Autour du problème du sous-espace invariant

Fougnies Noémie

Service de probabilités et statistique
Université de Mons

23 novembre 2023

Notations et rappels

On note :

- X un espace de Banach complexe ;
- T un opérateur linéaire borné défini sur X.

Notations et rappels

On note :

- X un espace de Banach complexe ;
- T un opérateur linéaire borné défini sur X.

Soit M un sous-espace de X. On dit que M est

Notations et rappels

On note :

- X un espace de Banach complexe ;
- T un opérateur linéaire borné défini sur X.

Soit M un sous-espace de X. On dit que M est

- non trivial si $M \neq X$ et $M \neq \{0\}$;
- invariant sous T si $T(M) \subseteq M$;
- hyperinvariant sous T si M est invariant pour tout opérateur linéaire borné défini sur X commutant avec T.

Notations et rappels

On note :

- X un espace de Banach complexe ;
- T un opérateur linéaire borné défini sur X.

Soit M un sous-espace de X. On dit que M est

- non trivial si $M \neq X$ et $M \neq \{0\}$;
- invariant sous T si $T(M) \subseteq M$;
- hyperinvariant sous T si M est invariant pour tout opérateur linéaire borné défini sur X commutant avec T.

Pour la suite : SINT = sous-espace invariant non trivial et SHNT = sous-espace hyperinvariant non trivial

1 Introduction

2 Théorème de Lomonosov

3 Problème du demi-espace presque invariant

Introduction

Le problème :

Introduction

Le problème :

Le problème du sous-espace invariant

Si X est un espace de Banach complexe séparable réflexif de dimension infinie et si $T \in B(X)$, existe-t-il un sous-espace fermé non trivial invariant sous T ?

Introduction

Le problème :

Le problème du sous-espace invariant

Si X est un espace de Banach complexe séparable réflexif de dimension infinie et si $T \in B(X)$, existe-t-il un sous-espace fermé non trivial invariant sous T ?

- si X est de dimension finie $n \geqslant 2$ on considère x un vecteur propre pour T et $M = \text{span}\{x\}$ est un SINT fermé pour T

Introduction

Le problème :

Le problème du sous-espace invariant

Si X est un espace de Banach complexe séparable réflexif de dimension infinie et si $T \in B(X)$, existe-t-il un sous-espace fermé non trivial invariant sous T ?

- si X est de dimension finie $n \geqslant 2$ on considère x un vecteur propre pour T et $M = \text{span}\{x\}$ est un SINT fermé pour T
- si X non séparable : on considère $x \neq 0$ et $M = \overline{\text{span}}\{T^n x \ ; \ n \geqslant 0\}$ est un SINT fermé pour T

Introduction

Le problème :

Le problème du sous-espace invariant

Si X est un espace de Banach complexe séparable réflexif de dimension infinie et si $T \in B(X)$, existe-t-il un sous-espace fermé non trivial invariant sous T ?

- si X est de dimension finie $n \geqslant 2$ on considère x un vecteur propre pour T et $M = \text{span}\{x\}$ est un SINT fermé pour T
- si X non séparable : on considère $x \neq 0$ et $M = \overline{\text{span}}\{T^n x \ ; \ n \geqslant 0\}$ est un SINT fermé pour T
- si X non réflexif : des contre-exemples ont été trouvés

Un mot sur les contre-exemples :

Un mot sur les contre-exemples :

- premier contre-exemple énoncé par Enflo en 1976 (publié en 1987)

Un mot sur les contre-exemples :

- premier contre-exemple énoncé par Enflo en 1976 (publié en 1987)
- autre contre-exemple (plus accessible) trouvé par Read en 1984

Un mot sur les contre-exemples :

- premier contre-exemple énoncé par Enflo en 1976 (publié en 1987)
- autre contre-exemple (plus accessible) trouvé par Read en 1984
- Read trouve un contre-exemple sur ℓ^1 (1985)

Un mot sur les contre-exemples :

- premier contre-exemple énoncé par Enflo en 1976 (publié en 1987)
- autre contre-exemple (plus accessible) trouvé par Read en 1984
- Read trouve un contre-exemple sur ℓ^1 (1985)
- Read construit un opérateur sur ℓ^1 ne possédant aucun *sous-ensemble* fermé invariant non trivial (1988)

Un mot sur les contre-exemples :

- premier contre-exemple énoncé par Enflo en 1976 (publié en 1987)
- autre contre-exemple (plus accessible) trouvé par Read en 1984
- Read trouve un contre-exemple sur ℓ^1 (1985)
- Read construit un opérateur sur ℓ^1 ne possédant aucun *sous-ensemble* fermé invariant non trivial (1988)
- Grivaux et Roginskaya en 2014 : méthode générale pour construire des opérateurs sans SINT fermé

Un mot sur les contre-exemples :

- premier contre-exemple énoncé par Enflo en 1976 (publié en 1987)
- autre contre-exemple (plus accessible) trouvé par Read en 1984
- Read trouve un contre-exemple sur ℓ^1 (1985)
- Read construit un opérateur sur ℓ^1 ne possédant aucun *sous-ensemble* fermé invariant non trivial (1988)
- Grivaux et Roginskaya en 2014 : méthode générale pour construire des opérateurs sans SINT fermé

Remarque : Tous les contre-exemples trouvés sont des opérateurs définis sur des espaces de Banach non réflexifs

1 Introduction

2 Théorème de Lomonosov

3 Problème du demi-espace presque invariant

Théorème et Lemme de Lomonosov

Résultat important concernant le problème :

Théorème de Lomonosov (1973)

Soient X un espace de Banach complexe et $T \in B(X)$ non scalaire. Si T commute avec un opérateur compact non nul K alors T possède un sous-espace fermé non trivial hyperinvariant.

Théorème et Lemme de Lomonosov

Résultat important concernant le problème :

Théorème de Lomonosov (1973)

Soient X un espace de Banach complexe et $T \in B(X)$ non scalaire. Si T commute avec un opérateur compact non nul K alors T possède un sous-espace fermé non trivial hyperinvariant.

Idée : Utiliser un théorème de point fixe

Théorème et Lemme de Lomonosov

Résultat important concernant le problème :

Théorème de Lomonosov (1973)

Soient X un espace de Banach complexe et $T \in B(X)$ non scalaire. Si T commute avec un opérateur compact non nul K alors T possède un sous-espace fermé non trivial hyperinvariant.

Idée : Utiliser un théorème de point fixe

Théorème du point fixe de Schauder

Soient X un espace vectoriel normé et C un sous-ensemble convexe non vide de X. Alors toute application continue de C dans une partie compacte de C possède un point fixe.

Théorème et Lemme de Lomonosov

Preuve :

Théorème et Lemme de Lomonosov

Preuve : Si T possède une valeur propre : ok

Théorème et Lemme de Lomonosov

Preuve : Si T possède une valeur propre : ok $\rightarrow$ supposons que T ne possède aucune valeur propre.

Théorème et Lemme de Lomonosov

Preuve : Si T possède une valeur propre : ok $\rightarrow$ supposons que T ne possède aucune valeur propre. On a :

Théorème et Lemme de Lomonosov

Preuve : Si T possède une valeur propre : ok $\rightarrow$ supposons que T ne possède aucune valeur propre. On a :

- $\exists x_0 \in X$ tel que $0 \notin \overline{K(B)}$ et $0 \notin B$ avec $B = B(x_0, 1)$

Théorème et Lemme de Lomonosov

Preuve : Si T possède une valeur propre : ok $\rightarrow$ supposons que T ne possède aucune valeur propre. On a :

- $\exists x_0 \in X$ tel que $0 \notin \overline{K(B)}$ et $0 \notin B$ avec $B = B(x_0, 1)$
- On pose $\mathcal{A}$ l'algèbre des opérateurs de $B(X)$ commutant avec T

Théorème et Lemme de Lomonosov

Preuve : Si T possède une valeur propre : ok $\rightarrow$ supposons que T ne possède aucune valeur propre. On a :

- $\exists x_0 \in X$ tel que $0 \notin \overline{K(B)}$ et $0 \notin B$ avec $B = B(x_0, 1)$
- On pose $\mathcal{A}$ l'algèbre des opérateurs de $B(X)$ commutant avec T

$\Rightarrow$ But : montrer que $\exists y_0 \in X$ non nul tq $\|Ay_0 - x_0\| \geqslant 1$ pour tout $A \in \mathcal{A}$

Théorème et Lemme de Lomonosov

Preuve : Si T possède une valeur propre : ok $\rightarrow$ supposons que T ne possède aucune valeur propre. On a :

- $\exists x_0 \in X$ tel que $0 \notin \overline{K(B)}$ et $0 \notin B$ avec $B = B(x_0, 1)$
- On pose $\mathcal{A}$ l'algèbre des opérateurs de $B(X)$ commutant avec T

$\Rightarrow$ But : montrer que $\exists y_0 \in X$ non nul tq $\|Ay_0 - x_0\| \geqslant 1$ pour tout $A \in \mathcal{A}$

- Par l'absurde : $\forall y_0 \in X$ non nul, $\exists A \in \mathcal{A}$ tq $\|Ay_0 - x_0\| < 1$

Théorème et Lemme de Lomonosov

Preuve : Si T possède une valeur propre : ok $\rightarrow$ supposons que T ne possède aucune valeur propre. On a :

- $\exists x_0 \in X$ tel que $0 \notin \overline{K(B)}$ et $0 \notin B$ avec $B = B(x_0, 1)$
- On pose $\mathcal{A}$ l'algèbre des opérateurs de $B(X)$ commutant avec T

$\Rightarrow$ But : montrer que $\exists y_0 \in X$ non nul tq $\|Ay_0 - x_0\| \geqslant 1$ pour tout $A \in \mathcal{A}$

- Par l'absurde : $\forall y_0 \in X$ non nul, $\exists A \in \mathcal{A}$ tq $\|Ay_0 - x_0\| < 1$

$$\Rightarrow X \backslash \{0\} \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^{-1}(B)$$

Théorème et Lemme de Lomonosov

Preuve : Si T possède une valeur propre : ok $\rightarrow$ supposons que T ne possède aucune valeur propre. On a :

- $\exists x_0 \in X$ tel que $0 \notin \overline{K(B)}$ et $0 \notin B$ avec $B = B(x_0, 1)$
- On pose $\mathcal{A}$ l'algèbre des opérateurs de $B(X)$ commutant avec T

$\Rightarrow$ But : montrer que $\exists y_0 \in X$ non nul tq $\|Ay_0 - x_0\| \geqslant 1$ pour tout $A \in \mathcal{A}$

- Par l'absurde : $\forall y_0 \in X$ non nul, $\exists A \in \mathcal{A}$ tq $\|Ay_0 - x_0\| < 1$

$$\Rightarrow X \backslash \{0\} \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^{-1}(B)$$

- $0 \notin \overline{K(B)}$

Théorème et Lemme de Lomonosov

Preuve : Si T possède une valeur propre : ok $\rightarrow$ supposons que T ne possède aucune valeur propre. On a :

- $\exists x_0 \in X$ tel que $0 \notin \overline{K(B)}$ et $0 \notin B$ avec $B = B(x_0, 1)$
- On pose $\mathcal{A}$ l'algèbre des opérateurs de $B(X)$ commutant avec T

$\Rightarrow$ But : montrer que $\exists y_0 \in X$ non nul tq $\|Ay_0 - x_0\| \geqslant 1$ pour tout $A \in \mathcal{A}$

- Par l'absurde : $\forall y_0 \in X$ non nul, $\exists A \in \mathcal{A}$ tq $\|Ay_0 - x_0\| < 1$

$$\Rightarrow X \backslash \{0\} \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^{-1}(B)$$

- $0 \notin \overline{K(B)} \Longrightarrow \overline{K(B)} \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^{-1}(B)$

Théorème et Lemme de Lomonosov

Preuve : Si T possède une valeur propre : ok $\rightarrow$ supposons que T ne possède aucune valeur propre. On a :

- $\exists x_0 \in X$ tel que $0 \notin \overline{K(B)}$ et $0 \notin B$ avec $B = B(x_0, 1)$
- On pose $\mathcal{A}$ l'algèbre des opérateurs de $B(X)$ commutant avec T

$\Rightarrow$ But : montrer que $\exists y_0 \in X$ non nul tq $\|Ay_0 - x_0\| \geqslant 1$ pour tout $A \in \mathcal{A}$

- Par l'absurde : $\forall y_0 \in X$ non nul, $\exists A \in \mathcal{A}$ tq $\|Ay_0 - x_0\| < 1$

$$\Rightarrow X \backslash \{0\} \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^{-1}(B)$$

- $0 \notin \overline{K(B)} \Longrightarrow \overline{K(B)} \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^{-1}(B) \overset{\text{compacité}}{\Longrightarrow} \overline{K(B)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} T_i^{-1}(B)$ où $T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{A}$

Théorème et Lemme de Lomonosov

- On définit $\psi : \overline{K(B)} \to B$ par $\psi(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i y$ avec λ_i bien choisis $\to$ continue

Théorème et Lemme de Lomonosov

- On définit $\psi : \overline{K(B)} \to B$ par $\psi(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i y$ avec λ_i bien choisis $\to$ continue
- On a donc $\psi \circ K : B \to \psi(\overline{K(B)})$ où par continuité, $\psi(\overline{K(B)})$ est une partie compacte de B

Théorème et Lemme de Lomonosov

- On définit $\psi : \overline{K(B)} \to B$ par $\psi(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i y$ avec λ_i bien choisis $\to$ continue
- On a donc $\psi \circ K : B \to \psi(\overline{K(B)})$ où par continuité, $\psi(\overline{K(B)})$ est une partie compacte de B

$$\overset{\text{Thm point fixe}}{\Longrightarrow} \exists x \neq 0 \text{ tq } \psi \circ K(x) = x$$

Théorème et Lemme de Lomonosov

- On définit $\psi : \overline{K(B)} \to B$ par $\psi(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i y$ avec λ_i bien choisis $\to$ continue
- On a donc $\psi \circ K : B \to \psi(\overline{K(B)})$ où par continuité, $\psi(\overline{K(B)})$ est une partie compacte de B

$$\overset{\text{Thm point fixe}}{\Longrightarrow} \exists x \neq 0 \text{ tq } \psi \circ K(x) = x \text{ i.e., } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i K x = x$$

Théorème et Lemme de Lomonosov

- On définit $\psi : \overline{K(B)} \to B$ par $\psi(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i y$ avec λ_i bien choisis $\to$ continue
- On a donc $\psi \circ K : B \to \psi(\overline{K(B)})$ où par continuité, $\psi(\overline{K(B)})$ est une partie compacte de B

$$\overset{\text{Thm point fixe}}{\Longrightarrow} \exists x \neq 0 \text{ tq } \psi \circ K(x) = x \text{ i.e., } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i K x = x$$

- Donc, $x \in \mathrm{Ker}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i K - \mathrm{Id})$

Théorème et Lemme de Lomonosov

- On définit $\psi : \overline{K(B)} \to B$ par $\psi(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i y$ avec λ_i bien choisis $\to$ continue
- On a donc $\psi \circ K : B \to \psi(\overline{K(B)})$ où par continuité, $\psi(\overline{K(B)})$ est une partie compacte de B

$$\overset{\text{Thm point fixe}}{\Longrightarrow} \exists x \neq 0 \text{ tq } \psi \circ K(x) = x \text{ i.e., } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i K x = x$$

- Donc, $x \in \mathrm{Ker}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i K - \mathrm{Id})$
- On pose $G = \mathrm{Ker}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i K - \mathrm{Id})$

Théorème et Lemme de Lomonosov

- On définit $\psi : \overline{K(B)} \to B$ par $\psi(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i y$ avec λ_i bien choisis $\to$ continue
- On a donc $\psi \circ K : B \to \psi(\overline{K(B)})$ où par continuité, $\psi(\overline{K(B)})$ est une partie compacte de B

$$\overset{\text{Thm point fixe}}{\Longrightarrow} \exists x \neq 0 \text{ tq } \psi \circ K(x) = x \text{ i.e., } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i K x = x$$

- Donc, $x \in \mathrm{Ker}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i K - \mathrm{Id})$
- On pose $G = \mathrm{Ker}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i K - \mathrm{Id})$

$$\Longrightarrow G \neq \{0\} \text{ et de dimension finie tel que } T(G) \subseteq G$$

Théorème et Lemme de Lomonosov

- On définit $\psi : \overline{K(B)} \to B$ par $\psi(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i y$ avec λ_i bien choisis $\to$ continue
- On a donc $\psi \circ K : B \to \psi(\overline{K(B)})$ où par continuité, $\psi(\overline{K(B)})$ est une partie compacte de B

$$\overset{\text{Thm point fixe}}{\Longrightarrow} \exists x \neq 0 \text{ tq } \psi \circ K(x) = x \text{ i.e., } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i K x = x$$

- Donc, $x \in \mathrm{Ker}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i K - \mathrm{Id})$
- On pose $G = \mathrm{Ker}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i K - \mathrm{Id})$

$$\Longrightarrow G \neq \{0\} \text{ et de dimension finie tel que } T(G) \subseteq G$$

$$\Longrightarrow T_{|_G} \text{ possède une valeur propre} \longrightarrow \text{contradiction}$$

Théorème et Lemme de Lomonosov

Généralisation du théorème :

Théorème et Lemme de Lomonosov

Généralisation du théorème :

Lemme de Lomonosov (1991)

Soient X un espace de Banach et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre d'opérateurs de $B(X)$ telle que $\mathcal{A}$ est transitive et K un opérateur compact non nul sur X alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que 1 est une valeur propre de AK.

Théorème et Lemme de Lomonosov

Généralisation du théorème :

Lemme de Lomonosov (1991)

Soient X un espace de Banach et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre d'opérateurs de $B(X)$ telle que $\mathcal{A}$ est transitive et K un opérateur compact non nul sur X alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que 1 est une valeur propre de AK.

$\mathcal{A}$ est transitive s'il n'existe aucun sous-espace non trivial fermé étant invariant pour chaque opérateur de $\mathcal{A}$.

Théorème et Lemme de Lomonosov

Généralisation du théorème :

Lemme de Lomonosov (1991)

Soient X un espace de Banach et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre d'opérateurs de $B(X)$ telle que $\mathcal{A}$ est transitive et K un opérateur compact non nul sur X alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que 1 est une valeur propre de AK.

$\mathcal{A}$ est transitive s'il n'existe aucun sous-espace non trivial fermé étant invariant pour chaque opérateur de $\mathcal{A}$.
Généralisation car : Notons $\mathcal{A}$ les opérateurs commutant avec T

Théorème et Lemme de Lomonosov

Généralisation du théorème :

Lemme de Lomonosov (1991)

Soient X un espace de Banach et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre d'opérateurs de $B(X)$ telle que $\mathcal{A}$ est transitive et K un opérateur compact non nul sur X alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que 1 est une valeur propre de AK.

$\mathcal{A}$ est transitive s'il n'existe aucun sous-espace non trivial fermé étant invariant pour chaque opérateur de $\mathcal{A}$.

Généralisation car : Notons $\mathcal{A}$ les opérateurs commutant avec T

- $\mathcal{A}$ est transitive

Théorème et Lemme de Lomonosov

Généralisation du théorème :

Lemme de Lomonosov (1991)

Soient X un espace de Banach et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre d'opérateurs de $B(X)$ telle que $\mathcal{A}$ est transitive et K un opérateur compact non nul sur X alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que 1 est une valeur propre de AK.

$\mathcal{A}$ est transitive s'il n'existe aucun sous-espace non trivial fermé étant invariant pour chaque opérateur de $\mathcal{A}$.

Généralisation car : Notons $\mathcal{A}$ les opérateurs commutant avec T

- $\mathcal{A}$ est transitive $\Rightarrow$ il existe A commutant avec T tel que 1 vp de AK

Théorème et Lemme de Lomonosov

Généralisation du théorème :

Lemme de Lomonosov (1991)

Soient X un espace de Banach et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre d'opérateurs de $B(X)$ telle que $\mathcal{A}$ est transitive et K un opérateur compact non nul sur X alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que 1 est une valeur propre de AK.

$\mathcal{A}$ est transitive s'il n'existe aucun sous-espace non trivial fermé étant invariant pour chaque opérateur de $\mathcal{A}$.

Généralisation car : Notons $\mathcal{A}$ les opérateurs commutant avec T

- $\mathcal{A}$ est transitive $\Rightarrow$ il existe A commutant avec T tel que 1 vp de AK
- $M = \mathrm{Ker}(AK - \mathrm{Id})$ est de dimension finie tel que $M \neq \{0\}$ et $T(M) \subseteq M$

Théorème et Lemme de Lomonosov

Généralisation du théorème :

Lemme de Lomonosov (1991)

Soient X un espace de Banach et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre d'opérateurs de $B(X)$ telle que $\mathcal{A}$ est transitive et K un opérateur compact non nul sur X alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que 1 est une valeur propre de AK.

$\mathcal{A}$ est transitive s'il n'existe aucun sous-espace non trivial fermé étant invariant pour chaque opérateur de $\mathcal{A}$.

Généralisation car : Notons $\mathcal{A}$ les opérateurs commutant avec T

- $\mathcal{A}$ est transitive $\Rightarrow$ il existe A commutant avec T tel que 1 vp de AK
- $M = \mathrm{Ker}(AK - \mathrm{Id})$ est de dimension finie tel que $M \neq \{0\}$ et $T(M) \subseteq M$
- T possède une vp et le sous-espace propre associé est un SHNT fermé

Introduction

Idée : laisser plus de liberté au problème du sous-espace invariant

Introduction

Idée : laisser plus de liberté au problème du sous-espace invariant

Problème du sous-espace presque invariant

Si X est un espace de Banach complexe et si $T \in B(X)$, existe-t-il un sous-espace fermé Y non trivial et F un opérateur de rang fini tels que Y est invariant pour $T + F$?

Introduction

Idée : laisser plus de liberté au problème du sous-espace invariant

Problème du sous-espace presque invariant

Si X est un espace de Banach complexe et si $T \in B(X)$, existe-t-il un sous-espace fermé Y non trivial et F un opérateur de rang fini tels que Y est invariant pour $T + F$?

$\longrightarrow$ le problème peut être reformulé

Introduction

Idée : laisser plus de liberté au problème du sous-espace invariant

Problème du sous-espace presque invariant

Si X est un espace de Banach complexe et si $T \in B(X)$, existe-t-il un sous-espace fermé Y non trivial et F un opérateur de rang fini tels que Y est invariant pour $T + F$?

$\longrightarrow$ le problème peut être reformulé

On a besoin de la définition suivante :

Définition

On dit que Y est presque invariant pour T s'il existe un sous-espace de dimension finie E tel que $TY \subseteq Y + E$.

Introduction

On a aussi besoin de la proposition suivante :

Proposition

Un sous-espace Y est presque invariant pour T si et seulement s'il existe un opérateur F de rang fini tel que Y est invariant pour $T + F$.

Introduction

On a aussi besoin de la proposition suivante :

Proposition

Un sous-espace Y est presque invariant pour T si et seulement s'il existe un opérateur F de rang fini tel que Y est invariant pour $T + F$.

On obtient alors :

Problème du sous-espace presque invariant : Nouvelle formulation

Si X est un espace de Banach complexe et si $T \in B(X)$, existe-t-il un sous-espace Y fermé non trivial presque invariant pour T ?

Cas triviaux

Cas triviaux

- si Y de dimension finie ou de codimension finie : Y est toujours presque invariant pour T

Cas triviaux

- si Y de dimension finie ou de codimension finie : Y est toujours presque invariant pour T

$\longrightarrow$ Y de dimension et de codimension infinies

Cas triviaux

- si Y de dimension finie ou de codimension finie : Y est toujours presque invariant pour T

$\longrightarrow$ Y de dimension et de codimension infinies, i.e., Y demi-espace

Cas triviaux

- si Y de dimension finie ou de codimension finie : Y est toujours presque invariant pour T

$\longrightarrow$ Y de dimension et de codimension infinies, i.e., Y demi-espace

- si X non séparable : on considère $Y = \overline{\text{span}}\{T^n x_k \ ; \ n, k \in \mathbb{N}\}$ avec $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite linéairement indépendante

Cas triviaux

- si Y de dimension finie ou de codimension finie : Y est toujours presque invariant pour T

$\longrightarrow$ Y de dimension et de codimension infinies, i.e., Y demi-espace

- si X non séparable : on considère $Y = \overline{\text{span}}\{T^n x_k \; ; \; n, k \in \mathbb{N}\}$ avec $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite linéairement indépendante

$\longrightarrow$ Y est un demi-espace invariant

Cas triviaux

- si Y de dimension finie ou de codimension finie : Y est toujours presque invariant pour T

$\longrightarrow$ Y de dimension et de codimension infinies, i.e., Y demi-espace

- si X non séparable : on considère $Y = \overline{\text{span}}\{T^n x_k \ ; \ n, k \in \mathbb{N}\}$ avec $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite linéairement indépendante

$\longrightarrow$ Y est un demi-espace invariant

Le problème revient donc à :

Problème du demi-espace presque invariant

Si X est un espace de Banach complexe séparable et si $T \in B(X)$, existe-t-il un demi-espace fermé presque invariant pour T ?

Cas triviaux

- si Y de dimension finie ou de codimension finie : Y est toujours presque invariant pour T

$\longrightarrow$ Y de dimension et de codimension infinies, i.e., Y demi-espace

- si X non séparable : on considère $Y = \overline{\text{span}}\{T^n x_k \; ; \; n, k \in \mathbb{N}\}$ avec $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite linéairement indépendante

$\longrightarrow$ Y est un demi-espace invariant

Le problème revient donc à :

Problème du demi-espace presque invariant

Si X est un espace de Banach complexe séparable et si $T \in B(X)$, existe-t-il un demi-espace fermé presque invariant pour T ?

$\longrightarrow$ problème résolu par Tcaciuc en 2019

Résolution du problème

Théorème (Tcaciuc, 2019)

Soit X un espace de Banach complexe séparable. Alors chaque opérateur $T \in B(X)$ possède un demi-espace fermé presque invariant

Résolution du problème

Théorème (Tcaciuc, 2019)

Soit X un espace de Banach complexe séparable. Alors chaque opérateur $T \in B(X)$ possède un demi-espace fermé presque invariant i.e., il existe F un opérateur de rang fini tel que $T + F$ possède un demi-espace fermé invariant.

Résolution du problème

Théorème (Tcaciuc, 2019)

Soit X un espace de Banach complexe séparable. Alors chaque opérateur $T \in B(X)$ possède un demi-espace fermé presque invariant i.e., il existe F un opérateur de rang fini tel que $T + F$ possède un demi-espace fermé invariant.

Il est possible de faire mieux !

Résolution du problème

Théorème (Tcaciuc, 2019)

Soit X un espace de Banach complexe séparable. Alors chaque opérateur $T \in B(X)$ possède un demi-espace fermé presque invariant i.e., il existe F un opérateur de rang fini tel que $T + F$ possède un demi-espace fermé invariant.

Il est possible de faire mieux !

Théorème (Tcaciuc, 2019)

Soient X un espace de Banach complexe et $T \in B(X)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe F un opérateur de rang fini tel que $\|F\| < \varepsilon$ et tel que $T + F$ possède un demi-espace fermé invariant.

Preuve du théorème

La preuve est découpée en 3 parties :

Preuve du théorème

La preuve est découpée en 3 parties :

- cas où $\exists \mu \in \partial\sigma(T) \backslash \sigma_p(T)$;

Preuve du théorème

La preuve est découpée en 3 parties :

- cas où $\exists \mu \in \partial\sigma(T) \backslash \sigma_p(T)$;
- cas où $\exists \mu \in \partial\sigma(T^*) \backslash \sigma_p(T^*)$;

Preuve du théorème

La preuve est découpée en 3 parties :

- cas où $\exists \mu \in \partial\sigma(T) \backslash \sigma_p(T)$;
- cas où $\exists \mu \in \partial\sigma(T^*) \backslash \sigma_p(T^*)$;

Pour les 2 cas : spdg on suppose $\mu = 0$

Preuve du théorème

La preuve est découpée en 3 parties :

- cas où $\exists \mu \in \partial\sigma(T) \backslash \sigma_p(T)$;
- cas où $\exists \mu \in \partial\sigma(T^*) \backslash \sigma_p(T^*)$;

Pour les 2 cas : spdg on suppose $\mu = 0$

- cas où $\partial\sigma(T)$ et $\partial\sigma(T^*)$ ne contiennent que des valeurs propres

Preuve du théorème

La preuve est découpée en 3 parties :

- cas où $\exists \mu \in \partial\sigma(T) \backslash \sigma_p(T)$;
- cas où $\exists \mu \in \partial\sigma(T^*) \backslash \sigma_p(T^*)$;

Pour les 2 cas : spdg on suppose $\mu = 0$

- cas où $\partial\sigma(T)$ et $\partial\sigma(T^*)$ ne contiennent que des valeurs propres

Remarque : Ici : on s'intéresse aux 2 premiers cas.

Preuve du théorème

La preuve est découpée en 3 parties :

- cas où $\exists\mu \in \partial\sigma(T)\backslash\sigma_p(T)$;
- cas où $\exists\mu \in \partial\sigma(T^*)\backslash\sigma_p(T^*)$;

Pour les 2 cas : spdg on suppose $\mu = 0$

- cas où $\partial\sigma(T)$ et $\partial\sigma(T^*)$ ne contiennent que des valeurs propres

Remarque : Ici : on s'intéresse aux 2 premiers cas.

Un outil important pour la construction de DE : les suites basiques

Preuve du théorème

La preuve est découpée en 3 parties :

- cas où $\exists \mu \in \partial\sigma(T) \backslash \sigma_p(T)$;
- cas où $\exists \mu \in \partial\sigma(T^*) \backslash \sigma_p(T^*)$;

Pour les 2 cas : spdg on suppose $\mu = 0$

- cas où $\partial\sigma(T)$ et $\partial\sigma(T^*)$ ne contiennent que des valeurs propres

Remarque : Ici : on s'intéresse aux 2 premiers cas.

Un outil important pour la construction de DE : les suites basiques

Définition

Une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans X est appelée suite basique si c'est une base pour $\overline{\text{span}}\{x_n \ ; \ n \geqslant 1\}$.

Preuve du théorème

La preuve est découpée en 3 parties :

- cas où $\exists \mu \in \partial\sigma(T)\backslash\sigma_p(T)$;
- cas où $\exists \mu \in \partial\sigma(T^*)\backslash\sigma_p(T^*)$;

Pour les 2 cas : spdg on suppose $\mu = 0$

- cas où $\partial\sigma(T)$ et $\partial\sigma(T^*)$ ne contiennent que des valeurs propres

Remarque : Ici : on s'intéresse aux 2 premiers cas.
Un outil important pour la construction de DE : les suites basiques

Définition

Une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans X est appelée suite basique si c'est une base pour $\overline{\text{span}}\{x_n \ ; \ n \geqslant 1\}$.

On a en fait : $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite basique $\Rightarrow \overline{\text{span}}\{x_{2n} \ ; \ n \geqslant 1\}$ est un demi-espace

Preuve du théorème

Idée de la preuve (cas 1) :

Preuve du théorème

Idée de la preuve (cas 1) :

- $(\lambda_n) \subseteq \rho(T)$ tel que $\lambda_n \longrightarrow 0$

Preuve du théorème

Idée de la preuve (cas 1) :

- $(\lambda_n) \subseteq \rho(T)$ tel que $\lambda_n \longrightarrow 0 \Rightarrow \|(\lambda_n \operatorname{Id} - T)^{-1}\| \longrightarrow +\infty$

Preuve du théorème

Idée de la preuve (cas 1) :

- $(\lambda_n) \subseteq \rho(T)$ tel que $\lambda_n \longrightarrow 0 \Rightarrow \|(\lambda_n \operatorname{Id} - T)^{-1}\| \longrightarrow +\infty$
- par Banach-Steinhaus $\exists e \in X$ tel que $\|(\lambda_n \operatorname{Id} - T)^{-1} e\| \longrightarrow +\infty$

Preuve du théorème

Idée de la preuve (cas 1) :

- $(\lambda_n) \subseteq \rho(T)$ tel que $\lambda_n \longrightarrow 0 \Rightarrow \|(\lambda_n \operatorname{Id} - T)^{-1}\| \longrightarrow +\infty$
- par Banach-Steinhaus $\exists e \in X$ tel que $\|(\lambda_n \operatorname{Id} - T)^{-1} e\| \longrightarrow +\infty$
- on note $h_n = (\lambda_n \operatorname{Id} - T)^{-1} e$ et on montre que $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une suite basique

Preuve du théorème

Idée de la preuve (cas 1) :

- $(\lambda_n) \subseteq \rho(T)$ tel que $\lambda_n \longrightarrow 0 \Rightarrow \|(\lambda_n \operatorname{Id} - T)^{-1}\| \longrightarrow +\infty$
- par Banach-Steinhaus $\exists e \in X$ tel que $\|(\lambda_n \operatorname{Id} - T)^{-1} e\| \longrightarrow +\infty$
- on note $h_n = (\lambda_n \operatorname{Id} - T)^{-1} e$ et on montre que $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une suite basique

$$\longrightarrow Y = \overline{\operatorname{span}}\{h_{2n}\ ;\ n \geqslant 0\} \text{ est un demi-espace tel que}$$
$$TY \subseteq Y + \operatorname{span}\{e\}$$

[AE98] S. Ansari et P. Enflo. "Extremal vectors and invariant subspaces". In : *Transactions of the American Mathematical Society* 350 (1998), p. 539-558.

[AS54] N. Aronszajn et K. T. Smith. "Invariant subspaces of completely continuous operators". In : *Annals of Mathematics* 60 (1954), p. 345-390.

[BR66] A. R. Bernstein et A. Robinson. "Solution of an invariant subspace problem of K.T. Smith and P.R. Halmos". In : *Pacific Journal of Mathematics* 16 (1966), p. 421-431.

[Bro78] S. W. Brown. "Some invariant subspaces for subnormal operators". In : *Integral Equations Operator Theory* 1 (1978), p. 310-333.

[Enf23] Per H. Enflo. *On the invariant subspace problem in Hilbert spaces*. 2023. arXiv : `2305.15442 [math.FA]`.

[Enf87] P. Enflo. "On the invariant subspace problem in Banach spaces". In : *Acta Mathematica* 158 (1987), p. 213-313.

[Fon+79] C. K. Fong et al. "Extensions of Lomonosov's invariant subspace theorem". In : *Acta Scientiarum Mathematicarum* 41 (1979), p. 55-62.

[GR14] S. Grivaux et M. Roginskaya. "A general approach to Read's type constructions of operators without non-trivial invariant closed subspaces". In : *Proceedings of the London Mathematical Society (3)* 109 (2014), p. 1-57.

[KPS75] H. W. Kim, C. M. Pearcy et A. L. Shields. "Rank-one commutators and hyperinvariant subspaces". In : *Michigan Mathematical Journal* 22 (1975), p. 193-194.

[Lom73] V. J. Lomonosov. "Invariant subspaces for operators commuting with compact operators". In : *Functional Analysis and Its Applications* 7 (1973), p. 55-56.

[PS74] C. Pearcy et A. L. Shields. "A survey of the Lomonosov technique in the theory of invariant subspaces". In : *Mathematical Surveys* 13 (1974), p. 219-230.

[Rea84] C. J. Read. “A solution to the invariant subspace problem”. In : *Bulletin of the London Mathematical Society* 16 (1984), p. 337-401.

[Rea85] C. J. Read. “A solution to the invariant subspace problem on the space ℓ^1”. In : *Bulletin of the London Mathematical Society* 17 (1985), p. 305-317.

[Rea88] C. J. Read. “The invariant subspace problem on a class of Banach spaces, 2: hyperbolic operators”. In : *Israel Journal of Mathematics* 63 (1988), p. 1-40.

[Tca19] A. Tcaciuc. “The invariant subspace problem for rank-one perturbations”. In : *Duke Mathematical Journal* 168 (2019), p. 1539-1550.