

Dynamique Linéaire et Probabilités

Séminaire Jeune

AGNEESSENS Kevin

Service de Probabilités et Statistique
Département de Mathématique
Université de Mons

24 Novembre 2022



Système dynamique linéaire

Définition

Un **système dynamique linéaire** est un couple (E, T) où E est un espace de Banach séparable et $T : E \longrightarrow E$ une application linéaire et continue.

Idée : E est l'ensemble des états possibles d'un système (physique, économique, etc.), $T : E \longrightarrow E$ décrit l'évolution de ce système.

Exemples :

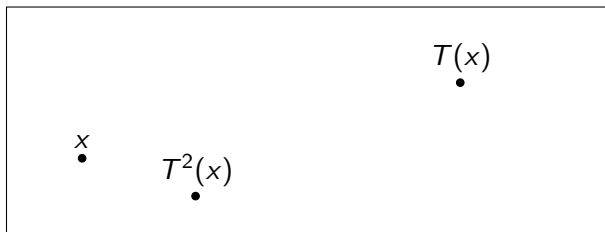
- $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \longmapsto (3y, 2x)$.
- Opérateur de dérivation $D : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C}), f \longmapsto f'$.

Notion d'orbite

Définition

Soit (E, T) un système dynamique linéaire. Pour tout $x \in E$, on définit l'**orbite** de x sous T :

$$\text{Orb}(x, T) = \{T^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

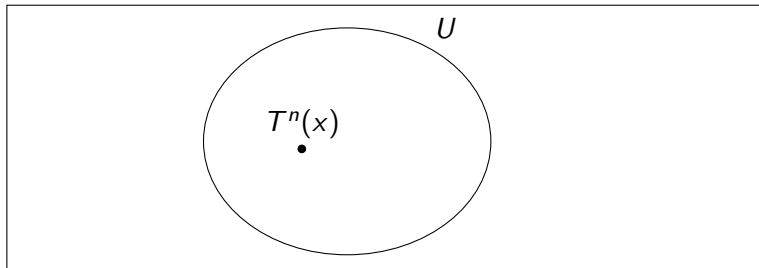


Hypercyclicité

L'hypercyclicité est la notion principale en Dynamique Linéaire.

Définition

Un opérateur $T : E \longrightarrow E$ est **hypercyclique** s'il existe $x \in E$ tel que $\overline{\text{Orb}(x, T)} = E$. Un tel vecteur est dit **hypercyclique** pour T .



Remarques

Deux remarques.

- L'hypercyclicité n'existe pas en dimension finie : pour tout $x \in E$, soit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n(x)\| = \infty$ ou soit $(T^n(x))_{n \geq 0}$ est borné.
- Tout espace de dimension infinie admet un opérateur hypercyclique (Ansari-Bernal).

Espace de suites

Un **espace de suites** désignera un des espaces suivants :

- $\ell^p = \left\{ x = (x_n)_{n \geq 0} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}, 1 \leq p < \infty,$
- $H(\mathbb{C})$ où $f \in H(\mathbb{C})$ est vue comme $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cong (a_0, a_1, \dots).$

Pour la suite, posons $e_n = (0, \dots, 0, \underset{n}{1}, 0, \dots), n \geq 0.$

Shifts à poids

Définition

Soit E un espace de suites, $(w_n)_{n \geq 1}$ une suite de scalaires. L'opérateur

$$B_w((x_0, x_1, \dots)) = (w_1 x_1, w_2 x_2, \dots), \quad x \in E,$$

est appelé **shift à poids**, avec suite de poids $w = (w_n)_{n \geq 1}$.

- Sur ℓ^p , B_w est continu ssi $(w_n)_{n \geq 1}$ est bornée. Exemple :
 $B_w : \ell^p \longrightarrow \ell^p : (x_0, x_1, \dots) \longmapsto \lambda(x_1, x_2, \dots).$
- $D : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C})$ est un shift à poids :
 $D(\sum_{n \geq 0} a_n z^n) = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}.$

Hypercyclicité des shifts à poids

Théorème (Grosse-Erdmann, 2000)

Soit E un espace de suite de Banach et $B_w : E \longrightarrow E$ un shift à poids. Alors B_w est hypercyclique si et seulement si

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| \left(\prod_{k=1}^n w_k \right)^{-1} e_n \right\| = 0$$

Exemples :

- Sur ℓ^p , B_w est hypercyclique ssi $\sup_{n \geq 1} \prod_{k=1}^n |w_k| = \infty$.
- Ainsi, B_w avec $w = (\lambda)_{n \geq 1}$ est hypercyclique ssi $|\lambda| > 1$.
- Sur $H(\mathbb{C})$, on peut montrer que $D : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C})$ est hypercyclique ssi $\sup_{n \geq 1} n!^{1/n} = \infty$, ce qui est vrai.

Trouver des vecteurs hypercycliques

Trouver un (des) vecteurs hypercycliques n'est pas évident : construction souvent "fastidieuse".

Exemple : B_w avec $w = (\lambda)_{n \geq 1}$, $|\lambda| > 1$, sur ℓ^p ,

$$x = \sum_{k \geq 0} \lambda^{-n_k} y^{(k)}$$

où $(y^{(k)})_{k \geq 0} \subseteq \ell^p$ dense et $(n_k)_{k \geq 0} \subseteq \mathbb{N}$ bien choisie.

Question

Peut-on construire un vecteur aléatoire, avec une construction simple, qui serait presque sûrement hypercyclique ?

Vecteur aléatoire

Dans la suite, soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

Définition

Soit E un espace de Banach séparable. Un **vecteur aléatoire** v est une application mesurable $v : \Omega \longrightarrow E$.

Ainsi, v est **presque sûrement hypercyclique** (pour un opérateur donné T) si

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega \mid v(\omega) \text{ hypercyclique pour } T\}\right) = 1.$$

Existence d'un vecteur aléatoire hypercyclique

Théorème

Soit (E, T) un système dynamique linéaire. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite dans E telle que

- $T(u_n) = u_{n-1}$ for every $n \in \mathbb{Z}$,
- $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n$ converge inconditionnellement,
- $\overline{\text{span}\{u_n \mid n \in \mathbb{Z}\}} = E$.

Alors il existe une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ i.i.d de variables aléatoires telle que le vecteur aléatoire

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n u_n$$

est p.s. hypercyclique pour T .

Application aux shifts à poids

Théorème

Soit $B_w : E \longrightarrow E$ un shift à poids. Si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} e_n / (w_1 \dots w_n)$ converge inconditionnellement alors il existe une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ i.i.d de variables aléatoires telle que le vecteur aléatoire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X_n}{w_1 \dots w_n} e_n$$

est p.s. hypercyclique pour B_w .

Preuve. Prendre $u_n = e_n / (w_1 \dots w_n)$ si $n \geq 0$, et $u_n = 0$ si $n < 0$.

Exemples

- Soit $B_w : \ell^p \longrightarrow \ell^p$ avec $w = (\lambda)_{n \geq 1}$, $|\lambda| > 1$. Alors $\sum_{n \geq 0} e_n / \lambda^n$ converge inconditionnellement et donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X_n}{\lambda^n} e_n$$

est p.s. hypercyclique pour B_w .

- Puisque $\sum_{n \geq 0} z^n / n! = e^z$ converge inconditionnellement sur $H(\mathbb{C})$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X_n}{n!} z^n,$$

est p.s. hypercyclique pour D .

Références



Frédéric Bayart et Étienne Matheron.

Dynamics of linear operators.

Cambridge University Press, Cambridge, 2009.



Karl-G. Grosse-Erdmann et Alfredo Peris Manguillot.

Linear chaos.

Universitext. Springer, London, 2011.