Analyse sémiotique des productions d'étudiants dans le domaine de l'Analyse à l'entrée à l'université

Isabelle BLOCH, LAB-E3D Université de Bordeaux

Stéphanie BRIDOUX, LDAR et Université de Mons (Belgique)

Patrick GIBEL, LAB-E3D Université de Bordeaux

Présentation du TD

- **Objectif :** Analyser d'un point de vue didactique et sémiotique des productions d'étudiants de L1 confrontés à des situations mathématiques dont la résolution nécessite de mobiliser des connaissances relatives à la notion de convergence d'une suite numérique.
- **Méthodologie :** outils d'analyse sémiotique et outils d'analyse didactique de la Théorie de l'Activité (TA) et de la Théorie des Situations Didactiques (TSD).

- **Situation 1,** Université de Mons : lors d'une évaluation finale au semestre 1 (accès au cours et aux TD), déterminer la capacité des étudiants à effectuer un usage raisonné des connaissances et des savoirs inhérents à la convergence d'une suite.
- **Situation 2,** Université de Pau : élaborer une preuve sur la notion de convergence d'une suite, par confrontation des étudiants à un dispositif didactique particulier intégrant une dimension heuristique.

Relief sur les notions à enseigner

- Nécessité, pour analyser le cours, les TD et les productions des étudiants, de disposer d'une référence a priori et d'éléments inhérents à la logique de construction du concept traduisant les choix didactiques de l'enseignant.
- Cette référence est appelée « **relief sur les notions à enseigner** » en TA (Bridoux et al., 2016).
- Croisement entre des analyses épistémologiques (spécificités des notions), cognitives (difficultés répertoriées chez les étudiants) et curriculaires (programmes, quand il y en a).

La définition de convergence au lycée en Belgique

- « *L'élève doit donner la définition de la limite d'une suite à partir d'un schéma, l'exprimer par une phrase et la transcrire en langage mathématique à l'aide de quantificateurs* » et il doit être capable de « *vérifier la valeur de la limite d'une suite à l'aide de la définition* » (Programme de mathématiques de première, mathématiques pour scientifiques).
- Sur le terrain: souvent la définition n'est pas donnée dans le cours. Les résultats de convergence (à retenir) concernent les suites arithmétiques et géométriques.
- Pas de tâche de manipulation de la définition formelle.

La définition de convergence au lycée en France

- Notion abordée de manière intuitive en 1ère: « *l'étude des suites est l'occasion d'une sensibilisation à l'idée de limite. Toute formalisation est exclue* » (Programme de mathématiques de première générale).
- Accent mis sur l'étude des suites arithmétiques et géométriques et les tâches sont très opératoires.
- En terminale: « La suite (u_n) converge vers le réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ».

La définition de convergence à l'université

- Définition donnée en L1 dans de nombreux pays: « la suite (u_n) converge vers un réel ℓ si $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq n_0\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon$ ».
- Variété des notations: $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0, $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.
- Variété des registres sémiotiques: registre graphique, registre de la langue naturelle, registre algébrique.

La figure 12 donne une autre illustration de la définition 3. Les points du graphique de $\{a_n\}$ ne peuvent pas sortir du couloir étroit formé par les droites horizontales $y = L + \varepsilon$ et $y = L - \varepsilon$ lorsque $n > N$. Cette image doit être valable aussi petit que soit ε, et habituellement un ε plus petit requiert un N plus grand.

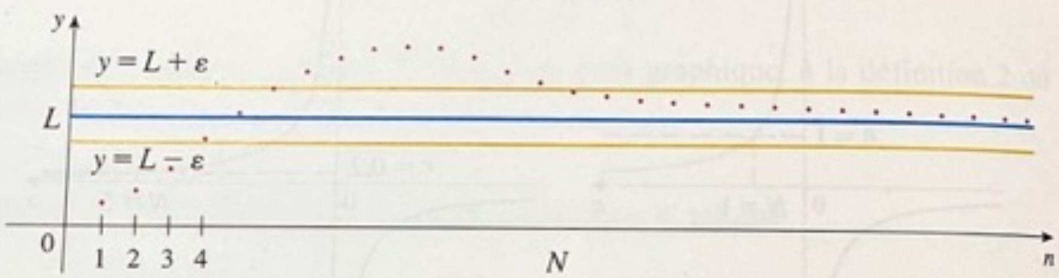

FIGURE 12

Analyse des raisonnements (TSD) du point de vue de la dialectique outil-objet

- Premiers exemples ($\frac{1}{n} \longrightarrow 0$, $a^n \longrightarrow 0$ si $|a| < 1$) : dimension objet.
- Premiers résultats (unicité de la limite, règles de calculs,…) : dimension outil.
- Les raisonnements mobilisent des mots, des symboles, des dessins, des calculs… et ces registres ont des fonctions différentes (cf cours I. Bloch).
- La rédaction d'une preuve doit être conforme aux règles mathématiques.

Éléments de relief sur la notion de convergence (1/2)

- La notion de convergence est une notion clé de la transition secondaire-supérieur.
- Les étudiants entrent en L1 avec des savoirs opératoires.

→ Difficulté de faire sentir le besoin d'une nouvelle définition pour caractériser la convergence pour une suite quelconque.

- Signes et objet sont en interaction forte. Cette complexité interprétative nécessite des adaptations de la part des étudiants.

→ Difficulté de donner du sens à la notion en tant qu'objet et en tant qu'outil.

Éléments de relief sur la notion de convergence (2/2)

- Les connaissances du supérieur diffèrent fortement des connaissances du secondaire du point de vue de la forme (nouveaux registres et formalisme spécifique à chaque registre) et de leur fonction (leur utilisation « raisonnée » est de la responsabilité de l'étudiant).
- Difficulté de trouver un problème initial où la notion serait l'outil optimal de résolution et où les étudiants pourraient construire la nouvelle notion de manière autonome.
- La notion de convergence est une **notion formalisatrice, unificatrice et généralisatrice** (notion FUG au sens de Robert, 1998).
- Élaboration d'ingénieries didactiques (Bloch et Gibel (2011), Gibel (2020), Przenioslo (2005), Robert (1983),…) qui s'appuient sur des changements de cadres, des conversions de registres, des formalisations intermédiaires,…

Situation 1

- Cours d'Analyse, L1, premier semestre, Université de Mons (Belgique).
- Contenus :
  - convergence des suites numériques
  - résultats classiques et démonstrations
  - borne sup/inf et maximum/minimum d'un ensemble
  - nombres réels
  - suites de Cauchy
- Tâche proposée lors de l'évaluation finale.

Situation 1 – Énoncé et questions

Vrai ou faux?
« Si une suite d'entiers converge alors elle est constante à partir d'un certain rang ».

- Quelles connaissances doivent-être mobilisées pour réaliser cette tâche ? Comment sont-elles articulées ?
- Dans quel(s) registre(s) de représentation(s) sémiotique(s) peut-on travailler pour résoudre la tâche (définition, dessin, calcul,…) ?
- Quel(s) type(s) de raisonnement(s) peuvent être produits ?

Situation 1 – Analyse a priori (1/2)

- Question ouverte: choix d'organisation de la démarche (produire une preuve ou donner un contre-exemple).
- Procédures possibles, compte-tenu du répertoire didactique :
  1. Utiliser la définition de convergence avec une valeur de ε comprise entre 0 et 1 pour en déduire l'existence d'un naturel n_0 tel que $\forall n \geq n_0\ x_n = a$ (a est un entier car $\mathbb{Z}$ est complet).
  2. Puisque la suite converge dans $\mathbb{R}$, c'est une suite de Cauchy. On utilise ensuite la définition de suite de Cauchy avec une valeur de ε omprise entre 0 et 1 pour en déduire l'existence d'un naturel n_0 tel que $\forall n, m \geq n_0\ x_n = x_m$.
- Connaissances mobilisées : convergence, suite de Cauchy, complétude de $\mathbb{Z}$, distance entre deux nombres entiers, suite ultimement constante…
- Fonctions des raisonnements : organiser la démarche, décider de l'utilisation de connaissances, interpréter des informations,…
- Registres sémiotiques : dessin, graphique, langue naturelle, algébrique.

Situation 1 – Analyse a priori (2/2)

- Le registre graphique peut être une aide pour se positionner sur l'énoncé (milieu heuristique).
- Nécessaire conversion du registre de la langue naturelle vers le registre algébrique.
- Importance de donner du sens aux signes, et plus particulièrement aux quantificateurs, pour manipuler correctement les définitions.
- Le fait que $\mathbb{Z}$ est complet ne fait pas partie du répertoire didactique des étudiants. Exemples du cours : $\mathbb{R}$ est complet, $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.
- La tâche mobilise des connaissances qui sont peu travaillées en cours et en TD. Ces connaissances apparaissent de plus dans des parties différentes du cours.
- *Le registre algébrique est beaucoup travaillé dans le cours.*

Situation 1 – Productions des étudiants

- Aucun dessin n’a été repéré dans les copies.
- Conversion du registre de la langue naturelle vers le registre algébrique présente dans les copies (sauf chez l’étudiant 4 qui est le seul à penser que l’énoncé est faux).
- Difficultés repérées :
  - Difficulté des étudiants à se confronter à un milieu heuristique par le recours à des registres différents, notamment pour faire le lien avec l’énoncé.
  - Connaissances sur les inégalités et les nombres non disponibles (Étudiant 2).
  - Utiliser les définitions (convergence ou suite de Cauchy) dans leur dimension outil (Étudiant 3), ce qui se traduit par un usage inapproprié des signes, dont les quantificateurs.
  - Conceptions erronées liées à la convergence d’une suite (Étudiants 3 et 4).
  - Difficulté à interpréter le fait que la suite finit par être constante (Étudiant 3).