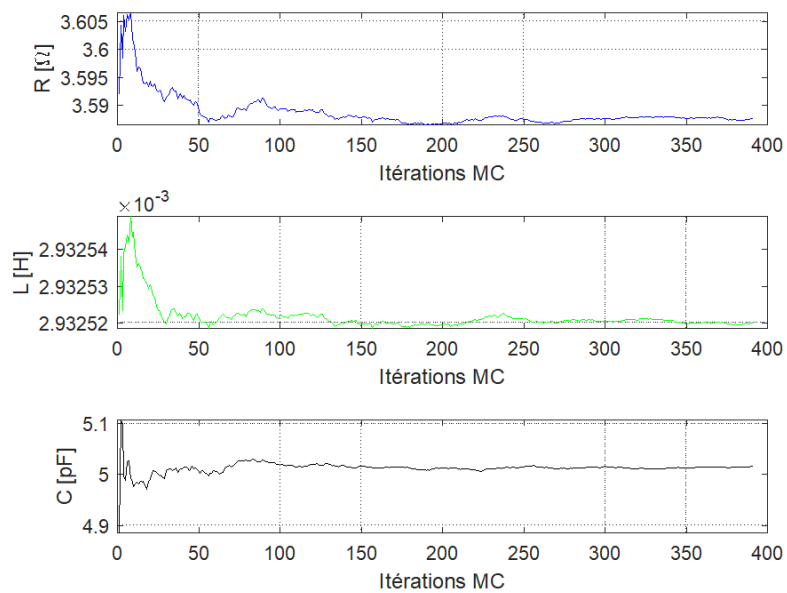


Figure 4.13: Évolution de moyennes de paramètres RLC relevés à 1 MHz en fonction du nombre d'itérations MC (critère d'arrêt)

4.6 Modélisation d'incertitudes matérielles

Ce type d'incertitudes concerne les propriétés magnétique et électrique des matériaux utilisés pour concevoir les composants magnétiques bobinés considérés dans ce travail. Parmi celles-ci, nous pouvons énumérer la permittivité électrique des isolants des conducteurs, la perméabilité magnétique et la conductivité électrique du noyau en ferrite. À cette liste, on peut aussi ajouter les incertitudes (géométriques) sur certaines dimensions du noyau en ferrite et de son entrefer, s'il existe.

Pour pouvoir propager leur nature aléatoire sur les sorties d'intérêt du modèle, on peut leur assigner des distributions uniformes non seulement pour de raison de commodité, mais aussi par manque de données. Par contre des distributions normales sont mieux adaptées sur les dimensions du noyau magnétique et/ou de l'entrefer [32]. Certains modèles analytiques, tels que ceux de la perméabilité et de la permittivité, nécessitent des formes complexes (parties réelle et imaginaire) en vue de pouvoir prendre en compte l'aspect dissipatif associé à la montée en fréquence de fonctionnement des composants étudiés. Il n'est pas toujours évident de trouver des modèles analytiques qui se rapprochent des comportements fréquentiels réalistes des différents matériaux par manque d'informations relatives à ces derniers. En pratique, ces lois comportementales sont plutôt relevées de façon expérimentale sur des plages de fréquence limitées.

- **Noyau ferrite**

Concernant les propriétés magnétique et électrique du noyau ferrite, les modèles de relaxation de *Debye* [43, 72] (voir équations (4.2) et (4.3)) permettent de rendre compte de leur variation avec la fréquence avec une certaine marge de précision. Dans ces modèles, l'aspect aléatoire est porté par les grandeurs statiques pour lesquelles le constructeur donne souvent l'erreur relative. C'est par exemple une erreur relative de 20% [30] dans le cas de la perméabilité magnétique de ferrite de type **MnZn** et 10% d'erreur relative pour la conductivité électrique de la ferrite.

On a :

$$\underline{\mu}(f) = \mu'(f) - j\mu''(f) = \frac{\mu_s}{1 + j\frac{f}{f_{r\mu}}} \quad (4.2)$$

où μ_s et $f_{r\mu}$ sont respectivement la perméabilité statique (quand $f \rightarrow 0$) et la fréquence de relaxation.

D'autre part :

$$\underline{\varepsilon}(f) = \varepsilon'(f) - j\varepsilon''(f) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + j\frac{f}{f_{r\varepsilon}}} \quad (4.3)$$

où $\varepsilon_s, \varepsilon_\infty, f_{r\varepsilon}$ représentent respectivement les permittivités à fréquence nulle (ou permittivité statique) et à fréquence infinie, ainsi que la fréquence de relaxation.

Dans ces modèles de relaxation de *Debye*, les parties réelles représentent des termes de stockage d'énergie magnétique et électrique, alors que les parties imaginaires rendent compte de la dissipation d'énergie à une fréquence donnée.

Le comportement fréquentiel de la conductivité électrique du noyau ferrite est obtenu à partir du lien existant avec la composante imaginaire [43] de la permittivité électrique du même matériau (voir équation (4.4)). L'aspect aléatoire sera ainsi porté soit par la permittivité électrique statique soit par la fréquence de résonance (dont l'erreur relative ne peut dépasser les 10% dans le cas de ferrite de type MnZn [73, 43]).

On écrit :

$$\sigma(f) = \sigma_s + \sigma_{ac}(f) \text{ et } \sigma_{ac}(f) = 2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r''(f) \quad (4.4)$$

avec $\sigma_{ac}(f)$ la conductivité électrique haute fréquence.

• Isolant

En ce qui concerne le comportement fréquentiel de la permittivité électrique de l'isolant des conducteurs, le plus souvent en polyuréthane, le modèle de relaxation de *Havriliak Negami* est le mieux adapté [73, 72] :

$$\underline{\varepsilon}^*(f) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{(1 + (j\omega\tau)^{1-\alpha})^\beta} \quad (4.5)$$

où $0 < \alpha \leq 1$ et $0 < \beta \leq 1$ sont des paramètres quantifiant les déviations symétrique et asymétrique de la relaxation. $\tau = \frac{1}{2\pi f_{max}}$ est le temps de relaxation alors que $\omega = 2\pi f$, la pulsation.

Ce modèle (*cf.* équations (4.5)) permet de mettre en évidence une réponse fréquentielle asymétrique. Dans ce cas aussi, l'aspect aléatoire est porté par la permittivité électrique statique dont l'erreur relative peut être de l'ordre de 5% par exemple [74].

Les comportements fréquents (parties réelle et imaginaire) des différentes propriétés magnétique et électrique associées à la ferrite et à l'isolant

(polyuréthane) sont représentés sur la figure 4.14. On vérifie bien que ces propriétés se ramènent à des grandeurs réelles constantes lorsque la fréquence est largement inférieure à la fréquence de relaxation du modèle de *Debye*. Comme les parties imaginaires de ces lois sont associées aux pertes d'énergie, cela revient à dire que les pertes électriques (pertes diélectriques et pertes joules) et magnétiques (pertes par hystérésis et pertes résiduelles) peuvent être négligées en basse fréquence.

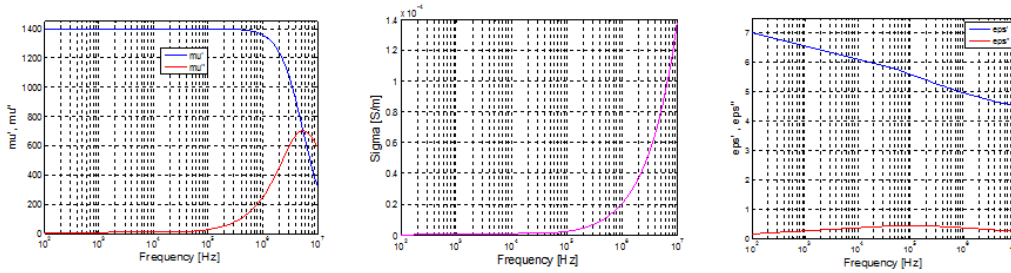


Figure 4.14: Quelques lois comportementales : perméabilité et conductivité de la ferrite (gauche et milieu), et permittivité électrique d'un isolant en polyuréthane (droite).

4.7 Influence des incertitudes matérielles sur les paramètres RLC

Le cas test présenté ici a fait l'objet d'une publication [75]. Nous y étudions la propagation des incertitudes matérielles sur les paramètres RLC d'un inducteur bobiné de 32 spires avec noyau en ferrite dont les conducteurs ont un diamètre de 0,315 mm. Le pattern de bobinage, généré par l'algorithme VFA, reste le même tout au long de cette simulation. La plage de fréquence est limitée à 1 MHz et le nombre d'itérations *Monte Carlo* vaut ici 350. Le noyau ferrite du modèle est sans entrefer et ses dimensions sont présentées à la figure 4.15. Les incertitudes sont ici portées par la perméabilité magnétique, la conductivité électrique du noyau magnétique ainsi que par la permittivité diélectrique de l'isolant (en polyuréthane) des conducteurs. Vu que le noyau magnétique est aussi le siège de courants induits, les pertes joules (*cf.* figure 4.15) qui y sont engendrées, doivent être aussi prises en compte dans le paramètre R. Les paramètres aléatoires de ces derniers (μ , $\underline{\epsilon}$, $\underline{\epsilon}^*$, σ , etc.) sont distribués selon des lois uniformes dont les bornes de variation sont déterminées à partir des informations sur l'erreur relative retrouvées dans certains documents [30, 73, 76] ou fournies par le vendeur.

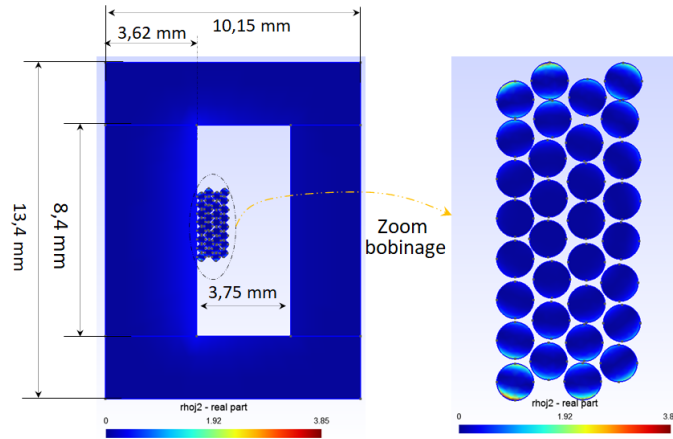


Figure 4.15: Distribution des pertes joules à 1 MHz sur le domaine d'étude (gauche) et zoom sur les conducteurs (droite)

Les résultats sont présentés à la figure 4.16. On peut remarquer une augmentation de la dispersion sur le paramètre R lorsque la fréquence augmente. Ceci peut s'expliquer par l'apparition des phénomènes non contrôlés avec l'élévation de la fréquence, tels que les effets de peau et de proximité. Dans le cas des capacités parasites, cette dispersion se stabilise à partir d'une fréquence voisine de 80 kHz. Par contre cette dispersion reste quasi-constante avec la fréquence dans le cas de l'inductance. Cela peut être expliqué par la faible influence des courants induits dans le noyau ferrite qui, étant déphasés par rapport aux courants dans les conducteurs, sont faibles ou négligeables. En même temps, il est possible d'observer sur cette figure l'évolution des distributions des différents paramètres en fonction de la fréquence sous forme des cartes colorées. L'échelle colorée représente le nombre d'itérations MC associé à chaque valeur de paramètres d'intérêt. En faisant un zoom sur la situation à la fréquence de 1 MHz (*cf.* figure 4.17), on retrouve bien des distributions sensiblement uniformes telles que supposées en l'entrée du modèle numérique au travers des propriétés matérielles.

4.8 Conclusion

Dans des nombreux cas pratiques, lorsqu'on doit estimer l'incertitude sur une prévision (en météorologie par exemple), ce sont les sources d'incertitudes les plus fortes qu'il faut considérer. Normalement, cette connaissance s'acquiert a posteriori d'une analyse de sensibilité du système étudié. Et cette dernière n'est rendue possible que lorsqu'on connaît la nature des incertitudes en entrée

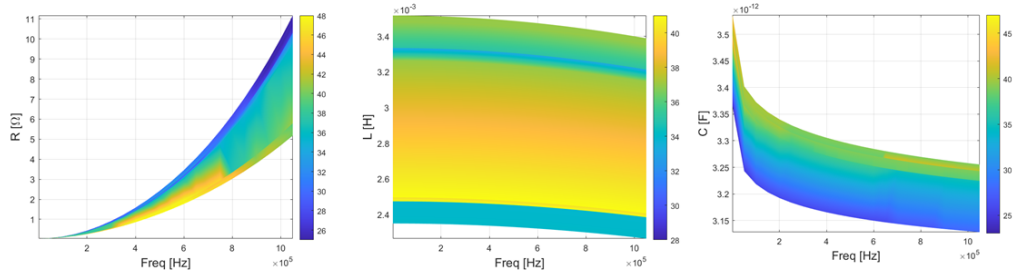


Figure 4.16: Évolutions des paramètres RLC superposées à leur distribution sous forme des cartes colorées, en fonction de la fréquence.

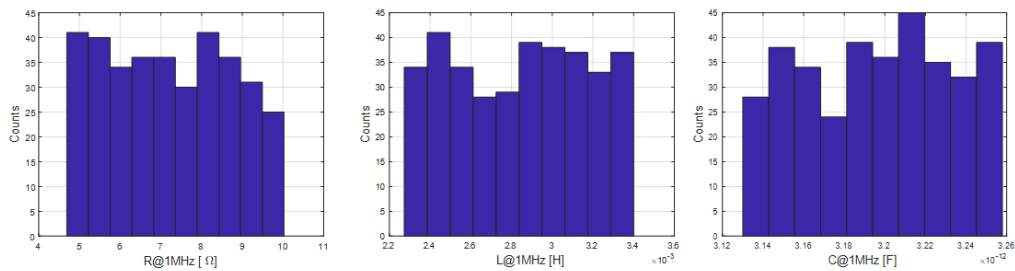


Figure 4.17: Histogrammes des paramètres RLC relevés à 1 MHz (Counts = nombre d'itérations MC)

et leurs caractéristiques. On voit bien l'importance de savoir modéliser ces incertitudes en entrée du système.

Dans ce chapitre, nous avons présenté des modèles associés aux entrées aléatoires (incertitudes géométriques et matérielles) du modèle numérique d'extraction de paramètres RLC d'un inducteur bobiné. Les incertitudes géométriques liées aux positions de conducteurs dans la fenêtre de bobinage ont été modélisées grâce à deux apports originaux : le VFA et l'algorithme spire par spire. L'algorithme spire par spire est celui que nous avons retenu pour la suite de cette thèse car il s'est avéré être plus représentatif d'un bobinage et moins coûteux en temps de calcul.

Concernant les incertitudes matérielles (perméabilité magnétique et conductivité électrique du noyau ferrite, permittivité électrique de l'isolant de conducteurs), nous nous sommes servi des modèles de *Debye* et de *Havriliak Negami* du fait de leur dépendance fréquentielle. Dans ce travail, l'aléa sur les propriétés matérielles porte sur les paramètres statiques (μ_s , ε_s , σ_s , etc.) de ces modèles.

Dans la suite de cette thèse, nous allons nous focaliser que sur les incertitudes géométriques et matérielles que nous venons de décrire en vue de mener une analyse de sensibilité sur les paramètres RLC d'un composant magnétique bobiné. D'un côté, les incertitudes géométriques relatives aux positions des conducteurs dans la fenêtre de bobinage, vont résulter du déploiement des conducteurs selon l'algorithme de construction spire par spire décrit plus haut. D'un autre côté, les incertitudes matérielles seront caractérisées par des distributions uniformes du fait de manque d'informations disponibles. Par contre, l'information fournie (par une datasheet par exemple) sur l'erreur relative à un paramètre d'entrée, va nous permettre de déterminer les bornes de variation de ce paramètre. Du fait de la dimension élevée de l'entrée aléatoire du système étudié, nous allons mettre en œuvre dans le chapitre 5 une technique permettant de réduire cette dimension en vue d'accéder rapidement et facilement à l'information sur la sensibilité du système mis en évidence.

Réduction dimensionnelle de l'entrée aléatoire et Substitution stochastique

5.1 Introduction

Fort de tout ce que nous venons de présenter, nous pouvons remarquer que la prise en compte des incertitudes géométriques liées aux positions des conducteurs dans l'extraction des paramètres RLC (par la méthode des éléments finis) d'un inducteur bobiné est un processus gourmand en termes de temps et ressources de calcul (*cf.* chapitre 3). Cependant la construction des substituts stochastiques tels que les polynômes de chaos, peut aussi exiger plusieurs appels du modèle déterministe numérique du fait du grand nombre de variables aléatoires (positions de conducteurs dans la fenêtre de bobinage), comme présentée précédemment (*curse of dimentionality* [17]). Mais une fois que la PCE est construite, l'analyse stochastique du modèle d'étude devient assez aisée et rapide. On voit bien l'intérêt que présente l'accès à un tel substitut stochastique pour l'analyse du modèle numérique brute.

Un moyen permettant de réduire ce nombre élevé d'appels du modèle numérique initial pourrait consister à réduire le nombre de variables aléatoires en entrée du problème stochastique. Ceci nous a amené à penser à la transformation des incertitudes géométriques en incertitudes matérielles. Comme nous allons le voir, une telle approche permet de réduire radicalement la dimension de l'entrée aléatoire (*cf.* figure 5.1). Celle-ci est fondée sur la technique d'*homogénéisation* adaptée aux milieux hétérogènes aléatoires [77, 78]. L'idée consiste à extraire d'un milieu hétérogène des propriétés effectives équivalentes d'un milieu homogène, telles que la perméabilité magnétique et la conductivité électrique par exemple. Ainsi, la fenêtre de bobinage (constituée des conducteurs, des isolants et de l'air) est transformée en un milieu homogène ayant des propriétés électromagnétiques aléatoires, images du milieu hétérogène initial constitué des conducteurs dont les positions sont aléatoires, ce qui pourrait permettre de réduire le nombre des degrés de liberté du problème initial éléments finis ainsi que son temps d'exécution lors de

l'analyse statistique.

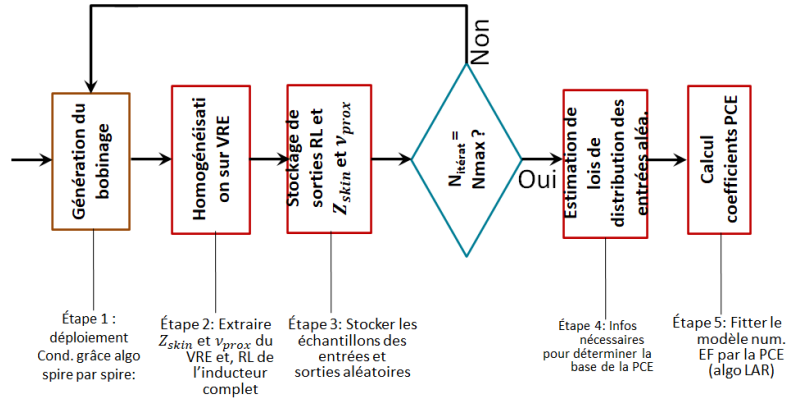


Figure 5.1: Flow chart de construction d'un substitut PCE pour les paramètres RL

Dans ce qui suit, nous définirons dans un premier temps de façon brève, la théorie d'homogénéisation adaptée à la notion du Volume Représentatif Élémentaire (VRE). De cette définition, nous présenterons la formulation éléments finis permettant d'extraire les paramètres RL à partir d'un modèle homogénéisé. Grâce à cet outil, nous argumenterons notre choix sur la taille optimale du volume adaptée au cas d'étude qui nous concerne. Signalons que nous nous sommes inspirés de [79, 80, 81] pour mettre en œuvre la démarche relative à la détermination de la taille optimale du VRE (*cf.* sous-section 5.4.2).

Enfin, nous appliquerons cette technique au cas test constitué d'un inducteur bobiné dont les détails seront fournis plus loin. Signalons que dans ce cas test, l'objectif est de construire un substitut stochastique en polynôme de chaos où le nombre de variables de l'entrée aléatoire est fortement réduit. Les performances de cette étude seront illustrées en termes de temps de calcul pour les deux approches (avec et sans homogénéisation fondée sur le VRE).

5.2 Définition du Volume Représentatif Élémentaire

Le VRE est le plus petit volume d'un milieu hétérogène de taille finie et de forme précise, au-dessus duquel on peut se permettre d'extraire des propriétés équivalentes (à l'échelle macroscopique) [80, 82] d'un milieu homogène en vue d'analyser un phénomène ou problème spécifique (prise en compte des effets

de peau et de proximité dans un bobinage par exemple). Dans le cas des milieux hétérogènes périodiques, le VRE sera constitué d'une cellule élémentaire périodique [82, 83] (*cf.* figure 5.2). Alors que dans le cas d'un milieu hétérogène aléatoire, la situation devient plus complexe. Le VRE est défini dans ce cas comme un échantillon du milieu hétérogène et représentatif de ce dernier tout en étant aussi petit que possible en vue de limiter le temps de calcul. Cependant pour des volumes plus petits que le VRE, une propriété équivalente unique ne peut plus être définie et la description de cette microstructure hétérogène nécessite l'usage d'un élément de volume statistique ou Statistical Volume Element (SVE) et de champs aléatoires [83].

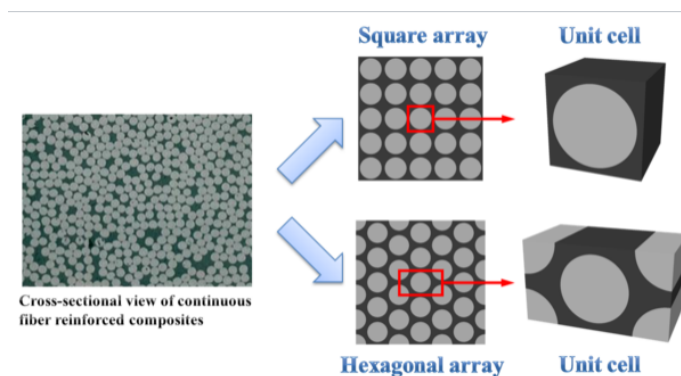


Figure 5.2: Illustration d'un VRE par des cellules élémentaires [83]

Contrairement au VRE, le SVE (appelé également élément de volume stochastique) peut générer une propriété équivalente différente d'une réalisation à une autre. Cette façon de voir le milieu hétérogène peut être aussi adoptée dans notre cas. En effet la forme du VRE peut varier d'une réalisation à une autre du fait que les conducteurs occupent des positions aléatoires (autour d'une répartition idéale) dans la fenêtre de bobinage. C'est ce qui va nous permettre de caractériser de façon complète le milieu hétérogène à l'aide de distributions de propriétés équivalentes.

Très souvent, cette caractérisation est rendue possible grâce à la technique d'homogénéisation (*cf.* figure 5.3). C'est ainsi que nous allons présenter dans la section suivante le formalisme mathématique qui se trouve caché derrière cette technique. On s'aperçoit bien ici de l'avantage que confère cette technique : une réduction de la dimension de l'entrée aléatoire du modèle. La nouvelle entrée aléatoire sera limitée aux seules propriétés équivalentes associées au milieu homogène constituant la fenêtre de bobinage (incertitudes géométriques liées aux positions des conducteurs).

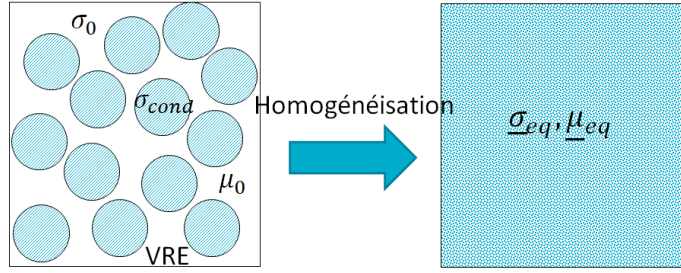


Figure 5.3: Illustration du processus d'homogénéisation dans le cas d'un milieu hétérogène aléatoire

5.3 Technique d'homogénéisation

L'usage du VRE et de la technique d'homogénéisation dans le cas qui nous concerne, permet de déterminer les lois de distribution des propriétés équivalentes nécessaires pour la construction des substituts stochastiques en polynômes de chaos.

L'hypothèse faite en homogénéisation consiste à considérer que le milieu de départ est périodique et que la structure/cellule de base se répète indéfiniment dans l'espace. Ceci permet de déterminer une moyenne spatiale des propriétés équivalentes du milieu continu homogène. Cette extraction des propriétés équivalentes se fait dans ce travail par l'usage de méthodes numériques comme celle des éléments finis par exemple. Cette méthode permet d'avoir accès aux champs locaux à partir des champs macroscopiques [78]. Dans les sections suivantes, nous présentons une théorie de l'homogénéisation orientée vers la magnétodynamique (effets inductif et dissipatif) en nous inspirant de [77, 78, 23]

5.3.1 Équations de Maxwell à résoudre

Nous considérons un domaine suffisamment petit pour lequel l'induction magnétique \mathbf{B} et la densité de courant \mathbf{J} peuvent être considérées uniformes. Ils vont constituer les termes sources du problème local. En revanche, les champs \mathbf{H} et \mathbf{E} varieront de façon linéaire sur le domaine local lorsque \mathbf{B} et \mathbf{J} sont différents de zéro puisqu'ils sont reliés au travers des lois d'Ampère et de Faraday que nous rappelons ci-dessous (en régime harmonique).

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{5.1a}$$

$$rot\mathbf{E} = -i\omega\mathbf{B} \tag{5.1b}$$

Au niveau local, les mêmes équations de *Maxwell* peuvent s'écrire comme suit :

$$\text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{j} \quad (5.2a)$$

$$\text{rot } \mathbf{e} = -i\omega \mathbf{b} \quad (5.2b)$$

$$\text{div } \mathbf{b} = 0 \quad (5.2c)$$

$$\text{div } \mathbf{j} = 0 \quad (5.2d)$$

Ces équations sont complétées des lois constitutives matérielles suivantes :

$$\mathbf{b} = \mu \mathbf{h} \quad (5.3a)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e} \quad (5.3b)$$

Du fait de la périodicité de la géométrie, il existe des liens entre grandeurs macroscopiques et locales suivants :

$$\mathbf{h} = \mathbf{H} + \mathbf{h}_\mu + \mathbf{h}_R \quad (5.4a)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{B} + \mathbf{b}_\mu + \mathbf{b}_R \quad (5.4b)$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{E} + \mathbf{e}_\mu + \mathbf{e}_R \quad (5.4c)$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{J} + \mathbf{j}_\mu + \mathbf{j}_R \quad (5.4d)$$

En majuscule, on retrouve des champs macroscopiques qui sont presque uniformes sur une cellule élémentaire/VRE. Et les liens entre ces grandeurs définissent les propriétés macroscopiques équivalentes. Ainsi dans le cas 2D (avec des courants perpendiculaires au plan d'étude), la loi $\mathbf{J}(\mathbf{E})$ définit une conductivité équivalente tensorielle $[\sigma_{eq}]$ et la loi $\mathbf{B}(\mathbf{H})$, une perméabilité équivalente tensorielle $[\mu_{eq}]$. Les champs d'indice μ sont des champs périodiques, responsables des pertes. Les grandeurs d'indice R, représentent des champs résiduels liés au fait que la périodicité n'est pas exacte mais est limitée à une partie Ω_P (fenêtre de bobinage pour le cas test qui nous concerne) du domaine d'étude Ω . Nous supposons ces dernières négligeables dans cette approche. Ceci nous permet de réécrire les équations comme suit:

$$\mathbf{h} = \mathbf{H} + \mathbf{h}_\mu \quad (5.5a)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{B} + \mathbf{b}_\mu \quad (5.5b)$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{E} + \mathbf{e}_\mu \quad (5.5c)$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{J} + \mathbf{j}_\mu \quad (5.5d)$$

Les champs macroscopiques devant aussi vérifier les équations de *Maxwell*, nous pouvons écrire :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (5.6a)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B} \quad (5.6b)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (5.6c)$$

$$\text{div } \mathbf{J} = 0 \quad (5.6d)$$

Les équations (5.2c) et (5.6c) expriment que les champs \mathbf{b} et \mathbf{B} , ainsi que leurs moyennes spatiales sur le domaine Ω $\langle \mathbf{b} \rangle_\Omega$ et $\langle \mathbf{B} \rangle_\Omega$, produisent le même flux au travers d'une surface quelconque S . On peut donc écrire :

$$\langle \mathbf{b} \rangle_\Omega = \langle \mathbf{B} \rangle_\Omega, \quad (5.7)$$

avec :

$$\langle \mathbf{b} \rangle_\Omega = (1/\Omega) \int_\Omega \mathbf{b} \, d\Omega \quad (5.8a)$$

$$\langle \mathbf{B} \rangle_\Omega = (1/\Omega) \int_\Omega \mathbf{B} \, d\Omega \quad (5.8b)$$

Pour alléger l'écriture et vu que les champs \mathbf{b} et \mathbf{B} ont la même valeur moyenne, nous écrirons sans l'indice Ω les moyennes spatiales associées aux deux grandeurs. En appliquant l'opérateur moyenne spatiale à l'équation (5.5b), on peut montrer compte tenu de (5.7) que :

$$\langle \mathbf{b}_\mu \rangle_\Omega = 0 \quad (5.9)$$

Ce qui signifie que l'induction magnétique périodique apparaît sous forme de boucles d'induction. En moyennant spatialement de même sur l'équation (5.5d), on vérifie que

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \langle \mathbf{J} \rangle \quad (5.10a)$$

$$\langle \mathbf{j}_\mu \rangle = 0 \quad (5.10b)$$

La densité de courant périodique se présente donc elle aussi sous la forme de boucles de courants à l'échelle locale.

Si nous supposons de plus que le VRE est suffisamment petit que pour y assimiler l'induction magnétique et la densité de courant macroscopiques à des constantes, les équations (5.7) et (5.10a) deviennent :

$$\langle \mathbf{b} \rangle = \mathbf{B} \quad (5.11a)$$

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \mathbf{J} \quad (5.11b)$$

Des relations analogues ne peuvent être établies pour les champs \mathbf{h} et \mathbf{e} . En effet la relation (5.6a) implique que (\mathbf{J} étant constant sur une cellule) :

$$\mathbf{H} = \mathbf{J} \wedge (\mathbf{x}/2) + \mathbf{H}_C, \quad (5.12)$$

où \mathbf{x} est le vecteur des coordonnées spatiales dont l'origine serait le centre de la cellule, \mathbf{H}_C un vecteur constant égale à la valeur que prend le vecteur \mathbf{H} au centre de la cellule ($\mathbf{H}_C = \mathbf{H}(\mathbf{x} = 0)$). On montre de manière analogue que :

$$\mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B} \wedge (\mathbf{x}/2) + \mathbf{E}_C, \quad (5.13)$$

Avec \mathbf{E}_C la valeur que prend le champ \mathbf{E} au centre de la cellule. Les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} varient donc linéairement sur la cellule élémentaire, alors que \mathbf{J} et \mathbf{B} sont constants. En prenant la moyenne spatiale, on trouve bien que (en omettant par commodité d'écriture l'indice Ω):

$$\langle \mathbf{H} \rangle = \underbrace{\langle \mathbf{J} \wedge (\mathbf{x}/2) \rangle}_{=0} + \mathbf{H}_C, \quad (5.14)$$

$$\mathbf{E} = \underbrace{\langle -i\omega \mathbf{B} \wedge (\mathbf{x}/2) \rangle}_{=0} + \mathbf{E}_C, \quad (5.15)$$

et que :

$$\langle \mathbf{h} \rangle = \langle \mathbf{H} + \mathbf{h}_\mu \rangle = \mathbf{H}_C + \langle \mathbf{h}_\mu \rangle, \quad (5.16)$$

$$\langle \mathbf{e} \rangle = \langle \mathbf{E} + \mathbf{e}_\mu \rangle = \mathbf{E}_C + \langle \mathbf{e}_\mu \rangle \quad (5.17)$$

Cependant les moyennes $\langle \mathbf{h}_\mu \rangle$ et $\langle \mathbf{e}_\mu \rangle$ ne sont pas nulles comme précédemment. En effet, dans le cas où la fréquence est différente de zéro et que nous sollicitons la cellule par des champs $\mathbf{B} \neq 0$ et $\mathbf{J} = 0$, des boucles de courant locales \mathbf{j}_μ vont apparaître dans les conducteurs et induire un champ local \mathbf{h}_μ

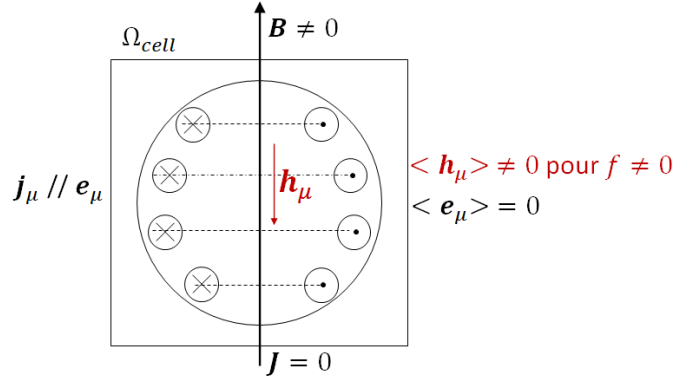


Figure 5.4: Boucles de courants locales pour une sollicitation macroscopique d'induction magnétique différente de zéro (effet de proximité)

s'opposant à la cause qui lui a donné naissance (voir loi de *Lenz*, figure 5.4). En prenant la moyenne spatiale de (5.3a), on trouve :

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H}_C + \langle \mathbf{h}_\mu \rangle) \quad (5.18)$$

Le champ \mathbf{h}_μ s'annule que lorsque la fréquence vaut zéro. Et la relation précédente se ramène à la loi classique $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}_C$. Les boucles \mathbf{j}_μ se présentent ainsi comme des dipôles magnétiques qui modifient la loi de comportement $\mathbf{B}(\mathbf{H})$.

De même, si l'on sollicite la cellule par des champs $\mathbf{B} = 0$ et $\mathbf{J} \neq 0$, des boucles de courant \mathbf{j}_μ , induites par le champ \mathbf{e}_μ , vont apparaître pour s'opposer à la cause qui leur a donné naissance (voir mécanisme de l'effet pelliculaire, figure 5.5). Et en prenant la moyenne spatiale de (5.3b), on trouve :

$$\mathbf{J} = \lambda \sigma (\mathbf{E}_C + \langle \mathbf{e}_\mu \rangle) \quad (5.19)$$

où λ est le facteur de remplissage au niveau de la cellule élémentaire ($= S_c/S_{cell}$, $S_c \equiv$ section conducteur et $S_{cell} \equiv$ section cellule élémentaire). Le champ \mathbf{e}_μ s'annule que lorsque la fréquence vaut zéro. Ainsi les boucles de champ \mathbf{e}_μ se comportent comme des dipôles électriques qui modifient la loi matérielle $\mathbf{J}(\mathbf{E})$.

Une écriture matricielle de deux comportements de la cellule élémentaire, nous permet d'écrire :

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{H} \rangle \\ \langle \mathbf{E} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\nu_{eq}] & [\varepsilon] \\ [\varepsilon] & [\rho_{eq}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \mathbf{B} \rangle \\ \langle \mathbf{J} \rangle \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

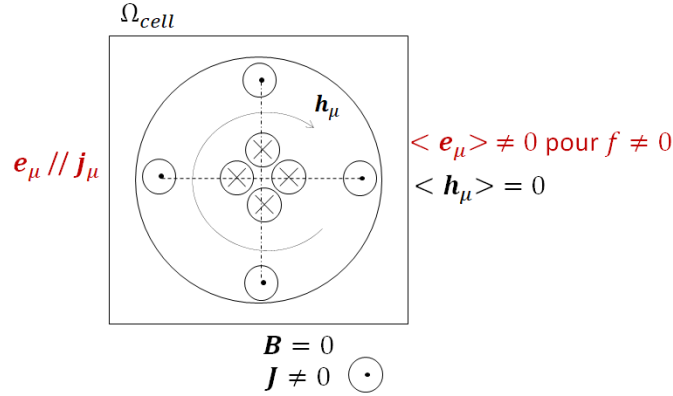


Figure 5.5: Boucles de courants locales pour une sollicitation macroscopique de densité de courant différente de zéro (effet de peau)

avec $[\nu_{eq}]$ ($[\sigma_{eq}]$) la réductivité (conductivité) complexe tensorielle, et $[\varepsilon]$ une matrice traduisant le couplage entre les deux comportements (effets de peau et de proximité).

Dans le cas particulier où la cellule élémentaire présente une certaine symétrie (cas des figures 5.4 et 5.5), on voit bien que $\langle \mathbf{e}_\mu \rangle = 0$ si $\mathbf{J} = 0$ et que $\langle \mathbf{h}_\mu \rangle = 0$ si $\mathbf{B} = 0$. Cette situation entraîne donc une matrice $[\varepsilon]$ nulle car $\mathbf{H} = 0$ si $\mathbf{B} = 0$ et $\mathbf{E} = 0$ si $\mathbf{J} = 0$ (voir équations (5.18) et (5.19)). La relation matricielle (5.20) devient :

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{H} \rangle \\ \langle \mathbf{E} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\nu_{eq}] & [0] \\ [0] & [\rho_{eq}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \mathbf{B} \rangle \\ \langle \mathbf{J} \rangle \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

En pratique, ce cas n'est pas toujours vérifié, surtout lorsqu'on travaille avec des milieux hétérogènes aléatoires comme les SVE (voir construction du substitut stochastique plus loin par usage du VRE). Ainsi, le problème d'homogénéisation (si pas de couplage entre les effets de peau et proximité) se résume à trouver les lois de comportement matérielles à l'échelle macroscopique :

$$\mathbf{J} = [\sigma_{eq}(f)] \langle \mathbf{E} \rangle = [\sigma_{eq}(f)] \mathbf{E}_C \quad (5.22)$$

$$\mathbf{B} = [\mu_{eq}(f)] \langle \mathbf{H} \rangle = [\mu_{eq}(f)] \mathbf{H}_C \quad (5.23)$$

5.3.2 Détermination des propriétés équivalentes (approche par équivalence énergétique)

Cette approche consiste à solliciter la cellule par les champs \mathbf{J} et \mathbf{B} , et à calculer les champs locaux \mathbf{e} et \mathbf{h} au moyen de simulations éléments finis avec des conditions aux limites dites périodiques. En réécrivant les relations (5.12) et (5.13) sous la forme :

$$\mathbf{h} = \mathbf{J} \wedge (\mathbf{x}/2) + \mathbf{h}_P \quad (5.24)$$

$$\mathbf{e} = -i\omega \mathbf{B} \wedge (\mathbf{x}/2) + \mathbf{e}_P \quad (5.25)$$

où $\mathbf{e}_P = \mathbf{E}_C + \mathbf{e}_\mu$ et $\mathbf{h}_P = \mathbf{H}_C + \mathbf{h}_\mu$, sont des champs périodiques permettant de résoudre le problème local. En introduisant ces relations dans les équations (5.2a) et (5.3b), on obtient les équations à résoudre sur la cellule (en appliquant les conditions aux limites périodiques permettant d'imposer les champs \mathbf{B} et \mathbf{J}) :

$$\sigma^{-1} \text{rot } \mathbf{h}_P - \mathbf{e}_P = -i\omega (\mathbf{B} \wedge (\mathbf{x}/2)) - \sigma^{-1} \mathbf{J} \quad (5.26)$$

$$\nu \text{rot } \mathbf{e}_P + i\omega \mathbf{h}_P = -i\omega (\mathbf{J} \wedge (\mathbf{x}/2)) - i\nu\omega \mathbf{B} \quad (5.27)$$

La formulation magnétodynamique $\mathbf{a} - v$ (2D ou 3D) peut être utilisée, avec prise en compte des conducteurs massifs, pour résoudre ce problème dit "problème cellule". Lorsque la cellule de base présente une certaine symétrie, les conditions aux limites peuvent être imposées séparément (découplage des différents effets en sollicitant la cellule de base par les champs \mathbf{B}_x , \mathbf{B}_y et \mathbf{J}_z séparément [10]). La connaissance des champs \mathbf{e}_P et \mathbf{h}_P permet de déterminer les champs \mathbf{e} et \mathbf{h} , et donc les propriétés équivalentes, par égalisation des puissances électromagnétiques locale et macroscopique dans la cellule de base.

À l'échelle locale, la puissance complexe s'écrit donc :

$$\underline{S}_{local} = \int_{\Omega} \underline{\mathbf{e}} \cdot \underline{\mathbf{j}}^* d\Omega + \int_{\Omega} i\omega \underline{\mathbf{b}} \cdot \underline{\mathbf{h}}^* d\Omega \quad (5.28)$$

et à l'échelle macroscopique, celle-ci devient :

$$\underline{S}_{macro} = \int_{\Omega} \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* d\Omega + \int_{\Omega} i\omega \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{H}}^* d\Omega = [\underline{\rho}_{eq}] \underline{\mathbf{J}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* \Omega_{cell} + i\omega \underline{\mathbf{B}} [\underline{\nu}_{eq}^*] \underline{\mathbf{B}}^* \Omega_{cell} \quad (5.29)$$

où Ω_{cell} est le volume de la cellule élémentaire et $[\underline{\rho}_{eq}] = [\underline{\sigma}_{eq}]^{-1}$.

5.4 Construction du substitut PCE

5.4.1 Mise en œuvre

La technique d'homogénéisation étant intégrée naturellement dans l'extraction des propriétés effectives équivalentes lors de la conversion des incertitudes géométriques en incertitudes matérielles, nous pouvons nous en servir ipso facto dans la construction du substitut PCE comme référence de la réponse du modèle. L'usage des propriétés équivalentes dans le modèle homogénéisé rend moins lourd le calcul éléments finis et permet donc un gain en temps de calcul dans le processus (*cf.* figure 5.6).

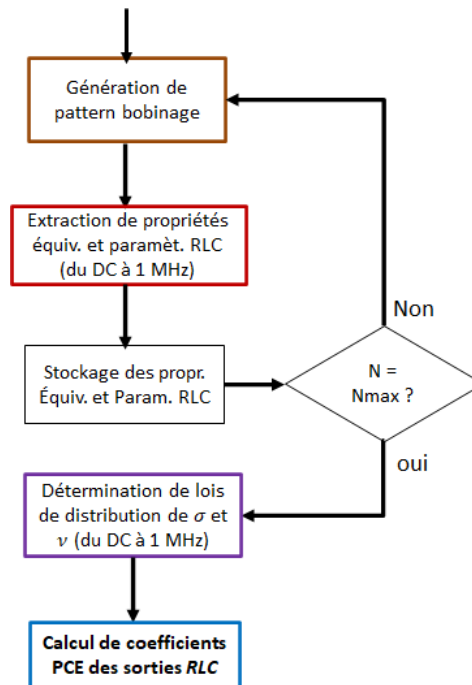


Figure 5.6: Processus de construction du substitut en PCE

L'usage du substitut PCE va nous permettre de réduire le nombre d'appels du modèle numérique vu la réduction de la dimension de l'entrée aléatoire. En plus de cela, l'analyse de sensibilité du modèle numérique via la PCE n'exige aucune évaluation supplémentaire du modèle une fois que celle-ci sera construite.

La technique d'homogénéisation linéaire (comportement effectif linéaire de matériaux) se base sur le principe d'équivalence des puissances comme présenté ci-dessus. Dans le cas 2D, le VRE sera constitué d'une portion de la fenêtre de bobinage de l'inducteur que nous présenterons plus loin. La

puissance complexe absorbée par le VRE de section S et de longueur \mathcal{L} , en fonction des champs locaux, est donnée par :

$$\underline{S}_{local} = \mathcal{L} \iint_S (\sigma^{-1} |\underline{\mathbf{j}}|^2 + i\omega\nu_0 |\underline{\mathbf{b}}|^2) dS \quad (5.30)$$

Dans le cas 2D, l'induction magnétique $\mathbf{B} = (B_x, B_y, 0)$ ne possède pas de composante selon l'axe z , alors que la densité de courant moyenne $\mathbf{J} = (0, 0, J_z)$ est orientée selon l'axe z . En exprimant cette dernière à partir d'un courant net I , la relation (5.29) prend la forme suivante.

$$S_{macro} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{I}} \\ \underline{\mathbf{B}}_x \\ \underline{\mathbf{B}}_y \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \underline{c}_{II} & \underline{c}_{IB_x} & \underline{c}_{IB_y} \\ \underline{c}_{IB_x}^* & \underline{c}_{B_x B_x} & \underline{c}_{B_x B_y} \\ \underline{c}_{IB_y}^* & \underline{c}_{B_x B_y}^* & \underline{c}_{B_y B_y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{I}} \\ \underline{\mathbf{B}}_x \\ \underline{\mathbf{B}}_y \end{pmatrix}^* \quad (5.31)$$

Les \underline{c}_{mn} sont des coefficients complexes. En observant cette relation, on retrouve bien les trois modes d'excitation $\{\underline{\mathbf{I}}, \underline{\mathbf{B}}_x, \underline{\mathbf{B}}_y\} : \{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}$ et $\{0, 0, 1\}$, auxquels on associe 3 solutions élémentaires caractérisées par les densités de courant $\underline{j}_I(x, y)$, $\underline{j}_{B_x}(x, y)$ et $\underline{j}_{B_y}(x, y)$ ainsi que les inductions $\underline{b}_I(x, y)$, $\underline{b}_{B_x}(x, y)$ et $\underline{b}_{B_y}(x, y)$. En appliquant le principe de superposition, les coefficients complexes \underline{c}_{mn} sont donnés par :

$$\underline{c}_{II} = \frac{1}{\mathcal{L} |\underline{\mathbf{I}}|^2} \int_S (\rho |\underline{\mathbf{j}}_I|^2 + i\omega\nu_0 \rho |\underline{\mathbf{b}}_I|^2) dS \quad (5.32)$$

$$\underline{c}_{B_x B_x} = \frac{1}{\mathcal{L} |\underline{\mathbf{B}}_x|^2} \int_S (\rho |\underline{\mathbf{j}}_{B_x}|^2 + i\omega\nu_0 \rho |\underline{\mathbf{b}}_{B_x}|^2) dS \quad (5.33)$$

$$\underline{c}_{B_y B_y} = \frac{1}{\mathcal{L} |\underline{\mathbf{B}}_y|^2} \int_S (\rho |\underline{\mathbf{j}}_{B_y}|^2 + i\omega\nu_0 \rho |\underline{\mathbf{b}}_{B_y}|^2) dS \quad (5.34)$$

$$\underline{c}_{IB_x} = \frac{1}{\mathcal{L} \underline{\mathbf{I}} \underline{\mathbf{B}}_x^*} \int_S (\rho \underline{\mathbf{j}}_I \underline{\mathbf{j}}_{B_x}^* + \omega\nu_0 \rho \underline{\mathbf{b}}_I \underline{\mathbf{b}}_{B_x}^*) dS \quad (5.35)$$

$$\underline{c}_{IB_y} = \frac{1}{\mathcal{L} \underline{\mathbf{I}} \underline{\mathbf{B}}_y^*} \int_S (\rho \underline{\mathbf{j}}_I \underline{\mathbf{j}}_{B_y}^* + \omega\nu_0 \rho \underline{\mathbf{b}}_I \underline{\mathbf{b}}_{B_y}^*) dS \quad (5.36)$$

$$\underline{c}_{B_x B_y} = \frac{1}{\mathcal{L} \underline{\mathbf{B}}_x \underline{\mathbf{B}}_y^*} \int_S (\rho \underline{\mathbf{j}}_{B_x} \underline{\mathbf{j}}_{B_y}^* + \omega\nu_0 \rho \underline{\mathbf{b}}_{B_x} \underline{\mathbf{b}}_{B_y}^*) dS \quad (5.37)$$

Lorsque l'arrangement des conducteurs présente une symétrie selon les axes x et y (ce qui n'est pas le cas du SVE), les coefficients de couplage, associés aux relations (5.35), (5.36) et (5.37), sont nuls (différents de zéro pour un SVE) et la la matrice des coefficients $[\underline{c}_{mn}]$ est donc purement diagonale. Et les 3 coefficients (\underline{c}_{II} , $\underline{c}_{B_x B_x}$ et $\underline{c}_{B_y B_y}$) sont donc liés aux 3 modes d'excitation $\{1, 0, 0\}$, $\{0, 1, 0\}$ et $\{0, 0, 1\}$. Pour le premier type d'excitation, le courant \underline{I} peut être imposé de façon faible à une valeur unitaire via la relation (??). Et l'emploi des conditions aux limites périodiques permet de fixer l'induction moyenne $\underline{B}_x(\underline{B}_y)$ de 1 T sur le VRE. Cette périodicité s'établit différemment en partant de la couche des conducteurs qui entoure le VRE [84]. L'induction moyenne $\underline{\mathbf{B}}'$ au sein de l'ensemble constitué du VRE et de la couche adjacente peut être fixée au moyen des conditions aux limites suivantes (*cf.* figure 5.7) :

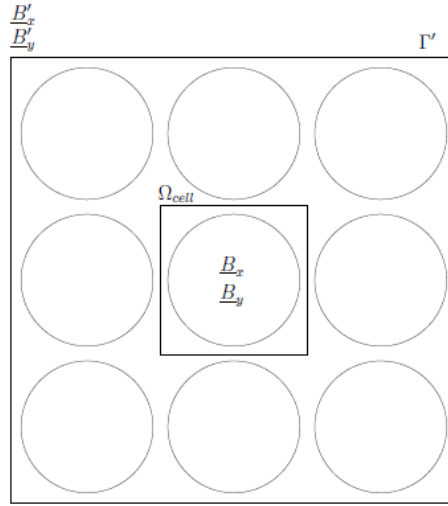


Figure 5.7: Induction magnétique moyenne au sein du VRE et de la cellule élémentaire Ω_{cell}

$$\Gamma_b : a_z(x, y) = y \underline{B}'_x - x \underline{B}'_y \quad (5.38)$$

Cette relation entraîne une différence entre l'induction moyenne $\{\underline{B}'_x, \underline{B}'_y\}$ au sein du VRE (équivalent à la fenêtre de bobinage par exemple) et l'induction magnétique $\{\underline{B}_x, \underline{B}_y\}$ au sein d'une cellule centrale Ω_{cell} du VRE. Ceci permet de mettre en place un processus itératif permettant d'obtenir l'excitation $\{\underline{B}'_x, \underline{B}'_y\}$ produisant les valeurs voulues de $\{\underline{B}_x, \underline{B}_y\}$ au sein du VRE. Pour une excitation $\{1, 0, 0\}$ de type effet de peau, le coefficient \underline{c}_{II} a

les dimensions d'une impédance, que l'on définit de la manière suivante :

$$\underline{c}_{II} = \underline{Z}_{skin} = \frac{S_{\{1,0,0\}}}{\mathcal{L}|\underline{I}_x|^2} \quad (5.39)$$

De même, l'effet de proximité est pris en compte via l'introduction d'un tenseur de réductivité complexe :

$$[\underline{\nu}_{prox}] = \begin{pmatrix} \frac{S_{\{0,1,0\}}}{\mathcal{L}S|\underline{B}_x|^2} & 0 \\ 0 & \frac{S_{\{0,0,1\}}}{\mathcal{L}S|\underline{B}_y|^2} \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

Dans le cas où toute la fenêtre de bobinage est prise comme VRE (cf. figure 5.8), l'induction moyenne $B_x(B_y)$ de 1 T sera imposée à travers une relation qui établit mathématiquement une périodicité au niveau des frontières : conditions de *Neumann* sur les frontières verticales et $a_z = 1$ ($a_z = 0$) sur la frontière horizontale supérieure (frontière horizontale inférieure).

La figure 5.8 compare les maillages utilisés dans les cas d'une formulation en conducteurs massifs (maillage fin) et celle en conducteurs bobinés (maillage grossier).

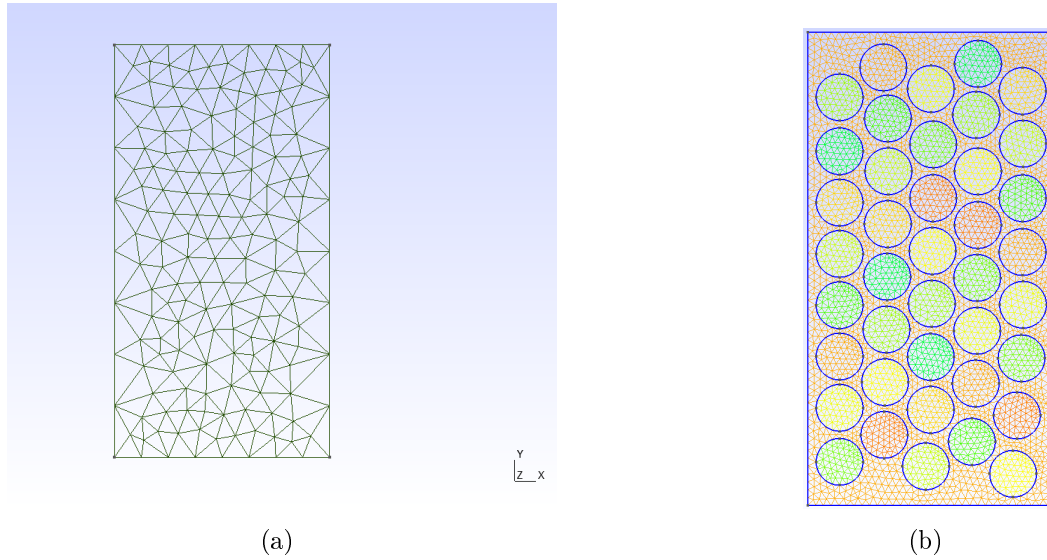


Figure 5.8: Relâchement du maillage dans le cas des conducteurs bobinés (gauche) et maillage fin dans le cas des conducteurs massifs (droite)

5.4.2 Choix de la taille du VRE

La taille du VRE est un paramètre important qui permet de capter le comportement local d'un milieu hétérogène à l'échelle macroscopique. Son volume doit être suffisamment grand pour représenter les propriétés microscopiques sans introduire des propriétés macroscopiques qui n'existent pas. En même temps, sa taille doit être aussi petite afin qu'il soit numériquement analysable. La taille du RVE peut être associée à une précision donnée de l'estimation des propriétés effectives équivalents recherchées.

Dans notre cas où les conducteurs occupent des positions aléatoires dans la fenêtre de bobinage, il sera question d'échantillonnage d'un ensemble de conducteurs occupant un volume et/ou espace précis. Il s'agit donc des milieux aléatoires dits aussi SVE. Le processus d'homogénéisation stochastique permet alors de calculer les propriétés équivalentes relatives à la géométrie et la structure du VRE en utilisant un grand nombre de réalisations de ce dernier.

Dans cette section, nous allons considérer un bobinage constitué de 40 spires réparties sur 5 couches (voir figure 5.11). Afin de mieux capter le comportement aléatoire du milieu, nous allons comparer trois tailles différentes du VRE pour les configurations suivantes : une couche de conducteurs autour d'un conducteur central, deux couches de conducteurs autour d'un conducteur central et l'entièreté de la fenêtre de bobinage.

Les formulations éléments finis utilisées pour résoudre ce problème d'homogénéisation doivent permettre la prise en compte des effets de peau et de proximité. Ce sont donc des formulations magnétodynamiques avec conducteurs massifs. Une formulation 2D magnéto harmonique en $\mathbf{a} - v$ (de 100 Hz à 1 MHz) avec des conditions aux frontières appropriées (*cf.* section 2.3) permet d'extraire les propriétés équivalentes recherchées (conductivité électrique et réductivité magnétique). Cela se fait en découplant les effets de peau et de proximité par des sollicitations simples du VRE (voir section 5.3.2). L'évolution de ces propriétés équivalentes (parties réelle et imaginaire) en fonction de la fréquence est présentée ci-dessous (*cf.* figure 5.9).

En comparant les trois cas correspondant aux trois tailles de VRE, on observe des évolutions presque similaires qui tendent à se rapprocher du cas correspondant au VRE s'étalant sur la fenêtre entière de bobinage, qui est celui réduisant considérablement l'erreur numérique liée à l'homogénéisation. Ceci nous permet de choisir, sans perte de généralité, le VRE constitué d'une couche de conducteurs autour d'un conducteur central. Ce choix nous permet d'accéder aux propriétés équivalentes en minimisant la charge de calcul (avec un nombre réduit de degrés de liberté) et de capter l'aspect aléatoire du problème. En effet, selon [78, 85], c'est la fraction entre le volume des inclusions

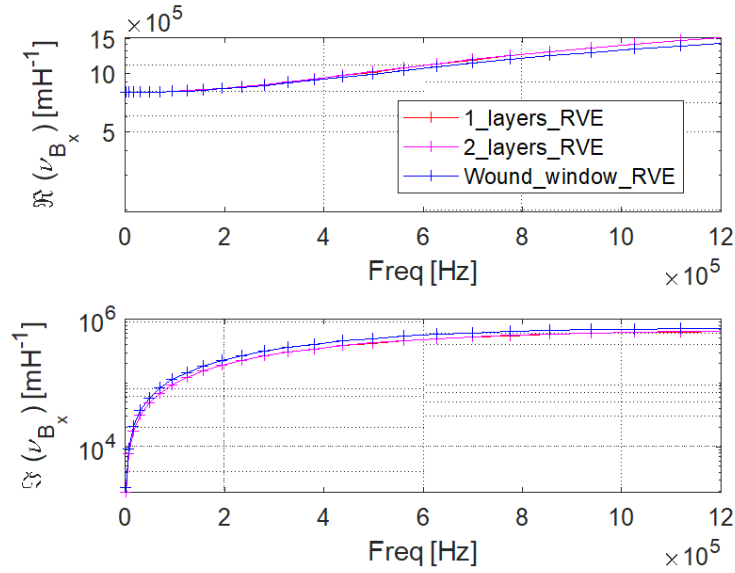


Figure 5.9: Comparaison des réluctivités équivalentes extraites de VRE pour différentes tailles de ce dernier.

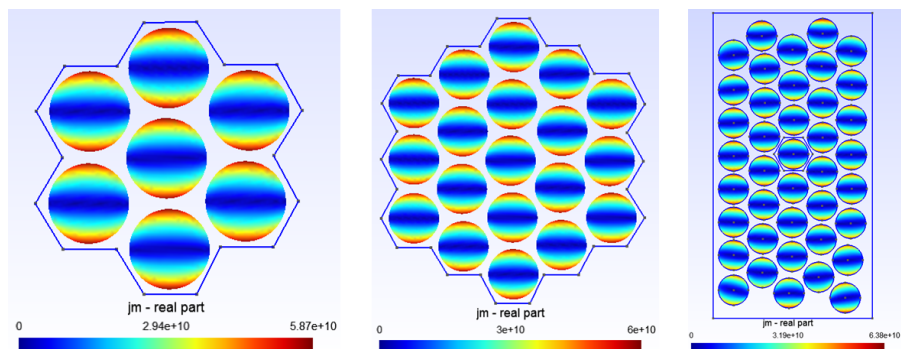


Figure 5.10: Module de la densité de courant j_m pour différentes tailles de VRE, dans le cas d'une excitation par une induction magnétique $B_x = 1$ T

(i.e. les conducteurs) et le volume du VRE (ou facteur de remplissage ici) qui est le paramètre déterminant concernant la représentation du VRE. Comme cette fraction reste presque la même dans les trois configurations du VRE, cela peut justifier pourquoi on observe des valeurs proches pour chaque propriété équivalente associées aux fréquences correspondantes.

Pour prendre en compte les effets de peau et proximité, un maillage fin du VRE sera donc nécessaire (*cf.* figure 5.11). La résolution des équations de *Maxwell* (cas 2D de VRE constitué de la fenêtre de bobinage) passe par des variables intermédiaires (potentiels vecteur magnétique \mathbf{a} et scalaire électrique v) et nécessite les conditions aux limites suivantes :

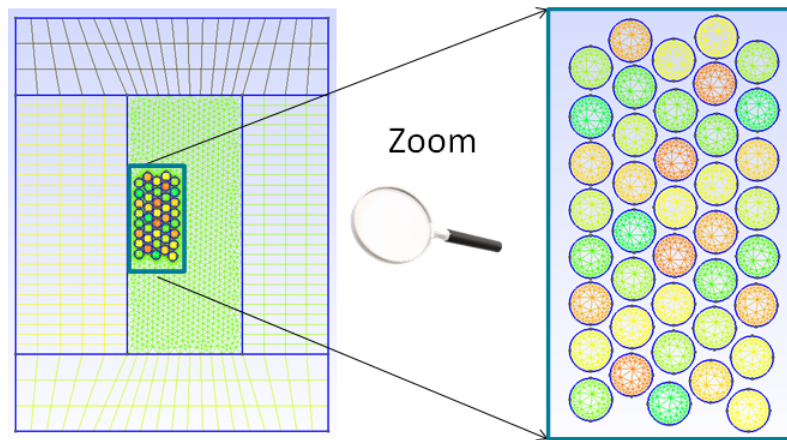


Figure 5.11: Maillage du VRE (droite) constitué de la fenêtre de bobinage et du domaine inducteur étudié (gauche)

- Sollicitation des conducteurs par un courant net de 1 A : imposer $\mathbf{a} = 0$ sur le contour Γ du VRE. Cela revient à considérer un flux nul d'induction magnétique à travers la frontière du VRE, soit $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})_{\Gamma} = 0$.
- Sollicitation du VRE par une induction magnétique $B_x = 1$ T selon l'axe des x : $\mathbf{a} = -y$ sur les deux bords horizontaux et condition de *Neumann* sur les deux bords verticaux du VRE ($\partial \mathbf{a} / \partial y = 0$). On peut suivre le même schéma lorsqu'on sollicite le VRE par une induction magnétique orientée selon l'axe des y .

L'extraction des propriétés équivalentes est basée sur le principe d'équivalence de puissance électromagnétique complexe comme expliqué plus haut (*cf.* section 5.3.2). Pour des raisons pratiques, à la place de la conductivité électrique, nous préférons travailler avec l'impédance équivalente Z_{skin}

(liée à l'effet de peau) qui est un paramètre qui s'intègre naturellement dans le modèle homogénéisé de l'inducteur de départ (*cf.* figure 5.12). À la suite de cette procédure, nous obtenons donc deux paramètres complexes ($\underline{\nu}_{prox}$ et \underline{Z}_{skin}) que nous allons intégrer dans le modèle homogénéisé. Notons qu'il existe un lien entre \underline{Z}_{skin} et $\underline{\sigma}_{eq}$ [77], à savoir :

$$\underline{Z}_{skin} = \frac{1}{\underline{\sigma}_{eq}} n_{\sigma}^2 \Omega_S \quad (5.41)$$

où n_{σ}^2 et Ω_S représentent le nombre de conducteurs par unité de surface et le volume homogénéisé du VRE respectivement.

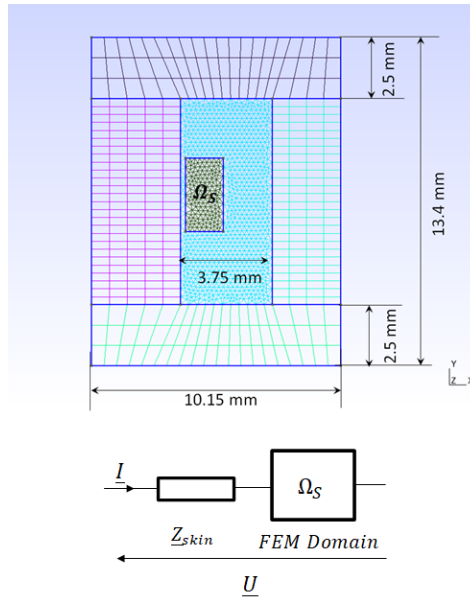


Figure 5.12: Maillage et couplage circuit entre \underline{Z}_{skin} et le domaine homogénéisé Ω_S (\underline{U} et \underline{I} étant respectivement la tension imposée, comme contrainte au niveau circuit, et le courant faiblement déduit de la MEF)

5.4.3 Extraction des paramètres RL à partir du modèle homogénéisé

La formulation en conducteurs bobinés que nous avons présentée au chapitre 4 permet l'intégration naturelle des propriétés équivalentes extraites du VRE. Il suffit d'y remplacer la réductivité ν_0 par la réductivité complexe $\underline{\nu}_{prox}$ et la résistance R_{DC} par l'impédance \underline{Z}_{skin} au niveau des équations de circuit. De

cette façon, on peut bénéficier des maillages grossiers relatifs à l'hypothèse conducteurs bobinés, tout en mettant en évidence la présence des effets de peau et de proximité à travers les paramètres macroscopiques.

La contrainte consiste à imposer une densité de courant définie comme suit:

$$j_s = \frac{NI}{S} \quad (5.42)$$

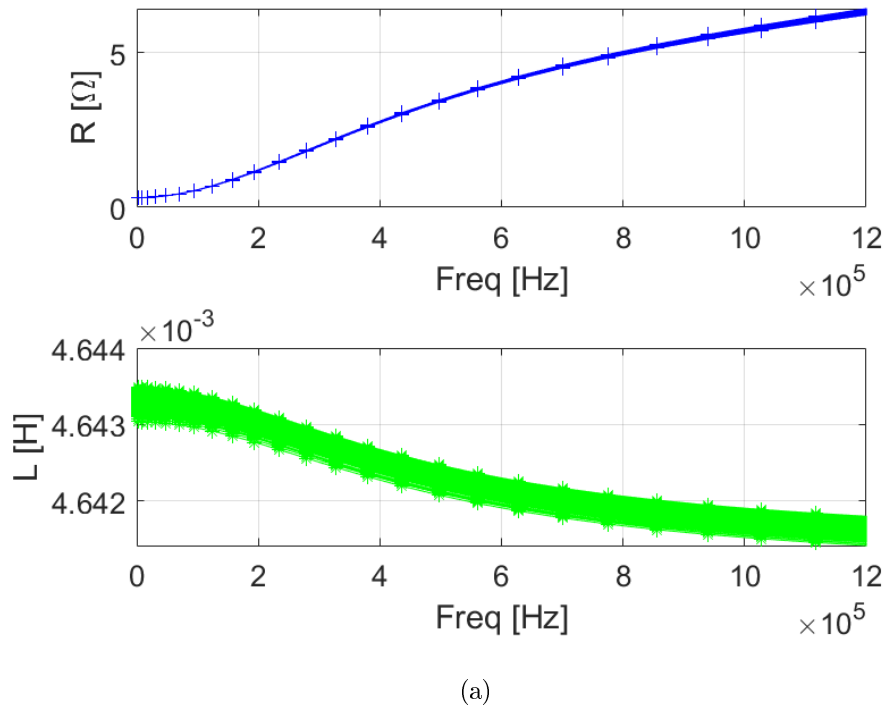
où N , I , et S désignent respectivement le nombre de spires, le courant circulant dans l'enroulement et l'aire occupée par la fenêtre de bobinage (VRE dans notre cas). Le couplage circuit se base sur l'équation établie précédemment pour la formulation en \mathbf{h} , en introduisant la relation $\mathbf{b} = \mu\mathbf{h} = \text{rot } \mathbf{a}$ et en exprimant la densité de courant par l'expression (5.42) ci-dessus, soit

$$\underline{U} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{a}, \mathbf{j}_s)_\Omega + \underline{I} (\sigma^{-1} \mathbf{j}_s, \mathbf{j}_s)_\Omega = \underline{Z}_{skin} \underline{I} + i\omega \iint_S \mathbf{b} \frac{\mathbf{N}}{S} dS \quad (5.43)$$

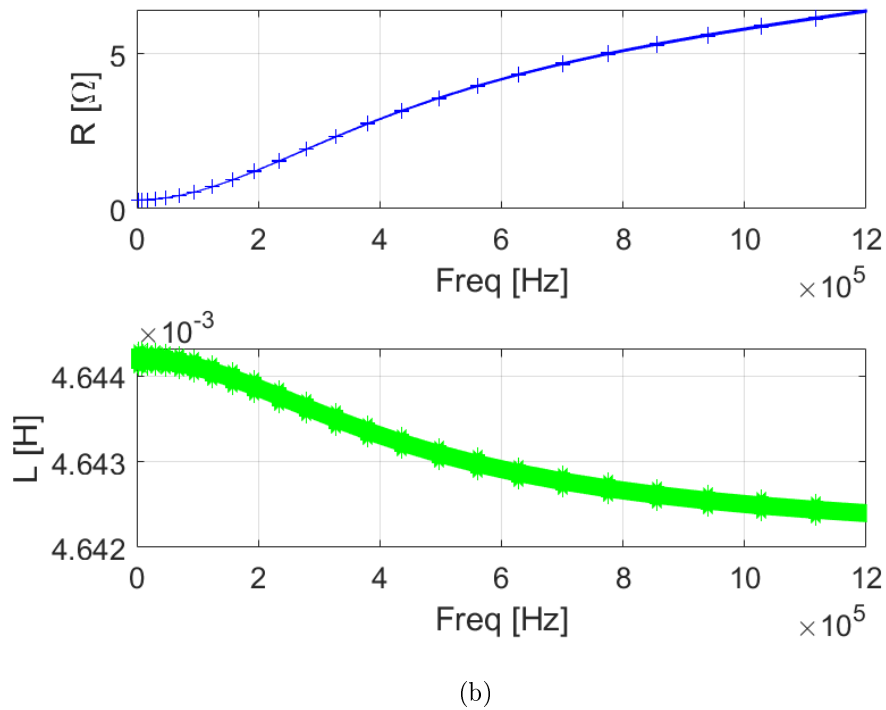
Le modèle homogénéisé est constitué du domaine éléments finis Ω_S couplé en série avec l'impédance \underline{Z}_{skin} . La tension \underline{U} est une contrainte imposée de façon forte alors que le courant \underline{I} est déduit du calcul éléments finis de façon faible.

De par l'hypothèse de symétrie, la réductivité tensorielle est réduite en un scalaire. L'impédance \underline{Z}_{skin} rend compte de la présence de l'effet de peau dans le modèle homogénéisé obtenu. L'évolution en fonction de la fréquence de paramètres RL extraits du modèle homogénéisé est présentée à la figure 5.13. On y observe un bon accord avec ceux extraits du modèle brut (i.e. à partir d'une formulation magnétodynamique et d'un maillage fin).

Nous avons procédé à une SMC puisque ce processus entre en jeu dans la construction des substituts stochastiques en polynômes de chaos. En effet, cette construction nécessite de connaître les distributions de probabilité des entrées aléatoires du modèle. Vu l'aspect aléatoire des positions de conducteurs dans la fenêtre de bobinage, les propriétés équivalentes extraites du VRE, doivent aussi présenter le même comportement. Les entrées aléatoires seront constituées ici par ces propriétés équivalentes. Nous nous proposons de présenter cette approche à la section suivante.



(a)



(b)

Figure 5.13: SMC des paramètres RL extraits de modèles brut (en bas) et homogénéisé (en haut)

5.5 Cas test : extraction des paramètres RL d'un inducteur bobiné au moyen de l'approche hybride

5.5.1 Avantages des substituts en PCE

Cette approche se base sur les notions de VRE et de l'homogénéisation. Son principal avantage réside dans la réduction du nombre d'itérations MC permettant d'aboutir à des grandeurs statistiques concluantes. Ceci se concrétise ici par la transformation des incertitudes géométriques (positions de conducteurs) en incertitudes matérielles (réductivité magnétique et conductivité électrique). Ce qui permet une forte réduction de la dimension de l'entrée aléatoire et de ce fait, une diminution d'itérations MC.

Cette approche va nous permettre de construire des substituts PCE qui seront employés pour calculer les paramètres RL au lieu de les extraire directement du modèle numérique brut EF sur une large plage des fréquences (du DC à 1 MHz). Ces substituts, une fois construits, permettront l'accès rapide aux paramètres de sortie. La première étape de cette méthode consiste à générer des patterns de bobinage où les conducteurs occupent des positions aléatoires (autour de points connus a priori) dans la fenêtre de bobinage. Nous utilisons pour cela l'algorithme spire par spire présenté précédemment au chapitre 4. Ensuite, il s'agit d'extraire les propriétés équivalentes de ces patterns et d'en déduire leurs distributions. De ces distributions, la construction des substituts en PCE sera alors possible.

Nous avons opté pour un VRE délimité par une couche de conducteurs autour d'une cellule centrale vu le gain (environ 50%) en temps de calcul qu'il engendre par rapport à un VRE de taille équivalente à la fenêtre de bobinage. En 2D, ce choix n'est pas tellement contraignant si bien qu'un VRE s'étalant sur la fenêtre de bobinage serait un meilleur choix permettant de réduire l'écart entre les valeurs de paramètres RL extraits du modèle brut et celui homogénéisé.

5.5.2 Application de l'approche hybride

Les résultats présentés ici ont fait l'objet d'une publication [84]. Le cas test consiste en un inducteur bobiné à noyau magnétique en ferrite sans entrefer et dont l'enroulement est constitué de 40 spires réparties sur 5 couches. Le conducteur du bobinage possède un diamètre de 0,315 mm. Les dimensions géométriques sont celles présentées à la figure 5.12.

Les distributions des paramètres de sortie RL sont présentées à la fig-

ure 5.14. Il s'agit des paramètres extraits de modèles brut (maillage fin) et homogénéisé (maillage grossier). On y observe des faibles écarts entre les moyennes qui peuvent être dus au non-respect de l'hypothèse liée à la symétrie du VRE. En effet, la théorie d'homogénéisation appliquée dans ce problème se base sur le découplage entre les effets de peau et de proximité dû à une forme symétrique du VRE. Cependant, les conducteurs occupent des positions aléatoires dans la fenêtre de bobinage. Cette situation peut donc entraîner un couplage entre les effets de peau et de proximité. On peut aussi remarquer une dispersion importante des paramètres extraits du modèle homogénéisé. Cela peut être dû aux incertitudes additionnelles (bruits) générées par le processus d'homogénéisation qui permet de convertir les incertitudes géométriques en incertitudes matérielles. En effet, la périodicité du VRE au niveau de la fenêtre de bobinage n'est pas vérifiée si bien qu'une erreur liée à la taille du VRE s'annexe au processus d'homogénéisation.

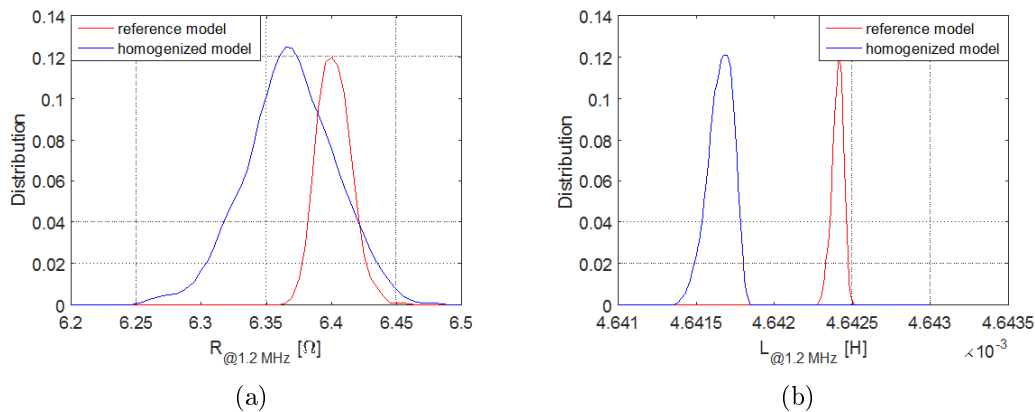


Figure 5.14: Distribution des paramètres R (gauche) et L (droite) à 1,2 MHz, extraits des modèles brute et homogénéisé

5.5.3 Construction des substituts PCE

Pour la construction des PCE, nous utilisons ici le modèle homogénéisé (magnétodynamique 2D avec hypothèse conducteurs bobinés) de l'inducteur comme modèle déterministe de référence permettant de constituer le plan expérimental de calcul des coefficients. De cette façon, le nombre de variables aléatoires est considérablement réduit. Les coefficients peuvent être déterminés en utilisant les algorithmes OLS ou LAR présentés au chapitre 3. Le tableau 5.1 résume les résultats fournis par les deux solutions pour le paramètre R à 1,2 MHz. On peut y remarquer la finesse avec laquelle le paramètre R est approché grâce à la stratégie LAR. Les valeurs d'erreur

figurant dans ce tableau représentent des valeurs normées sans dimension associées à la détermination du substitut PCE du paramètre R extrait du modèle homogénéisé à 1,2 MHz.

Table 5.1: Comparaison des stratégies OLS et LAR pour le substitut PCE du paramètre R à 1,2 MHz

$R_{@1.2\text{MHz}}^*[\Omega]$	Erreur [%]**	Degré Max.	Coeff. $\neq 0$
OLS	10,83	2	15
LAR	03,18	2	8

* Substitut PCE à partir du modèle homogénéisé;

** Valeur adimensionnelle (voir expression (A.3), Annexe A).

Pour valider cette approche, nous comparons les distributions de paramètres RL extraits du modèle homogénéisé et ceux issus du substitut PCE à travers leurs histogrammes. Notons ici qu'il s'agit d'un lot de valeurs des variables d'entrée (échantillon de validation) différent de celui utilisé lors de la construction de PCE. À la figure 5.15, nous pouvons observer l'aptitude du PCE à imiter le comportement du modèle de référence en présence des incertitudes géométriques liées aux positions de conducteurs dans la fenêtre de bobinage. L'autre avantage du PCE réside dans le fait d'accéder aux prédictions du modèle plus rapidement par rapport au modèle de référence (voir table 5.2).

Table 5.2: Comparaison entre les temps CPU consommés par les simulations MC* modèle de référence et substitut PCE.

Temps CPU [s]	Par itération	370 itérations MC**
Substitut PCE	0.3075	0.9625
Modèle brut	21	7489
Modèle homogénéisé	14	4754

* du DC à 1,2 MHz; ** itérations Monte Carlo

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mis en oeuvre une technique permettant de réduire la dimension de l'entrée aléatoire du modèle stochastique basée sur le concept de volume élémentaire représentatif à travers la technique de

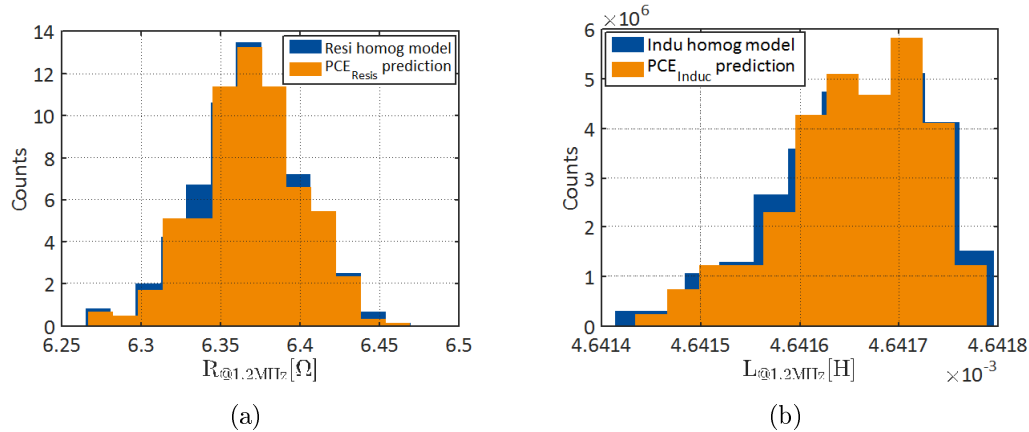


Figure 5.15: Histogrammes de paramètres R (gauche) et L (droite) extraits des modèles homogénéisés et des prédictions PCE à 1,2 MHz

l'homogénéisation. Cette technique permet de réduire non seulement le nombre d'appels du modèle déterministe éléments finis mais aussi le temps de simulation en vue de mener l'étude statistique en général et l'analyse de sensibilité en particulier comme nous le verrons par la suite dans le chapitre suivant. Pour faciliter et accélérer l'analyse de sensibilité du modèle stochastique, nous allons opter pour un substitut PCE en échange des avantages suivants :

- Accès rapide aux résultats de calcul des réponses et à la statistique du modèle;
- Facilité de déploiement du substitut PCE sur toute la gamme des fréquences d'étude;
- Précision satisfaisante même en présence de comportements nonlinéaires du modèle de référence.

Au vu des résultats obtenus plus haut, nous constatons un bon accord entre le substitut PCE et le modèle de référence éléments finis sur toute la gamme de fréquences d'étude. C'est ce type de modèle stochastique que nous allons construire et valider expérimentalement dans le chapitre suivant. Signalons que les résultats présentés dans ce chapitre ont fait l'objet d'une publication [84].

Validation expérimentale et Analyse de sensibilité

6.1 Introduction

L'objectif poursuivi dans ce chapitre est de valider expérimentalement les observations sur les distributions des paramètres RLC obtenues par simulation lors de la prise en compte des incertitudes géométriques et matérielles dans le modèle numérique éléments finis. La validation sera effectuée en comparant les distributions des paramètres RLC obtenues :

- par simulation à partir du modèle déterministe éléments finis embarqué dans un modèle stochastique (PCE via homogénéisation, *cf.* section 5.3);
- en effectuant des mesures à l'analyseur d'impédances sur un lot d'inducteurs achetés sur le marché des composants de l'électronique de puissance.

Pour commencer, nous présenterons les dispositifs utilisés et les précautions expérimentales retenues afin de relever les paramètres RLC d'un lot d'inducteurs à l'analyseur d'impédances. Dans la partie validation qui suit, nous présenterons le schéma équivalent d'un inducteur permettant de reconstituer l'impédance et; nous comparerons les distributions résultant de la simulation et de mesures expérimentales. Par la suite, nous déterminerons les valeurs prises par les indicateurs de comparaison (distance de *Wasserstein* par exemple) qui expriment la similarité entre les distributions. Enfin, une analyse de sensibilité (sur la gamme de fréquences d'étude) sera menée en vue de déterminer les entrées aléatoires influentes sur les sorties du modèle stochastique basé sur la PCE. Nous avons choisi de traiter de l'analyse de sensibilité dans ce chapitre car ce dernier concerne l'ensemble de toutes les incertitudes (à l'entrée du modèle) traitées dans ce travail et pour que le modèle numérique EF ait pour référence les mesures expérimentales disponibles dans ce chapitre.

Signalons que quelques indicateurs de comparaison entre distributions sont brièvement présentés vers la fin de ce rapport de thèse (*cf.* annexe D), et en

particulier, la distance de *Wasserstein* y est largement exposée. Cet indicateur servira, comme nous venons de le dire, à comparer les distributions de paramètres RL issues du modèle stochastique et de mesures expérimentales.

6.2 Présentation du lot d'inducteurs sous test

L'inducteur d'étude pour cette validation expérimentale, est constitué d'un noyau ferrite de type NiZn [86, 87] et d'un enroulement de ± 44 spires réparties sur quatre couches. Les trois premières couches comprennent 12 spires par couche. Le fil conducteur possède un diamètre de 0,37 mm. Cet inducteur est caractérisé par une valeur nominale de 680 μH avec une incertitude de 10%. Sa désignation dans le catalogue fournisseur est MCSCH895-680KU. Ses dimensions sont présentées à la figure 6.1. Il s'agit d'un composant que l'on retrouve le plus souvent dans les applications de filtrage ou de transformation des signaux (télécommunication [30, 88]).

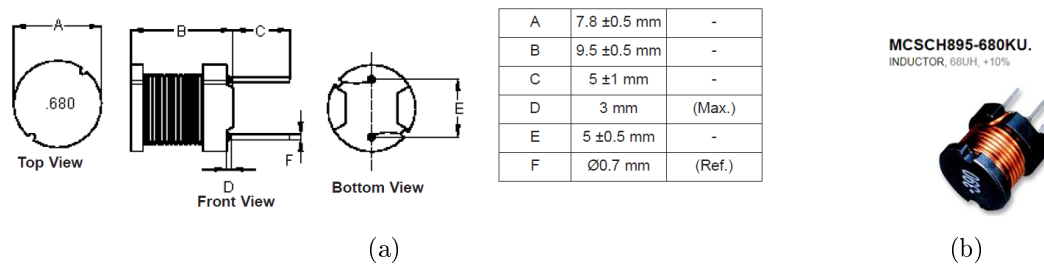


Figure 6.1: Dimensions (gauche) et illustration (droite) du composant MCSH895-680KU étudié

6.3 Description du test-bench utilisé pour la mesure d'impédance

Les mesures d'impédance ont été réalisées à l'analyseur d'impédance en fixant le composant sur le bornier de l'appareil (*cf.* figure 6.2). L'analyseur fonctionne sur le principe d'un pont auto-équilibré accompagné d'un ohmmètre pour la mesure de la résistance DC. Il s'agit d'un analyseur de marque WAYNE-KERR 6500B dont la gamme de fréquences est limitée à 10 MHz. Le composant à caractériser se fixe sur le bornier susceptible d'introduire des impédances parasites pouvant fausser les mesures. Il convient donc de le caractériser avant de procéder au relevé spectral de l'impédance du composant à analyser. Il s'agit des mesures de compensation à vide et de court-circuit. Ceci permet à l'analyseur de s'ajuster en effectuant des mesures à diverses

6.3. Description du test-bench utilisé pour la mesure d'impédance

fréquences et en stockant les corrections pour chacune d'elles. Une telle procédure de compensation permet de supprimer les impédances résiduelles liées aux fixations et câbles qui apparaissent sous forme d'offset.



Figure 6.2: Mesure à analyseur d'impédance Wayne Kerr 6500B (gauche) et montage composant sur le bornier (droite)

D'autre part, une compensation hautes fréquences est une autre fonction permettant de supprimer les erreurs dues aux longueurs des câbles (incluant ceux du système de fixation) qui apparaissent sous forme scalaire. Ce type d'erreur ne peut pas être supprimé par une compensation à circuit ouvert ou de court-circuit. Ce processus est utilisé pour compenser les caractéristiques des câbles du système de fixation aux hautes fréquences. Il convient donc de réaliser une nouvelle compensation HF à chaque fois que le système de fixation (ou bornier) est différent de celui qui a été fourni avec l'analyseur [89].

De manière générale, il est possible de mesurer avec cet analyseur des résistances, impédances et réactances comprises entre $0,01 \text{ m}\Omega$ et $2 \text{ G}\Omega$. Des inductances (de $0,1 \text{ nH}$ à 2 kH) et des capacités (de 1 fF à 1 F) peuvent être aussi mesurées. La précision de toutes les mesures (résistance, réactance, inductance et capacité) est de $\pm 0,05\%$ lorsque l'instrument est utilisé sous les conditions suivantes :

- pilotage en AC : $1\text{V}/20\text{mA}$
- faible vitesse de balayage
- bornier de type 1J1011
- température : $23 \pm 5 \text{ }^\circ\text{C}$
- période d'échauffement de 30 minutes

Signalons que cette précision varie avec la fréquence, les niveaux de tension et courant de pilotage ainsi que l'impédance mesurée.

Pour une mesure précise, il faut soustraire l'influence des toutes les connexions (bornier y compris) du composant à l'appareil par calcul. En effet, la liaison du composant à l'appareil est réalisée par un quadripôle passif [90] (cf. figure 6.3), qui représente le circuit de connexion d'un bornier au composant d'impédance \underline{Z}_x . Deux mesures sont nécessaires si nous supposons que ce quadripôle est symétrique. Il s'agit de la compensation en court-circuit et la compensation à vide. Le quadripôle pouvant être représenté par sa matrice d'impédance symétrique (tant que son impédance série est plus petite que son impédance parallèle), celle-ci ne comprend que deux éléments indépendants. Le lien entre les grandeurs aux accès \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{V}_1 et \underline{V}_2 s'écrit dans ce cas :

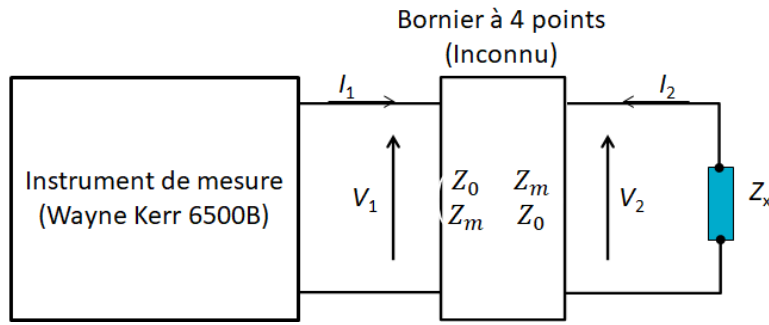


Figure 6.3: Circuit équivalent du dispositif de mesure [90]

$$\begin{pmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_0 & \underline{Z}_m \\ \underline{Z}_m & \underline{Z}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{V}_1 = \underline{Z}_0 \underline{I}_1 + \underline{Z}_m \underline{I}_2 \\ \underline{V}_2 = \underline{Z}_m \underline{I}_1 + \underline{Z}_0 \underline{I}_2 \end{cases} \quad (6.1)$$

L'impédance d'entrée de ce quadripôle chargé par l'impédance à mesurer \underline{Z}_x s'écrit :

$$\underline{Z}_{xm} = \underline{Z}_0 - \frac{\underline{Z}_m^2}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_x} \quad (6.2)$$

$$\underline{Z}_x = \frac{\underline{Z}_m^2 - \underline{Z}_0^2 + \underline{Z}_{xm} \underline{Z}_0}{\underline{Z}_0 - \underline{Z}_{xm}} \quad (6.3)$$

Les deux paramètres \underline{Z}_0 et \underline{Z}_m du circuit sont déterminés à l'aide de deux mesures : la compensation à vide donne l'impédance d'entrée à vide \underline{Z}_0 du quadripôle et la compensation en court-circuit donne, lorsque la sortie du quadripôle est court-circuitée, l'impédance d'entrée en court-circuit. On écrit:

$$\underline{Z}_{0m} = \underline{Z}_0 \quad (6.4)$$

$$\underline{Z}_{sm} = \underline{Z}_0 - \frac{\underline{Z}_m^2}{\underline{Z}_0} = \frac{\underline{Z}_0^2 - \underline{Z}_m^2}{\underline{Z}_0} \quad (6.5)$$

L'impédance à mesurer s'écrit alors :

$$\underline{Z}_x = \frac{\underline{Z}_{xm} - \underline{Z}_{sm}}{1 - \frac{\underline{Z}_{xm}}{\underline{Z}_{0m}}} \quad (6.6)$$

où \underline{Z}_{0m} est l'impédance de compensation en circuit ouvert, \underline{Z}_{sm} l'impédance de compensation en court-circuit et \underline{Z}_{xm} l'impédance d'entrée du quadripôle chargé par l'impédance \underline{Z}_x .

6.4 Validation expérimentale à partir des courbes d'impédances

Dans cette section, nous allons comparer les courbes d'impédance relevées à l'analyseur d'impédance et celles extraites des schémas équivalents RLC obtenus à partir des simulations éléments finis. Chaque inducteur peut être modélisé simplement par une branche RL en parallèle avec un condensateur C, image des capacités parasites issues des couplages inter-spaires qui apparaissent avec la montée en fréquence. Vu la gamme de fréquences d'étude, un tel modèle sera suffisant comme nous le verrons plus loin (*cf.* figure 6.4).

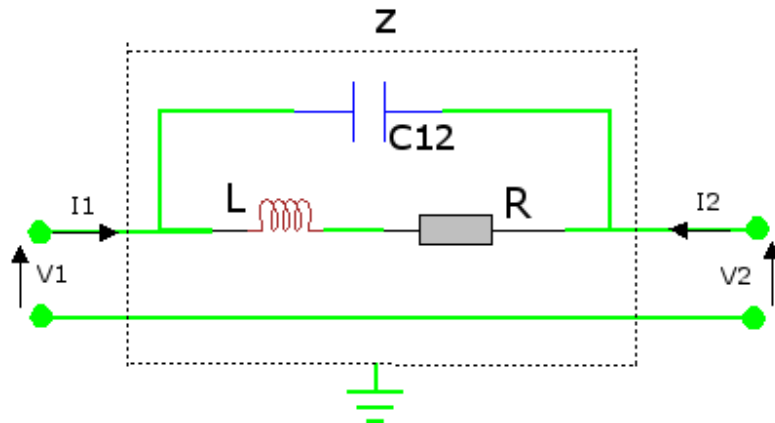


Figure 6.4: Schéma équivalent d'un inducteur [91]

En écrivant les équations d'admittance pour ce modèle de schéma équivalent (assimilé ici à un quadripôle à deux ports) et en considérant le port 1

court-circuité ($V_1 = 0$), on peut extraire les paramètres RLC comme suit :

$$\underline{Y}_2 = -\underline{y}_{12} = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C_{12} \quad (6.7)$$

où $\underline{Y}_2 = -1/\underline{Z}$ représente l'admittance de l'inducteur vue de l'accès 2. \underline{y}_{12} est un élément hors diagonal de la matrice d'admittance du quadripôle considéré.

$$R = \frac{-\Re(\underline{y}_{12})}{\left(\Re(\underline{y}_{12})\right)^2 + \left(\Im(\underline{y}_{12}) + \omega C_{12}\right)^2} \quad (6.8)$$

$$\omega L = \frac{\Im(\underline{y}_{12}) + \omega C_{12}}{\left(\Re(\underline{y}_{12})\right)^2 + \left(\Im(\underline{y}_{12}) + \omega C_{12}\right)^2} \quad (6.9)$$

$$C_{12} = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 L_0} \quad (6.10)$$

où L_0 est identifié à basse fréquence et f_0 , désigne la fréquence de résonance. Les équations (6.7) à (6.9) sont celles implémentées dans l'analyseur en interne pour retrouver R, L et C à partir d'une mesure d'impédance. Pour les mesures à réaliser à l'analyseur, nous avons deux possibilités :

- relever directement l'impédance ou l'admittance du composant (*cf.* figure 6.5);
- relever chaque paramètre séparément (*cf.* figure 6.7) en vue de reconstruire l'impédance à partir du modèle équivalent présenté ci-dessus.

Pour valider le modèle circuit choisi, nous allons reconstruire l'impédance de chaque inducteur à partir des paramètres RLC extraits du modèle numérique éléments finis. Cette impédance sera ensuite comparée à celle relevée grâce à l'analyseur sur l'étendue de la gamme des fréquences d'étude. L'évolution des paramètres RLC simulés et les impédances issues de deux modèles sont représentées à la figure 6.6. De même, une distribution des capacités parasites extraites de mesures expérimentales, sous forme de carte colorée, y est représentée.

On peut apercevoir un bon accord entre les deux catégories d'impédance (simulée et mesurée) sur toute la plage des fréquences disponibles et de même pour la fréquence de résonance. Ces deux quantités restent aussi aléatoires (*cf.* figure 6.8, distributions de l'impédance à 1 MHz et de la fréquence de

6.4. Validation expérimentale à partir des courbes d'impédance 107

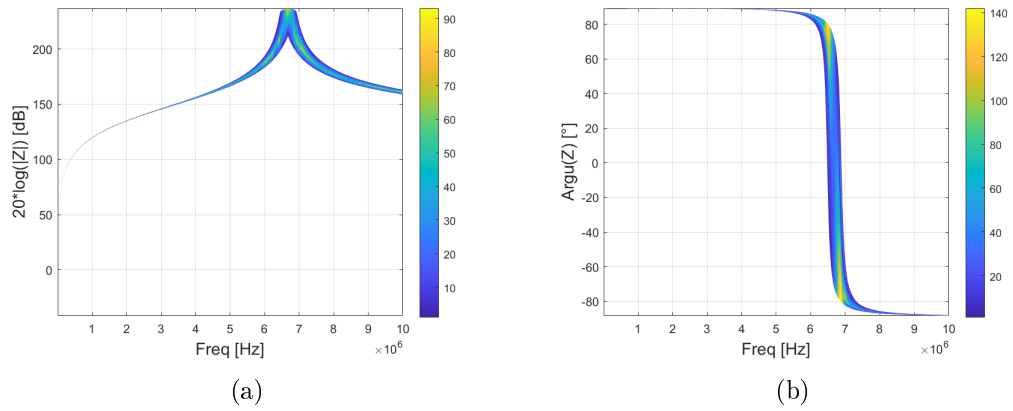


Figure 6.5: Impédance de l'inducteur MCSH895-680KU relevée à analyseur Wayne kerr 6500B : module (gauche) et phase (droite). Lot de 295 inducteurs

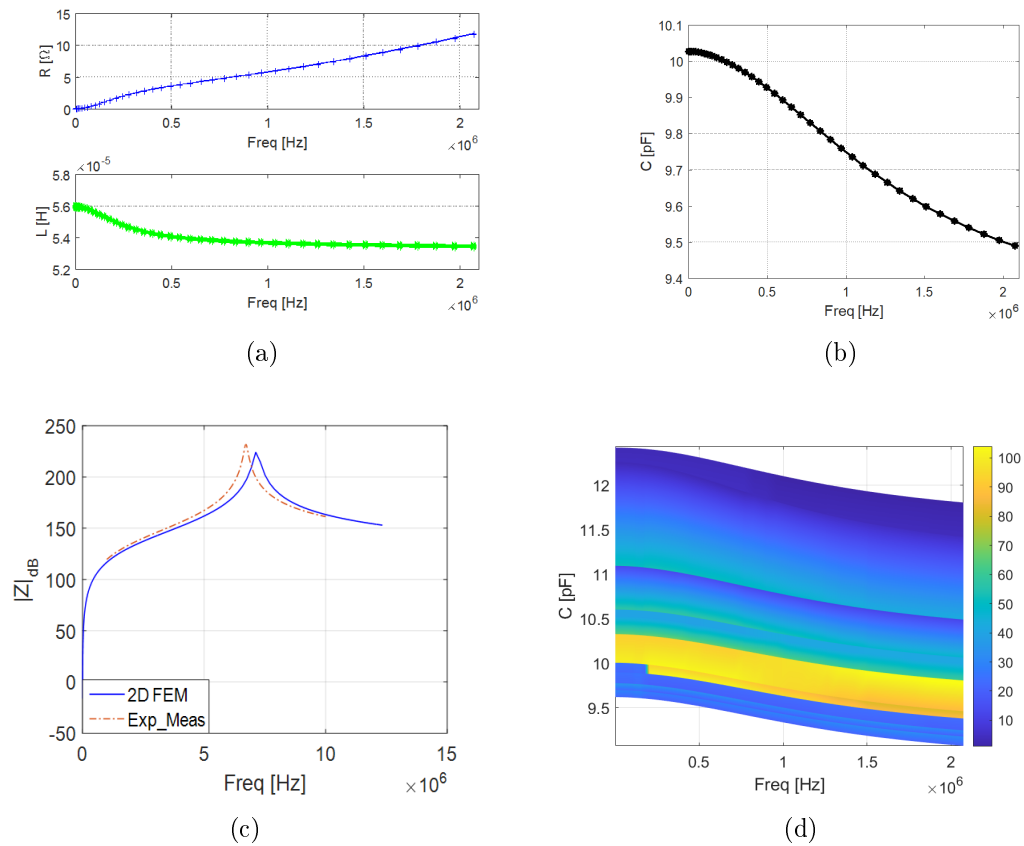


Figure 6.6: Extraction des paramètres RLC (en haut) par la MEF et reconstruction de l'impédance (en bas) sur la gamme des fréquences disponibles à l'analyseur d'impédances + Comparaison avec l'expérience

résonance pour un lot de 295 inducteurs). Pour le paramètre L mesuré à l'aide de l'analyseur, un comportement a priori inattendu peut être observé sur la figure 6.7 : augmentation du paramètre L avec la fréquence. Ceci peut être justifié par une manifestation de l'effet des capacités parasites à relativement basse fréquence (± 580 kHz). En effet, en reconstituant l'impédance à partir des paramètres RLC extraits du modèle numérique et en divisant la réactance globale par $\omega = 2\pi f$, on obtient une quantité qui tient compte des capacités parasites. Pour se rassurer, nous nous sommes permis de relever le même paramètre à l'aide d'un analyseur de réseau (HP4195A). On notera que le même comportement a pu être mis en évidence en utilisant l'autre équipement (*cf.* figure 6.7).

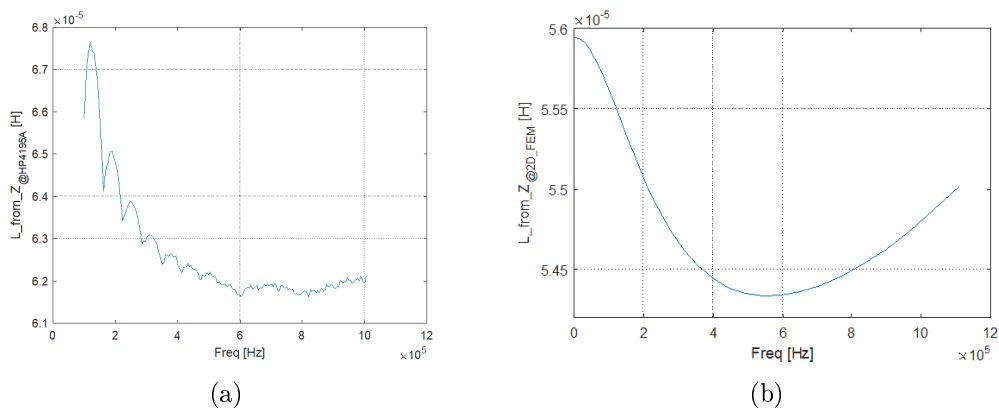


Figure 6.7: Relevé du paramètre L à l'analyseur HP4195A (gauche) et détermination du même paramètre à partir d'un schéma équivalent basé sur les paramètres RLC extraits du modèle numérique EF (droite)

6.5 Validation expérimentale fondée sur la comparaison des paramètres R et L

Dans cette section, nous allons comparer les distributions des différents paramètres issus des relevés expérimentaux et ceux extraits des calculs éléments finis. À chaque comparaison, nous allons déterminer la distance de *Wasserstein* afin d'évaluer la similitude entre eux. Dans le modèle stochastique, nous allons prendre en compte les incertitudes géométriques (positions des conducteurs dans la fenêtre de bobinage) et matérielles (conductivité électrique et perméabilité magnétique du noyau ferrite) en entrée du modèle numérique éléments finis. Le modèle stochastique sera construit sur toute la plage de fréquences d'étude et sur base des distributions des composantes

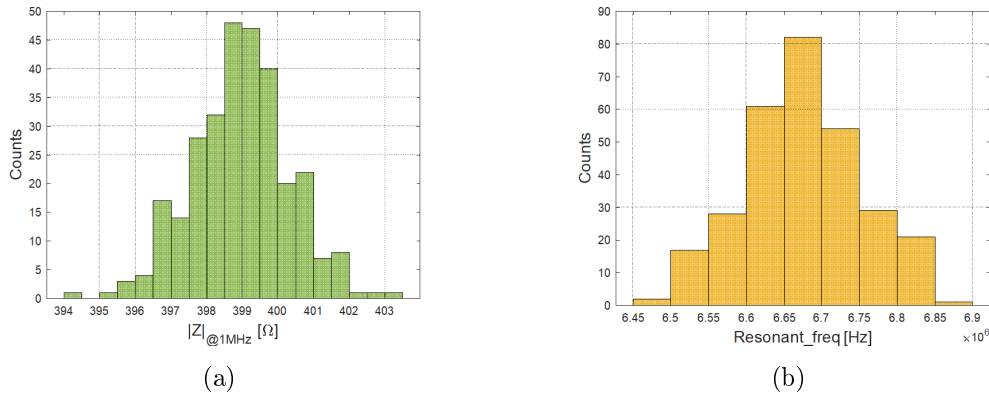


Figure 6.8: Distributions déduites des mesures expérimentales de l'impédance à 1 MHz (gauche) et de la fréquence de résonance (droite)

de l'entrée aléatoire. La transformation des incertitudes géométriques en incertitudes matérielles grâce à la technique de l'homogénéisation est particulièrement avantageuse pour réduire le nombre d'appels du modèle éléments finis entrant en jeu dans la construction du modèle stochastique, au travers d'une réduction de la dimension de l'entrée aléatoire.

Nous allons également profiter de l'attrait que présente un modèle stochastique en PCE pour pouvoir mener l'analyse de sensibilité du modèle par rapport aux entrées aléatoires. Cette analyse permettra d'identifier les entrées aléatoires les plus influentes du modèle stochastique, et ce sur toute la plage de fréquences d'étude. Dans ce qui suit, nous allons comparer les distributions des différents paramètres à 537 kHz et à 1 MHz. Nous déterminerons également les distances de *Wassertein* correspondantes. Enfin, nous présenterons les résultats de l'analyse de sensibilité menée sur toute la gamme de fréquences d'étude pour les paramètres RL.

Pour les évolutions présentées à la figure 6.9, le paramètre L extrait du modèle numérique éléments finis (formulation magnétodynamique) ne tient pas compte de la présence des capacités parasites comme dans le cas du modèle intégré dans l'analyseur d'impédances Wayne Kerr 6500B. Cela pourrait expliquer la présence d'un offset entre les deux évolutions du paramètre L. Par contre, le même comportement peut être observé dans le cas du paramètre R où la montée en fréquence s'accompagne d'une augmentation de la dispersion à cause de l'apparition des effets de peau et de proximité au sein des conducteurs et du noyau ferrite (pris comme conducteur). Du moins pour les deux paramètres R et L, nous pouvons admettre qu'il y a accord entre simulations et mesures expérimentales.

De ces observations, il est possible d'extraire les distributions de ces deux

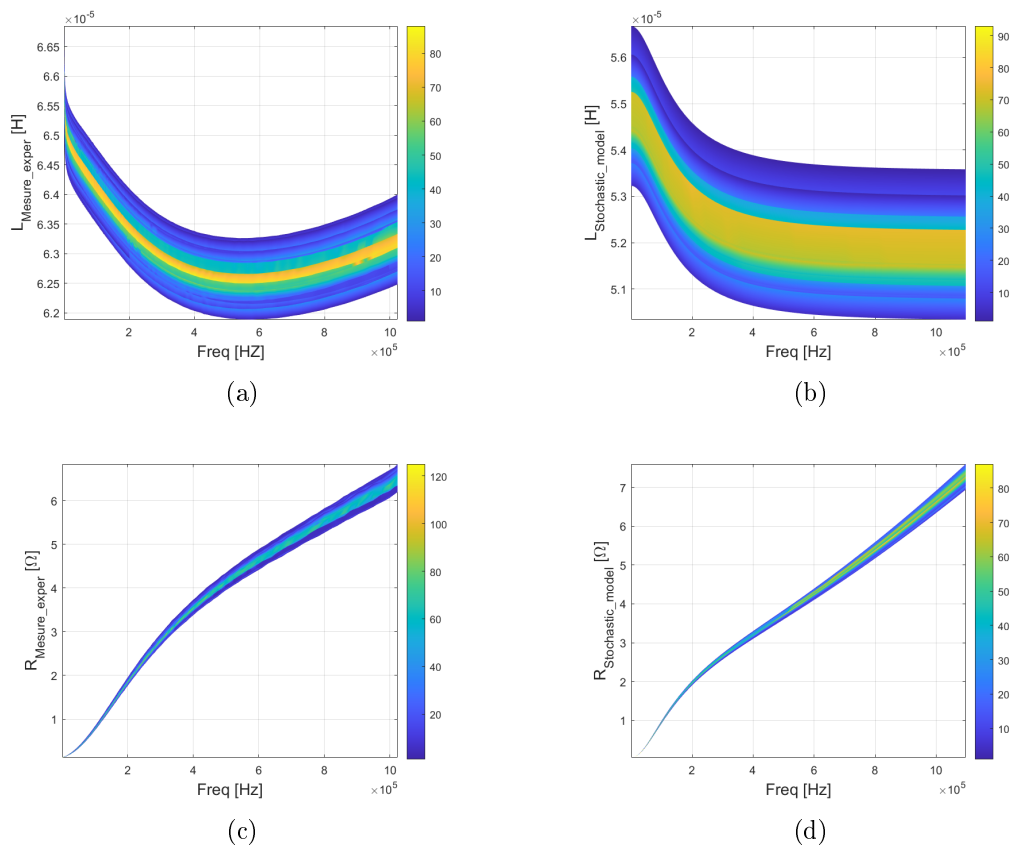


Figure 6.9: Évolutions des paramètres RL superposées à leurs distributions sous forme des cartes colorées : relevés à l'analyseur pour un lot de 299 inducteurs MCSCH895-680KU (gauche) et extraits des modèles stochastiques correspondants (droite)

paramètres à n'importe quelle fréquence. La figure 6.10 présente les distributions des paramètres RL aux fréquences 537 kHz et 1 MHz. Concernant le paramètre R, les distributions se recouvrent avec la montée en fréquence à cause de l'augmentation de la dispersion due aux effets de peau et de proximité. L'augmentation de la dispersion avec la fréquence est par contre faiblement marquée dans le cas du paramètre L. Vu l'ordre de grandeur de ce paramètre (moins de 0,1 mH) et de sa très faible erreur relative (10% selon les mesures expérimentales), on comprend bien pourquoi on n'observe pas de recouvrement entre les distributions issues des mesures expérimentales et du modèle stochastique pour ce paramètre (*cf.* figure 6.10). Ce paramètre présente une faible dispersion tout au long de la gamme des fréquences d'étude et conserve ainsi un aspect quasi-déterministe. De par un tel comportement, il faut s'attendre à une faible sensibilité face aux incertitudes qui sont prises en compte dans le modèle stochastique (voir plus bas).

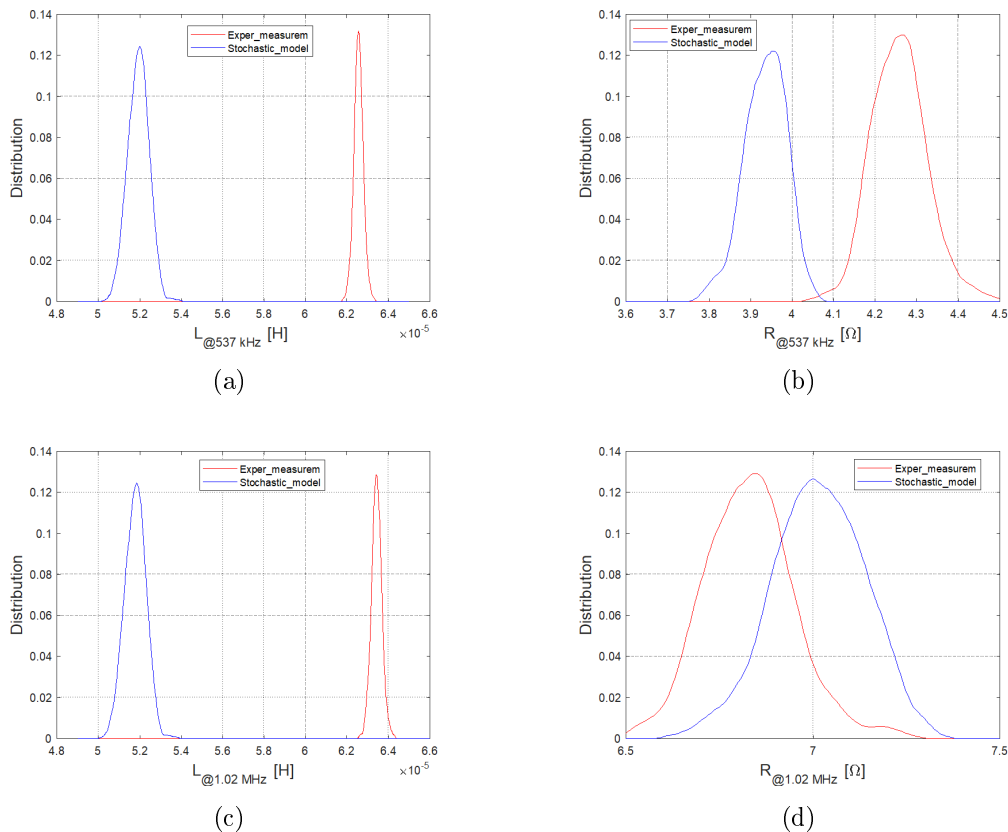


Figure 6.10: Comparaison entre les distributions des paramètres RL issues des mesures expérimentales et du modèle stochastique pour les fréquences 537 kHz (au-dessus) et 1,02 MHz (en-dessous)

Pour calculer la distance de *Wasserstein* entre deux distributions, nous considérons les distributions des paramètres RL déduites des simulations ou mesures comme étant des entités à une dimension . Chaque distribution est caractérisée par un ensemble des couples (p_i, ω_{pi}) constitués chacun par un centre de classe p_i et de poids ω_{pi} . Nous avons utilisé une implémentation basée sur la programmation linéaire [92] permettant de calculer cette distance de façon assez précise.

Le tableau 6.1 présente les résultats de calcul de la distance de *Wasserstein* pour les deux fréquences considérées. Il est évident d’obtenir une valeur assez faible de ce paramètre pour deux distributions qui se recouvrent. C’est le cas des distributions (mesures expérimentales et modèle stochastique) du paramètre R pour lequel on obtient une distance de *Wasserstein* qui vaut 0,178 pour la fréquence de 1 MHz et 1,028 pour la fréquence de 537 kHz. Par contre dans le cas du paramètre L pour lequel les distributions sont concentrées autour des valeurs moyennes à cause de leur faible dispersion, la distance de *Wasserstein* est très élevée. Cela s’explique par des distributions qui présentent des poids trop importants et qui ne se recouvrent pas contrairement au cas du paramètre R.

Table 6.1: Distance de *Wasserstein* entre distributions des paramètres RL pour deux fréquences particulières

Distributions (p_i, ω_{pi})	@ 537 kHz	@ 1,02 MHz
R [Ω]	1,028	0,178
L [H]	7,187e+05	5,945e+05

6.6 Analyse de sensibilité

Afin de catégoriser les composantes de l’entrée aléatoire, il est nécessaire d’effectuer une analyse de sensibilité du modèle stochastique face aux incertitudes d’entrée. Pour pouvoir y arriver, nous avons opté pour une analyse via PCE. Cette dernière présente l’avantage de ne plus faire appel au modèle déterministe éléments finis une fois qu’elle est disponible (*cf.* chapitre 3, section 3.7). Cette approche menée sur toute la plage de fréquences d’étude, permet de déterminer les coefficients de *Sobol’* (*cf.* annexe B) relatifs à l’influence de chaque composante de l’entrée aléatoire.

Les incertitudes prises en compte dans cette analyse sont issues des positions aléatoires des conducteurs dans la fenêtre de bobinage et des propriétés

matérielles du noyau ferrite (perméabilité magnétique et conductivité électrique). La définition en grandeur complexe des propriétés matérielles permet de prendre en compte de façon naturelle les pertes électriques et magnétiques dans les formulations éléments finis (*cf.* chapitre 2). La réduction de la dimension de l'entrée aléatoire est réalisée grâce à la transformation des incertitudes géométriques en incertitudes matérielles (réductivité et impédance équivalentes) via la technique d'homogénéisation (*cf.* chapitre 5). Au final, nous nous retrouvons avec sept variables aléatoires en entrée du modèle stochastique :

- la partie réelle de l'impédance équivalente ($X_1 = \Re(\underline{Z}_{skin})$), image des pertes dues à l'effet de peau dans les conducteurs du bobinage;
- la partie imaginaire de l'impédance équivalente ($X_2 = \Im(\underline{Z}_{skin})$), image de la puissance réactive qui accompagne l'effet de peau dans les conducteurs;
- la partie réelle de la réductivité équivalente ($X_3 = \Re(\underline{\nu}_{prox})$), image de l'effet de proximité entre les conducteurs;
- la partie imaginaire de la réductivité équivalente ($X_4 = \Im(\underline{\nu}_{prox})$), image des pertes liées à l'effet de proximité entre les conducteurs;
- la partie réelle de la réductivité ($X_5 = \Re(\underline{\nu}_{core})$) du noyau ferrite, image de l'énergie magnétique de l'inducteur;
- la partie imaginaire de la réductivité magnétique ($X_6 = \Im(\underline{\nu}_{core})$) du noyau ferrite, image des pertes ferrites;
- la conductivité électrique ($X_7 = \sigma_{core}$) du noyau ferrite, image des pertes par courants induits dans la ferrite. C'est un scalaire réel qui dépend de la partie imaginaire de la permittivité électrique du même matériau.

Les figures 6.11 présentent l'évolution des coefficients de Sobol' (*cf.* annexe B) totaux relatifs aux variables aléatoires X_1, \dots, X_7 pour les paramètres R et L sur la gamme de fréquences d'étude.

6.6.1 Paramètres influant sur L

Concernant le paramètre L, nous remarquons une dépendance significative vis-à-vis des variables aléatoires X_3, X_4 et X_5 . Le nombre réduit de variables aléatoires influant sur ce paramètre témoigne aussi de la faible dispersion observée (voir figure 6.10) et du caractère quasi-déterministe de ce paramètre, comme nous l'avons mentionné plus haut. Une autre explication de cette faible

dispersion est liée au fait que le lot d'inducteurs testés est issu d'une seule commande (achat en un seul coup). X_3 et X_4 représentent les parties réelle et imaginaire de la réductivité équivalente au sein de la fenêtre de bobinage, image de l'effet de proximité entre les conducteurs. Le fait d'être complémentaires tout au long de la plage de fréquences d'étude, montre que ces deux variables représentent le même effet (impacts des incertitudes géométriques sur l'effet de proximité). Ceci montre la dépendance de l'inductance face aux incertitudes géométriques liées aux positions des conducteurs dans la fenêtre de bobinage. En même temps, nous pouvons observer aussi une dépendance du paramètre L face à la partie réelle X_5 de la réductivité magnétique du noyau ferrite. Ceci paraît évident du fait même de la définition de l'inductance du composant magnétique [93]. Cette influence diminue avec la fréquence à cause des lignes de champ qui ont tendance à contourner les conducteurs lorsque la fréquence augmente [23], entraînant ainsi une diminution du flux magnétique enfermé par l'enroulement inducteur.

6.6.2 Paramètres influant sur R

Contrairement au paramètre L, le paramètre R est influencé par la majorité des variables aléatoires (X_2 , X_3 , X_4 , X_5 , X_6 et X_7). Ceci peut expliquer en partie l'observation d'une dispersion assez importante qui augmente avec la fréquence. La majorité des facteurs font référence aux termes de pertes d'énergie (X_2 , X_4 , X_6 et X_7). La présence de la variable X_5 parmi les paramètres influents de R paraît paradoxal à ce qu'on doit s'attendre. X_5 étant la partie réelle de la réductivité magnétique du noyau ferrite, elle ne devrait pas entrer en compte dans les termes qui expriment des pertes au sein du composant magnétique bobiné. Sa présence pourrait être expliquée à partir de l'interaction entre champs complexes entrant en jeu dans la définition de la puissance complexe au niveau local. Cette observation étrange reste à investiguer, peut être sur la façon de modéliser les incertitudes liées à la réductivité magnétique du noyau ferrite. Cependant l'influence de la partie imaginaire X_6 de la réductivité est évidente. Celle-ci augmente avec la fréquence à l'image des pertes magnétiques (pertes par hystérésis et résiduelles). L'influence des parties réelle X_3 et imaginaire X_4 de la réductivité équivalente liée à la présence de l'effet de proximité entre les conducteurs, montre la dépendance du paramètre R face aux incertitudes géométriques dues aux positions aléatoires des conducteurs dans la fenêtre de bobinage. On peut aussi remarquer une faible influence, quasi-constante avec la fréquence, de la conductivité électrique (X_7), image des pertes par courants induits au sein du noyau ferrite.

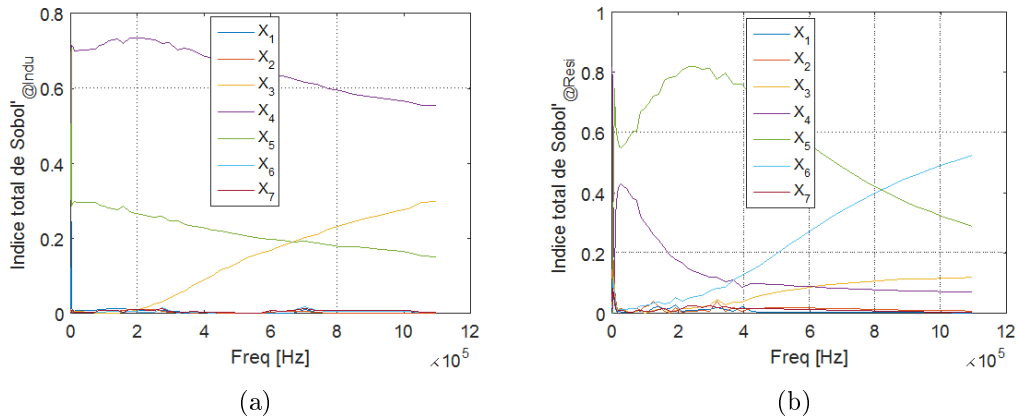


Figure 6.11: Évolution en fonction de la fréquence des indices de *Sobol'* totaux relatifs aux variables aléatoires à l'entrée des modèles stochastiques de R (droite) et de L (gauche).

6.7 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons validé le modèle stochastique de prise en compte des incertitudes géométriques et matérielles dans l'extraction des paramètres RLC d'un inducteur bobiné. Cette validation a été menée en comparant les distributions expérimentales obtenues à travers le relevé à l'analyseur d'impédance d'un lot d'inducteurs (dont les caractéristiques sont fournies par le fournisseur) à celles déduites des simulations MC du modèle numérique éléments finis.

La similarité entre les deux groupes de distribution a été évaluée grâce au calcul de la distance de *Wasserstein*. Pour le paramètre R, nous pouvons confirmer l'accord entre le modèle stochastique et les mesures expérimentales pour le lot d'inducteurs considérés. Par contre pour le paramètre L, la distance de *Wasserstein* ne suffit pas à elle seule à confirmer cette similarité vu le caractère quasi-déterministe de ce paramètre.

Du point de vue qualitatif, nous avons pu observer les mêmes comportements en fonction de la fréquence sur les deux groupes de distribution (mesures expérimentales et modèle stochastique). En effet, les dispersions des deux paramètres R et L augmentent avec la fréquence à cause de mise en exergue de phénomènes tels que les effets de peau et de proximité dans les conducteurs.

Enfin, l'analyse de sensibilité des paramètres R et L face aux entrées aléatoires a été rendue possible grâce à l'usage de substituts PCE construits à partir des distributions permettant de modéliser les incertitudes géométriques et matérielles considérées dans ce travail (*cf.* chapitre 4) à l'entrée du modèle stochastique. L'influence de chaque entrée aléatoire sur la réponse du mod-

èle est caractérisée par le coefficient de *Sobol'* correspondant. Ainsi pour le paramètre L, il a été constaté une forte dépendance vis-à-vis des incertitudes géométriques représentées par les parties réelle et imaginaire de la réductivité équivalente dans la fenêtre de bobinage. En deuxième position, vient la partie réelle de la réductivité du noyau magnétique ferrite. En ce qui concerne le paramètre R, nous avons observé un comportement inattendu suite à sa dépendance face à la partie réelle de la réductivité du noyau ferrite. Ce point reste à investiguer dans le futur. De manière générale, la résistance R est influencée par les incertitudes géométriques (via l'impédance et la réductivité équivalentes) et matérielles (via la conductivité électrique et la partie imaginaire de la réductivité du noyau magnétique ferrite).

Conclusion générale

Dans le cadre de la simulation de systèmes électriques (notamment en électronique de puissance), il est souvent nécessaire de recourir à des schémas équivalents pour modéliser le comportement des composants magnétiques bobinés. Il convient donc de connaître avec précision les différents paramètres de ces schémas ou modèles. En pratique, il est difficile d'obtenir des valeurs précises de ces paramètres du fait de la présence d'incertitudes géométriques et matérielles en entrée des modèles utilisés pour en extraire les valeurs. C'est ainsi qu'il est nécessaire d'intégrer les incertitudes dans les prévisions afin d'en déterminer les effets sur le comportement du système étudié. Signalons aussi que les incertitudes à l'entrée des modèles peuvent constituer des facteurs clés qui permettent de justifier les écarts observés entre les mesures expérimentales et les résultats de simulation.

Dans cette thèse, l'objectif était de prendre en compte les incertitudes géométriques (liées à la position des conducteurs dans la fenêtre de bobinage) et matérielles (associées aux propriétés électriques et magnétiques des matériaux) dans l'extraction des paramètres RLC de composants magnétiques bobinés. Nous avons montré qu'il était possible de retrouver le même comportement aléatoire en sortie du modèle stochastique construit que celui fourni par les mesures expérimentales des paramètres RL pour un lot d'inducteurs à noyau ferrite disponible sur le marché des composants de l'électronique de puissance. Une étude complète devrait intégrer toutes les incertitudes à l'entrée du modèle. Dans ce travail, nous nous sommes toutefois concentrés uniquement sur les incertitudes géométriques et matérielles qui nous ont semblé les plus pertinentes dans le contexte des composants magnétiques étudiés.

Ce travail a été subdivisé en trois parties. La première partie regroupe les quatre premiers chapitres. Dans cette partie, nous définissons les outils et méthodologies permettant de construire le modèle stochastique adapté au problème posé dans cette thèse. Les chapitres cinq et six peuvent constituer respectivement en soi la deuxième et troisième parties de ce travail. Dans la deuxième partie, nous proposons une technique (réduction de la dimensionnalité de l'entrée aléatoire) à mettre en œuvre afin de propager les incertitudes à moindre coût. Dans la troisième partie, nous validons de façon expérimentale le modèle stochastique obtenu à l'aide des techniques proposées dans la partie précédente. Dans ce qui suit, nous résumons les différentes contributions

apportées, et proposons quelques perspectives.

Première partie

Dans cette première partie, nous avons défini le contexte et les objectifs poursuivis (*cf.* chapitre 1) et, nous avons présenté des outils (chapitres 2, 3 et 4) permettant d'atteindre les objectifs fixés. Dans le chapitre 1 qui constitue l'introduction générale, nous avons dressé un état de l'art relatif à la problématique posée et avons mis en évidence le modèle stochastique en PCE comme modèle de substitution. En effet, l'usage du modèle de référence éléments finis embarqué dans des SMC avec prise en compte d'un grand nombre d'entrées aléatoires est trop coûteux en temps et en ressources de calcul pour tirer des conclusions suffisamment fiables sur le plan statistique.

Au chapitre 2, nous avons présenté le modèle déterministe éléments finis permettant d'extraire les paramètres RLC d'un inducteur bobiné. De manière classique, il s'agit des formulations magnétodynamique $\mathbf{a}-v$ et électrostatique en v , couplées faiblement à travers les potentiels électriques déduits du problème magnétodynamique. Nous avons également pu apporter une contribution [36] à la formulation $\mathbf{t}-\omega$ en résolvant la problématique d'orientation des coupures permettant d'imposer un flux correct des courants dans les conducteurs. Dans ce chapitre, nous avons montré que les formulations $\mathbf{a}-v$ et $\mathbf{t}-\omega$ étaient complémentaires et, de ce fait, qu'elles constituaient une meilleure façon d'extraction des paramètres RL de l'inducteur multicouche. Elles permettent d'encadrer l'incertitude liée à la résolution numérique. Dans toutes ces formulations, les pertes magnétiques sont prises en compte simplement en donnant une forme complexe à la perméabilité magnétique du noyau ferrite [43].

Pour le troisième chapitre, nous nous sommes basés plus particulièrement sur les travaux du groupe UQLab [65, 17] de l'École polytechnique fédérale de Zurich, qui a développé une plateforme de quantification d'incertitudes sur l'application Matlab, afin de tirer le maximum d'avantages sur l'usage des substituts stochastiques PCE. Parmi ces avantages, citons le fait qu'une fois la PCE construite, il ne sera plus nécessaire de faire appel à des évaluations supplémentaires du modèle numérique de référence en vue de mener une analyse de sensibilité par exemple.

Un effort considérable a été fourni au chapitre 4 afin de modéliser les incertitudes géométriques et matérielles mises en jeu dans le modèle stochastique d'inducteur bobiné développé dans cette étude. Les incertitudes géométriques mettent en évidence les positions aléatoires des conducteurs dans la fenêtre de bobinage, et peuvent aussi inclure les diamètres des conducteurs (du fait

de leur écrasement les uns sur les autres). Pour pouvoir déployer les conducteurs dans la fenêtre de bobinage, nous avons mis finalement au point un algorithme original de construction du bobinage spire par spire comme cela serait réalisé manuellement par un opérateur. Des erreurs de manipulation dans la construction du bobinage, telles que le swap ou l'insertion [64], ont été analysés dans le but cerner leurs influences sur les paramètres RLC du composant bobiné.

Pour la modélisation des incertitudes matérielles, nous nous sommes inspirés de modèles existant (*cf.* modèle de *Debye*) [88, 43] dépendant de la fréquence, et dont les lois de distribution uniformes régissent l'aspect aléatoire des grandeurs statiques. Considérer les fréquences de relaxation dans ces modèles permettrait d'en améliorer la représentativité. Cependant, ce type de donnée est souvent inexistant ou connu avec très peu de précision. L'hypothèse de lois de distribution uniformes associées aux incertitudes matérielles se trouve ainsi justifiée par le manque d'information disponible.

Deuxième partie

Le cinquième chapitre constitue une contribution importante de ce travail de thèse. Dans ce chapitre, nous avons mis en oeuvre un moyen permettant d'intégrer toutes les incertitudes à l'entrée du modèle stochastique en échappant à la problématique relative au *curse of dimensionality* [17, 65]. En effet, vu le nombre élevé de variables aléatoires (positions des conducteurs et propriétés matérielles) à l'entrée du modèle stochastique, l'obtention de résultats statistiquement fiables en sortie nécessite un très grand nombre d'évaluations du modèle déterministe éléments finis, incompatible avec un temps de calcul acceptable.

Dans ce chapitre, nous avons contourné ce problème en transformant les incertitudes géométriques en incertitudes matérielles en recourant à une technique d'homogénéisation. Pour la mise en oeuvre de cette solution, nous avons déterminé le plus petit volume représentatif de l'hétérogénéité de la fenêtre de bobinage permettant de capter l'aspect aléatoire des positions des conducteurs. À l'aide de cette technique et de conditions aux frontières adaptées, nous sommes parvenus à réduire le nombre élevé d'incertitudes géométriques à seulement deux variables aléatoires complexes : une impédance, qui fait référence à l'effet de peau au sein des conducteurs massifs, et une réductivité équivalente, liée aux effets de proximité entre conducteurs [84, 78, 77]. La substitution de ces propriétés équivalentes dans le modèle homogénéisé (formulation magnétodynamique avec hypothèse conducteurs bobinés et couplage circuit, en régime harmonique), a permis d'extraire les paramètres RL en lim-

itant fortement la taille du maillage dans la fenêtre de bobinage, réduisant ainsi fortement la charge de calcul et le temps d'exécution.

Quelques centaines d'itérations MC selon cette approche sont suffisantes pour déduire les distributions des différentes variables aléatoires. De ces distributions, nous avons ensuite construit les substituts PCE relatifs aux paramètres RL de telle sorte à avoir accès à diverses grandeurs nécessaires à l'analyse statistique et de sensibilité. L'application de cette technique à un cas test constitué d'un inducteur de 40 spires (et pour lequel 307 itérations MC ont été nécessaires), a permis de juger de la validité du substitut PCE en comparant les distributions des paramètres RL extraits du modèle homogénéisé et celles fournies par leurs substituts PCE [84].

Troisième partie

Dans le chapitre 6 qui constitue la dernière partie de ce travail, nous avons proposé une validation expérimentale du modèle stochastique construit pour un inducteur bobiné issu du marché des composants de l'électronique de puissance. Cette validation a consisté à comparer les distributions des paramètres RLC relevés à l'analyseur d'impédances sur un lot de 295 inducteurs MCSCH895-680KU [94], à celles déduites des SMC basées sur le modèle déterministe. À cette fin, nous avons présenté diverses grandeurs permettant de caractériser une distribution (*cf.* annexe D) et avons mis en évidence un indicateur particulier permettant de juger de la similarité entre deux distributions. Il s'agit de la distance de *Wasserstein* [95].

De la validation expérimentale conduite dans ce travail, il ressort les observations suivantes :

- qualitativement, on peut confirmer un bon accord entre les distributions issues du modèle numérique et celles tirées de l'expérience, et ce sur toute la plage de fréquences d'étude;
- dans le cas du paramètre R, cette similarité est confirmée par des valeurs de distance de *Wasserstein* de plus en plus faibles lorsque la fréquence augmente;
- dans le cas du paramètre L, on observe des valeurs élevées de distance de *Wasserstein* dues au caractère quasi-déterministe de ce paramètre lié en partie à une faible sensibilité par rapport aux incertitudes mises en évidence dans ce travail de thèse. En effet, les dispersions autour des moyennes étant faibles, il est évident de se retrouver avec des poids élevés dans les différentes classes constituant l'histogramme. Ce paramètre se

comporte comme un “atténuateur d’incertitudes” puisque la présence des grosses incertitudes (par exemple 20% sur la perméabilité magnétique du noyau ferrite et autres propriétés matérielles) en entrée du modèle n’a qu’une faible influence (10% d’erreur sur L [94]).

- Contrairement au paramètre L, le paramètre R se comporte comme un “amplificateur d’incertitudes”. Ce caractère s’accroît avec la montée en fréquence qui favorise un accroissement de la dispersion.

En fin de ce chapitre, nous avons proposé une analyse de sensibilité des paramètres RL face aux incertitudes mises en jeu dans ce travail. Cette analyse a été menée grâce aux substituts PCE construits à cette fin et aux coefficients de *Sobol’* qu’on peut en déduire. Il ressort de cette analyse les conclusions suivantes :

- Le paramètre L est davantage influencé par les incertitudes géométriques relatives aux positions des conducteurs dans la fenêtre de bobinage. En effet, l’analyse fournit des valeurs des coefficients de *Sobol’* plus élevées attribuées à la réductivité équivalente de la fenêtre de bobinage, paramètre résultant d’une sollicitation du VRE mettant en évidence l’effet de proximité entre les conducteurs. En second lieu, nous retrouvons l’incertitude sur la perméabilité magnétique du noyau ferrite comme facteur influent.
- Le paramètre R est influencé par la majorité des incertitudes considérées dans ce travail, à savoir les incertitudes géométriques (à travers les propriétés équivalentes issues de la fenêtre de bobinage (mettant en évidence les effets de peau et de proximité) et matérielles (à travers la conductivité électrique et la partie imaginaire de la réductivité du noyau ferrite). Leurs différents coefficients de *Sobol’* varient fortement avec la fréquence, excepté celui de la conductivité électrique du noyau ferrite qui reste quasi-constant sur toute la gamme de fréquences d’étude.
- De ce qui précède, il apparaît que la qualité du bobinage intervient pour beaucoup dans la précision des paramètres RL pour le type d’un inducteur bobiné considéré dans ce travail. En effet, les incertitudes géométriques y interviennent avec des coefficients de *Sobol’* assez importants, relatifs aux propriétés équivalentes (images des effets de peau et de proximité) extraites de la fenêtre de bobinage.

De façon brève, nous pouvons relever de ce travail de thèse les contributions principales suivantes :

- ✓ Proposition de deux algorithmes pour modéliser les incertitudes géométriques liées aux positions de conducteurs dans la fenêtre de bobinage, et adaptation de quelques modèles pour les incertitudes matérielles.
- ✓ Réduction de la dimension du vecteur entrée aléatoire par transformation des incertitudes géométriques (positions de conducteurs) en incertitudes matérielles, et usage du substitut PCE comme modèle stochastique de propagation des incertitudes à moindre coût.
- ✓ Validation expérimentale du modèle stochastique construit basée sur la comparaison des distributions de paramètres RL.
- ✓ Analyse de sensibilité de sorties RL face aux entrées aléatoires retenues dans l'étude en fonction de la fréquence opérationnelle.
- ✓ Étude orientée aux applications inducteur bobiné sur une plage de fréquences s'étalant du DC à 1 MHz.

7.1 Perspectives

À l'issue de ce travail, nous proposons quelques perspectives. À court terme, nous pensons qu'il serait intéressant de :

- valider de façon expérimentale les résultats obtenus sur d'autres lots d'inducteurs.
- intégrer l'incertitude liée à la variation des diamètres des conducteurs dans les composantes de l'entrée du modèle stochastique.
- étudier l'influence des incertitudes sur les grandeurs locales. En effet, la variabilité observée sur le paramètre C est le reflet de problèmes locaux. Cette étude pourrait être accompagnée de celle de l'influence du type de bobinage (continu ou discontinu) sur la variabilité du paramètre C.
- considérer d'autres applications telles que par exemple de la propagation des incertitudes géométriques au sein des bobinages de machines électriques et de transformateurs sur leurs performances.
- Du point de vue mise en œuvre des méthodes stochastiques, accélérer les simulations en investiguant d'autres méthodes hybrides telles que par exemple la méthode spectrale des éléments finis stochastiques [22, 21, 96].

Enfin, le modèle 2D axisymétrique d'inducteurs bobinés développé dans cette thèse semble présenter des résultats intéressants dans l'étude de prise en compte des incertitudes géométriques et matérielles sur les paramètres RLC de ce type de composant. Il pourrait aussi être intéressant d'investiguer sur l'intérêt de passer à un modèle 3D (par exemple lorsque le composant ne présente plus de symétrie de révolution). En effet, il serait possible de mettre en oeuvre un couplage direct entre les effets capacitif et inductif dans un tel modèle en utilisant des formulations de type *full wave* [97, 98] par exemple. La seule difficulté pourrait survenir de la modélisation des incertitudes géométriques du bobinage dans ce cas.

7.2 Publications personnelles

- G. Lossa, O. Deblecker and Z. De Grève, Influence of the Geometric Uncertainties on the RLC Parameters of Wound Inductors Modeled using the Finite Element Method. *IEEE Trans. on Magn.*, 53(6), 2017.
- G. Lossa, O. Deblecker and Z. De Grève, Influence of the Material Uncertainties on the RLC Parameters of Wound Inductors Modeled Using the Finite Element Method. *Open Physics*, 16(1) : 227-231, 2018.
- G. Lossa, O. Deblecker and Z. De Grève, Comparison of T-w and A-v formulations for the extraction of the RL parameters of Wound Inductors. Conference paper, *IEEE Xplore*, CEMi 2018, Cape Town.
- G. Lossa, O. Deblecker, Z. De Grève and C. Geuzaine, Building Fast stochastic Surrogate Models for Extraction of RL Parameters of Wound Inductors Modeled using FEM. Conference paper, *IEEE Xplore*, CEFC 2021, Pise.
- G. Lossa, O. Deblecker and Z. De Grève, Experimental validation of geometrical and material uncertainties consideration in the modeling of wound inductors using FEM. Conference paper to be submitted, *PIERS 2021*, Hangzhou.
- G. Lossa, O. Deblecker and Z. De Grève, A Hybrid Approach using MC Simulation and PCE for geometrical and material uncertainties propagation in the extraction of RL parameters of wound inductors. *GAMM AGUQ Workshop 2018*, Dortmund.
- G. Lossa, O. Deblecker and Z. De Grève, Influence of the winding pattern uncertainties on the RL parameters of wound inductors. Conference

paper, 10th International Symposium on Electric and Magnetic Fields
EMF 2016, Lyon.

Annexes

PCE à base adaptative

A.1 Outil de calcul PCE à base adaptée

Ce type de PCE est celui qui convient le mieux parmi les bases candidates qui permettent de déterminer les coefficients où on a besoin d'une meilleure précision sur le modèle à approximer et lorsqu'on évite un excès d'ajustement. Cette stratégie consiste à partir d'une petite base candidate et à générer graduellement des nouvelles bases en ajoutant des nouveaux éléments (par exemple en augmentant le degré maximal de la PCE) et à calculer le substitut PCE et l'erreur correspondant. En fin de cette stratégie, on se retrouve avec la meilleure PCE qui répond à la valeur de l'erreur imposée.

Un outil important pour cette stratégie adaptative est l'erreur *a posteriori* de cross-validation. Cet outil permet d'estimer un substitut PCE précis sans évaluations supplémentaires du modèle de référence. Cette stratégie se présente comme suit :

1. Générer une base initiale avec un ou plusieurs schémas de troncature, avec $p = p_0$ ($q = q_0$)
2. Calculer les coefficients de cette PCE et l'erreur de généralisation correspondant ε ;
3. Comparer l'erreur obtenue avec la valeur de référence ε_T . Si $\varepsilon < \varepsilon_T$ ou si le nombre d'itérations $NI = NI_{max}$, on arrête l'algorithme pour retourner la PCE avec la plus faible valeur d'erreur de généralisation. Dans le cas contraire, prendre $p = p + 1$ (ou augmenter q) et retourner à l'étape 1.

L'erreur de généralisation est définie comme suit :

$$\varepsilon_{gen} = \mathbb{E} \left[(\mathcal{M}(\mathbf{X}) - \mathcal{M}^{PC}(\mathbf{X}))^2 \right] / \text{Var}[Y] \quad (\text{A.1})$$

S'il n'existe pas de données de validation, ce qui est en général le cas des modèles à coût de calcul élevé, il existe deux façons de calculer l'erreur de généralisation : l'erreur empirique normalisée ε_{emp} et la "leave-one-out

cross-validation" erreur ε_{LOO} . Cette dernière est conçue pour contourner l'insuffisance de surestimation de ε_{emp} . Elle consiste à construire N substituts PCE $\mathcal{M}^{PC \setminus i}$, chacun étant créé sur un plan expérimental réduit $\mathbf{X} \setminus \mathbf{x}^{(i)} = \{\mathbf{x}^{(j)}, j = 1, \dots, N, j \neq i\}$ et à comparer cette prédiction obtenue en excluant $\mathbf{x}^{(i)}$ avec la vraie valeur $y^{(i)}$. Elle s'exprime sous la forme :

$$\varepsilon_{LOO} = \frac{\sum_{i=1}^N (\mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)}) - \mathcal{M}^{PC \setminus i}(\mathbf{x}^{(i)}))^2}{\sum_{i=1}^N (\mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)}) - \hat{\mu}_Y)^2} \quad (\text{A.2})$$

Lorsque les résultats de la minimisation des moindres carrés sont disponibles, on montre dans [17] qu'il n'est pas nécessaire de calculer N substituts pour déterminer ε_{LOO} . Soit

$$\varepsilon_{LOO} = \frac{\sum_{i=1}^N (\mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)}) - \mathcal{M}^{PC}(\mathbf{x}^{(i)}))^2}{1 - h_i} / \sum_{i=1}^N (\mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)}) - \hat{\mu}_Y)^2 \quad (\text{A.3})$$

où h_i est la i^{me} composante du vecteur donné par :

$$\mathbf{h} = \text{diag}(\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T) \quad (\text{A.4})$$

avec \mathbf{A} , la matrix expérimentale.

Indices de Sobol basés sur une simulation Monte Carlo

Dans cette annexe, nous présentons comment déterminer les indices de *Sobol* (ou coefficients d'influence d'un modèle $\mathcal{M}(\mathbf{X})$) à partir d'une simulation MC.

La décomposition de *Sobol* d'une fonction $f(x_1, \dots, x_M)$ à plusieurs variables aléatoires indépendantes est donnée par :

$$f(x_1, \dots, x_M) = f_0 + \sum_{i=1}^M f_i x_i + \sum_{1 \leq i < j \leq M} f_{ij}(x_i, x_j) + \dots + f_{1, \dots, M}(x_1, \dots, x_M), \quad (\text{B.1})$$

où les conditions suivantes sont vérifiées :

1. Le terme constant f_0 correspond à l'espérance mathématique de $f(\mathbf{X})$.
2. Les intégrales de termes f_{i_1, \dots, i_s} sous les sommations par rapport à leurs propres variables sont nulles :

$$\int_0^1 f_{i_1, \dots, i_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) dx_{i_k} = 0 \text{ si } 1 \leq k \leq s \quad (\text{B.2})$$

Il est démontré dans [66] que tous les termes sous sommation peuvent être calculés de façon récursive par des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 f_{i_1, \dots, i_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) dx_{i_k} = 0 \text{ si } 1 \leq k \leq s \quad (\text{B.3})$$

$$f_0 = \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{B.4a})$$

$$f_i(x_i) = \int_0^1 \dots \int_0^1 f() d\mathbf{x}_{\sim i} - f_0 \quad (\text{B.4b})$$

$$f_{ij}(x_j, x_j) = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}_{\sim (ij)} - f_0 - f_i(x_i) - f_j(x_j) \quad (\text{B.4c})$$

Annexe B. Indices de Sobol basés sur une simulation Monte Carlo

où $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_M\}$ alors que la notation “ \sim ” indique que les variables d’indice i y sont exclues, c’est-à-dire :

$$\mathbf{x}_{\sim i} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_M) \quad (\text{B.5})$$

Les termes d’ordre supérieur peuvent être construits de manière similaire. En se basant sur les expressions précédentes, la variance totale de $f(\mathbf{X})$ est donnée par :

$$D = \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{x}}} f^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - f_0^2 \quad (\text{B.6})$$

On peut définir les variances partielles sous la forme :

$$D_{i_1, \dots, i_s} = \int_0^1 \dots \int_0^1 f_{i_1, \dots, i_s}^2(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) dx_{x_{i_1}} \dots dx_{x_{i_s}} \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq M; \quad s = 1, \dots, M \quad (\text{B.7})$$

Lorsque les variables aléatoires sont indépendantes, la somme des variances partielles doit valoir la variance totale. Elles peuvent être calculées au moyen de simulations de MC à partir des estimateurs suivants :

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{N} \sum_1^N f(\mathbf{x}^{(n)}) \quad (\text{B.8a})$$

$$\hat{D} = \frac{1}{N} \sum_1^N f^2(\mathbf{x}^{(n)}) - f_0^2 \quad (\text{B.8b})$$

$$\hat{D}_i = \frac{1}{N} \sum_1^N f(x_i^{(n)}, \mathbf{x}_{\sim i}^{(n)}) f(x_i^{(n)}, \mathbf{x}'_{\sim i}{}^{(n)}) - f_0^2 \quad (\text{B.8c})$$

où \mathbf{x}' indique une réalisation de \mathbf{X} indépendante de $\mathbf{x} = \{x_i^{(n)}, \mathbf{x}_{\sim i}^{(n)}\}^T$, et l’écriture $\mathbf{x}_{j, \sim i}$ désigne la j^{me} réalisation \mathbf{x} de qui ne contient pas la variable d’entrée x_i .

Rappelons que la sensibilité totale S_i^T d’une variable peut être déduite de la sensibilité de groupes des variables [66, 17] :

$$S_i^T = 1 - S_{\sim i} \quad (\text{B.9})$$

Et que la sensibilité d'un groupe de variables d'indices $\mathbf{v} = \{i_1, \dots, i_s\} \subset \{1, \dots, M\}$ tel que $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_{\mathbf{v}}, \mathbf{x}_{\mathbf{w}})$, $\mathbf{w} \sim \mathbf{v}$, l'indice de *Sobol* du groupe de variables $\mathbf{X}_{\mathbf{v}}$ s'exprime sous la forme :

$$S_{\mathbf{v}} = \frac{\text{Var} [\mathbb{E}[Y|\mathbf{X}_{\mathbf{v}} = \mathbf{x}_{\mathbf{v}}]]}{\text{Var}[Y]} \quad (\text{B.10})$$

Cet indice tient compte des effets individuels (appelés aussi effets structurels) ainsi que des interactions existant entre les variables $\mathbf{X}_{\mathbf{v}}$.

Dans le cas où $y^{\mathbf{v}} = f(\mathbf{x}_{\mathbf{v}}, \mathbf{x}'_{\mathbf{w}})$, avec $\mathbf{x}'_{\mathbf{w}}$ un échantillon de $\mathbf{X}_{\mathbf{w}}$ indépendant de $\mathbf{x}_{\mathbf{w}}$ et si $\mathbf{X}'_{\mathbf{w}}$ est une copie de $\mathbf{X}_{\mathbf{w}}$, tel que $Y_{\mathbf{v}} = f(\mathbf{X}_{\mathbf{v}}, \mathbf{X}'_{\mathbf{w}})$, l'indice de *Sobol* de groupe peut s'écrire sous la forme [66] :

$$S_{\mathbf{v}} = \frac{\text{Cov}[Y, Y_{\mathbf{v}}]}{\text{Var}[Y]} \quad (\text{B.11})$$

Cette expression conduit au premier estimateur de “*Homma*” [66, 17] :

$$S_{\mathbf{v}} = \frac{\frac{1}{N} \sum y_i y_i^{\mathbf{v}} - \left(\frac{1}{N} \sum y_i\right) \left(\frac{1}{N} \sum y_i^{\mathbf{v}}\right)}{\frac{1}{N} \sum y_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum y_i\right)^2} \quad (\text{B.12})$$

Un autre estimateur prouvé plus performant que le précédent [66, 17], est l'estimateur de “*Janon*” :

$$S_{\mathbf{v}} = \frac{\frac{1}{N} \sum y_i y_i^{\mathbf{v}} - \left(\frac{1}{N} \sum \left[\frac{y_i + y_i^{\mathbf{v}}}{2}\right]\right)^2}{\frac{1}{N} \sum \left[\frac{(y_i)^2 + (y_i^{\mathbf{v}})^2}{2}\right] - \left(\frac{1}{N} \sum \left[\frac{y_i + y_i^{\mathbf{v}}}{2}\right]\right)^2} \quad (\text{B.13})$$

Modèles analytiques de calcul de paramètres RL d'un inducteur bobiné

C.1 Introduction

Dans la littérature, plusieurs méthodes de calcul de la résistance R (image des pertes au sein des composants magnétiques bobinés) en fonction de la fréquence se basent sur la méthode *Dowell* [99, 100, 101, 102]. Cette méthode permet de calculer les pertes cuivre et l'inductance de fuite dans un transformateur en régime harmonique et en considérant des phénomènes quasi-statiques.

Le modèle de transformateur considéré par *Dowell* est constitué de différentes couches conductrices bobinées autour du noyau et séparées par de l'air ou un matériau diélectrique. Une des hypothèses dans ce modèle consiste à considérer un champ magnétique unidimensionnel (selon l'épaisseur de couches) et parallèle aux couches conductrices dans la fenêtre de bobinage.

C.2 Variation de la résistance en fonction de la fréquence

Les hypothèses qui ont permis à *Dowell* d'établir les variations de paramètres RL à partir des équations de *Maxwell* sont les suivantes :

- l'épaisseur d'une couche conductrice est sensiblement petite par rapport au rayon de courbure de cet enroulement;
- les couches conductrices sont pleines, c'est-à-dire occupent toute la largeur de la fenêtre de bobinage;
- la perméabilité de la ferrite est élevée;
- le champ magnétique est nul d'un côté de l'enroulement et maximal de l'autre côté.

En partant des équations de *Maxwell*, *Dowell* montre que le champ magnétique dans l'air est indépendant de la fréquence et peut être déterminé si l'on connaît les courants totaux portés par chaque enroulement. Par contre dans les conducteurs, le champ varie suivant un profil qui dépend de la fréquence. Pour exprimer les variations de paramètres RL avec la fréquence, *Dowell* établit deux facteurs : les facteurs de résistance F_R et d'inductance F_L . Ces derniers sont donnés par les expressions suivantes :

$$F_R = \frac{R_{AC}}{R_{DC}} \quad (C.1a)$$

$$F_L = \frac{L_{AC}}{L_{BF}} \quad (C.1b)$$

où R_{DC} et L_{BF} représentent les valeurs de paramètres R et L en régime continu. Ces valeurs sont suffisamment proches de celles observées à basse fréquence (BF). Nous allons nous focaliser uniquement par la suite sur l'expression de variation du paramètre R. Pour le paramètre L, il existe que peu des travaux dans la littérature qui en parlent et quelques expressions analytiques permettant de déterminer L_{BF} d'inducteurs à partir de ses dimensions géométriques, les propriétés magnétiques de son noyau et le nombre de spires.

Le facteur de résistance F_R lié aux effets quasi-statiques dans les conducteurs est donné par l'expression suivante :

$$F_R = X \frac{\sinh 2X + \sin 2X}{\cosh 2X - \cos 2X} + 2X \frac{m^2 - 1}{3} \frac{\sinh X - \sin X}{\cosh X + \cos X} \quad (C.2)$$

où m désigne le nombre de couches de l'enroulement considéré et $X = \frac{h}{\delta}$ est un paramètre adimensionnel et défini comme le rapport entre la hauteur h d'une couche conductrice et l'épaisseur de peau $\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi \mu_0 \sigma f}}$ à la fréquence considérée f .

Le premier terme de cette expression est dû à l'effet de peau dans les conducteurs alors que le second terme à l'effet de proximité entre les différentes couches. Lorsque la fréquence est faible, le paramètre X est faible et la résistance R_{AC} est égale à la résistance R_{DC} . Cette dernière est donnée par l'expression :

$$R_{DC} = \frac{l}{\sigma S} \quad (C.3)$$

où l et S représentent la longueur et la section du conducteur. σ est la conductivité électrique du conducteur.

Lorsque la couche est constituée des conducteurs distincts à section circulaire, *Dowell* suggère de les remplacer par des conducteurs carrés de section équivalente (cf. figure C.2). Dans le cas où les couches sont constituées des conducteurs rectangulaires régulièrement espacés, *Dowell* introduit le facteur de remplissage η défini de la manière suivante :

$$\eta = \frac{N \cdot a}{b_w} (\leq 1) \tag{C.4}$$

Ce facteur représente la proportion de la fenêtre de bobinage occupée par du cuivre. N représente le nombre de conducteurs de largeur a dans la couche et b_w la largeur de la fenêtre de bobinage (cf. figure C.1). En supposant que le modèle de *Dowell* reste unidimensionnel, la fréquence réduite X doit être multipliée par la racine carrée du facteur de remplissage η .

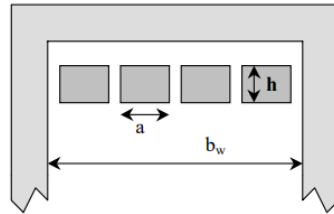


Figure C.1: Modèle d'enroulement utilisé par *Dowell* dans ses calculs [101]

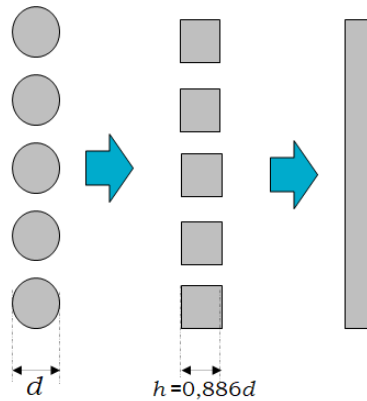


Figure C.2: Transformation de conducteurs ronds en conducteur unique [101]

$$X^* = \frac{h}{\delta} \sqrt{\eta} = X \sqrt{\eta} \tag{C.5}$$

On montre dans [101] que l'hypothèse d'un champ unidimensionnel s'avère fautive lorsque les conducteurs sont très écartés. Ceci est justifié par le fait que le champ magnétique devient dans ce cas bidimensionnel. En effet, la valeur calculée de F_R en utilisant un modèle bidimensionnel est inférieure à celle obtenue en utilisant un modèle 1D. L'auteur montre que plus les conducteurs sont écartés, plus la surface effective conductrice augmente. Ce qui entraîne une diminution du facteur de résistance.

Avec le dernier paramètre X^* qui tient compte de la proportion de la fenêtre de bobinage occupée par le cuivre, la formule semi-empirique de *Dowell* devient :

$$F_R = X^* \frac{\sinh 2X^* + \sin 2X^*}{\cosh 2X^* - \cos 2X^*} + 2X^* \frac{m^2 - 1}{3} \frac{\sinh X^* - \sin X^*}{\cosh X^* + \cos X^*} \quad (\text{C.6})$$

Un troisième paramètre ζ a été introduit dans [101] afin de prendre en compte l'effet de bord basse fréquence qui conduit à une augmentation des pertes entre $X = 0,1$ et $X = 0,1$ (conformément à l'expérience). Un terme supplémentaire s'est ajouté à l'expression de *Dowell* qui permet de reproduire tous les effets rencontrés dans le transformateur, à condition d'ajuster judicieusement les paramètres m, η et ζ (par régression des moindres carrés sur les valeurs de R_{AC} obtenues par simulation EF par exemple). La formule de *Dowell* modifiée prend la forme suivante :

$$F(X, m, \eta, \zeta) = X^* \frac{\sinh 2X^* + \sin 2X^*}{\cosh 2X^* - \cos 2X^*} + 2X^* \frac{m^2 - 1}{3} \frac{\sinh X^* - \sin X^*}{\cosh X^* + \cos X^*} + \zeta \cdot X^* \quad (\text{C.7})$$

C.3 Expression analytique de l'inductance

Dans la littérature, il existe des formules approchées basées sur des expériences permettant de calculer la valeur d'une inductance. La majorité de ces formules permettent de calculer l'inductance d'une bobine à air, c'est-à-dire sans noyau magnétique. Parmi celles-ci, on retrouve des méthodes tabulaires (*cf.* formules de *Nagaoka* par exemple [103, 104, 105, 106, 107]) qui s'appliquent à un solénoïde de longueur l , de diamètre D (voir figure C.3) et densité linéique de spires n sous la forme suivante :

$$L = K \frac{(\pi n D)^2}{1000} l \quad (\text{C.8})$$

où le paramètre K dépend du rapport D/l de la bobine et dont les valeurs peuvent être retrouvées dans une table. La valeur de L obtenue par cette

expression a pour unité le μH . Il est aussi possible d'approcher la valeur de K en utilisant la formule [104, 105] :

$$K = \frac{100}{\pi^2 \left(4\frac{D}{l} + 11\right)} \quad (C.9)$$

De manière générale, l'inductance d'une bobine à air peut être obtenue en utilisant la formule [108] :

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} [H] \quad (C.10)$$

où N est le nombre de spires, S la section effective de la bobine (en m^2) et l la longueur de la bobine en m. μ_0 est une constante magnétique qui vaut $4\pi 10^{-7} H \cdot m^{-1}$. Dans le cas d'une bobine avec noyau magnétique, cette formule prend la forme suivante [108] :

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 S}{l} [H] \quad (C.11)$$

où S et μ_r représentent respectivement la section effective (en $[m^2]$) et la perméabilité relative du matériau magnétique, et l la longueur effective du chemin magnétique (en m).

Dans le cas d'une bobine multicouche à air (*cf.* figure C.3) de N spires, la formule approchée de *Nagaoka* devient :

$$L = \frac{10\pi N^2 R_1^2}{6R_1 + 9l + 10(R_2 - R_1)} [\mu H] \quad (C.12)$$

R_1 et R_2 représentent respectivement le diamètre du mandrin et le diamètre extérieur de la bobine, exprimés en mètre. l est la longueur de la bobine en mètre.

C.4 Application des formules analytiques au cas de l'inducteur MCSC895 - 680KU

Les dimensions de cet inducteur sont présentées à la figure C.4. Le diamètre du conducteur en cuivre vaut 0,37 mm. Le noyau magnétique n'étant pas idéal, est sujet des pertes magnétiques et par courants induits en son sein. Ce dernier est en ferrite de type NiZn. Sa description selon la datasheet [110] est



Figure C.3: Illustration d'une bobine monocouche de 100 spires jointives [109] (gauche) et paramètres géométriques d'une bobine multicouche [109] (droite)

encodée selon l'information suivante : "F6D DR2W7.8 x 9.5 (SW) RCH B3.75 F5.6 P5".

Il s'agit de l'inducteur présenté dans le chapitre 6 lors de la validation expérimentale de la prise en compte des incertitudes géométriques et matérielles dans l'extraction de paramètres RL par la méthode des EF. Nous allons calculer les paramètres RL en utilisant les expressions analytiques présentées dans cette annexe.

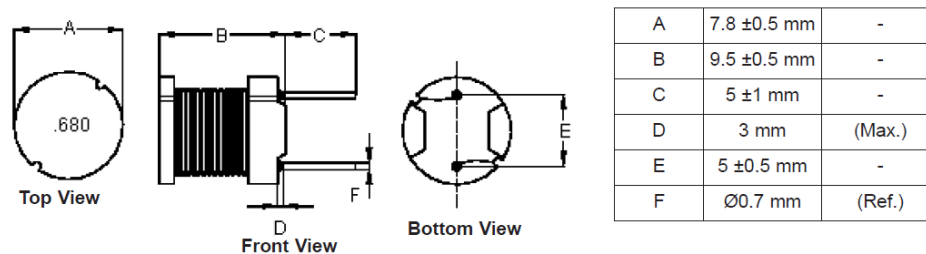


Figure C.4: Dimensions géométriques de l'inducteur MCSCH895-680KU

Pour le calcul du paramètre R_{AC} , nous utiliserons la formule de *Dowell* sur une large plage de fréquences (du DC à 1 MHz). Concernant le paramètre L, nous nous contenterons de la valeur DC résultant de la formule générale qui semble être bien adaptée au cas qui nous concerne (c'est-à-dire bobine à noyau magnétique). Les valeurs DC de paramètres RL sont présentées et comparées aux valeurs nominales dans la table C.1.

La figure C.5 compare, sur la plage de fréquences allant jusqu'à 1 MHz, les valeurs du paramètre R_{AC} obtenues à partir des mesures expérimentales

C.4. Application des formules analytiques au cas de l'inducteur MCSCH895 - 680KU 139

Table C.1: Comparaison entre valeurs nominales et théoriques (modèles analytiques) de paramètres RL de l'inducteur MCSCH895-680KU

Paramètres	Valeurs Nominales	Valeurs calculées
R_{DC} [Ω] *	0,1397	0,1397
L_{BF} [μH]**	68	64,8
Références	Datasheet [110]	(C.3) et (C.11)

* Valeur nominale obtenue à 25°C. ** Sous une tension de 0,25 V et un courant $I_{rms} = 2,1$ A.

tales (en bleu) sur un lot de 295 inducteurs MCSCH895-680KU à l'analyseur d'impédances et celle obtenue en utilisant le modèle analytique de *Dowell* (en magenta). On constate bien que le modèle de *Dowell* surestime ce paramètre pour les fréquences supérieures à 150 kHz. Cela peut se justifier à partir des différentes hypothèses qui ont permis d'établir le modèle de *Dowell* (voir plus haut). Néanmoins, ce modèle constitue une bonne approximation de R_{AC} sur cette plage de fréquences.

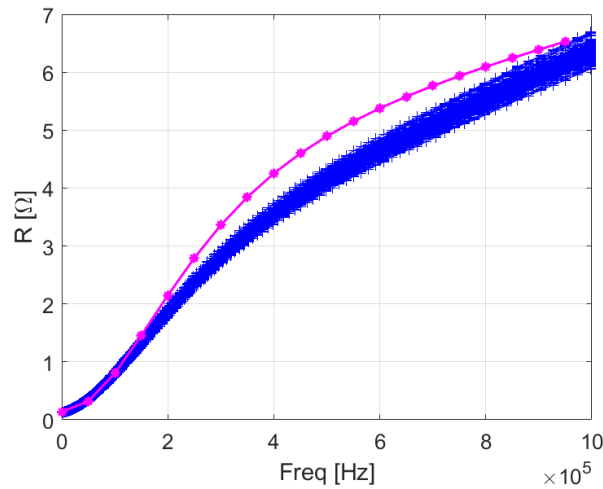


Figure C.5: Comparaison entre modèle analytique de *Dowell* (en magenta) et mesures expérimentales (en bleu) du paramètre R

Indicateurs de comparaison entre distributions

Dans cette annexe, nous présentons brièvement quelques indicateurs statistiques permettant de comparer les distributions de paramètres aléatoires issues soit d'un processus stochastique ou encore de mesures expérimentales. Parmi ceux-ci, nous mettons largement en évidence la distance de *Wasserstein* qui est un facteur permettant d'évaluer la similarité entre deux objets (par exemple des images, des distributions, un nuage de points, etc.).

D.1 Comparaison de distributions de probabilité

D.1.1 Moments statistiques d'ordre k

En statistique, les distributions sont souvent définies par leur forme et les valeurs de certains moments d'ordre compris entre 2 et 4. Parmi ces derniers, nous pouvons citer la variance (ou dispersion), le skewness et le kurtosis. De façon générale, un moment d'ordre k pour une distribution continue $f(x)$ de moyenne \bar{x} est défini par :

$$\mu_k = \mathbb{E}[(X - \bar{x})^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^k f(x) dx \quad (\text{D.1})$$

La variance est une mesure de la dispersion des valeurs d'un échantillon ou d'une distribution autour d'une valeur moyenne. Elle exprime la moyenne des carrés des écarts à la moyenne $\bar{x} = \mu$. Son unité vaut le carré de l'unité de la variable aléatoire X . Une quantité déduite de la variance est l'écart type σ . Il est égal à la racine carrée de la variance et a la même unité que celle de la moyenne ou de la variable aléatoire. Il permet donc d'avoir une bonne idée de la dispersion et permet de déterminer un intervalle de confiance. On peut le calculer à partir du lien avec la variance :

$$\sigma^2 = \mu_2 = \mathbb{E}[(X - \bar{x})^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx \quad (\text{D.2})$$

Le skew, appelé aussi coefficient d'asymétrie, est un des paramètres de forme, avec le kurtosis (voir plus bas). Il correspond à une mesure de l'asymétrie de la distribution d'une variable aléatoire. Le skew est défini de façon à être adimensionnel. C'est donc un nombre réel pur qui met en évidence le degré d'asymétrie de la distribution autour de sa moyenne (ou médiane). En général, l'asymétrie d'une distribution est positive si la queue de droite est plus longue ou grosse, et est négative si la queue de gauche est plus longue ou grosse. Pour une variable aléatoire continue X de moyenne μ et d'écart type σ , son coefficient d'asymétrie ou moment d'ordre trois est défini par :

$$skew = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X - \bar{x}}{\sigma}\right)^3\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{X - \bar{x}}{\sigma}\right)^3 f(x) dx \quad (D.3)$$

Un coefficient nul indique une distribution symétrique. Lorsqu'il est négatif, la distribution est décalée à gauche de la médiane. Et dans le cas positif, la distribution est décalée à droite de la médiane (*cf.* figure D.1).

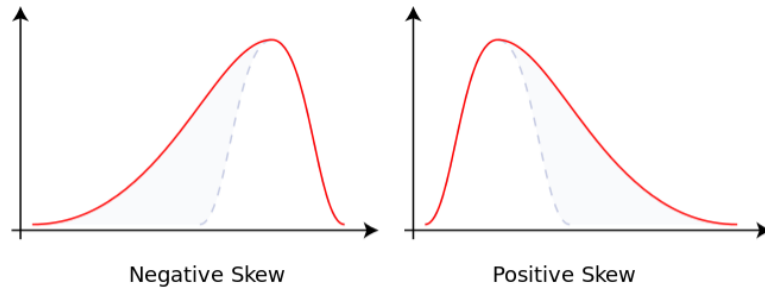


Figure D.1: Illustration de l'asymétrie d'une distribution [111]

Le kurtosis ou moment central d'ordre quatre est un coefficient qui décrit l'aplatissement et le degré de voissure d'une variable aléatoire. C'est le deuxième des paramètres de forme après le skew. Il mesure la répartition des masses de probabilité autour de leur centre, donné par l'espérance mathématique (ou moyenne). En d'autres termes, c'est une mesure de la concentration des masses de probabilité à proximité ou à distance du centre de probabilité. Pour une variable aléatoire continue de moyenne et d'écart type, on définit le kurtosis normalisé comme le moment d'ordre quatre de la variable centrée réduite moins trois :

$$kurt = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X - \bar{x}}{\sigma}\right)^4\right] - 3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{X - \bar{x}}{\sigma}\right)^4 f(x) dx - 3 \quad (D.4)$$

Le terme -3 dans cette définition permet d'assigner un kurtosis nul à la distribution normale prise comme référence en terme d'aplatissement ou d'acuité. Pour un kurtosis < 0 , on parlera de distribution platikurtique. Par contre, pour un kurtosis > 0 , on parlera de distribution leptokurtique (*cf.* figure D.2). Et s'il est égal à 0 , la distribution sera qualifiée de mésokurtique. Un kurtosis élevé indique que la distribution est plutôt pointue. Par contre, un kurtosis proche de zéro indique une distribution relativement aplatie.

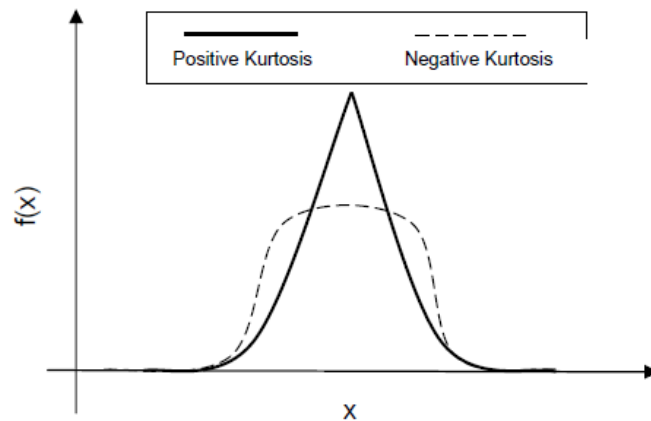


Figure D.2: Quelques formes de distribution et les kurtosis correspondants [20]

D.1.2 Distance de *Wasserstein*

En pratique, il est vraiment crucial de juger de la similitude entre deux objets au travers d'un indicateur standard. Ce problème est le plus souvent rencontré en statistique computationnelle et en Machine-Learning où l'on doit juger de la similarité entre deux objets. En termes mathématiques, cette similarité s'exprime en pratique par le calcul d'une distance.

En statistique, la distance de Kantorovich-Wasserstein a été prouvée comme étant une fonction distance pertinente ayant des propriétés mathématiques et implications pratiques intéressantes. Elle est d'usage dans plusieurs problèmes de calcul de distance entre deux objets discrets de dimensions quelconques, tels que deux images ou deux nuages de points ou encore une paire d'histogrammes de dimension quelconque. Cette notion se base sur la métaphore d'un travail minimal qu'un cantonnier doit fournir pour transformer un tas de terre (représenté par un vecteur) en un autre. On parle souvent du problème de transport optimal [112] en l'honneur du mathématicien russe *Leonid Kantorovich* (1942) qui est le premier à définir ce concept. Le principe

consiste à chercher la quantité de sable à déplacer entre chaque couple de positions initiale et finale, au lieu de chercher la destination finale de chaque cantonnier. Cette façon de voir ce problème lui permet de bénéficier du formalisme de programmation linéaire qu'il a développé trois ans plus tôt, et ainsi résoudre ce problème plus que centenaire. Ce problème exige donc la résolution d'un problème d'optimisation. Le formalisme présenté dans cette section pour définir la distance de *Wasserstein* est extrait de [95].

Dans le cas qui nous concerne, ce concept va nous permettre de déterminer la distance entre deux distributions associées, d'une part, à la réponse du modèle stochastique de prise en compte des incertitudes géométriques et matérielles, et, d'autre part, aux mesures expérimentales des mêmes paramètres à l'analyseur d'impédance. Une distribution peut être vue comme un ensemble de clusters où chaque cluster est représenté par sa moyenne et la fraction de la distribution qui appartient à ce cluster. Une telle représentation est souvent appelée signature de la distribution. Ce problème peut être formalisé comme un problème de programmation linéaire comme suit.

Soit $P = (p_1, \omega_{p1}), \dots, (p_m, \omega_{pm})$ la première signature comprenant m clusters, où p_i représente un cluster de poids ω_{pi} ; $Q = (q_1, \omega_{q1}), \dots, (q_n, \omega_{qn})$ la seconde signature de n clusters ; et $D = [d_{ij}]$ la matrice des distances au sol, où d_{ij} est la distance au sol entre les clusters p_i et q_j .

Nous voulons déterminer le flux $F = [f_{ij}]$ (où f_{ij} est le coût entre p_i et q_j) qui minimise le coût global :

$$WORK(P, Q, F) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_{ij} d_{ij}, \quad (D.5)$$

sous les contraintes suivantes :

$$f_{ij} \geq 0, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \quad (D.6a)$$

$$\sum_{j=1}^n f_{ij} \leq \omega_{pi}, 1 \leq i \leq m \quad (D.6b)$$

$$\sum_{i=1}^m f_{ij} \leq \omega_{qj}, 1 \leq j \leq n \quad (D.6c)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_{ij} = \min \left(\sum_{i=1}^m \omega_{pi}, \sum_{j=1}^n \omega_{qj} \right) \quad (D.6d)$$

La première contrainte permet le déplacement d'objets de P vers Q et non dans le sens opposé. Les deux contraintes suivantes limitent la quantité

maximale d'objets qui peuvent être envoyés par les clusters dans P à leurs poids, et à recevoir par les clusters dans Q pas plus grande que leurs poids. La dernière contrainte force à déplacer la quantité maximale d'objets possible. Cette quantité est appelée le flux total. Lorsque le flux optimal F est déterminé, on peut définir la distance de déplacement de terre (EMD pour Earth Mover's Distance) comme le travail normalisé par le flux total :

$$EMD(P, Q) = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_{ij} d_{ij}}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_{ij}} \quad (D.7)$$

La EMD dispose les propriétés suivantes :

- elle permet d'étendre naturellement la notion de distance entre deux éléments simples à celle de distance entre deux ensembles ou deux distributions d'objets;
- elle peut être appliquée de façon générale aux signatures de tailles différentes, et par ricochet des histogrammes;
- elle correspond mieux à la similarité perceptive que d'autres mesures, lorsque la distance au sol est significative;
- elle est bornée inférieurement par la distance entre les centres de masse de deux signatures lorsque la distance au sol est induite par une norme.

En général, la taille des instances pratiques à résoudre est assez large. Ainsi, ce calcul de distance de *Wasserstein* peut entraîner des charges de calcul assez importantes. Il existe différentes méthodes permettant de résoudre ce problème. Parmi les méthodes les plus connues, on retrouve :

- l'algorithme de *Sinkhorn* qui résout de façon heuristique le problème basique de transport optimal. Cet algorithme simplifie le problème en lissant l'espace des solutions (ce qui a pour effet d'étaler un peu le sable transporté), permettant ainsi l'utilisation d'outils d'optimisation plus classiques.
- les algorithmes basés sur la programmation linéaire qui résolvent de façon exacte le problème de transport optimal en formulant et en résolvant un problème de flux de coût minimum non capacitif équivalent [113].

Références

- [1] B. Moller, M. Beer, W. Graf, and J.U. Sickert. Fuzzy finite element method and its application. *Trends in computational structural mechanics*, 2001.
- [2] D. Moens and M.Hanss. Non-probabilistic finite element analysis for parametric uncertainty treatment in applied mechanics: Recent advances. *Finite Elements in Analysis and Design*, 47(1):4 – 16, 2011.
- [3] S. Valiappan and T.D. Pham. Elasto-plastic finite element analysis with fuzzy parameters. *International journal for numerical method in engineering*, 38(4):531 – 548, 1995.
- [4] C. Papadimitriou, L.S. Katafygiotis, and J.L. Beck. Approximate analysis of response variability of uncertain linear systems. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 10(4):251 – 264, 1995.
- [5] C. Micaletti, A.S. Kakmak, S.R.K. Nielsen, and H.U. Koyluglu. A solution method for linear and geometrically nonlinear MDOF systems with random properties subject to random excitation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 13(2):85 – 95, 1998.
- [6] V. Papadopoulos and M. Papadrakakis. Stochastic finite element-based reliability analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 13(1):53 – 65, 1998.
- [7] K. Beddek. *Propagation d'incertitudes dans les modèles éléments finis en électromagnétisme – application au contrôle non destructif par courants de Foucault*. PhD thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2012.
- [8] B. Sudret, M. Berveiller, and M. Lemaire. Éléments finis stochastiques en élasticité linéaire. *C. R. Mécanique*, 332(332):531–537, 2004.
- [9] C. Canuto and T. Kazubek. A fictitious domain approach to the numerical solution of PDEs in stochastic domains. *Numerical mathematik*, 107(2):257–293, 2007.
- [10] A. Clement. *Élément finis étendus pour calcul des structures à géométrie aléatoire: application à la prise en compte de la corrosion de structures en région littorale*. PhD thesis, Université de Nantes, 2008.

-
- [11] A. Nouy, A. Clement, F. Schoefs, and N. Moes. An extended stochastic finite element method for solving stochastic differential equations on random domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(52):4663–4682, 2008.
- [12] A. Nouy. *Contributions à la quantification et à la propagation des incertitudes en mécanique numérique*. GeM - UMR CNRS 6183, Université de Nantes, 2008.
- [13] D.H. Mac. *Résolution numérique en électromagnétisme statique de problèmes aux incertitudes géométriques par la méthode de transformation : application aux machines électriques*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers Paris Tech – Centre de Lille, 2012.
- [14] M. Lemaire. Approche pratique des éléments finis stochastiques – variables aléatoires. *Techniques de l'ingénieur*, 1(5028), 2015.
- [15] B. Torresani. Méthodes mathématiques pour le traitement des signaux et des images. *Techniques de l'ingénieur*, 1(490), 2011.
- [16] R. Ghanem and P. Spanos. *Stochastic finite element : A spectral approach*. Dover, NY, 1991.
- [17] S. Marelli and B. Sudret. *Polynomial Chaos Expansion-UQLab User manuel, Report UQLab.V1.0.104*. Chair of Risk, Safety & Uncertainty Quantification, 2017.
- [18] A. Olsson, G.E. Sandberg, and O. Dahlblom. On latin hypercube sampling for structural reliability analysis. *Structural Safety*, 25(1):47–68, 2003.
- [19] F. Yamazaki, M. Shinozuka, and G. Dasgupta. Neumann expansion for stochastic finite element analysis. *Journal of Eng. Mech. ASCE*, 114(8), 1988.
- [20] A. Ajayi. *Direct Computation of Statistical Variations in Electromagnetic Problems*. PhD thesis, University of Nottingham, Electrical and Electronic Engineering School, 2008.
- [21] C. Andrew, C. Austin, and C.D. Sarris. Efficient analysis of geometrical uncertainty in the FDTD method using polynomial chaos with application to microwave circuits. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Technics*, 61(12):4293 – 4301, 2013.

-
- [22] S.D. Chakraborty and S.S. Dey. Stochastic finite element method for spatial distribution of material properties and external loading. *Computers and Structures*, 55(1):41 – 45, 1995.
- [23] Z. De Grève. *Modélisation numérique de composants magnétiques multi-enroulements sollicités à haute fréquence*. PhD thesis, Université de Mons, FPMs, 2012.
- [24] R. Asensi, R. Prieto, J. A. Cobos, and J. Uceda. Modeling high-frequency multiwinding magnetic components using finite-element analysis. *IEEE Trans. on Magn.*, 43(10):3840 – 3850, 2007.
- [25] Z. De Grève, O. Deblecker, and J. Lobry. Numerical modeling of capacitive effects in HF multi-winding transformers. Part I: a rigorous formalism based on the electrostatic equations. *IEEE Trans. on Magn.*, 49(5):2017 – 2020, 2013.
- [26] Z. De Grève, J. Siau, G. Meunier, and O. Chadebec J.-M. Guichon. A mixed surface volume integral formulation for the modeling of high-frequency coreless inductors. *IEEE Trans. Magn.*, 52(3), 2016.
- [27] P. Dular and C. Geuzaine. A general environment for the treatment of discrete problems and its applications to finite element method. *IEEE Trans. on Magn.*, 34(5):3395 – 3398, 1998.
- [28] C. Geuzaine and J. Remacle. A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11):1309 – 1331, 2009.
- [29] R. Lebourgeois. Ferrites faibles pertes pour applications fréquentielles. *Techniques de l'ingénieur*, 2(1760), 2014.
- [30] Ferroxcube. *Soft Ferrites and Accessories*. FERROXCUBE Data Handbookn, 2013.
- [31] A. Goldman. *Modern Ferrite Technology*. Springer, 2006.
- [32] S. Clénet. Uncertainty quantification in computational electromagnetics : The Stochastic approach. *ICs Newsletter*, 20(1):2–12, 2013.
- [33] Y. Kim, J. Hong, and J. Hur. Torque characteristic analysis considering the manufacturing tolerance for electric machine by stochastic response surface method. *IEEE Trans. Ind. Applications*, 39(3):713 – 719, 2003.

- [34] G. Ombach and J. Junak. Design of PM brushless motor taking into account tolerances of mass production - six sigma design method. *42nd IAS Annual Meeting*, 42(3), 2007.
- [35] Z. Ren. Formulation for eddy-current problems in multiply connected regions. *IEEE Trans. on Magn.*, 38(2):557–560, 2002.
- [36] G. Lossa, O. Deblecker, and Z. DeGrève. Comparison of potential formulations for the extraction of RL parameters of wound inductor. *IEEE Xplore*, 2018. In *Proc. Int. Workshop on Comp., Electromagn., Machine Intelligence*.
- [37] P. Dular and W. Legros. Coupling of local and global quantities in various finite element formulations and its application to electrostatics, magnetostatics and magneto-dynamics. *IEEE Trans. on Magn.*, 34(5):3078–3081, 1998.
- [38] P. Dular. The benefits of nodal and edge elements coupling for discretizing global constraints in dual magnetodynamic formulations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 168(1-2), 2004.
- [39] M. Pellika, S. Suuriniemi, and C. Geuzaine. Homology and cohomology computation in finite element modeling. *SIAM J. Sci. Comp.*, 35(3):1195–1214, 2013.
- [40] Y. Le Ménach. *Contribution à la modélisation numérique des phénomènes électromagnétiques 3D en basse fréquence*. Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Lille 1 Sciences et Technologie, 2012.
- [41] F. Luiz Santos Garcia. *Modélisation de composants électromagnétiques haute fréquence par la Méthode des éléments FUHS*. PhD thesis, Laboratoire de Génie Electrique de Grenoble, 2012.
- [42] R.V. Sabariego. *The Fast Multipole Method for Electromagnetic Field Computation in Numerical and Physical Hybrid Systems*. PhD thesis, Université de Liège, Fac. des Sciences Appliquées, 2004.
- [43] R. Lebourgeois. Ferrites doux pour l'électronique de puissance. *Techniques de l'ingénieur*, 2160, 2005.
- [44] G.R. Skutt. *High-frequency dimensionnal effects in ferrite-core magnetic devices*. PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute, USA, 1998.

-
- [45] P. Robert. *Traité d'Électricité : matériaux de l'électrotechnique, volume 2*. École polytechnique fédérale de Lausanne, 1979.
- [46] P. Megret. *Cours d'Électricité Générale, volume 3, Les Etats Variables*. Faculté Polytechnique de Mons, 2008.
- [47] A. Stadler, M. Albach, and A. Lindner. A practical method to measure electrical AC conductivity of MnZn ferrites using conventional toroids. *Struct. Saft*, 46(2):678–681, 2010.
- [48] P. Fouassier. *Modélisation électrique des composants magnétiques haute fréquence : prise en compte de la température et caractérisation des ferrites*. PhD thesis, Institut Polytechnique de Grenoble (INPG) - G2ELab, 1998.
- [49] J.-F. Gieras, E. Santini, and M.W. Wing. Calculation of synchronous reactances of small permanent-magnet alternating-current motors: comparison of analytical approach and finite element method with measurements. *IEEE Trans. on Magn.*, 34(5):3712 – 3720, 1998.
- [50] R. Wang and N.A. Demerdash. Comparison of load performance and other parameters of extra high speed modified lundell alternators for 3-d-fe magnetic field solutions. *IEEE Trans. Energy Conversion*, 34(2), 1992.
- [51] M. Islam, J. Pippuri, and A. Arkkio. Design of pm brushless motor taking into account tolerances of mass production - six sigma design method. *IET Electric Power Applications*, 1(5), 2007.
- [52] X. Dexin, Y. Yingying, B. Baodong, and N. Takahashi. Circulating current computation and transposition design for large current winding of transformer with multi-section strategy and hybrid optimal method. *IEEE Trans. on Magn.*, 36(4):1014 – 1017, 2000.
- [53] A. Lehtikoinen, N. Chiodetto, E. Lantto, A. Arkkio, and A. Belahcen. Monte carlo analysis of circulating currents in random-wound electrical machines. *IEEE Trans. on Magn.*, 52(8), 2016.
- [54] F. Henrotte, B. Meys, H. Hedia, P. Dular, and W. Legros. Finite element modelling with transformation techniques. *IEEE Trans. on Magn.*, 35(3), 1999.
- [55] D. Xiu and G.E. Karniadakis. The Weiner-Askey polynomial chaos stochastic differential equations. *SIAM J. SCI. Comput*, 24(2):619 – 644, 2002.

-
- [56] S. Vidal. *Café Math : Monte Carlo Integration*. Math Blog, 2012.
- [57] C. Helton and F.J. Davis. Latin hypercube sampling and the propagation of uncertainty in analyses of complex systems. *Reliability Engineering & System Safety*, 81(1):23–69, 2003.
- [58] M. Ferrari and S. Bellini. Importance sampling simulation of turbo product codes. *ICC2001, The IEEE International Conference on Communications*, 9:2773–2777, 2001.
- [59] S. Marelli and B. Sudret. Uqlab: A framework for uncertainty quantification in MATLAB. *ICVRAM 2014*, 2:2554–2563, 2014.
- [60] B. Cleve Moler. Design of an interactive matrix calculator. *National computer conference*, 80, 1980.
- [61] G. Blatman and B. Sudret. Sparse polynomial chaos expansions and adaptive stochastic finite elements using a regression approach. *Comptes Rendus Mécanique*, 336(6):518–523, 2008.
- [62] P. Comon. Analyse en composantes indépendantes et identification aveugle. *Proc. colloque GRETSI*, 7(5), 1990.
- [63] H. Ould-Baba. *Analyse en Composantes Indépendantes Multidimensionnelles via des cumulants d’ordres variés*. PhD thesis, ‘Université de Technologie de Compiègne, Laboratoires L.M.A.C et ROBERVAL, 2014.
- [64] G. Lossa, O. Deblecker, and Z. DeGrève. Influence of the geometrical uncertainties on the RLC parameters of wound inductors modeled using the finite element method. *IEEE Trans. on Magn.*, 53(6), 2017.
- [65] B. Sudret. Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions. *Elsevier*, 93(7):964–979, 2008.
- [66] S. Marelli, C. Lamas, K. Konakli, C. Mylonas, P. Wiederkehr, and B. Sudret. Uqlab user manual – Sensitivity analysis. Technical report, Chair of Risk, Safety and Uncertainty Quantification, ETH Zurich, 2021. Report # UQLab-V1.4-106.
- [67] E. Specht. High density packings of equal circles in rectangles with variable aspect ratio. *Computers & Operations Research*, 40(1):58 – 69, 2013.
- [68] E.C. Snelling. *Soft Ferrites - Properties and Applications*. Mullards Research Laboratories, Ilife books Ltd, 1969.

- [69] Y. Xiangyu, L. Ninghao, H. Weipeng, and Z. Tao. A node deployment algorithm based on Van Der Waals force in wireless sensor networks. *International Journal of Distributed Sensor Networks*, 9(10), 2013.
- [70] J. Chen, L. Shijian, and S. Youxian. Novel deployment scheme for mobile sensor networks. *Sensors*, 7(11):2907–2919, 2013.
- [71] MATLAB. *Matlab R2020a, Computer Software*. The MathWorks Inc., 2020.
- [72] G. Polizos, E. Tuncer, V. Tomer, I. Sauers, A. Clive Randall, and E. Manias. *Dielectric Spectroscopy of Polymer Based Nanocomposite Dielectrics with Tailored Interfaces and Structured Spatial Distribution of Fillers*, volume 24. CRC Press, 2013.
- [73] C. Liang. *Caractérisations électriques de polymères conducteurs intrinsèques Polyaniline/Polyuréthane dans une large gamme de fréquence (DC à 20 GHz)*. PhD thesis, Université du Littoral Côte d’Opale, 2011.
- [74] MultiComp Pro. *Copper enameled wire*. Datasheet, 2015.
- [75] G. Lossa, O. Deblecker, and Z. DeGrève. Influence of material uncertainties on the RLC parameters of wound inductors modeled using the finite element method. *Open Physics*, 16(1):227–231, 2018.
- [76] T.S. Valayutham, W.H. Abd Majid, and S.N. Gan. Dielectric behaviour of polyurethane coatings derived from palm oil oleic acid-based polyols – A Renewable Ressource. *Journal of Oil Palm Research*, 24(8):1260–1266, 2012.
- [77] G. Meunier, V. Charmouille, C. Guérin, P. Labie, and Y. Maréchal. Homogenization for periodical electromagnetic structure: Which formulation? *IEEE Trans. on Magn.*, 46(8):3409–3412, 2010.
- [78] R. Sabariego, P. Dular, and J. Gyselinck. Time-domain homogenization of windings in 3D finite element models. *IEEE Trans. on Magn.*, 44(6):1302–1305, 2008.
- [79] T. Kanit, S. Forest, I. Galliet, V. Mounoury, and D. Jeulin. Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach. *Elsevier*, 40:3647–3679, 2003.
- [80] F. Otto, A. Gloria, and M. Duerinckx. Characterization of fluctuations in stochastic homogenization. *GAMM AGUQ*, 5(5), 2018.

-
- [81] S. Yang, J. Dirrenberger, E. Monterio, and N. Ranc. Representative volume element size determination for viscoplastic properties in polycrystalline materials. *Elsevier*, 158(3):210–219, 2019.
- [82] R. Hill. Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles. *Elsevier*, 11(5):357–372, 1963.
- [83] B. Banerjee, C.M. Cady, and D.O. Adams. Micromechanics simulations of glass–estane mock polymer bonded explosives. *IOP Science*, 11(4), 2003.
- [84] G. Lossa, O. Deblecker, and Z. De Grève. Building fast stochastic surrogate models for extracting RL parameters of wound inductors modeled using FEM. *IEEE Xplore*, 2021. In *Proc. IEEE Conf. on Electromagn. Field Computation*.
- [85] K. Niyomsatian, J.V.D. Keybus, R. Sabariego, and J. Gyselinck. Frequency-domain homogenization for impedance characterization of litz-wire transformers in 2D finite element models. *IEEE Digital Library*, 2016. In *Proc. Int. Conf. on Ecological vehicles and Renewable Energies*.
- [86] Ligo Elec. LTD. *Ferrite Cores Catalogue*. Ligo Electronics Products, 2004.
- [87] Y. Magnetcom. *NiZn Ferrite Material Characteristics*. China Professional Ferrite Core Supplier, 2005.
- [88] F. Mazeleyrat. *Introduction à la physique des matériaux électromagnétiques*. Institut Universitaire de Formation des Maîtres de Créteil, 2006.
- [89] Wayne Kerr Electronics. *Precision Impedance Analysers 6500B Series, User Manuel*. Wayne Kerr Electronics, 2008.
- [90] J.-P. Kéradec. Transformateurs HF à n enroulements - identification expérimentale. *Techniques de l'ingénieur*, 3059(3059), 2009.
- [91] D.D. Yaya. *Conception, réalisation et caractérisation d'inductances planaires à couches magnétiques*. PhD thesis, Université Jean Monnet de Saint-Étienne, LT2C, 2013.
- [92] J. Matousek and B. Gartner. *Understanding and Using Linear Programming*. Universitext, Springer, 2007.

-
- [93] J. Lobry and O. Deblecker. *Cours de CAO des systèmes énergétiques*, volume 3. Université de Mons, FPMs, 2005.
- [94] MultiComp Pro. Radial leaded inductor. *Farnell.com*, 1864380, 2020.
- [95] Y. Rubner, C. Tomasi, and L.J. Guibas. A metric for distributions with applications to image databases. *IEEE International Conference on Computer Vision*, 15:59–66, 1998.
- [96] D.HF. Mac, S. Clénet, J.C. Mipo, and I. Tsukerman. A priori error indicator in the transformation method for problems with geometric uncertainties. *IEEE Trans. on Magn.*, 49(5), 2013.
- [97] R. Hiptmair, F. Kramer, and J. Ostrowski. A robust Maxwell formulation for all frequencies. *IEEE Trans. Magn.*, 44(6):682 – 685, 2008.
- [98] C.A. Valdivieso. *Contribution to the Modeling of Homogenized Windings with the Finite Element Method : eddy-Current and Capacitive Effects*. PhD thesis, Université Grenoble Alpes, 2021.
- [99] B.P. Dowell. Effects of eddy currents in transformer windings. *IEEE Proceedings*, 113(8), 1966.
- [100] J.A. Ferreira. Improved analytical modeling of conductive losses in magnetic components. *IEEE Trans. on Power Electronics*, 9(1):127–131, 1994.
- [101] F. Robert. *Modélisation et simulation de transformateurs pour alimentations à découpage*. PhD thesis, Université Libre de Bruxelles, 2001.
- [102] M. Joan. *Modélisation des paramètres R et L de matériels électriques bobinés par la méthode des éléments finis 3D*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2009.
- [103] E.B. Rosa and F.W. Grover. Formulas and tables for the calculation of mutual and self-inductance. *NBS Scientific paper*, 3(169), 1916.
- [104] H. Nagaoka. The inductance coefficients of solenoids. *Journal of the College of Science*, 27(6), 1909.
- [105] F.W. Grover. *Inductance Calculations—Working Formulas and Tables*. D. Van Nostrand, 1946.
- [106] A. Gérard. *La bobine - l'inductance - la self-induction*. F4FPS (Gérard), 2005.

-
- [107] H.A. Wheeler. Inductance formulas for circular and square coils. *Proceedings of the IEEE*, 10(537):1449–1450, 1982.
- [108] A.R. Roger. *L'émission et la réception d'amateur*. Paris, ETSF, 1979.
- [109] J.H. Lévy. *Inductance*. Carnets TSF, 2006.
- [110] Farnell Group. MCSHCH895-680KU inductor - radial leaded. *Multi-comp*, 3(3), 2011.
- [111] S. Dean and B. Illowsky. *Descriptive Statistics: Skewness and the Mean, Median, and Mode*. Barbara Illowsky, Ph.D., Susan Dean, Connexions, 2014.
- [112] E. Levina and P. Bickel. The Earth Mover's distance is the mallows distance: some insights from statistics. *Actes de l'ICCV*, pages 251–256, 2001.
- [113] N. Bonnell. Le transport optimal pour des applications en informatique graphique. *Interstices Info*, 46, 2017.

Modélisation des incertitudes géométriques et matérielles pour la caractérisation des composants magnétiques bobinés moyenne fréquence

Résumé : De nos jours, les problèmes de modélisation combinant des approches déterministes et stochastiques prennent une place de plus en plus importante en électromagnétisme computationnel. Dans ce contexte, la propagation d'incertitudes sur les paramètres d'entrée dans les modèles numériques et leur influence sur le résultat (la sortie) constitue un aspect important de cette thématique.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la modélisation et à la propagation d'incertitudes géométriques (liées aux positions de conducteurs dans la fenêtre de bobinage) et matérielles (liées aux propriétés matérielles du noyau ferrite et de l'isolant des conducteurs) dans l'extraction des paramètres RLC d'inducteurs bobinés moyenne fréquence par la méthode des éléments finis. Afin de contourner le problème lié à la dimension élevée du vecteur de variables aléatoires en entrée, l'approche utilisée consiste, d'une part, à transformer les incertitudes géométriques portant sur la constitution du bobinage en incertitudes matérielles (grâce à une méthode d'homogénéisation), et, d'autre part, à recourir à un substitut stochastique en polynôme de chaos du modèle déterministe de départ. Le gain en temps de calcul est estimé par comparaison avec l'usage d'un modèle stochastique de référence impliquant un tirage Monte Carlo.

Pour valider expérimentalement l'approche suivie, les distributions de paramètres RL obtenues en recourant au modèle réduit en polynômes de chaos sont ensuite comparées à la fois qualitativement et quantitativement avec l'expérience, et ce pour un lot d'environ trois cent inducteurs identiques. Enfin, une analyse de sensibilité fondée sur le modèle stochastique réduit est menée de telle sorte à identifier les entrées aléatoires les plus influentes sur les paramètres précités.

Mots clés : Inducteur bobiné, Incertitudes géométriques, Incertitudes matérielles, Substitut stochastique, Modèle déterministe, Éléments finis.
