Modélisation de quelques systèmes biologiques

Damien Galant

CERAMATHS/DEMAV
Université Polytechnique
Hauts-de-France

Département de Mathématique
Université de Mons
Aspirant F.R.S.-FNRS

Mercredi 27 avril 2022

Cas d'actualité

BELGIQUE

Kinder Surprise et Schoko Bons, cinq versions des produits chocolatés Ferrero rappelés pour cause de salmonelle

04 avr. 2022 à 20:10 - mise à jour hier à 13:24 · 2 min

Par Belga

Source : https://www.rtbf.be/article/kinder-surprise-et-schoko-bons-cinq-versions-des-produits-chocolates-ferrero-rappeles-pour-cause-de-salmonelle-10969074

Cas d'actualité

MONDE

France : des enfants gravement contaminés par la bactérie E.coli à cause de pizzas Buitoni

30 mars 2022 à 18:02 · 2 min

Par Belga

Source : `https://www.rtbf.be/article/france-des-enfants-gravement-contamines-par-la-bacterie-ecoli-a-cause-de-pizzas-buitoni-10965967`

Doublement de bactéries dans une boîte de Petri

Dans des conditions optimales de croissance en laboratoire, la bactérie E. Coli *peut se diviser toutes les 20 minutes*.

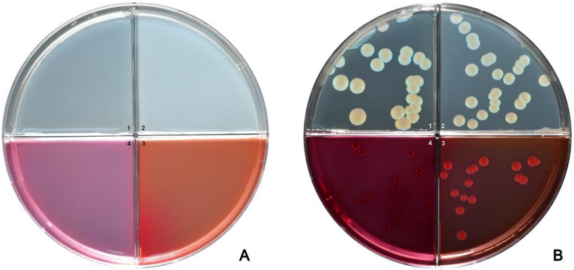


Figure: Culture d'E. Coli en boîte de Petri dans divers milieux de culture

Sources : https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC6015860/, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/26/E.coli_on_growing_on_various_agar_media.jpg

Doublement de bactéries dans une boîte de Petri

On suppose que le nombre de bactéries double toutes les 20 minutes.

Temps écoulé	Nombre de bactéries
0 min	1
20 min	
40 min	
1h	
1h20	
1h40	
2h	
⋮	
4h	
8h	
Une journée de 24h	

Doublement de bactéries dans une boîte de Petri

On suppose que le nombre de bactéries double toutes les 20 minutes.

Temps écoulé	Nombre de bactéries
0 min	1
20 min	2
40 min	
1h	
1h20	
1h40	
2h	
$\vdots$	
4h	
8h	
Une journée de 24h	

Doublement de bactéries dans une boîte de Petri

On suppose que le nombre de bactéries double toutes les 20 minutes.

Temps écoulé	Nombre de bactéries
0 min	1
20 min	2
40 min	4
1h	
1h20	
1h40	
2h	
$\vdots$	
4h	
8h	
Une journée de 24h	

Doublement de bactéries dans une boîte de Petri

On suppose que le nombre de bactéries double toutes les 20 minutes.

Temps écoulé	Nombre de bactéries
0 min	1
20 min	2
40 min	4
1h	8
1h20	
1h40	
2h	
$\vdots$	
4h	
8h	
Une journée de 24h	

Doublement de bactéries dans une boîte de Petri

On suppose que le nombre de bactéries double toutes les 20 minutes.

Temps écoulé	Nombre de bactéries
0 min	1
20 min	2
40 min	4
1h	8
1h20	16
1h40	
2h	
⋮	
4h	
8h	
Une journée de 24h	

Doublement de bactéries dans une boîte de Petri

On suppose que le nombre de bactéries double toutes les 20 minutes.

Temps écoulé	Nombre de bactéries
0 min	1
20 min	2
40 min	4
1h	8
1h20	16
1h40	32
2h	
$\vdots$	
4h	
8h	
Une journée de 24h	

Doublement de bactéries dans une boîte de Petri

On suppose que le nombre de bactéries double toutes les 20 minutes.

Temps écoulé	Nombre de bactéries
0 min	1
20 min	2
40 min	4
1h	8
1h20	16
1h40	32
2h	64
$\vdots$	$\vdots$
4h	
8h	
Une journée de 24h	

Doublement de bactéries dans une boîte de Petri

On suppose que le nombre de bactéries double toutes les 20 minutes.

Temps écoulé	Nombre de bactéries
0 min	1
20 min	2
40 min	4
1h	8
1h20	16
1h40	32
2h	64
$\vdots$	$\vdots$
4h	4 096
8h	
Une journée de 24h	

Doublement de bactéries dans une boîte de Petri

On suppose que le nombre de bactéries double toutes les 20 minutes.

Temps écoulé	Nombre de bactéries
0 min	1
20 min	2
40 min	4
1h	8
1h20	16
1h40	32
2h	64
⋮	⋮
4h	4 096
8h	16 777 216
Une journée de 24h	

Doublement de bactéries dans une boîte de Petri

On suppose que le nombre de bactéries double toutes les 20 minutes.

Temps écoulé	Nombre de bactéries
0 min	1
20 min	2
40 min	4
1h	8
1h20	16
1h40	32
2h	64
$\vdots$	$\vdots$
4h	4 096
8h	16 777 216
Une journée de 24h	4 722 366 482 869 645 213 696

Les puissances de 2

Les nombres de bactéries apparaissant dans le tableau précédent sont donnés par les puissances de 2. Par exemple,

$$64 = 2^{6} = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{6 \text{ facteurs}}$$

est le nombre de bactéries présentes après 6×20 minutes, c'est-à-dire après deux heures.

Les puissances de 2

Les nombres de bactéries apparaissant dans le tableau précédent sont donnés par les puissances de 2. Par exemple,

$$64 = 2^{6} = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{6 \text{ facteurs}}$$

est le nombre de bactéries présentes après 6×20 minutes, c'est-à-dire après deux heures.

De manière générale,

$$2^{n} = \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ facteurs}}$$

est le nombre de bactéries présentes après $n \times 20$ minutes.

Estimer les puissances de 2

L'égalité suivante est bien utile:

$$2^{10} = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{10 \text{ facteurs}} = 1\,024 \approx 1000.$$

Estimer les puissances de 2

L'égalité suivante est bien utile:

$$2^{10} = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{10 \text{ facteurs}} = 1\,024 \approx 1000.$$

Dès lors,

$$2^{20} = 2^{10} \times 2^{10} \approx 1\,000 \times 1\,000 = 1\,000\,000 = 10^6$$

Estimer les puissances de 2

L'égalité suivante est bien utile:

$$2^{10} = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{10 \text{ facteurs}} = 1\,024 \approx 1000.$$

Dès lors,

$$2^{20} = 2^{10} \times 2^{10} \approx 1\,000 \times 1\,000 = 1\,000\,000 = 10^{6}$$

et

$$2^{30} = 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \approx 1\,000 \times 1\,000 \times 1\,000 = 1\,000\,000\,000 = 10^{9}.$$

Estimer les puissances de 2

L'égalité suivante est bien utile:

$$2^{10} = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{10 \text{ facteurs}} = 1\,024 \approx 1000.$$

Dès lors,

$$2^{20} = 2^{10} \times 2^{10} \approx 1\,000 \times 1\,000 = 1\,000\,000 = 10^6$$

et

$$2^{30} = 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \approx 1\,000 \times 1\,000 \times 1\,000 = 1\,000\,000\,000 = 10^9.$$

Note: $2^{20} = 1\,048\,576$ et $2^{30} = 1\,073\,741\,824$.

Représentation graphique des puissances de 2

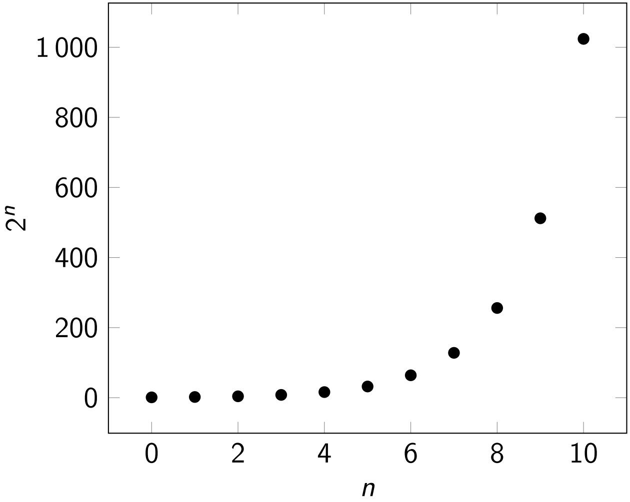


Figure: Représentation graphique de 2^0, 2^1, $\cdots$, 2^{10}

Datation par le carbone 14: principe

- Le carbone 14 est un isotope radioactif du carbone. Les autres isotopes naturels du carbone sont le carbone 12 et le carbone 13, qui sont stables.

Datation par le carbone 14: principe

- Le carbone 14 est un isotope radioactif du carbone. Les autres isotopes naturels du carbone sont le carbone 12 et le carbone 13, qui sont stables.
- La demi-vie du carbone 14 est d'environ 5 000 ans. Autrement dit, à partir d'une quantité initiale de carbone 14, la moitié se désintègre au bout de 5 000 ans.

Datation par le carbone 14: principe

- Étant donné un échantillon de matière, notons P la proportion

$$P = \frac{\text{nombre d'atomes de carbone 14}}{\text{nombre total d'atomes de carbone}}.$$

  Tant qu'un organisme (plante ou animal) est vivant, la proportion P pour cet organisme est la même que la proportion P obtenue à partir d'un échantillon de gaz de l'atmosphère ambiant.

Datation par le carbone 14: principe

- Étant donné un échantillon de matière, notons P la proportion

$$P = \frac{\text{nombre d'atomes de carbone 14}}{\text{nombre total d'atomes de carbone}}.$$

  Tant qu'un organisme (plante ou animal) est vivant, la proportion P pour cet organisme est la même que la proportion P obtenue à partir d'un échantillon de gaz de l'atmosphère ambiant.
- Lorsque cet organisme meurt, il n'échange plus d'atomes de carbone avec son environnement. Le carbone 14 contenu dans l'organisme se désintègre peu à peu selon une loi de décroissance exponentielle.

Datation par le carbone 14: principe

- Étant donné un échantillon de matière, notons P la proportion

$$P = \frac{\text{nombre d'atomes de carbone 14}}{\text{nombre total d'atomes de carbone}}.$$

  Tant qu'un organisme (plante ou animal) est vivant, la proportion P pour cet organisme est la même que la proportion P obtenue à partir d'un échantillon de gaz de l'atmosphère ambiant.
- Lorsque cet organisme meurt, il n'échange plus d'atomes de carbone avec son environnement. Le carbone 14 contenu dans l'organisme se désintègre peu à peu selon une loi de décroissance exponentielle.

Note: la proportion P est très faible: environ un atome pour mille milliards (soit une proportion de 10^{-12}).

Sources : https://fr.wikipedia.org/wiki/Carbone_14, https://laradioactivite.com/le-phenomene/lecarbone14

Datation par le carbone 14: décroissance exponentielle

Rappel:

$$P = \frac{\text{nombre d'atomes de carbone 14}}{\text{nombre total d'atomes de carbone}}.$$

À partir d'un échantillon de matière organique, on peut mesurer la proportion d'atomes de carbone 14 contenus dans cet échantillon.

Temps écoulé depuis le décès	Proportion de carbone 14
0 ans	P_{initial}
5 000 ans	
10 000 ans	
15 000 ans	
$\vdots$	

Datation par le carbone 14: décroissance exponentielle

Rappel:

$$P = \frac{\text{nombre d'atomes de carbone 14}}{\text{nombre total d'atomes de carbone}}.$$

À partir d'un échantillon de matière organique, on peut mesurer la proportion d'atomes de carbone 14 contenus dans cet échantillon.

Temps écoulé depuis le décès	Proportion de carbone 14
0 ans	P_{initial}
5 000 ans	$P_{\text{initial}}/2$
10 000 ans	
15 000 ans	
$\vdots$	

Datation par le carbone 14: décroissance exponentielle

Rappel:

$$P = \frac{\text{nombre d'atomes de carbone 14}}{\text{nombre total d'atomes de carbone}}.$$

À partir d'un échantillon de matière organique, on peut mesurer la proportion d'atomes de carbone 14 contenus dans cet échantillon.

Temps écoulé depuis le décès	Proportion de carbone 14
0 ans	P_{initial}
5 000 ans	$P_{\text{initial}}/2$
10 000 ans	$P_{\text{initial}}/4$
15 000 ans	
$\vdots$	

Datation par le carbone 14: décroissance exponentielle

Rappel:

$$P = \frac{\text{nombre d'atomes de carbone 14}}{\text{nombre total d'atomes de carbone}}.$$

À partir d'un échantillon de matière organique, on peut mesurer la proportion d'atomes de carbone 14 contenus dans cet échantillon.

Temps écoulé depuis le décès	Proportion de carbone 14
0 ans	P_{initial}
5 000 ans	$P_{\text{initial}}/2$
10 000 ans	$P_{\text{initial}}/4$
15 000 ans	$P_{\text{initial}}/8$
$\vdots$	

Datation par le carbone 14: décroissance exponentielle

Rappel:

$$P = \frac{\text{nombre d'atomes de carbone 14}}{\text{nombre total d'atomes de carbone}}.$$

À partir d'un échantillon de matière organique, on peut mesurer la proportion d'atomes de carbone 14 contenus dans cet échantillon.

Temps écoulé depuis le décès	Proportion de carbone 14
0 ans	P_{initial}
5 000 ans	$P_{\text{initial}}/2$
10 000 ans	$P_{\text{initial}}/4$
15 000 ans	$P_{\text{initial}}/8$
$\vdots$	$\vdots$

Datation par le carbone 14: décroissance exponentielle

Rappel:

$$P = \frac{\text{nombre d'atomes de carbone 14}}{\text{nombre total d'atomes de carbone}}.$$

À partir d'un échantillon de matière organique, on peut mesurer la proportion d'atomes de carbone 14 contenus dans cet échantillon.

Temps écoulé depuis le décès	Proportion de carbone 14
0 ans	P_{initial}
5 000 ans	$P_{\text{initial}}/2$
10 000 ans	$P_{\text{initial}}/4$
15 000 ans	$P_{\text{initial}}/8$
$\vdots$	$\vdots$

Que peut-on dire si la proportion d'atomes de carbone 14 mesurée dans des restes retrouvés lors de fouilles archéologiques vaut $P_{\text{initial}}/4$?

Représentation graphique des puissances de 1/2

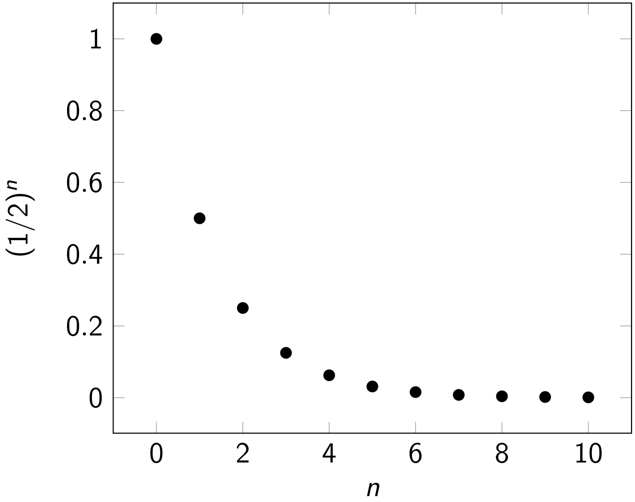


Figure: Représentation graphique de $(1/2)^0$, $(1/2)^1$, $\cdots$, $(1/2)^{10}$

Passage au continu

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des *produits* du genre

$$2^{n} = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ facteurs}}$$

ou

$$(1/2)^{n} = \underbrace{1/2 \times 1/2 \times 1/2 \times \cdots \times 1/2}_{n \text{ facteurs}}.$$

Passage au continu

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des *produits* du genre

$$2^{n} = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ facteurs}}$$

ou

$$(1/2)^{n} = \underbrace{1/2 \times 1/2 \times 1/2 \times \cdots \times 1/2}_{n \text{ facteurs}}.$$

Si la proportion de carbone 14 dans un organisme vaut P_{initial} au moment de son décès, quelle sera la proportion mesurée 2500 ans plus tard?

Passage au continu

Si la proportion de carbone 14 dans un organisme vaut P_{initial} *au moment de son décès, quelle sera la proportion mesurée 2500 ans plus tard?*

Passage au continu

Si la proportion de carbone 14 dans un organisme vaut P_{initial} au moment de son décès, quelle sera la proportion mesurée 2500 ans plus tard?

Il existe un nombre réel a, compris entre 0 et 1, tel que la proportion de carbone 14 est multipliée par a tous les 2500 ans.

Passage au continu

Si la proportion de carbone 14 dans un organisme vaut P_{initial} au moment de son décès, quelle sera la proportion mesurée 2500 ans plus tard?

Il existe un nombre réel a, compris entre 0 et 1, tel que la proportion de carbone 14 est multipliée par a tous les 2500 ans.
Nous obtenons le tableau suivant:

Temps écoulé depuis le décès	Proportion de carbone 14
0 ans	P_{initial}
2500 ans	
5 000 ans	

Passage au continu

Si la proportion de carbone 14 dans un organisme vaut P_{initial} au moment de son décès, quelle sera la proportion mesurée 2500 ans plus tard?

Il existe un nombre réel a, compris entre 0 et 1, tel que la proportion de carbone 14 est multipliée par a tous les 2500 ans.
Nous obtenons le tableau suivant:

Temps écoulé depuis le décès	Proportion de carbone 14
0 ans	P_{initial}
2500 ans	$P_{\text{initial}} \times a$
5 000 ans	

Passage au continu

Si la proportion de carbone 14 dans un organisme vaut P_{initial} au moment de son décès, quelle sera la proportion mesurée 2500 ans plus tard?

Il existe un nombre réel a, compris entre 0 et 1, tel que la proportion de carbone 14 est multipliée par a tous les 2500 ans.
Nous obtenons le tableau suivant:

Temps écoulé depuis le décès	Proportion de carbone 14
0 ans	P_{initial}
2500 ans	$P_{\text{initial}} \times a$
5 000 ans	$P_{\text{initial}} \times a \times a$

Passage au continu

Si la proportion de carbone 14 dans un organisme vaut P_{initial} au moment de son décès, quelle sera la proportion mesurée 2500 ans plus tard?

Il existe un nombre réel a, compris entre 0 et 1, tel que la proportion de carbone 14 est multipliée par a tous les 2500 ans.
Nous obtenons le tableau suivant:

Temps écoulé depuis le décès	Proportion de carbone 14
0 ans	P_{initial}
2500 ans	$P_{\text{initial}} \times a$
5 000 ans	$P_{\text{initial}} \times a \times a = P_{\text{initial}}/2$

Passage au continu

Si la proportion de carbone 14 dans un organisme vaut P_{initial} au moment de son décès, quelle sera la proportion mesurée 2500 ans plus tard?

Il existe un nombre réel a, compris entre 0 et 1, tel que la proportion de carbone 14 est multipliée par a tous les 2500 ans.
Nous obtenons le tableau suivant:

Temps écoulé depuis le décès	Proportion de carbone 14
0 ans	P_{initial}
2500 ans	$P_{\text{initial}} \times a$
5 000 ans	$P_{\text{initial}} \times a \times a = P_{\text{initial}}/2$

Nous en déduisons que $a^2 = 1/2$, donc

$$a = \sqrt{1/2} = \sqrt{2}/2 \approx 0,707.$$

La fonction 2^t

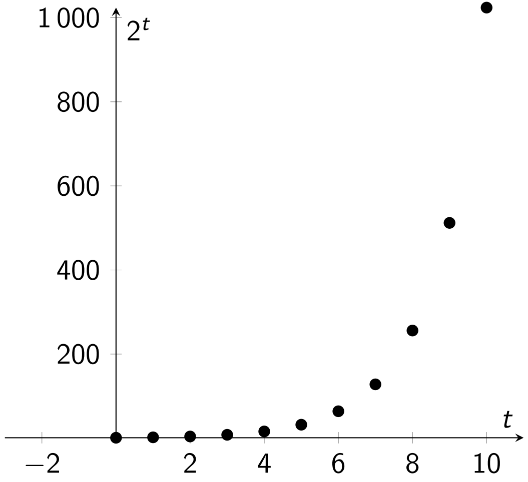


Figure: La fonction 2^t

La fonction 2^t

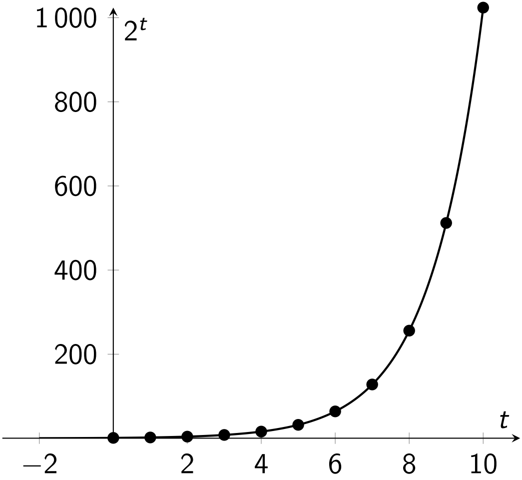


Figure: La fonction 2^t

La fonction $(1/2)^t$

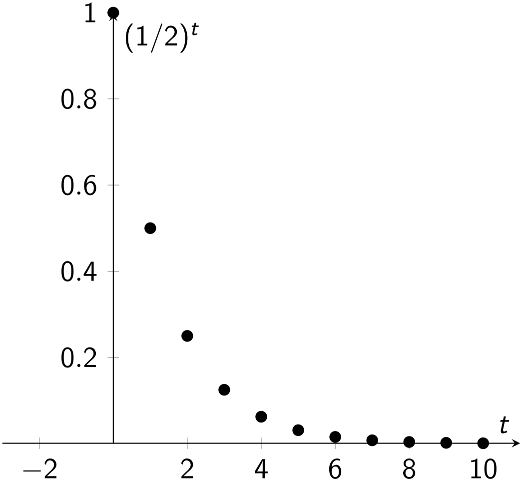


Figure: La fonction $(1/2)^t$

La fonction $(1/2)^t$

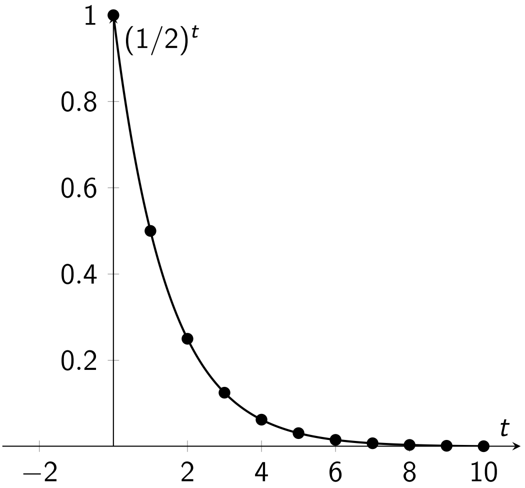
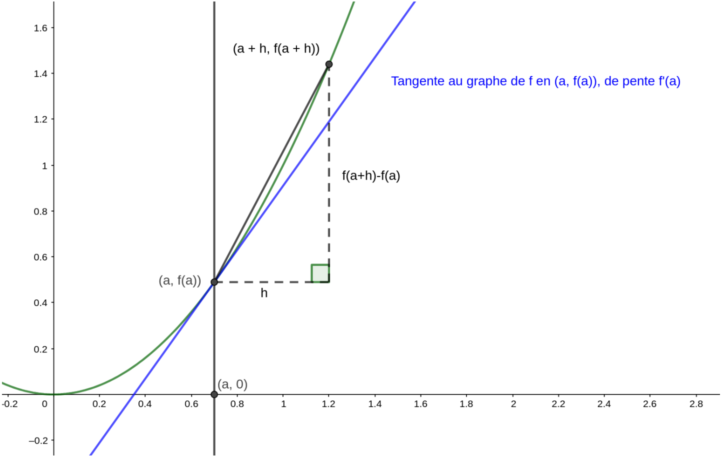


Figure: La fonction $(1/2)^t$

La dérivée

La dérivée est un moyen d'étudier la croissance d'une fonction d'une variable réelle.
La dérivée est égale à la pente de la tangente au graphe de la fonction f.



Exemples d'équations différentielles

- *Déterminer toutes les fonctions* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dérivables telles que*

$$f'(t) = 0$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exemples d'équations différentielles

- *Déterminer toutes les fonctions* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dérivables telles que*

  $$f'(t) = 0$$

  pour tout $t \in \mathbb{R}$*.*
  Les solutions sont données par $f(t) = k$ où k est une constante réelle.

Exemples d'équations différentielles

- *Déterminer toutes les fonctions* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dérivables telles que*

  $$f'(t) = 0$$

  pour tout $t \in \mathbb{R}$*.*
  Les solutions sont données par $f(t) = k$ où k est une constante réelle.

- *Déterminer toutes les fonctions* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dérivables telles que*

  $$f'(t) = 1$$

  pour tout $t \in \mathbb{R}$*.*

Exemples d'équations différentielles

- *Déterminer toutes les fonctions* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dérivables telles que*

  $$f'(t) = 0$$

  pour tout $t \in \mathbb{R}$.
  Les solutions sont données par $f(t) = k$ où k est une constante réelle.

- *Déterminer toutes les fonctions* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dérivables telles que*

  $$f'(t) = 1$$

  pour tout $t \in \mathbb{R}$.
  Les solutions sont données par $f(t) = t + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Exemples d'équations différentielles

- *Déterminer toutes les fonctions* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dérivables telles que*

  $$f'(t) = 0$$

  pour tout $t \in \mathbb{R}$*.*
  Les solutions sont données par $f(t) = k$ où k est une constante réelle.

- *Déterminer toutes les fonctions* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dérivables telles que*

  $$f'(t) = 1$$

  pour tout $t \in \mathbb{R}$*.*
  Les solutions sont données par $f(t) = t + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Remarque: les équations précédentes sont de la forme $f'(t) = g(t)$. Les solutions d'une telle équation sont données par $f(t) = \left(\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\right) + k$.

Problèmes de Cauchy

Les exemples précédents montrent qu'une équation différentielle "seule" admet souvent plusieurs solutions. Afin de déterminer une unique fonction, on peut par exemple ajouter une condition initiale et considérer ce qu'on appelle un *problème de Cauchy* :

$$\begin{cases} f'(t) & = & g(t, f(t)) \\ f(t_0) & = & f_0 \end{cases}$$

où f est la fonction inconnue, g est une fonction de deux variables donnée, t_0 et f_0 sont des nombres réels.

Problèmes de Cauchy

Les exemples précédents montrent qu'une équation différentielle “seule” admet souvent plusieurs solutions. Afin de déterminer une unique fonction, on peut par exemple ajouter une condition initiale et considérer ce qu'on appelle un *problème de Cauchy* :

$$\begin{cases} f'(t) & = & g(t, f(t)) \\ f(t_0) & = & f_0 \end{cases}$$

où f est la fonction inconnue, g est une fonction de deux variables donnée, t_0 et f_0 sont des nombres réels.

Exemple

Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} f'(t) & = & 2t, \\ f(1) & = & 3 \end{cases}$$

admet une unique solution donnée par $f(t) = t^2 + 2$.

Augustin Louis Cauchy

Mathématicien, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique, né à Paris le 21 août 1789 et mort à Sceaux le 23 mai 1857.

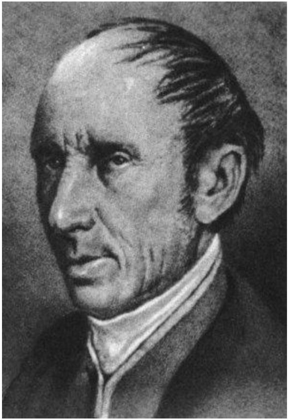


Figure: Augustin Louis, baron Cauchy.

Un problème de Cauchy important

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} f'(t) & = & f(t), \\ f(0) & = & 1. \end{cases}$$

Un problème de Cauchy important

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} f'(t) & = & f(t), \\ f(0) & = & 1. \end{cases}$$

Ce problème de Cauchy admet une unique solution: la fonction exponentielle $\exp(t) = \mathrm{e}^t$.

Un problème de Cauchy important

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} f'(t) &= f(t), \\ f(0) &= 1. \end{cases}$$

Ce problème de Cauchy admet une unique solution: la fonction exponentielle $\exp(t) = \mathrm{e}^t$.

La notation e^t est appropriée: en effet, pour tout naturel n, on a

$$\exp(n) = \mathrm{e}^n = \underbrace{\mathrm{e} \times \mathrm{e} \times \cdots \times \mathrm{e}}_{n \text{ facteurs}},$$

où le nombre e vaut environ $2,71828$.

La fonction exponentielle

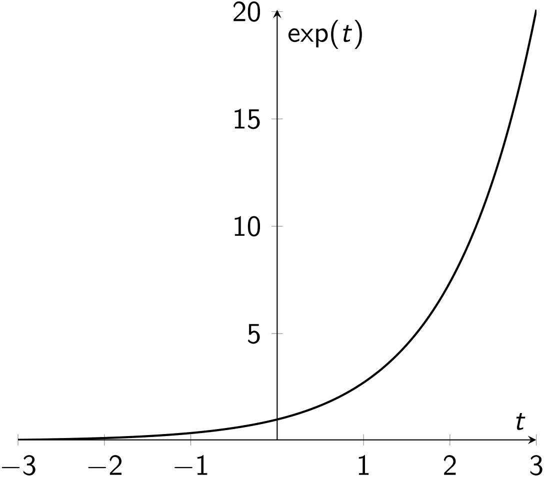


Figure: La fonction $\exp(t) = e^t$

Croissances et décroissances exponentielles à partir des équations différentielles

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} f'(t) &= a \cdot f(t), \\ f(0) &= 1, \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{R}$.

Croissances et décroissances exponentielles à partir des équations différentielles

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} f'(t) &= a \cdot f(t), \\ f(0) &= 1, \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{R}$.
La solution de ce problème de Cauchy est donnée par

$$f(t) = \mathrm{e}^{at}.$$

Dès lors,

Croissances et décroissances exponentielles à partir des équations différentielles

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} f'(t) &= a \cdot f(t), \\ f(0) &= 1, \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{R}$.
La solution de ce problème de Cauchy est donnée par

$$f(t) = \mathrm{e}^{at}.$$

Dès lors,

- Si $a > 0$: la solution est strictement croissante.

Croissances et décroissances exponentielles à partir des équations différentielles

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} f'(t) &= a \cdot f(t), \\ f(0) &= 1, \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{R}$.

La solution de ce problème de Cauchy est donnée par

$$f(t) = \mathrm{e}^{at}.$$

Dès lors,

- Si $a > 0$: la solution est strictement croissante.
- Si $a = 0$: la solution est constante, égale à 1 pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Croissances et décroissances exponentielles à partir des équations différentielles

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} f'(t) & = & a \cdot f(t), \\ f(0) & = & 1, \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{R}$.
La solution de ce problème de Cauchy est donnée par

$$f(t) = e^{at}.$$

Dès lors,

- Si $a > 0$: la solution est strictement croissante.
- Si $a = 0$: la solution est constante, égale à 1 pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- Si $a < 0$: la solution est strictement décroissante.

Solutions du problème de Cauchy précédent pour $a \in \{-1, 0, 1\}$

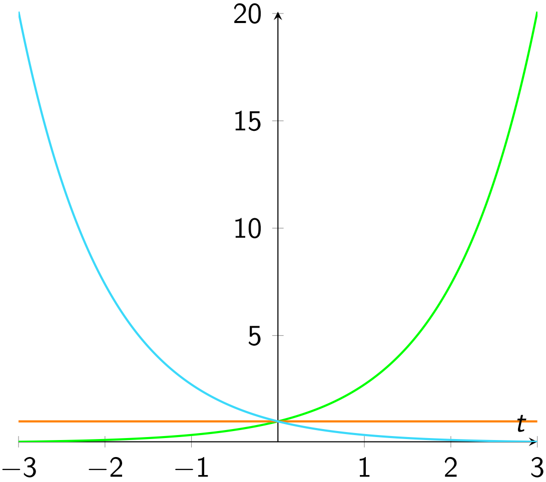


Figure: Les fonctions e^{-t}, $e^{0 \cdot t} = 1$ et e^{t}

Lien avec les puissances de 2

La fonction 2^t est de la forme e^{at} avec $a > 0$. En effet, il existe un nombre réel strictement positif, noté $\ln(2)$, tel que

$$2^t = e^{\ln(2)t}$$

pour tout nombre réel t.

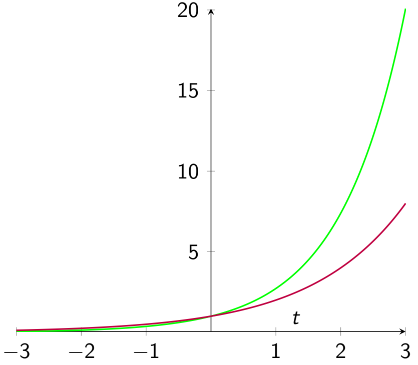


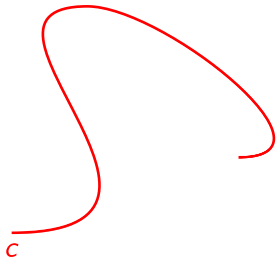
Figure: Les fonctions 2^t et e^t

Dérivée et vitesse

On considère une particule dont la trajectoire est donnée par une courbe paramétrée :

$$c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

où x et y sont deux fonctions réelles d'une variable réelle.



Dérivée et vitesse

Pour tout t, le vecteur

$$c'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

donne la vitesse instantanée de la particule au temps t. En particulier, $c'(t)$ est un vecteur tangent à la trajectoire c.

Vecteurs vitesse

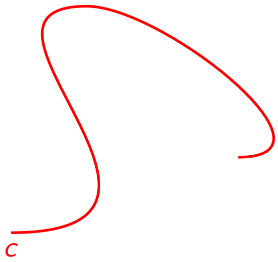


Figure: La courbe c et des vecteurs vitesse

Source : `https://tex.stackexchange.com/questions/37866/how-to-draw-tangent-vectors-and-component-vectors-on-a-curve`

Vecteurs vitesse

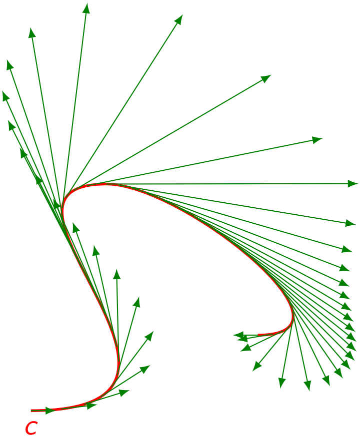
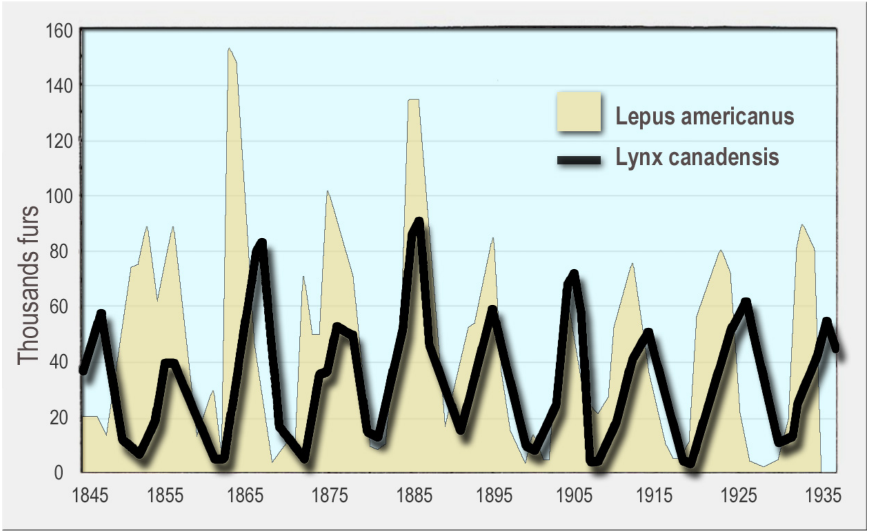


Figure: La courbe c et des vecteurs vitesse

Source : https://tex.stackexchange.com/questions/37866/how-to-draw-tangent-vectors-and-component-vectors-on-a-curve

Données de la Hudson's Bay Company



Source : `https://en.wikipedia.org/wiki/Lotka%E2%80%93Volterra_equations#/media/File:Milliers_fourrures_vendues_en_environ_90_ans_odum_1953_en.jpg`

Système proies-prédateurs

- Nous cherchons à modéliser un système biologique à deux espèces: une proie et un prédateur.

Système proies-prédateurs

- Nous cherchons à modéliser un système biologique à deux espèces: une proie et un prédateur.
- Exemple: lièvres d'Amérique et lynx du Canada

Sources :
https://fr.wikipedia.org/wiki/Li%C3%A8vre_d%27Am%C3%A9rique#/media/Fichier:Snowshoe_Hare,_Shirleys_Bay.jpg,
https://fr.wikipedia.org/wiki/Lynx_du_Canada#/media/Fichier:Lynx-canadensis.jpg

Système proies-prédateurs

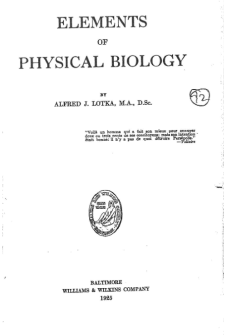
- Nous étudierons les fonctions $x(t)$ et $y(t)$, désignant respectivement le nombre de proies et de prédateurs en fonction du temps.

Système proies-prédateurs

- Nous étudierons les fonctions $x(t)$ et $y(t)$, désignant respectivement le nombre de proies et de prédateurs en fonction du temps.
- Pour ce faire, nous allons considérer le modèle de Lotka-Volterra, introduit par Alfred Lotka en étudiant un système chimique, puis appliqué par celui-ci à la dynamique des populations dans les années 1920. Vito Volterra publia indépendamment le même système d'équations en 1926.

Alfred James Lotka

Mathématicien, chimiste-physicien, statisticien et théoricien de la dynamique des populations, né à Lviv le 2 Mars 1880 et mort à Red Bank, New Jersey en 1949.



ELEMENTS

OF

PHYSICAL BIOLOGY

BY

ALFRED J. LOTKA, M.A., D.Sc.

"Voilà un homme qui a fait son mieux pour ennuyer deux ou trois cents de ses concitoyens; mais son intention était bonne: il n'y a pas de quoi détruire Persépolis."
—*Voltaire*

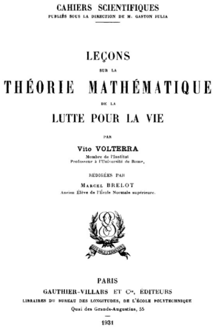
BALTIMORE
WILLIAMS & WILKINS COMPANY
1925

Figure: Alfred J. Lotka et son livre “Elements of Physical Biology”

Sources : https://fr.wikipedia.org/wiki/Alfred_James_Lotka,
https://en.wikipedia.org/wiki/Alfred_J._Lotka#/media/File:Alfred_J._Lotka.jpg,
https://archive.org/details/elementsofphysic017171mbp

Vito Volterra

Mathématicien et physicien italien né le 3 mai 1860 à Ancône et mort le 11 octobre 1940 à Rome. Il est connu pour ses travaux en équations intégrales et différentielles et est un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle.



CAHIERS SCIENTIFIQUES
PUBLIÉS SOUS LA DIRECTION DE M. GASTON JULIA

LEÇONS
SUR LA
THÉORIE MATHÉMATIQUE
DE LA
LUTTE POUR LA VIE

PAR
Vito VOLTERRA
Membre de l'Institut
Professeur à l'Université de Rome,

RÉDIGÉES PAR
MARCEL BRELOT
Ancien Élève de l'École Normale supérieure.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1931

Figure: Vito Volterra et son livre “Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie”

Sources : https://fr.wikipedia.org/wiki/Vito_Volterra, https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k29088s/f5.item

Les équations de Lotka-Volterra

Rappel: $x(t)$ désigne le nombre de proies, $y(t)$ désigne le nombre de prédateurs.

$$\begin{cases} x'(t) & = & x(t) \cdot \Big(\alpha - \beta y(t)\Big) \\ y'(t) & = & y(t) \cdot \Big(\delta x(t) - \gamma\Big) \end{cases}$$

Paramètres:

Les équations de Lotka-Volterra

Rappel: $x(t)$ désigne le nombre de proies, $y(t)$ désigne le nombre de prédateurs.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & x(t) \cdot \left(\alpha \qquad\qquad \right) \\ y'(t) & = & y(t) \cdot \left(\qquad\qquad \right) \end{array} \right.$$

Paramètres:

- α, taux de reproduction intrinsèque des proies (constant, indépendant du nombre de prédateurs);

Les équations de Lotka-Volterra

Rappel: $x(t)$ désigne le nombre de proies, $y(t)$ désigne le nombre de prédateurs.

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) \cdot \left(\quad - \beta y(t) \right) \\ y'(t) &= y(t) \cdot \left(\qquad\qquad \right) \end{cases}$$

Paramètres:

- α, taux de reproduction intrinsèque des proies (constant, indépendant du nombre de prédateurs);
- β, taux de mortalité des proies dû aux prédateurs rencontrés;

Les équations de Lotka-Volterra

Rappel: $x(t)$ désigne le nombre de proies, $y(t)$ désigne le nombre de prédateurs.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & x(t)\cdot\left(\qquad\qquad\right) \\ y'(t) & = & y(t)\cdot\left(\delta x(t)\qquad\right) \end{array}\right.$$

Paramètres:

- α, taux de reproduction intrinsèque des proies (constant, indépendant du nombre de prédateurs);
- β, taux de mortalité des proies dû aux prédateurs rencontrés;
- δ, taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies rencontrées et mangées;

Les équations de Lotka-Volterra

Rappel: $x(t)$ désigne le nombre de proies, $y(t)$ désigne le nombre de prédateurs.

$$\begin{cases} x'(t) & = & x(t) \cdot \left(\qquad\qquad\quad \right) \\ y'(t) & = & y(t) \cdot \left(\qquad\quad - \gamma \right) \end{cases}$$

Paramètres:

- α, taux de reproduction intrinsèque des proies (constant, indépendant du nombre de prédateurs);
- β, taux de mortalité des proies dû aux prédateurs rencontrés;
- δ, taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies rencontrées et mangées;
- γ, taux de mortalité intrinsèque des prédateurs (constant, indépendant du nombre de proies).

Les équations de Lotka-Volterra

Rappel: $x(t)$ désigne le nombre de proies, $y(t)$ désigne le nombre de prédateurs.

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) \cdot \Big(\alpha - \beta y(t)\Big) \\ y'(t) &= y(t) \cdot \Big(\delta x(t) - \gamma\Big) \end{cases}$$

Paramètres:

- α, taux de reproduction intrinsèque des proies (constant, indépendant du nombre de prédateurs);
- β, taux de mortalité des proies dû aux prédateurs rencontrés;
- δ, taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies rencontrées et mangées;
- γ, taux de mortalité intrinsèque des prédateurs (constant, indépendant du nombre de proies).

Équation différentielle vectorielle

Il est difficile de se représenter intuitivement le comportement d'un système d'équations différentielles.
Au lieu de considérer $x(t)$ et $y(t)$ séparément, on considère la fonction

$$f(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Équation différentielle vectorielle

Il est difficile de se représenter intuitivement le comportement d'un système d'équations différentielles.
Au lieu de considérer $x(t)$ et $y(t)$ séparément, on considère la fonction

$$f(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Le système

$$\begin{cases} x'(t) & = & x(t)\left(\alpha - \beta y(t)\right) \\ y'(t) & = & y(t)\left(\delta x(t) - \gamma\right) \end{cases}$$

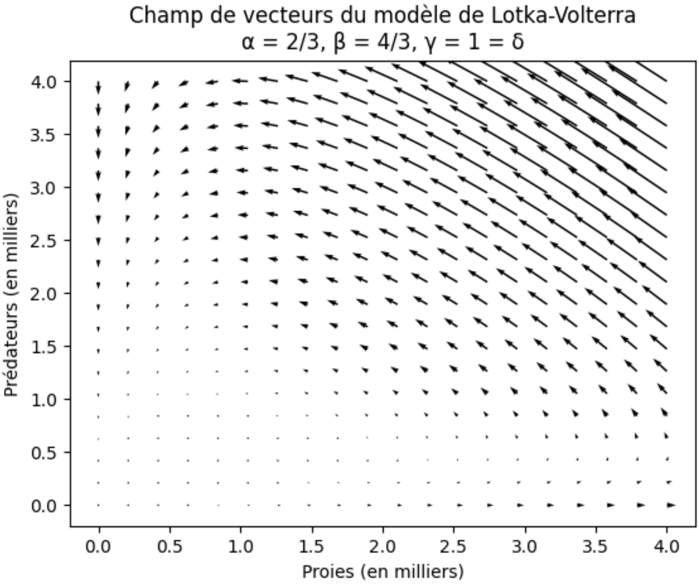
se réécrit

$$f'(t) = g(f(t))$$

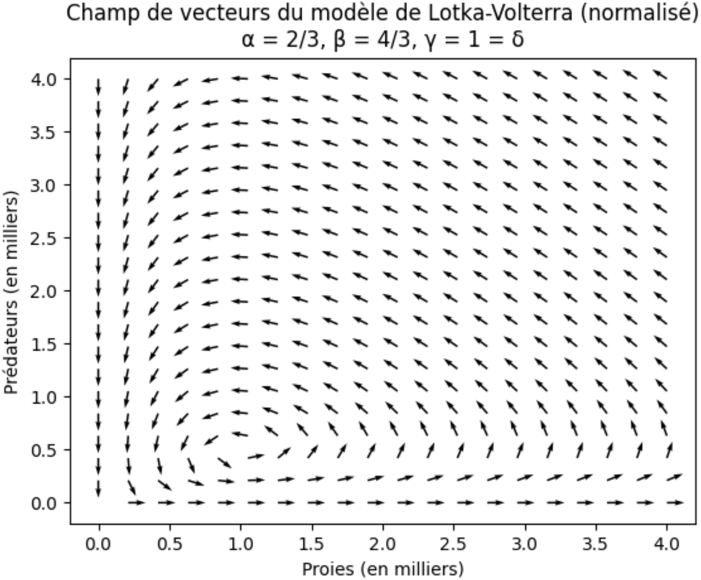
où

$$g(x,y) := \begin{pmatrix} x\left(\alpha - \beta y\right) \\ y\left(\delta x - \gamma\right) \end{pmatrix}.$$

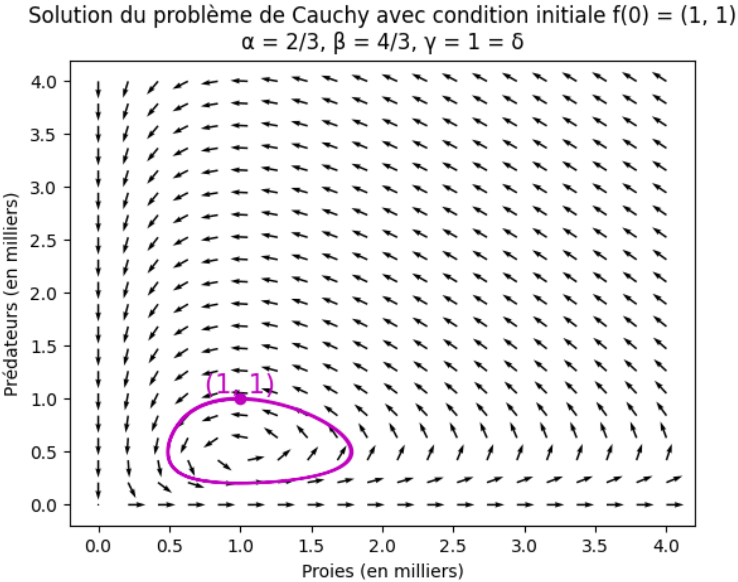
Interprétation graphique



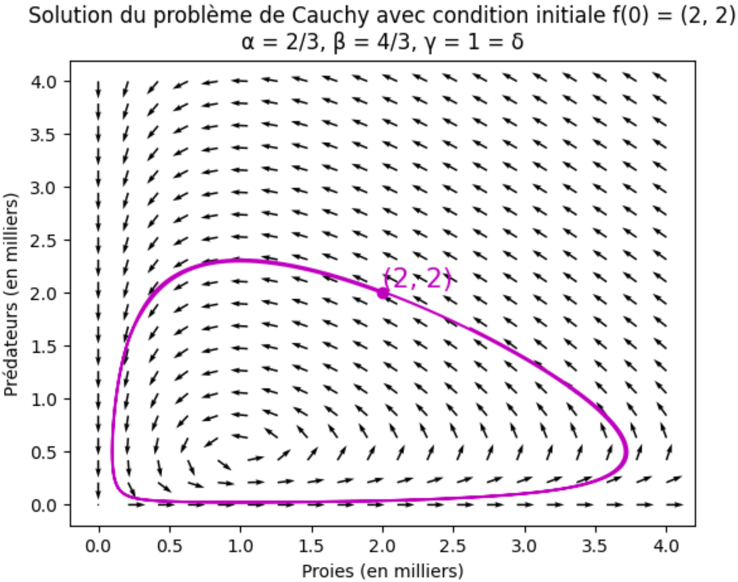
Interprétation graphique



Condition initiale $f(0) = (1, 1)$



Condition initiale $f(0) = (2, 2)$



Le point fixe

Graphiquement, on observe qu'il existe un unique point de coordonnées (x_0, y_0) avec $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$ en lequel le champ de vecteurs s'annule. On peut calculer les coordonnées de ce point:

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x\Big(\alpha - \beta y\Big) & = & 0 \\ y\Big(\delta x - \gamma\Big) & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha - \beta y & = & 0 \\ \delta x - \gamma & = & 0 \end{array} \right.$$

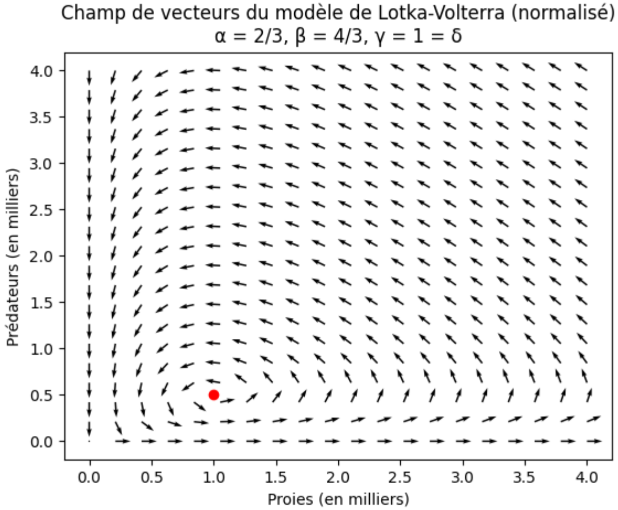
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \frac{\alpha}{\beta} \\ x & = & \frac{\gamma}{\delta} \end{array} \right.$$

Dès lors, le point fixe a pour coordonnées

$$\Big(x_0, y_0\Big) = \Big(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\Big).$$

Le point fixe: représentation graphique

Avec $\alpha = 2/3, \beta = 4/3, \gamma = \delta = 1$, on trouve $(x_0, y_0) = (1, 1/2)$.



Limitations du modèle

Nous avons considéré un modèle permettant d'expliquer un phénomène biologique remarquable.
Comme tout modèle, il comporte de nombreuses limitations:

Limitations du modèle

Nous avons considéré un modèle permettant d'expliquer un phénomène biologique remarquable.
Comme tout modèle, il comporte de nombreuses limitations:

- ce modèle ne tient compte que de deux espèces. En général, il faudrait considérer des écosystèmes bien plus complexes pour tenir compte de plus d'interactions entre espèces. Mathématiquement, cela ferait augmenter la dimension des données (il faudrait passer du plan $\mathbb{R}^2$ à l'espace $\mathbb{R}^3$, voire à $\mathbb{R}^n$ pour $n > 3$ selon le nombre d'espèces);

Limitations du modèle

Nous avons considéré un modèle permettant d'expliquer un phénomène biologique remarquable.
Comme tout modèle, il comporte de nombreuses limitations:

- ce modèle ne tient compte que de deux espèces. En général, il faudrait considérer des écosystèmes bien plus complexes pour tenir compte de plus d'interactions entre espèces. Mathématiquement, cela ferait augmenter la dimension des données (il faudrait passer du plan $\mathbb{R}^2$ à l'espace $\mathbb{R}^3$, voire à $\mathbb{R}^n$ pour $n > 3$ selon le nombre d'espèces);
- le modèle ne tient pas compte de nombreuses sources de variabilité (météo, maladies...).

Limitations du modèle (suite)

- Utiliser des nombres réels pour les tailles des populations n'est pas toujours réaliste. Il peut y avoir 1, 2, 3,... lièvres, mais pas 2,7!

Limitations du modèle (suite)

- Utiliser des nombres réels pour les tailles des populations n'est pas toujours réaliste. Il peut y avoir 1, 2, 3,... lièvres, mais pas 2,7!
- Problème de "l'atto-fox": comment interpréter un modèle prédisant *un milliardième de milliardième de renard?*

Limitations du modèle (suite)

- Utiliser des nombres réels pour les tailles des populations n'est pas toujours réaliste. Il peut y avoir 1, 2, 3,... lièvres, mais pas 2,7!
- Problème de "l'atto-fox": comment interpréter un modèle prédisant *un milliardième de milliardième de renard?*
- La façon de traiter ce problème dans les modèles continus de dynamique des populations fait encore l'objet d'études récentes, voir par exemple

A. C. Fowler. "Atto-Foxes and Other Minutiae". In: *Bulletin of Mathematical Biology* 83 (2021).

Cependant!

"All models are wrong; some models are useful."

— George E. P. Box (1976), "Science and statistics", Journal of the American Statistical Association, tome 71, pages 791–799

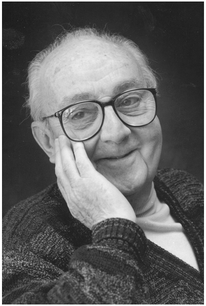


Figure: George E. P. Box

https://en.wikipedia.org/wiki/All_models_are_wrong#/media/File:GeorgeEPBox_(cropped)

Le métier de mathématicien

Voici quelques questions auxquelles les mathématiciens s'intéressent.

Le métier de mathématicien

Voici quelques questions auxquelles les mathématiciens s'intéressent.

- Modélisation:
  - Quelles sont les limites de validité du modèle?
  - Quels outils mathématiques sont appropriés pour l'étudier?
  - Comment interpréter les résultats obtenus théoriquement ou numériquement?

Le métier de mathématicien

Voici quelques questions auxquelles les mathématiciens s'intéressent.

- Modélisation:
  - Quelles sont les limites de validité du modèle?
  - Quels outils mathématiques sont appropriés pour l'étudier?
  - Comment interpréter les résultats obtenus théoriquement ou numériquement?
- Analyse mathématique:
  - Existe-t-il une solution? En quel sens? Sous quelles hypothèses?
  - Est-elle unique?
  - Est-elle nécessairement deux fois dérivable? Trois fois? Une infinité?
  - Peut-on *prouver* certaines propriétés constatées expérimentalement?

Le métier de mathématicien

Voici quelques questions auxquelles les mathématiciens s'intéressent.

- Modélisation:
  - Quelles sont les limites de validité du modèle?
  - Quels outils mathématiques sont appropriés pour l'étudier?
  - Comment interpréter les résultats obtenus théoriquement ou numériquement?
- Analyse mathématique:
  - Existe-t-il une solution? En quel sens? Sous quelles hypothèses?
  - Est-elle unique?
  - Est-elle nécessairement deux fois dérivable? Trois fois? Une infinité?
  - Peut-on *prouver* certaines propriétés constatées expérimentalement?
- Analyse numérique:
  - Comment estimer les solutions à l'aide d'ordinateurs?
  - Peut-on contrôler les erreurs d'approximation entre la solution calculée numériquement et la solution "théorique"?
  - La méthode numérique mise au point est-elle rapide? Peut-on la rendre plus rapide?

Merci pour votre attention !