

Formation à distance



sur l'enseignement de la proportionnalité

Diapositives et dialogues

Laëtitia Dragone - Gaëtan Temperman – Bruno De Lièvre



Et leur équipe de tutrices



Service d'Ingénierie Pédagogique et du Numérique éducatif

Mars 2023

Module 1
Quelles sont les différentes notions liées à la proportionnalité ?

No dia	Diapositive	Dialogue																								
No 1																										
No 2	 <p>Objet mathématique investigué</p> <p>Problème : Voici une recette pour 4 personnes : 90g de sucre, 2 oeufs, 10 cl d'huile, des couronnes, 1 oeuf et un litre, 300g de farine. Quelle quantité de farine faut-il pour 8 personnes ?</p> <p>4 personnes → 100g de farine 1 personne → 25g de farine 8 personnes → 75g de farine</p> <p>Tarifs d'une salle de sport</p> <table border="1"> <tr><td>1 séance :</td><td>4 €</td></tr> <tr><td>5 séances :</td><td>20 €</td></tr> <tr><td>20 séances :</td><td>60 €</td></tr> </table> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Objet</th> <th>Balle de tennis</th> <th>Loupes</th> <th>Trousses</th> <th>MS&MS</th> <th>Menthol</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Masse (en kg)</td> <td>0,058</td> <td>0,093</td> <td>0,205</td> <td>0,246</td> <td>0,500</td> </tr> <tr> <td>Poids (en kg)</td> <td>0,27</td> <td>0,91</td> <td>1,09</td> <td>5,27</td> <td>5,68</td> </tr> </tbody> </table> <p>Vous devez administrer du Roaccutanone (anti-acnéique) à raison de 0,5 mg/24 heures en 3 prises à 1 patient de 18 ans pesant 60 kg. Chaque comprimé est dosé à 10 mg.</p> <p>a) Quelle quantité de Roaccutanone ce patient reçoit-il par 24 heures en mg ? b) Quelle quantité de Roaccutanone en mg administrez-vous à chaque prise ? c) Combien de comprimés administrez-vous à chaque prise ?</p>	1 séance :	4 €	5 séances :	20 €	20 séances :	60 €	Objet	Balle de tennis	Loupes	Trousses	MS&MS	Menthol	Masse (en kg)	0,058	0,093	0,205	0,246	0,500	Poids (en kg)	0,27	0,91	1,09	5,27	5,68	<p>L : Bonjour Alessia.</p> <p>A : Bonjour Laëtitia. Dans cette première capsule vidéo, tu vas nous parler de l'importance de la proportionnalité, des différentes manières de représenter les données d'une situation de proportionnalité et des propriétés de la linéarité.</p> <p>L : Tout à fait, Alessia. La proportionnalité occupe une place importante dans les mathématiques. Par ailleurs, elle est également mobilisée non seulement dans de nombreux domaines comme dans le milieu médical ou dans d'autres disciplines comme en physique, mais aussi dans la vie de tous les jours. Ce concept est, par exemple, très utile dans le dosage des médicaments, lors du calcul du poids (force gravitationnelle) d'un objet en fonction de sa masse, dans la consommation du carburant, dans une recette de cuisine...</p>
1 séance :	4 €																									
5 séances :	20 €																									
20 séances :	60 €																									
Objet	Balle de tennis	Loupes	Trousses	MS&MS	Menthol																					
Masse (en kg)	0,058	0,093	0,205	0,246	0,500																					
Poids (en kg)	0,27	0,91	1,09	5,27	5,68																					

No 3

Importance de la proportionnalité directe

Le **raisonnement proportionnel** - catégoriser, comprendre et manipuler les relations multiplicatives - est au **cœur** de tout apprentissage des **mathématiques**.

(Brown, Küchemann & Hodgen, 2014; Oliveira, 2008)

UMONS Service d'Ingénierie Pédagogique et Numérique éducatif

L : Le recours substantiel à cette notion lui donne une fonction capitale dans l'enseignement. Sokona le mentionnait déjà dans un article paru en 1989.

No 4

Importance de la proportionnalité directe

ASPECTS ANALYTIQUES ET ASPECTS ANALOGIQUES DE LA PROPORTIONNALITE DANS UNE SITUATION DE FORMULATION

Sidi-Bekeay SOKONA
Equipe de didactique des mathématiques et de l'informatique,
Université Joseph Fourier BP 53X, 38041 Grenoble Cedex

INTRODUCTION.

1. Importance de la notion de proportionnalité.

La notion de proportionnalité est sans doute l'une des notions mathématiques les plus importantes que nous rencontrons du primaire au collège. Ses nombreuses applications dans différents domaines (mathématiques, physique, biologie, chimie, économie...) lui font jouer un rôle essentiel dans l'enseignement. La mise en place de certaines notions mathématiques telles que les notions de fraction, d'échelle, de pourcentage... lui sont assujetties. Il faut également souligner son utilisation dans la vie courante.

(Sokona, 1989)

UMONS Service d'Ingénierie Pédagogique et Numérique éducatif

L : La capacité de maîtriser le raisonnement proportionnel est reconnue comme un facteur déterminant pour la compréhension et l'application des mathématiques. Le raisonnement proportionnel se révèle donc incontournable et une bonne compréhension en est nécessaire.

No 5

Définition de la proportionnalité directe

Illustrons cette définition par un exemple : 4 kilogrammes de pommes coûtent 4,80€

$\times 1,20$

Masse de pommes vendues (en kg)	Prix à payer (en €)
4	4,80
2	2,40
12	14,40
16	19,20
14	16,80

Prix = 1,20 × masse (Daro et al., 2007)

UMONS Service d'Ingénierie Pédagogique et Numérique éducatif

A : Laëtitia, comment peut-on définir la proportionnalité directe ?

L : Partons d'un exemple « 4 kg de pommes coûtent 4,80euros ». Il existe une relation qui lie la masse de pommes vendues au prix à payer, tel qu'on doit multiplier la masse par 1,20 pour déterminer le prix à payer. La proportionnalité est donc « ... une relation particulière entre deux grandeurs (ou plutôt leurs mesures) ou entre deux suites de nombres. Ces deux suites de nombres (associées ou non à des grandeurs) doivent être multiples l'une de l'autre » (Daro et al., 2007, p.20).

No 6

Organisation des données d'une situation de proportionnalité directe

- Schémas fléchés appelés « graphes sagittaux ». *Exemple* : 4 kilogrammes de pommes → 4,80€
- Des phrases. *Exemple* : 4 kilogrammes de pommes coûtent 4,80€
- Des tableaux en lignes ou en colonnes. *Exemple* :
- Des graphiques. *Exemple* :

Masse des pommes (en kg)	4	2	12	16	14
Prix (en €)	4,80	2,40	14,40	19,20	16,80

(Daro et al., 2007; Roblin, 2015)

A: Comment peut-on représenter les données d'une situation de proportionnalité ?

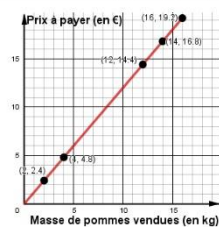
L : Les données d'une situation de proportionnalité peuvent être présentées sous différentes formes. Daro et ses collègues (2007) en répertorient quatre dont les deux premières sont associées à la troisième.

La première forme est le graphe sagittal qui permet d'indiquer une relation entre une donnée d'un premier ensemble et une donnée d'un second par une flèche se situant entre ces deux ensembles. Ensuite, les phrases courtes qui indiquent textuellement la relation existante entre deux données. La mise en tableau est également un autre mode de représentation plus schématique et visuelle. Elle peut prendre deux formes, soit en lignes soit en colonnes. Roblin (2015) insiste également sur le fait que la réalisation d'un tableau n'est pas une stratégie de résolution du problème, mais simplement une manière d'ordonner les nombres afin de mieux cerner les liens qui existent entre eux. Enfin, la dernière représentation des données d'une situation de proportionnalité directe est un graphique.

No 7

Représentation graphique d'une situation de proportionnalité directe

Masse de pommes vendues (en kg)	4	2	12	16	14
Prix (en €)	4,80	2,40	14,40	19,20	16,80



(Baldy, Durand-Guerrier & Dusseau, 2007; Hersant, 2001)

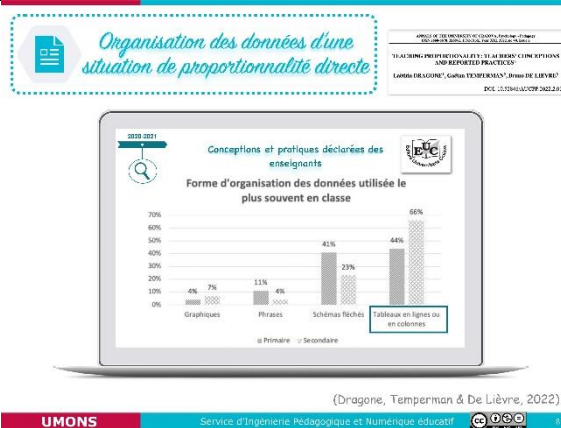
L : Nous pouvons observer que la **proportionnalité s'illustre par une droite passant par l'origine du repère donc le point de coordonnées (0;0)**. C'est un fort pouvoir évocateur de la **proportionnalité**, car elle [la droite] peut être **appréhendée en un seul coup d'œil (Baldy, Durand-Guerrier & Dusseau, 2007)**. Il semble que le **dessin d'une droite passant par l'origine soit la représentation « prototypique »** que les élèves se font de la **proportionnalité**. Ce **fort pouvoir évocateur** peut s'expliquer par le fait que les

professeurs attirent fortement l'attention des élèves quant à la représentation graphique d'une situation de proportionnalité.

A : Et quel est l'avantage de ce type de représentation, Laëtitia ?

L : Il est vrai que cette représentation a l'avantage de permettre aisément l'identification de couples de points bien qu'il convient d'être vigilant à l'importance de la minutie de la représentation (Hersant, 2001).

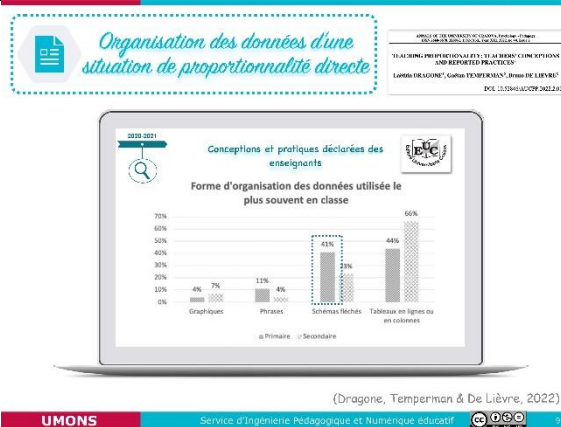
N° 8



A : En 2021, tu as mené une enquête auprès de 180 enseignants du primaire et du secondaire.

L : Oui, tout à fait. Je me suis intéressée aux conceptions et aux pratiques déclarées des enseignants du primaire et du secondaire relatives à la proportionnalité. Concernant la forme d'organisation des données utilisée le plus fréquemment, le graphique montre que les enseignants sélectionnent en majorité les tableaux en lignes ou en colonnes. Les enseignants estiment que cette organisation des données est plus simple, plus facile, plus claire. Il est vrai aussi que cette forme d'organisation des données est présente dans les programmes de cours et épreuves.

N° 9



L : J'ai également constaté que les enseignants du primaire choisissent les schémas fléchés comme seconde forme la plus utilisée. Cette forme serait plus visuelle et plus simple d'utilisation pour les élèves du primaire.

No 10

Organisation des données d'une situation de proportionnalité directe

Forme	Primaire (%)	Secondaire (%)
Graphiques	50%	20%
Phrases	20%	40%
Schémas fléchés	15%	20%
Tableaux en lignes ou en colonnes	9%	8%

(Dragone, Temperman & De Lièvre, 2022)

UMONS Service d'Ingénierie Pédagogique et Numérique éducatif

L : Pour la forme d'organisation des données utilisée le moins fréquemment, il y a des divergences entre les enseignants du primaire et les enseignants du secondaire. Pour les enseignants du primaire, les graphiques sont en général peu utilisés, car les élèves sont trop jeunes pour les tracer et les interprétations ne sont pas évidentes (compréhension, lecture et abstraction).

A : Et pour les enseignants du secondaire, qu'en est-il ?

No 11

Organisation des données d'une situation de proportionnalité directe

Forme	Primaire (%)	Secondaire (%)
Graphiques	50%	20%
Phrases	20%	40%
Schémas fléchés	15%	20%
Tableaux en lignes ou en colonnes	9%	8%

(Dragone, Temperman & De Lièvre, 2022)

UMONS Service d'Ingénierie Pédagogique et Numérique éducatif

L : Pour les enseignants du secondaire, les phrases sont, en majorité, moins fréquemment utilisées par manque de représentativité, mais aussi, car elles sont complexes au niveau de la compréhension et plutôt mises en œuvre dans les problèmes comme conclusion.

No 12

Propriétés de la linéarité et coefficient de proportionnalité

Propriétés multiplicatives de la linéarité

Masse des pommes (en kg)	4	2	12	16	14
Prix (en €)	4,80	2,40	14,40		

Propriétés additives de la linéarité

Masse des pommes (en kg)	4	2	12	16	14
Prix (en €)	4,80	2,40	14,40	19,20	16,80

(Daro et al., 2007 ; Hersant, 2005 ; Rhéaume, 2020)

UMONS Service d'Ingénierie Pédagogique et Numérique éducatif

A : Peux-tu nous parler des propriétés de la linéarité et du coefficient de proportionnalité ?

L : Dans cette situation, le prix payé est proportionnel à la masse de pommes achetées et la première colonne de données est déjà complétée. Commençons par la linéarité multiplicative pouvant être définie comme suit : si l'on multiplie (ou divise) une valeur d'une grandeur par un nombre alors on peut multiplier (ou diviser) la valeur correspondante de la seconde grandeur par ce même nombre. Pour déterminer le prix à payer pour 2 kilogrammes, nous constatons d'abord que c'est la moitié de 4 kilogrammes. Nous pouvons donc, également, diviser 4,80 € par 2 et nous obtenons 2,40 €. Concernant le

		<p>prix à payer pour 12 kilogrammes, cette masse est 3 fois plus importante que 4 kilogrammes. Il suffit donc de multiplier 4,80 € par 3. Ainsi, le prix à payer est de 14,40 €. Passons maintenant à la linéarité additive pouvant être définie comme suit : si l'on additionne (soustrait) deux valeurs d'une même grandeur alors on peut additionner (soustraire) les deux valeurs correspondantes de la seconde grandeur. Afin de déterminer le prix à payer pour 14 (2 + 12) kilogrammes de pommes, nous pouvons additionner 2,40 € et 14,40 € ou il peut être obtenu en soustrayant 2,40 € à 19,20 €. Cette propriété utilisée au primaire se révèle très utile lorsque le coefficient de proportionnalité, obtenu en divisant une valeur de la seconde grandeur par la valeur correspondante de la première grandeur, est trop complexe et c'est, probablement, une approche à proposer également aux élèves du secondaire (Daro et al., 2007).</p> <p>A : Selon Rhéaume (2020), il existe deux types de rapport entre deux grandeurs. Celui-ci peut être interne ou externe.</p> <p>L : En effet, tu as raison. Dans le cadre d'un tableau de proportionnalité, les propriétés de la linéarité sont contenues sous la dénomination de « rapports internes ». Pour ce qui est du rapport externe, il s'agit du coefficient de proportionnalité. Lors de la représentation du problème proportionnel sous forme d'un tableau, il faut être vigilant à la position du rapport externe. Dans le premier tableau, il lie les données d'une ligne à l'autre. Tandis que dans le second, il lie les données d'une colonne à l'autre. Par conséquent, il ne faut pas réduire les définitions et les illustrations à un seul cas pour que chacun puisse profiter pleinement de l'importante des outils qui lui conviennent mieux.</p>
--	--	--

<p>No 13</p>	<p><i>Propriétés de la linéarité et coefficient de proportionnalité</i></p> <p>Rapport interne simple Rapport externe simple</p> <p>Rapport interne simple Rapport externe complexe</p> <p>Rapport interne complexe Rapport externe simple</p> <p>Rapport interne complexe Rapport externe complexe</p> <p>(Simard, 2018)</p> <p>UMONS Service d'Ingénierie Pédagogique et Numérique éducatif</p>	<p>L : Selon la complexité des rapports internes et externes, certaines procédures seront davantage à privilégier.</p> <p>A : Peux-tu nous présenter des exemples, Laëtitia ?</p>						
<p>No 14</p>	<p><i>Propriétés de la linéarité et coefficient de proportionnalité</i></p> <p>Rapport interne simple Rapport externe simple</p> <p>Sachant que 4 bonbons coûtent 2€, combien coûtent 8 bonbons ?</p> <p>Rapport externe simple</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Nombre de bonbons</th> <th>Prix à payer (en €)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>4</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>?</td> </tr> </tbody> </table> <p>Rapport interne simple</p> <p><i>Utilisation des propriétés de la linéarité</i> <i>Utilisation du coefficient de proportionnalité</i></p> <p>(Simard, 2018)</p> <p>UMONS Service d'Ingénierie Pédagogique et Numérique éducatif</p>	Nombre de bonbons	Prix à payer (en €)	4	2	8	?	<p>L : Oui, bien sûr. Dans l'exemple suivant, les rapports interne et externe sont simples. L'élève peut donc utiliser les propriétés de la linéarité ou le coefficient de proportionnalité.</p>
Nombre de bonbons	Prix à payer (en €)							
4	2							
8	?							
<p>No 15</p>	<p><i>Propriétés de la linéarité et coefficient de proportionnalité</i></p> <p>Rapport interne simple Rapport externe complexe</p> <p>Sachant que 4 bonbons coûtent 2,42€, combien coûtent 8 bonbons ?</p> <p>Rapport externe complexe</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Nombre de bonbons</th> <th>Prix à payer (en €)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>4</td> <td>2,42</td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>?</td> </tr> </tbody> </table> <p>Rapport interne simple</p> <p><i>Utilisation des propriétés de la linéarité</i></p> <p>(Simard, 2018)</p> <p>UMONS Service d'Ingénierie Pédagogique et Numérique éducatif</p>	Nombre de bonbons	Prix à payer (en €)	4	2,42	8	?	<p>A : Et si le rapport externe est complexe ?</p> <p>L : Dans l'exemple suivant, contrairement au rapport interne, on peut constater qu'il n'est pas possible de passer d'une grandeur à une autre au moyen d'un nombre naturel. L'élève va donc privilégier les propriétés de la linéarité.</p>
Nombre de bonbons	Prix à payer (en €)							
4	2,42							
8	?							

<p>No 16</p>	<div style="border: 1px dashed blue; padding: 5px; display: inline-block;"> <i>Propriétés de la linéarité et coefficient de proportionnalité</i> </div> <div style="float: right; border: 1px solid blue; border-radius: 15px; padding: 2px 5px; text-align: center; width: 30px;"> Rapport interne complexe Rapport externe simple 3 </div> <p style="text-align: center; margin-top: 10px;">☛ Sachant que 4 bonbons coûtent 2€, combien coûtent 14 bonbons ?</p> <div style="text-align: center; margin: 10px 0;"> Rapport externe simple ↷ </div> <table border="1" style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 15%;"></th> <th style="width: 35%;">Nombre de bonbons</th> <th style="width: 35%;">Prix à payer (en €)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: right; padding-right: 5px;">Rapport interne complexe ↶</td> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">2</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">14</td> <td style="text-align: center;">?</td> </tr> </tbody> </table> <div style="text-align: center; margin: 10px 0; background-color: #00a0e3; color: white; padding: 5px; border-radius: 10px;"> <i>Utilisation du coefficient de proportionnalité</i> </div> <p style="text-align: right; font-size: 0.8em;">(Simard, 2018)</p> <div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center; font-size: 0.7em;"> UMONS Service d'Ingénierie Pédagogique et Numérique éducatif 16 </div>		Nombre de bonbons	Prix à payer (en €)	Rapport interne complexe ↶	4	2		14	?	<p>A : D'accord, je comprends mieux. Dans le cas où c'est le rapport interne qui est complexe, il convient d'utiliser le coefficient de proportionnalité ?</p> <p>L : Tout à fait. Si l'on souhaite déterminer le prix à payer pour 14 bonbons, il suffit de diviser 14 par 2.</p>
	Nombre de bonbons	Prix à payer (en €)									
Rapport interne complexe ↶	4	2									
	14	?									
<p>No 17</p>	<div style="border: 1px dashed blue; padding: 5px; display: inline-block;"> <i>Propriétés de la linéarité et coefficient de proportionnalité</i> </div> <div style="float: right; border: 1px solid blue; border-radius: 15px; padding: 2px 5px; text-align: center; width: 30px;"> Rapport interne complexe Rapport externe complexe 4 </div> <p style="text-align: center; margin-top: 10px;">☛ Sachant que 4 bonbons coûtent 2,42€, combien coûtent 14 bonbons ?</p> <div style="text-align: center; margin: 10px 0;"> Rapport externe complexe ↷ </div> <table border="1" style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 15%;"></th> <th style="width: 35%;">Nombre de bonbons</th> <th style="width: 35%;">Prix à payer (en €)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: right; padding-right: 5px;">Rapport interne complexe ↶</td> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">2,42</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">14</td> <td style="text-align: center;">?</td> </tr> </tbody> </table> <p style="text-align: right; font-size: 0.8em;">(Simard, 2018)</p> <div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center; font-size: 0.7em;"> UMONS Service d'Ingénierie Pédagogique et Numérique éducatif 17 </div>		Nombre de bonbons	Prix à payer (en €)	Rapport interne complexe ↶	4	2,42		14	?	<p>A : Dans ce dernier exemple, les rapports interne et externe sont tous les deux complexes.</p> <p>L : Oui, l'élève devra, par exemple, passer par une valeur intermédiaire comme pour 2 bonbons.</p>
	Nombre de bonbons	Prix à payer (en €)									
Rapport interne complexe ↶	4	2,42									
	14	?									
<p>No 18</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <p style="font-size: 0.8em;">Université de Mons</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p style="font-size: 0.7em;">Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Éducation</p> </div> </div> <p style="text-align: center; margin: 10px 0;">Cette séquence a été réalisée par</p> <p style="text-align: center; margin: 5px 0;">Laëtitia Dragone Gaëtan Temperman Bruno De Lièvre</p> <p style="text-align: center; margin: 5px 0;">et leur équipe de tutrices !</p> <p style="text-align: center; margin: 10px 0;">dans le cadre de la formation continue à distance :</p> <p style="text-align: center; margin: 10px 0;"><i>« Enseignement de la proportionnalité »</i></p> <div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center; font-size: 0.7em;"> UMONS Service d'Ingénierie Pédagogique et Numérique éducatif </div>										