La transition secondaire-supérieur: où en est-on en 2023?

Stéphanie Bridoux

Université de Mons – LDAR (Université Paris Cité)

21 avril 2023

La transition secondaire-supérieur

- La transition secondaire-supérieur a fait l'objet de nombreux travaux depuis les années 2000 (Romainville, 2000 ; Dufays et al., 2010 ; Paivandi, 2015 ; Gueudet et Vandebrouck, 2022,...).
- Deux aspects sont souvent évoqués pour expliquer les difficultés des étudiants :
  - Massification de l'accès à l'enseignement supérieur ;
  - Prérequis insuffisants des étudiants entrant dans le supérieur.
- De nombreux dispositifs mis en place dans le supérieur : passeports pour le bac (UNamur), projet Voltaire en hautes écoles et universités, moocs,...

La transition secondaire supérieur

Des étudiants qui semblent bien au courant des différences entre le secondaire et le supérieur.

PÔLE ACADÉMIQUE DE BRUXELLES

BIENVENUE AGENDA ACTUALITÉS ARTICLES

2. « Quelle est, pour toi/vous, la différence principale entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur ? »

Pôle Académique de Bruxelles

La transition secondaire supérieur

Quelques bons conseils...

La Libre

Journal

Libre ECO | Belgique | Vidéos | International | Planète | Culture | Débats

Mais, attention à **ne pas trop te relâcher** sous peine de rater ton année. En effet, dans le supérieur, les professeurs aussi seront moins derrière ton dos. Tu pourras bien sûr toujours leur poser des questions mais ils ne te rappelleront pas autant qu'en secondaire que tu as un travail à rendre pour le lendemain. C'est donc à toi de te **responsabiliser**. Être libre, c'est bien, mais il y a forcément des contraintes qui vont avec. Tu devras apprendre à **tout gérer toi-même :** ton emploi du temps, ta prise de notes, ta méthode de travail, tes tâches au sein du kot, etc. Certes, tu pourras compter sur **la solidarité entre étudiants**. Mais personne ne travaillera à ta place !

La Libre Étudiant

Choix pour l'exposé

- Public visé : filières mathématiques et informatique.
- Cours de mathématiques à l'UMONS.
- Le témoignage d'une enseignante universitaire et formatrice de futurs enseignants.
- Éviter une vision dichotomique de la transition qui oppose le secondaire et le supérieur, où on se centre sur les ruptures entre les deux institutions.
- Mettre l'accent sur les continuités possibles pour favoriser le passage du secondaire vers le supérieur.

Plan

Plan

Test 1

- Un test le jour de la rentrée (1h30).
- Contenus visés : notions mathématiques du secondaire supérieur (équation d'une droite passant par deux points, dérivées élémentaires, résolution d'équations, logique élémentaire, inégalités,...).

Test 1

- Un test le jour de la rentrée (1h30).
- Contenus visés : notions mathématiques du secondaire supérieur (équation d'une droite passant par deux points, dérivées élémentaires, résolution d'équations, logique élémentaire, inégalités,...).

Résultats (sur 20) en 2007

- Note ≥ 10 : 64%
- Note ≥ 14 : 36%

Résultats (sur 20) en 2012

- Note ≥ 10 : 48%
- Note ≥ 14 : 9%

Résultats (sur 20) en 2017

- Note ≥ 10 : 35%
- Note ≥ 14 : 9%

Résultats (sur 20) en 2022

- Note ≥ 10 : 40%
- Note ≥ 14 : 16%

Test 1 – 2012 et 2017

Le cercle

Soit C un cercle de centre O et soit deux points A, B sur C de telle sorte que AOB ne soient pas alignés. Justifiez l'affirmation suivante : « le triangle AOB est isocèle ».

	2012	2017
Math	54%	84%
Info	54%	61%

Test 1 – 2012 et 2017

Le cercle

Soit C un cercle de centre O et soit deux points A, B sur C de telle sorte que AOB ne soient pas alignés. Justifiez l'affirmation suivante : « le triangle AOB est isocèle ».

	2012	2017
Math	54%	84%
Info	54%	61%

Constats : justifications incomplètes et vocabulaire imprécis (confusion entre les segments et la longueur des segments). Peu ou pas de dessin sur les copies des étudiants.

Test 1 – 2012 et 2017

La droite

Dans le plan cartésien muni d'un repère orthonormé, on considère la courbe C d'équation $x + y + 1 = 0$.

- Cette courbe a-t-elle des points d'intersection avec l'axe des x ? Si oui, donnez les tous (en expliquant). Si non, donnez un argument qui justifie cette non-intersection.

	2012	2017
Math	68%	73%
Info	60%	61%

Constats : c'est $x = -1$ qui est le point d'intersection, remplacer x par 0.

Test 1 – 2012 et 2017

Résoudre une équation

Trouvez tous les nombres réels x qui satisfont l'équation suivante :

$$\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\frac{x^2-3x+1}{x}$$

Justifiez toutes les étapes de vos calculs.

	2012	2017
Math	53%	45%
Info	38%	30%

Test 1 – 2012 et 2017

Résoudre une équation

Trouvez tous les nombres réels x qui satisfont l'équation suivante :

$$\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\frac{x^2-3x+1}{x}$$

Justifiez toutes les étapes de vos calculs.

	2012	2017
Math	53%	45%
Info	38%	30%

Constats : Peu ou pas de justifications, manipulations algébriques incorrectes, pas de conclusion.

Test 1 – 2012 et 2017

Nombre dérivé

On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *dérivable en un point* $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe.}$$

En utilisant cette définition, montrez que la fonction $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$. Justifiez en détail.

	2012	2017
Math	18%	33%
Info	13%	5%

Test 1 – 2012 et 2017

Nombre dérivé

On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *dérivable en un point* $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe.}$$

En utilisant cette définition, montrez que la fonction $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$. Justifiez en détail.

	2012	2017
Math	18%	33%
Info	13%	5%

Constats : peu de réponses à la question, remplacer $f(a)$ pose problème, manipulations algébriques (factorisation et simplification par $x - a$).

Test 1 – 2017

Inégalités

Pour chacune des affirmations suivantes, dites si elle est vraie ou fausse (a et b sont des nombres réels). Chaque mauvaise réponse rapporte -1 point.

- Si $a \leq b$, alors $a^2 \leq b^2$.
- Si $a^2 \leq b^2$, alors $a \leq b$.
- $\dfrac{|a|}{a} = 1$
- $|a| \leq b$ si et seulement si $-b \leq a$ et $a \leq b$
- $|\sin a| \leq 1$
- si $a \in]0,1]$, alors $1/a \leq 1$

	2017
Math	50%
Info	23%

Test 1 – 2022

Le test porte sur la manipulation des exposants, des fractions, règle de trois,...

Test 1 – 2022

Le test porte sur la manipulation des exposants, des fractions, règle de trois,...

Règles sur les exposants

Quelle est la moitié de 4^{20} ?

- 2^{20}
- 4^{10}
- 2^{10}
- 4^{19}
- 2^{39}
- 2^{19}

Test 1 – 2022

Le test porte sur la manipulation des exposants, des fractions, règle de trois,...

Règles sur les exposants

Quelle est la moitié de 4^{20} ?

- 2^{20}
- 4^{10}
- 2^{10}
- 4^{19}
- 2^{39}
- 2^{19}

	2022
Math	72%
Info	32%

Test 1 – 2022

Le test porte sur la manipulation des exposants, des fractions, règle de trois,...

Règles sur les exposants

Quelle est la moitié de 4^{20} ?

- 2^{20}
- 2^{10}
- 2^{39}
- 4^{10}
- 4^{19}
- 2^{19}

	2022
Math	72%
Info	32%

Test 1 – 2022

Le test porte sur la manipulation des exposants, des fractions, règle de trois,...

Règles sur les exposants

Quelle est la moitié de 4^{20} ?

- 2^{20}
- 2^{10}
- 2^{39}
- 4^{10}
- 4^{19}
- 2^{19}

	2022
Math	72%
Info	32%

Constats : les réponses incorrectes se répartissent entre 2^{20}, 4^{10} et 4^{19}.

Test 1 – 2022

Inégalités

Soient a, b deux nombres réels non nuls tels que $0 > \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. Parmi les propositions suivantes, laquelle ou lesquelles sont forcément vraies.

- $b^2 > a^2$;
- $b^2 < a^2$;
- $b^2 > a^2 + 1$;
- $b^2 < a^2 - 1$.

	2022
Math	33%
Info	13%

Test 1 – 2022

Inégalités

Soient a, b deux nombres réels non nuls tels que $0 > \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. Parmi les propositions suivantes, laquelle ou lesquelles sont forcément vraies.

- $b^2 > a^2$;
- $b^2 < a^2$;
- $b^2 > a^2 + 1$;
- $b^2 < a^2 - 1$.

	2022
Math	33%
Info	13%

Constats : beaucoup d'étudiants cochent à la fois $b^2 > a^2$ et $b^2 > a^2 + 1$.

Test 1 – 2022

Équation cartésienne d'une droite

Donnez une équation cartésienne de la droite D passant par $(-1, 3)$ et $(5, -4)$. Justifiez votre réponse en détaillant le raisonnement suivi.

	2022
Math	52%
Info	19%

Test 1 – 2022

Équation cartésienne d'une droite

Donnez une équation cartésienne de la droite D passant par $(-1, 3)$ et $(5, -4)$. Justifiez votre réponse en détaillant le raisonnement suivi.

	2022
Math	52%
Info	19%

Constats : 41 copies vides en Info (sur 89 étudiants), aucune explication, justifications incorrectes, formule incorrecte pour calculer la pente $(x_2 - x_1/y_2 - y_1)$.

Test 1 – 2022

Copie 1

Question 9. Donnez une équation cartésienne de la droite D passant par $(-1,3)$ et $(5,-4)$. Justifiez votre réponse en détaillant le raisonnement suivi.

1,5/3

$y = mx + p$ $\quad m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-(4)}{-1-5} = \frac{3+4}{-6} = \frac{7}{-6}$

$y = \frac{-7}{6}x + p$ on remplace par un pt

$(-1;3)$ $\quad 3 = \frac{-7}{6}\cdot(-1) + p$

$3 = \frac{7}{6} + p$

$3 - \frac{7}{6} = p$

$p = \frac{11}{6}$

il manque les explications

$\Rightarrow y = \frac{-7}{6}x + \frac{11}{6}$

Test 1 – 2022

Copie 2

Question 9. Donnez une équation cartésienne de la droite D passant par $(-1,3)$ et $(5,-4)$. Justifiez votre réponse en détaillant le raisonnement suivi. 1 /3

tout d'abord définissons x_1, x_2 et $y_1 . y_2$

$\Rightarrow \underset{x_1\;\;y_1}{(-1,3)}$ et $\underset{x_2\;\;y_2}{(5,-4)}$ car $(x ; y)$.

formule de l'equation d'une droite non verticale $f(x) = mx + p$.

formule d'une pente "m" $= \cancel{\dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}}$ $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

donc, ici "m" $= \dfrac{5-(-1)}{-4-3} = \dfrac{5+1}{-7} = \dfrac{6}{-7} = -\cancel{\dfrac{6}{7}}$ $-\dfrac{7}{6}$

nous connaissons donc m $\Leftrightarrow f(x) = -\dfrac{6}{7}x + p$.

trouvons p $\Rightarrow$ remplaçons le x par un point et le $f(x)$ qui est y par un autre. lequel?

$\Rightarrow y = -\dfrac{6}{7}x + p$.

$\Leftrightarrow -4 = -\underbrace{\dfrac{6}{7} . 5}_{=30} + p$.

$\Leftrightarrow -4 + \dfrac{30}{7} = p$.

$\Leftrightarrow -\dfrac{28}{7} + \dfrac{30}{7} = \dfrac{2}{7} = p$.

donc $p = \dfrac{2}{7}$

alors $\cancel{f(x) = -\dfrac{6}{7}x + \dfrac{2}{7}}$.

Test 1 – Au fil des années

Difficultés des étudiants

- La maîtrise des savoirs algébriques (manipulation des exposants, distributivité,...).
- La manipulation des lettres et du formalisme.
- La communication, la maîtrise du vocabulaire logique.
- La capacité à justifier.
- La capacité à donner du sens aux objets.

La question des prérequis

Bilan

- L'accent mis sur la résolution de problèmes (compétences, transfert,...) a impacté les pratiques enseignantes (Bridoux et Deronne, 2013) :
  - Le passage des énoncés en langue naturelle à la situation mathématique est source de difficultés chez les élèves. C'est donc l'enseignant qui prend en charge cette partie du travail.
  - Le temps consacré aux problèmes réduit la place accordée à la théorie et aux exercices d'entrainement.
  - Peu de motivation des élèves pour rédiger un raisonnement mathématique, chercher une stratégie, puiser dans les connaissances anciennes,...
- La pandémie n'a rien arrangé.
- Évolutions majeures au fil des années : maîtrise des savoirs élémentaires, communication, méthode de travail,... (Bridoux, 2014, 2023).

Plan

Cours

- **Mathématiques élémentaires** (60 heures, premier quadrimestre) :
  Géométrie dans le plan et dans l'espace, Inégalités et Logique.
- **Calculus** (66 heures, premier quadrimestre) :
  Limites de suites, limites de fonctions, dérivation, développements de Taylor.
- **Analyse** (90 heures, deuxième quadrimestre) :
  Limites de suites, limites de fonctions, suites de Cauchy, nombres réels, infimum et supremum, topologie dans $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ actions spécifiques à chaque cours pour favoriser la transition.

Mathématiques élémentaires

Tests hebdomadaires : organisation

- Deux heures, chaque lundi matin.
- Matière cumulative.
- Correcteurs : enseignants, doctorants du Département de Mathématiques, étudiants de Master.
- Résultats et copies sont envoyés par mail aux étudiants.
- Correction en ligne de tous les tests.

Mathématiques élémentaires

Tests hebdomadaires : organisation

- Deux heures, chaque lundi matin.
- Matière cumulative.
- Correcteurs : enseignants, doctorants du Département de Mathématiques, étudiants de Master.
- Résultats et copies sont envoyés par mail aux étudiants.
- Correction en ligne de tous les tests.

$\Rightarrow$ **organisation proche de l'enseignement secondaire**

Mathématiques élémentaires

Tests hebdomadaires : impact sur le cours

- Retour sur le test pendant les séances : correction de certaines questions, remarques méthodologiques, exercices supplémentaires en lien avec le test.
- La fréquence des tests (et les choix de contenus) permet d'évaluer à la fois la partie « cours », les applications immédiates et des tâches complexes.
  $\Rightarrow$ différents niveaux de mise en fonctionnement des connaissances (Robert, 1998).
- Importance de la rédaction des raisonnements : citer les définitions et résultats utilisés, détailler les calculs (calculatrice interdite), utiliser correctement le vocabulaire logique,...
- Indications sur le rythme à adopter dans le cours.

Mathématiques élémentaires

Tests hebdomadaires : impact sur le cours

Test 3, Question 6

Résolvez l'inéquation $\frac{1}{2x+3} < \frac{1}{x+1}$. La méthode de résolution doit être celle par distinction de cas et non en remettant tout sous la forme d'une unique fraction.

Mathématiques élémentaires

Tests hebdomadaires : impact sur le cours

Test 3, Question 6

Résolvez l'inéquation $\frac{1}{2x+3} < \frac{1}{x+1}$. La méthode de résolution doit être celle par distinction de cas et non en remettant tout sous la forme d'une unique fraction.

Moyenne : 47%

Mathématiques élémentaires

Tests hebdomadaires : impact sur le cours

Test 3, Question 6

Résolvez l'inéquation $\frac{1}{2x+3} < \frac{1}{x+1}$. La méthode de résolution doit être celle par distinction de cas et non en remettant tout sous la forme d'une unique fraction.

Moyenne : 47%

Test 4, Question 3

Résolvez l'inéquation (sans la remettre sous la forme d'une fraction comparée à 0) :

$$\frac{(x-2)(x+3)}{x-4} \leq 1.$$

Mathématiques élémentaires

Tests hebdomadaires : impact sur le cours

Test 3, Question 6

Résolvez l'inéquation $\frac{1}{2x+3} < \frac{1}{x+1}$. La méthode de résolution doit être celle par distinction de cas et non en remettant tout sous la forme d'une unique fraction.

Moyenne : 47%

Test 4, Question 3

Résolvez l'inéquation (sans la remettre sous la forme d'une fraction comparée à 0) :

$$\frac{(x-2)(x+3)}{x-4} \leq 1.$$

Moyenne : 74%

Mathématiques élémentaires

Tests hebdomadaires : impact sur le cours

Test 6, Question 6

Écrivez l'ensemble suivant A sous la forme d'une union minimale d'intervalles :

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| \leq 3 \text{ et } 2x \leq \sqrt{x^2+1}\}$$

.

Mathématiques élémentaires

Tests hebdomadaires : impact sur le cours

Test 6, Question 6

Écrivez l'ensemble suivant A sous la forme d'une union minimale d'intervalles :

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| \leq 3 \text{ et } 2x \leq \sqrt{x^2+1}\}$$

.

Moyenne : 70%

Mathématiques élémentaires

Tests hebdomadaires

Équation cartésienne d'une droite

Soient $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Considérons la droite D d'équation $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$. Donnez une équation cartésienne de la droite D' perpendiculaire à la droite D et passant par l'origine du repère.

c) comme elle doit passer par l'origine du repère alors

$(x, y) = (0,0)\ \lambda(x, y)$

et comme nous savons que la pente est $\frac{-b}{a}$ nous pouvons trouver l'équation cartésienne

$\boxed{(x, y) = (0,0) + \lambda\left(\frac{-b}{a}, 1\right)}$ → c'est une équation paramétrique

Mathématiques élémentaires

Tests hebdomadaires

Équation cartésienne d'une droite

Soient $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Considérons la droite D d'équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Donnez une équation cartésienne de la droite D' perpendiculaire à la droite D et passant par l'origine du repère.

(c) comme elle doit passer par l'origine du repère alors

$(x, y) = (0,0)\ \lambda(x, y)$

et comme nous savons que la pente est $\frac{-b}{a}$ nous pouvons trouver l'équation cartésienne

$\boxed{(x, y) = (0,0) + \lambda\left(\frac{-b}{a}, 1\right)}$ → c'est une équation paramétrique

« *J'ai bon mais je me suis trompé entre paramétrique et cartésienne à cause du manque de temps, je pense que 0 c'est un peu fort* ».

Mathématiques élémentaires

Bilan

- Les tests aident les étudiants à travailler régulièrement.
- Les tests permettent aux étudiants de suivre leur évolution.
- Le test 1 n'est pas (toujours) prédictif du parcours des étudiants.
- Les tests aident les étudiants à comprendre ce qui est attendu, notamment en matière de rédaction des raisonnements.
- Les tests engendrent beaucoup d'interactions entre les enseignants et les étudiants.
- Un système coûteux en temps.

Mathématiques élémentaires

Évolution du cours : examen du 30 octobre 2000

Soit $\alpha \in [-1,1]$. On est intéressé à minimiser la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \to f(x,y) = -x-2y$ sous les contraintes

$$\begin{cases} y - \alpha x \geq 0 \\ y + 8x \leq 52 \\ -2x + y \leq 2 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

1. Pour $\alpha = 1$, donnez la valeur du minimum ainsi qu'un point en lequel celui-ci est atteint.
2. Même question que (1) mais pour $\alpha = -1$.
3. Donnez la valeur du minimum en fonction de $\alpha \in [-1,1]$.
4. Appelons $(x_{\min}(\alpha), y_{\min}(\alpha))$ un point qui réalise ce minimum. Est-il vrai que $[-1,1] \to \mathbb{R}^2 : \alpha \to (x_{\min}(\alpha), y_{\min}(\alpha))$ est une fonction.

Mathématiques élémentaires

Évolution du cours : examen du 28 octobre 2013

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto px^2 + 1$ où $p \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Pour quelle(s) valeur(s) de p les tangentes au graphe de f aux points d'abscisse -1 et 1 sont-elles perpendiculaires. Pour chacun de ces p, donnez le point d'intersection de ces deux tangentes.

Mathématiques élémentaires

Évolution du cours : examen du 7 novembre 2022

1. Soit la droite $D_1 \equiv 3x - 5y = 4y - 2 - 7x$. Donnez une équation paramétrique de D_1.
2. Soit la droite $D_2 \equiv (x, y) = (4\lambda - 3, 2 - \lambda)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Donnez la pente de D_2 ainsi qu'un point appartenant à D_2.
3. Donnez une équation cartésienne de la droite D_3 perpendiculaire à D_2 et dont l'ordonnée à l'origine vaut 5.

	2022
Math	74%
Info	45%

Calculus

Organisation du cours

- Cours qui démarre en novembre, juste après Mathématiques élémentaires. En novembre 2022 :
  - 66% des étudiants en mathématiques ont une note ≥ 10.
  - 10% des étudiants en informatique ont une note ≥ 10.

	2022
Math	57%
Info	27%

Calculus

Organisation du cours

- Cours qui démarre en novembre, juste après Mathématiques élémentaires. En novembre 2022 :
  - 66% des étudiants en mathématiques ont une note ≥ 10.
  - 10% des étudiants en informatique ont une note ≥ 10.

	2022
Math	57%
Info	27%

- Dans le cours de Calculus : pas de démonstrations, peu de définitions (la notion de limite d'une suite n'est pas définie), accent sur les aspects opératoires mais avec justifications (citer les résultats utilisés et détailler les calculs).

Calculus

Types d'exercices

- Étudiez la convergence des suites suivantes :
$x_n = \dfrac{n+(-1)^n(n+1)}{2n+1}$, $y_n = \dfrac{4-3^n}{n!}\sin n$.

Calculus

Types d'exercices

- Étudiez la convergence des suites suivantes : $x_n = \dfrac{n+(-1)^n(n+1)}{2n+1}$, $y_n = \dfrac{4-3^n}{n!}\sin n$.
- Soit une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $a\in \operatorname{Dom} f$. Considérons la fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\to f(x+a)$. Prouvez que f est continue en a si et seulement si g est continue en 0.

Calculus

Types d'exercices

- Étudiez la convergence des suites suivantes :
$x_n = \dfrac{n+(-1)^n(n+1)}{2n+1}$, $y_n = \dfrac{4-3^n}{n!}\sin n$.
- Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{Dom}\, f$. Considérons la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x+a)$. Prouvez que f est continue en a si et seulement si g est continue en 0.
- Considérons la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R} : x \to x + \ln x$. Esquissez le graphe de f et montrez que la fonction possède une et une seule racine.

Calculus

Types d'exercices

- Étudiez la convergence des suites suivantes : $x_n = \frac{n+(-1)^n(n+1)}{2n+1}$, $y_n = \frac{4-3^n}{n!}\sin n$.
- Soit une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{Dom} f$. Considérons la fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\to f(x+a)$. Prouvez que f est continue en a si et seulement si g est continue en 0.
- Considérons la fonction $f:]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}: x\to x+\ln x$. Esquissez le graphe de f et montrez que la fonction possède une et une seule racine.
- On considère la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\to \left(e^{\alpha(x^5-1)}+\sin(\alpha^2x+x^4-\alpha^2-1)\right)^3$ où $\alpha\in\mathbb{R}$ est un paramètre. Déterminez l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles la droite D d'équation $\frac{1}{3}x-(\alpha+1)y+2018=0$ est perpendiculaire à la tangente au graphe de f en $x=1$.

Calculus

Janvier 2023

Limites de fonctions

Calculez, si elles existent, les limites suivantes au sens large :

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^4 - x^2 \sin(\frac{1}{x}) + x + 1}{(2x^2 - 1)^3}.$$

Justifiez les différentes étapes de vos calculs.

Calculus

Janvier 2023

Limites de fonctions

Calculez, si elles existent, les limites suivantes au sens large :

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^4-2x^3-2x^2+2x-1}{x^2-1} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^4-x^2\sin(\frac{1}{x})+x+1}{(2x^2-1)^3}.$$

Justifiez les différentes étapes de vos calculs.

	2023
Math	64%
Info	46%

Calculus

Janvier 2023

Définitions et exemples

1. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \operatorname{Dom} f$. Définissez

$$\begin{aligned} (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est non bornée } &: \\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une sous-suite de } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} &: \\ a \text{ est un point minimum de } f &: \end{aligned}$$

2. Donnez un exemple d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non bornée qui possède une sous-suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant au sens strict. Le fait que votre exemple satisfasse ce qui est demandé doit être rigoureusement établi.
3. Donnez un exemple d'une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ telle que $\partial f(0) = 0$ et pour laquelle 0 n'est ni un point maximum, ni un point minimum. Le fait que votre exemple satisfasse ce qui est demandé doit être rigoureusement établi.

Calculus

Janvier 2023

	2023
Math	23%
Info	6%

Calculus

Janvier 2023

	2023
Math	23%
Info	6%

Évaluation finale

- 33% des étudiants en mathématiques ont une note ≥ 10.
- 5% des étudiants en informatique ont une note ≥ 10.

Calculus

Bilan

- Les étudiants minorent la partie « cours ». Ils se concentrent sur les exercices.
  $\Rightarrow$ connaissance très approximative des définitions et des résultats, répertoire d'exemples pauvre,...
- Un cours difficile pour les étudiants, même en se centrant sur la technique plutôt que sur le sens et sur des connaissances déjà vues.
- Un public très hétérogène en informatique.
- Méthode et quantité de travail inappropriés aux exigences du cours : les étudiants ne travaillent pas quotidiennement, ils ne cherchent pas à comprendre, ils essaient d'apprendre par cœur, de faire des résumés, ...

Analyse

- Uniquement pour les étudiants en mathématiques.
- Définition en ϵ de la convergence d'une suite.
- Reprise du cours de calculus et on démontre les résultats non prouvés jusqu'à alors (unicité de la limite, règles de calculs, théorèmes de comparaison, théorème des valeurs intermédiaires, toute suite croissante majorée converge vers un réel,...).
- Ce sont les étudiants qui présentent les démonstrations (en binôme).
- Séances d'exercices.

Analyse

- Uniquement pour les étudiants en mathématiques.
- Définition en ϵ de la convergence d'une suite.
- Reprise du cours de calculus et on démontre les résultats non prouvés jusqu'à alors (unicité de la limite, règles de calculs, théorèmes de comparaison, théorème des valeurs intermédiaires, toute suite croissante majorée converge vers un réel,...).
- Ce sont les étudiants qui présentent les démonstrations (en binôme).
- Séances d'exercices.

Bilan

- Un début de cours « violent » pour les étudiants.
- Les étudiants s'investissent beaucoup dans le cours.
- Un cours qui permet aux étudiants de combler certaines lacunes du cours de Calculus.

Analyse

Juin 2022

Compacité

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et $K \subseteq \mathbb{R}$.

1. Définissez « K est un ensemble compact ».
2. En supposant que K est compact, montrez que $f(K)$ est compact.
3. Montrez qu'on n'a pas forcément que $f^{-1}(K) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in K\}$ est compact.

Veillez à justifier rigoureusement chacune de vos affirmations.

La première année universitaire

Bilan

- Leviers pour favoriser la transition entre le secondaire et le supérieur :
  - Mathématiques élémentaires : l'évaluation, appui sur des connaissances du secondaire ;
  - Calculus : retarder l'introduction des aspects formels et travailler la technique ;
  - Analyse : repartir du cours de Calculus et travailler le sens.
- Ces leviers nous permettent de maintenir nos exigences en matière de rédaction des raisonnements tout en nous adaptant au public étudiants.

  $\Rightarrow$ choix : réduire les contenus des cours.
- Un système qui ne résout pas tous les problèmes.

Plan

Faire des mathématiques (1/2)

Quelques éléments constitutifs de l'activité mathématique :

- **Mettre en relation** un grand nombre de connaissances (aspect cumulatif).
- **Définir** de nouveaux objets.
- **Exemplifier** (exemples et contre-exemples).
- **Énoncer** des résultats.
- **Démontrer**.
- **Utiliser un vocabulaire** spécifique aux mathématiques (et parfois des mots issus du langage courant avec un sens différent).
- Manipuler un formalisme auquel il faut **donner du sens** ($\forall x, y \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{R},\ x < z \wedge z < y$).
- ...

Faire des mathématiques (2/2)

Importance de la communication

- Elle est essentielle pour faire des mathématiques : développer un raisonnement en citant les définitions et les résultats utilisés, de justifier les étapes d'un calcul, rédiger des preuves,...
- C'est une compétence attendue chez les étudiants à l'entrée à l'université.

Les étudiants qui entrent à l'université

- La rédaction des raisonnements n'est pas ressentie comme un besoin chez les étudiants qui entrent à l'université.
- Dans le secondaire, les objets sont souvent introduits pas ostension, on trouve aussi peu de discours justificatifs (Schneider, 2008).

Les étudiants qui entrent à l'université

- La rédaction des raisonnements n'est pas ressentie comme un besoin chez les étudiants qui entrent à l'université.
- Dans le secondaire, les objets sont souvent introduits pas ostension, on trouve aussi peu de discours justificatifs (Schneider, 2008).

Conséquences

- Questionnaire sur les représentations des élèves du secondaire et leur goût pour les mathématiques (4112 participants).
- Faire des mathématiques : c'est faire des calculs (94%) et apprendre des méthodes (87%).

L'enseignement de l'Analyse : des continuités possibles

- Des contenus très semblables entre le secondaire et l'université (suites, fonctions, limites, dérivées,...).
- Des référentiels qui permettent de prendre en compte les spécificités évoquées (ressources, processus, stratégies transversales,...) :
  - « Définir la limite d'une suite et l'expliciter à l'aide d'un schéma »(5S UAA2, Suites).
  - « Justifier les étapes d'un calcul de limite »(5S UAA3, Asymptotes, limites et continuité).
  - « Démontrer les formules de dérivation »(5S UAA4, Dérivée).
  - ...

$\Rightarrow$ des pratiques qui peuvent mener à des continuités entre le secondaire et l'université.

Notion de suite

Construire une définition

- Une démarche qui ne montre pas le besoin de définir la notion de suite.
- Des exemples pauvres et ambigüs au niveau des notations.
- Une définition mise en défaut avec la suite (x_n) définie par $x_n = \dfrac{n-7}{\sqrt{n-3}}$ dont le domaine est $\mathbb{N}^{\geq 8}$.

Notion de suite

Construire une définition

Définition

Une suite de nombres réels est une application $I \to \mathbb{R} : n \to x_n$ où $I = \{n^*, n^*+1, n^*+2, \ldots\}$ pour un certain $n^* \in \mathbb{N}$.

Notion de suite

Construire une définition

Définition

Une suite de nombres réels est une application $I \to \mathbb{R} : n \to x_n$ où $I = \{n^*, n^*+1, n^*+2, \ldots\}$ pour un certain $n^* \in \mathbb{N}$.

- $0, 2, 4, 6, 8, \ldots$
- $3, 7, 11, 15, \ldots$
- $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$
- $2, \sqrt{3}, \pi, 2, \sqrt{3}, \pi, \ldots$

Notion de suite

Construire une définition

Des pistes pour définir la notion de suite :

- Occasion de faire produire des exemples aux élèves (l'enseignant peut compléter).
- Formalisations intermédiaires pour construire la définition.
  $\Rightarrow$ Identifier clairement la définition, les notations, l'intuition,...

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème de Bolzano

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(a)f(b) < 0$. Alors il existe un $\xi \in \,]a,b[$ tel que $f(\xi) = 0$.

Théorème des valeurs intermédiaires

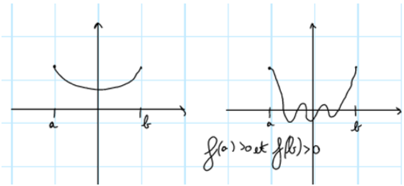
Théorème de Bolzano

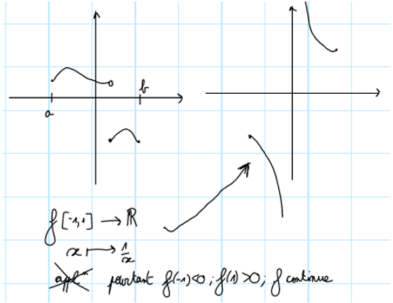
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(a)f(b) < 0$. Alors il existe un $\xi \in \,]a,b[$ tel que $f(\xi) = 0$.

- Ne pas se placer dans un cas particulier pour illustrer le théorème (choix d'une fonction monotone, unicité de la racine).
- Souvent, pendant le cours, les détails liés aux remarques sont donnés à l'oral et pas à l'écrit.

Théorème des valeurs intermédiaires

Des pistes pour donner du sens au théorème :
Faire produire des graphiques aux élèves pour répondre aux questions :
Pourquoi faut-il $f(a).f(b) < 0$? Pourquoi f doit être une application ?
Pourquoi $\xi \neq a$ et $\xi \neq b$? Peut-on avoir unicité de la racine ?





Théorème des valeurs intermédiaires

$\mathbb{R}$ est complet

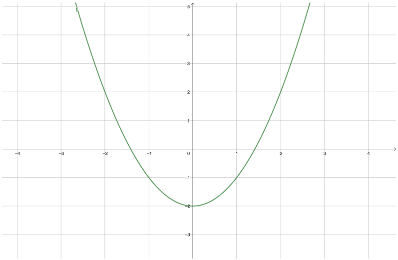
Toutes les suites de Cauchy sont convergentes.

$\mathbb{R}$ est complet, $\mathbb{Q}$ ne l'est pas.

Théorème des valeurs intermédiaires

Mise en relation avec d'autres notions

Le TVI est vrai dans $\mathbb{R}$ mais pas dans $\mathbb{Q}$.



- $f(x) = x^2 - 2$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue ($f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ aussi).
- $f(0) = -2$ et $f(2) = 2$. Donc $f(0).f(2) < 0$.
- Il n'existe aucun $\xi \in \mathbb{Q}$ tel que $f(\xi) = 0$.

$\Rightarrow$ une rare occasion de rencontrer une propriété qui distingue les deux ensembles.

Preuves

S'appuyer sur un graphique pour prouver (Druart, 2021)

4. On va maintenant s'intéresser aux trois fonctions suivantes :
   — $f(x) = \ln(5x + 11)$
   — $g(x) = \ln\left(\dfrac{3x+5}{x-2}\right)$
   — $h(x) = \ln(3x + 5) - \ln(x - 2)$

   Tu peux tracer les fonctions sur *Photomath* avant de commencer l'exercice. Cependant, *Photomath* ne te permet pas de tracer plusieurs graphes de fonctions sur le même dessin. Appuie-toi sur *Photomath* pour déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

   (a) Les graphes de f et h se coupent en un unique point.
   Vrai ☐ Faux ☐

   (b) Les graphes de f et g se coupent en un point dont l'ordonnée vaut $\ln(2) + \ln(6 + \sqrt{34})$.
   Vrai ☐ Faux ☐

   (c) Les graphes de g et h sont confondus.
   Vrai ☐ Faux ☐

   (d) Les graphes de f et g se coupent en deux points d'ordonnées différentes.
   Vrai ☐ Faux ☐

Preuves

Graphique - Définition - Logique (Verhoye, 2021)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, strictement décroissante sur $[-3;-1]$ et telle que $f(-2) = 4$.

1. Représente le graphique d'une fonction vérifiant ces conditions.
2. Pour chaque proposition ci-dessous, complète la case à l'aide d'un **V** si tu penses qu'elle est vraie et à l'aide d'un **F** si tu penses qu'elle est fausse puis justifie ton choix en utilisant la définition d'une fonction strictement décroissante.

   - ☐ $f(-1,5) > 4$
   - ☐ $f(-2,5) > 4$
   - ☐ $f(-1) > 4$
   - ☐ $f(-1) < 4$

3. La proposition ci-dessous est-elle vraie ou fausse ?

$$\forall x, f(x) > 4$$

   Explique ton raisonnement.

Continuités possibles

Bilan

- La partie « cours » est (aussi) un moment d'interactions possibles avec les étudiants.
- Un levier producteur de sens : les exemples
  - pour construire des définitions et des propriétés ;
  - pour illustrer ;
  - pour justifier ;
  - pour faire des liens.

  $\Rightarrow$ appui sur les connaissances (anciennes et nouvelles) des élèves.
- 94% des élèves (questionnaire) trouvent important que l'enseignant donne des exemples.

Plan

Bilan et perspectives

La transition secondaire-supérieur en 2023

- Secondaire et université : deux institutions différentes mais des continuités possibles en prenant en compte les spécificités épistémologiques des mathématiques.
- La formation des futurs enseignants et la formation continue ont un rôle à jouer dans la transition.
- Perspective : création d'un groupe de travail pour réfléchir à l'enseignement de l'Analyse.