Proof and competencies
The case of Belgian teaching

Stéphanie Bridoux

Université de Mons (Belgique) – LDAR (Université Paris Cité)

Journées d'étude DEMIPS
28 mars 2023

Plan

1. Proof and competency approach
2. Proof and Acquired Learning Units
3. Proof at university
4. Conclusion

Plan

Transversal competencies

- The reform started in 1999 (Décret ≪ Missions ≫).
- Secondary teaching is organised around 4 transversal competencies :
  - To understand the situation ;
  - To develop argumentation ;
  - To communicate : to write a proof ;
  - To generalize, to structure, to synthesize.
- The same transversal competencies for all disciplines.

> ≪ *on peut viser quelque chose qui relève du transversal au prix d'une plongée dans l'épistémologie des disciplines, c'est-à-dire d'un travail emminemment disciplinaire* ≫ (Schneider, 2010).

Transversal competencies

- The reform started in 1999 (Décret ≪ Missions ≫).
- Secondary teaching is organised around 4 transversal competencies :
  - To understand the situation ;
  - To develop argumentation ;
  - **To communicate : to write a proof** ;
  - To generalize, to structure, to synthesize.
- The same transversal competencies for all disciplines.

> ≪ *on peut viser quelque chose qui relève du transversal au prix d'une plongée dans l'épistémologie des disciplines, c'est-à-dire d'un travail emminemment disciplinaire* ≫ (Schneider, 2010).

Disciplinary competencies

Disciplinary competencies define what must be proven :

- Algebra : justify calculations.
- Functions : justify steps of proofs of logarithms formula.
- Geometry and trigonometry : differentiate implication and equivalence, hypothesis and thesis, negation, reasoning by contradiction.
- Statistics and probability : proof of Newton formula.

Disciplinary competencies

Disciplinary competencies define what must be proven :

- Algebra : justify calculations.
- Functions : justify steps of proofs of logarithms formula.
- Geometry and trigonometry : differentiate implication and equivalence, hypothesis and thesis, negation, reasoning by contradiction.
- Statistics and probability : proof of Newton formula.

First findings

- Micro competencies.
- Logic is linked to geometry concepts.

Problem solving

- The most important competency : problem solving.
- Teaching practices (Bridoux and Deronne, 2012) :
  - Lack of time to teach with competency approach ;
  - Problem solving reduces the role of training exercises and the ≪ course ≫ ;
  - Problem solving is reduced to simple algebra tasks.
- Undergraduate students : degradation of basic knowledge, less sense is given to notions,... (Bridoux, 2014).

Plan

Acquired Learnings Units

- The reform started in 2016.
- Vocabulary : UAA (chapter), resources (mathematical teaching notions), and process (knowing, applying and transfering).

> *Chaque UAA liste les ressources mobilisées dans l'exercice des compétences visées et précise les processus mis en œuvre lors d'activités permettant de construire, d'entrainer ou d'évaluer les compétences concernées.*

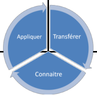
- Only one school book for scientific tracks in high school.

First findings

Competencies have not disappeared but the « course » and training exercises seem to have more importance.

Proof and sequences (1/3)

<table>
<tr><th colspan="3">Mathématiques pour scientifiques: 3e degré de transition (5e année)</th></tr>
<tr><td>5S UAA2</td><td>Unité d'acquis d'apprentissage</td><td>Suites</td></tr>
<tr><td colspan="3">Compétences à développer
MOBILISER LES PROPRIÉTÉS DES SUITES DANS DES SITUATIONS VARIÉES</td></tr>
<tr><th colspan="2">Processus</th><th>Ressources</th></tr>
<tr><td>Appliquer
• Représenter graphiquement une suite
• Trouver le terme général d'une suite
• Rechercher un terme d'une suite
• Conjecturer la limite d'une suite à l'aide d'un outil informatique
• Vérifier la valeur de la limite d'une suite à l'aide de la définition
• Déterminer la limite d'une suite arithmétique, géométrique
• Calculer la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique, géométrique
• Calculer une somme infinie de termes consécutifs d'une suite géométrique
• Trouver le taux, l'intérêt ou la durée d'un placement à intérêt simple ou à intérêt composé
• Réaliser un tableau d'amortissement d'un prêt à l'aide de l'outil informatique</td><td>Transférer
• Résoudre un problème faisant intervenir des suites issues de différents contextes.</td><td rowspan="2">Suites
Définition en fonction du rang
Définition par récurrence
Limite d'une suite
Suites arithmétiques, suites géométriques
Terme général
Somme des n premiers termes
Type de croissance
Convergence
Intérêts simples, intérêts composés
Tableau d'amortissement
Somme infinie de termes d'une suite géométrique</td></tr>
<tr><td colspan="2">Connaitre
• Caractériser une suite de nombres: type de suite, type de croissance
• Donner des exemples de suite convergente ou non convergente
• Démontrer la formule donnant la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique
• Générer une suite vérifiant certaines conditions
• Définir la limite d'une suite et expliciter cette définition à l'aide d'un schéma</td></tr>
</table>



Proof and sequences (2/3)

16 Comment calculer la somme des *n* premiers termes d'une suite géométrique ?

Si on connaît la raison et le premier terme, on calcule la somme des n premiers termes d'une suite géométrique en se référant à la méthode suivante.

On exprime la somme S_n des n premiers termes en fonction de ceux-ci.

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n \quad (1)$$

On multiplie les deux membres de l'égalité (1) par q ; dans le membre de droite, on multiplie chaque terme par q en utilisant la formule $u_{n+1} = q \cdot u_n$. On obtient alors l'égalité (2).

$$qS_n = u_2 + u_3 + \cdots + u_n + u_{n+1} \quad (2)$$

On soustrait ensuite membre à membre les égalités (1) et (2) pour obtenir l'égalité (3) :

$$S_n - qS_n = (u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n) - (u_2 + u_3 + \cdots + u_n + u_{n+1})$$

$$S_n - qS_n = u_1 + (u_2 + u_3 + \cdots + u_n) - (u_2 + u_3 + \cdots + u_n) - u_{n+1}$$

$$S_n - qS_n = u_1 - u_{n+1} \quad (3)$$

Ces calculs peuvent également s'écrire en utilisant les symboles de sommation :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i \quad (1)$$

$$qS_n = \sum_{i=1}^{n} u_{i+1} \quad (2)$$

Proof and sequences (3/3)

$$S_n - qS_n = \sum_{i=1}^{n} u_i - \sum_{i=1}^{n} u_{i+1}$$

d'où

$$S_n - qS_n = \sum_{i=1}^{n} u_i - \sum_{i=2}^{n+1} u_i$$

$$S_n - qS_n = u_1 + \sum_{i=2}^{n} u_i - \sum_{i=2}^{n} u_i - u_{n+1}$$

$$S_n(1-q) = u_1 - u_{n+1} \quad (3)$$

$$S_n(1-q) = u_1 - q^n u_1$$

Pour autant que $q \neq 1$, on obtient la formule

$$\boxed{S_n = \frac{1-q^n}{1-q} u_1}$$

Remarque

Si $q = 1$, on a $S_n = n u_1$.

Proof and exponential and logarithmic functions (1/2)

Mathématiques pour scientifiques: 3e degré de transition (6e année[6])		
6S UAA4	Unité d'acquis d'apprentissage	*Fonctions exponentielles et logarithmes*

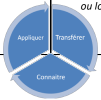
Compétences à développer

MODÉLISER UN PHÉNOMÈNE PAR UNE FONCTION EXPONENTIELLE OU PAR UNE FONCTION LOGARITHME

MAITRISER DIFFÉRENTS MODÈLES DE CROISSANCE

RÉSOUDRE DES PROBLÈMES ISSUS DE DIFFÉRENTS CONTEXTES

Processus		Ressources
Appliquer • *Résoudre une équation exponentielle ou logarithmique* • *Résoudre une inéquation exponentielle ou logarithmique* • *Calculer des limites et des dérivées de fonctions exponentielles et logarithmes* • *Utiliser un repère en coordonnées (semi-) logarithmiques*	**Transférer** • *Résoudre un problème nécessitant le recours à des fonctions exponentielles, logarithmes, puissances* • *Résoudre un problème nécessitant le recours à des équations ou inéquations exponentielles ou logarithmiques* • *Ajuster un nuage de points par une fonction exponentielle ou logarithme*	Fonctions exponentielles Fonctions logarithmes Relation de réciprocité des fonctions exponentielles et logarithmes Nombre *e* Fonction exponentielle et fonction logarithme de base *e* Equations et inéquations exponentielles Equations et inéquations logarithmiques Limites et dérivées des fonctions exponentielles et logarithmes Étude de la fonction $x \to e^{-x^2}$ Coordonnées (semi-) logarithmiques
Connaitre • *Démontrer les propriétés des fonctions logarithmes* • *Comparer les modes de croissance des fonctions exponentielles, logarithmes et puissances sur* IR_0^+ • *Justifier les étapes de résolution d'une équation exponentielle ou logarithmiques* • *Justifier les étapes de résolution d'une inéquation exponentielle ou logarithmique*		



Stratégies transversales

Utiliser l'outil informatique

Reconnaitre dans des phénomènes naturels différents types de croissance

Modéliser et comprendre les limites d'une modélisation

[6] Les fonctions seront vues au premier trimestre afin d'assurer un prérequis des cours de sciences

Proof and exponential and logarithmic functions (2/2)

4 Quelles sont les propriétés des logarithmes ?

3.3 Propriétés immédiates

$\forall a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}, \forall x \in \mathbb{R}_0^+, \forall r \in \mathbb{R}$:

$\log_a 1 = 0$ (1)

$\log_a a = 1$ (2)

$\log_a a^r = r$ (3)

$a^{\log_a x} = x$ (4)

3.4 Logarithme d'un produit

$\forall a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}, \forall x, y \in \mathbb{R}_0^+ : \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

Démonstration

$$\begin{aligned} \log_a(x \cdot y) &= \log_a\left(a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y}\right) && \text{3.3 (4) (propriétés immédiates)} \\ &= \log_a\left(a^{\log_a x + \log_a y}\right) && \text{2.6 (1) (propriétés des puissances)} \\ &= \log_a x + \log_a y && \text{3.3 (3) (propriétés immédiates)} \end{aligned}$$

Proof and synthetic and analytic geometry (1/2)

Mathématiques pour scientifiques: 3e degré de transition (5e année)		
5S UAA7	**Unité d'acquis d'apprentissage**	***Géométrie synthétique et analytique de l'espace***

Compétences à développer

DÉMONTRER DES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES EN UTILISANT DES OUTILS SYNTHÉTIQUES ET/OU ANALYTIQUES
CARACTÉRISER ANALYTIQUEMENT DES DROITES ET DES PLANS
RÉSOUDRE UN PROBLÈME GÉOMÉTRIQUE EN UTILISANT DES ÉQUATIONS DE PLANS ET DE DROITES

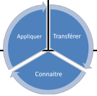
Processus

Appliquer

- *Déterminer des équations vectorielles, paramétriques et cartésiennes de droites et de plans.*
- *Représenter, à partir de leurs équations, des droites et des plans parallèles à un des axes du repère*
- *Déterminer l'équation d'une droite ou d'un plan à partir de sa représentation dans un repère*
- *Calculer la distance entre deux points, un point et une droite, entre un point et un plan, entre deux droites parallèles, entre deux plans parallèles, entre deux droites gauches.*
- *Rechercher l'équation d'un plan médiateur*
- *Déterminer l'intersection de trois plans, de deux droites, d'une droite et d'un plan et en déduire leurs positions relatives*

Transférer

- *Démontrer une propriété géométrique par une méthode synthétique*
- *Démontrer une propriété géométrique par une méthode analytique*
- *Discuter, en fonction d'un paramètre, l'intersection d'une droite avec une famille de plans ou d'un plan avec une famille de droites*



Connaitre

- *Identifier des droites orthogonales, des droites perpendiculaires, des plans et droites perpendiculaires dans un polyèdre*

Ressources

Point de vue synthétique
- Droites orthogonales
- Droite perpendiculaire à un plan
- Plans perpendiculaires
- Critère d'orthogonalité de deux droites
- Critère de perpendicularité d'une droite et d'un plan, de deux plans
- Construction de la perpendiculaire commune à deux droites gauches
- Distance
- Plan médiateur et propriété

Point de vue analytique
- Vecteur directeur d'une droite
- Vecteurs directeurs d'un plan
- Équations vectorielle, paramétriques, cartésiennes d'une droite
- Équations vectorielle, paramétriques, cartésienne d'un plan
- Équation d'un plan sous forme d'un déterminant
- Propriétés du déterminant utiles à la détermination de l'équation d'un plan
- Calcul d'un déterminant par la méthode des mineurs
- Vecteur normal à un plan
- Condition de parallélisme et d'orthogonalité de deux droites
- Condition de parallélisme et de perpendicularité de deux plans
- Condition de parallélisme et de perpendicularité d'une droite et d'un plan
- Distance entre deux points, entre un point et un plan

Stratégies transversales

Rédiger, argumenter, structurer, démontrer
Mobiliser l'outil algébrique
Utiliser l'outil informatique
Esquisser des figures de l'espace

Proof and synthetic and analytic geometry (2/2)

23 Section plane d'un cube

On considère un cube $OABCDEFG$ dont les arêtes sont de longueur 3.

a. Dessiner le cube.

b. Placer sur les arêtes les points P, Q et R définis par les relations suivantes : $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FQ} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{DR} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{DG}$.

c. Construire la section plane du cube par le plan (PQR).

d. Vérifier la précision du tracé de la section en calculant les coordonnées des points d'intersection de ce plan avec les arêtes du cube.

Proof at High School

- Almost all proofs are associated to ≪ knewing ≫ process.
- Teaching practices :
  - handouts are given to students ;
  - problem with teaching training.
- Students learning :
  - lack of logic knowledge,
  - problem to differentiate definitions, theorems, examples,...
  - ≪ what is a proof ? ≫

Proof at High School

- Almost all proofs are associated to ≪ knewing ≫ process.
- Teaching practices :
  - handouts are given to students ;
  - problem with teaching training.
- Students learning :
  - lack of logic knowledge,
  - problem to differentiate definitions, theorems, examples,...
  - ≪ what is a proof ? ≫
- **Pandemia did not help.**
- Emphasis on calculations.
- Proof assessment is reduced to imitation tasks.

Plan

First year at university

- We try to take into account students difficulties : less topics, training on basic knowledge (fractions, powers, vectors, lines equations...), starting with Calculus course (less formalism),...
- We try to keep the focus on reasoning.
- The need to proove appears very quickly.
- Sequences and proofs :
  - $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ is not bounded.
  - First results : limit uniqueness, limit laws to calculate limits,...
  - Every bounded and monotonic sequence is convergent.
  - Many proofs to solve exercises.

Plan

Proof at university and High School

- Proof is everywhere at university.
- Many undergraduate students see mathematics like calculations, memorizing rules,...
- Of course, the competency approach is not the only cause.
- The emphasis on competencies in curricula do not help teachers to focus on epistemological specificities of mathematics (defining, proving, giving examples, conjecturing, problem solving,...).
- The gap between secondary school and university is increasing more and more.