

Équation de Schrödinger non-linéaire sur les graphes métriques

Séminaire jeunes

Damien Galant

CERAMATHS/DMATHS

Université Polytechnique
Hauts-de-France

Département de Mathématique

Université de Mons
F.R.S.-FNRS Research Fellow



Vendredi 28 avril 2023

- 1 Graphes métriques
- 2 L'équation de Schrödinger non-linéaire sur les graphes métriques
- 3 Formulation variationnelle
- 4 Conclusion

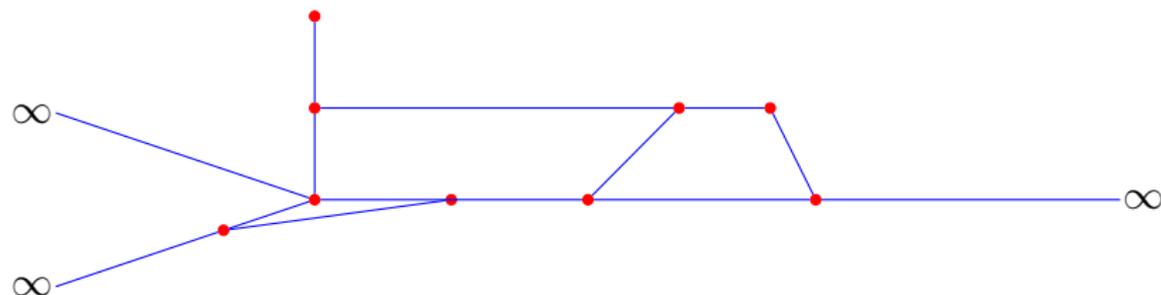
Qu'est-ce qu'un graphe métrique?

Un graphe métrique est formé de **sommets**



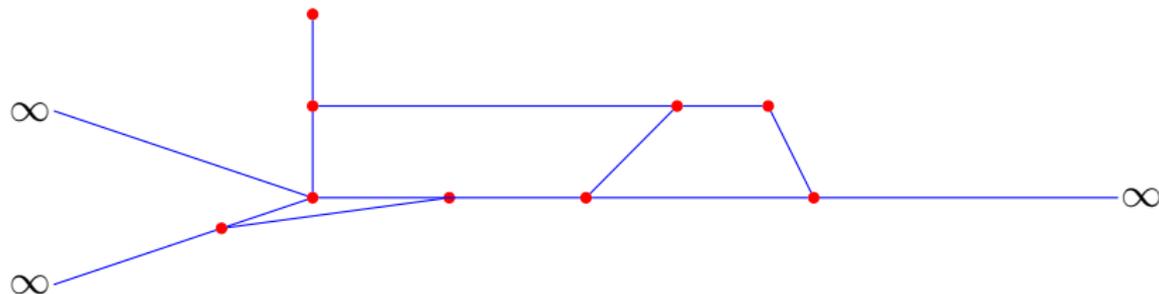
Qu'est-ce qu'un graphe métrique?

Un graphe métrique est formé de **sommets** et d'**arêtes** joignant les sommets ou allant jusqu'à l'infini.



Qu'est-ce qu'un graphe métrique?

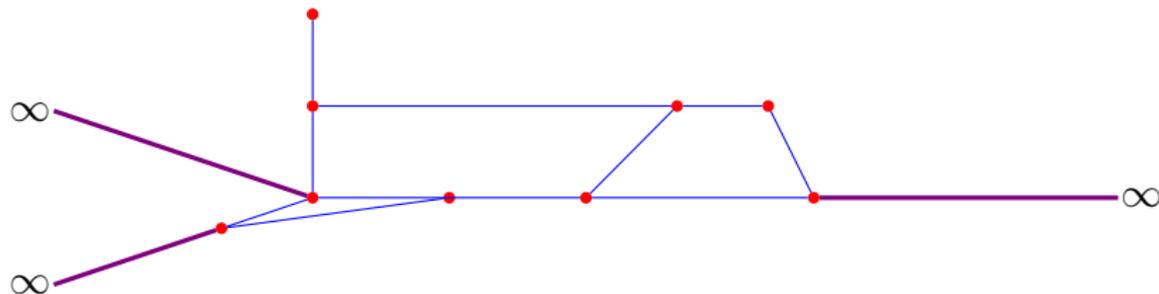
Un graphe métrique est formé de **sommets** et d'**arêtes** joignant les sommets ou allant jusqu'à l'infini.



- graphes *métriques*: la longueur des arêtes est importante.

Qu'est-ce qu'un graphe métrique?

Un graphe métrique est formé de **sommets** et d'**arêtes** joignant les sommets ou allant jusqu'à l'infini.



- graphes *métriques*: la longueur des arêtes est importante.
- les arêtes allant jusqu'à l'infini sont des **demi-droites** et ont une *longueur infinie*.

Constructions basées sur des demi-droites



La demi-droite

Constructions basées sur des demi-droites



La demi-droite



La droite

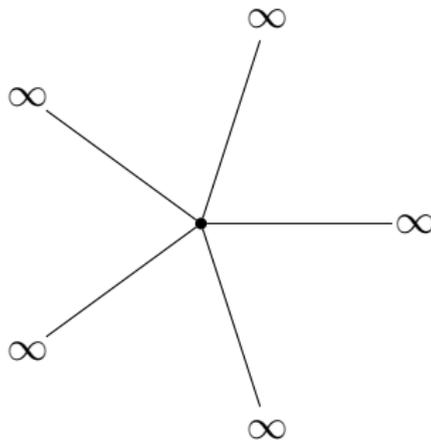
Constructions basées sur des demi-droites



La demi-droite



La droite



L'étoile à 5-branches

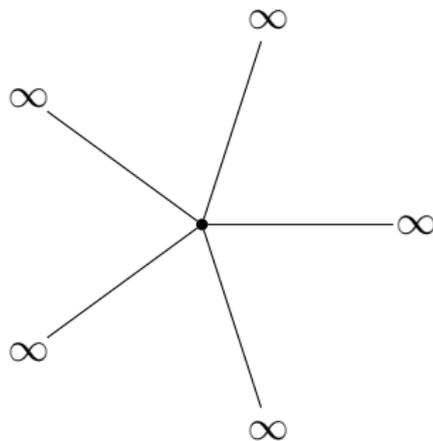
Constructions basées sur des demi-droites



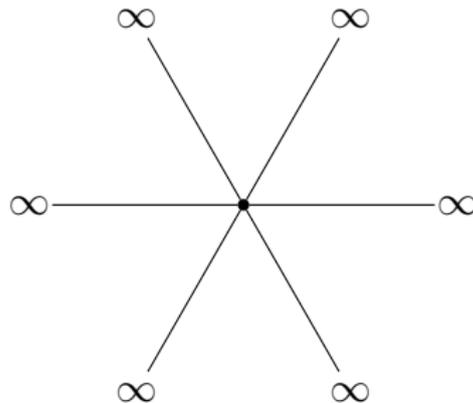
La demi-droite



La droite

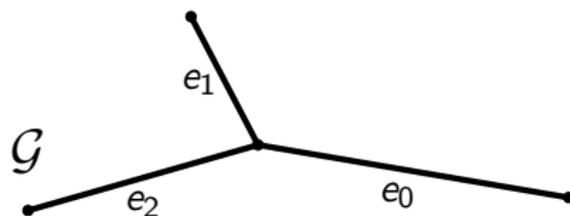


L'étoile à 5-branches



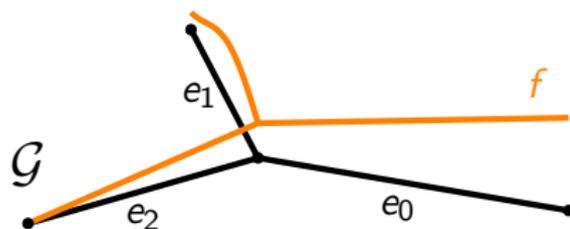
L'étoile à 6 branches

Fonctions définies sur des graphes métriques



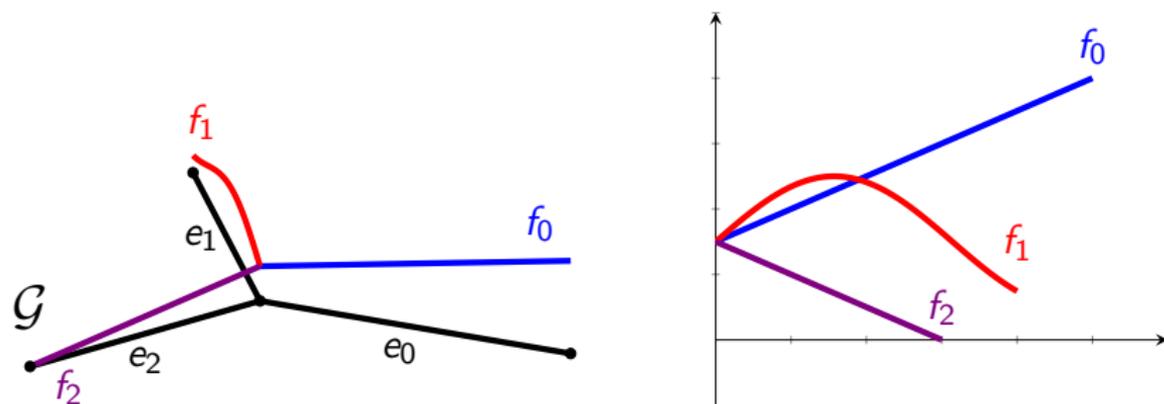
Un graphe métrique \mathcal{G} avec trois arêtes e_0 (longueur 5), e_1 (longueur 4) et e_2 (longueur 3)

Fonctions définies sur des graphes métriques



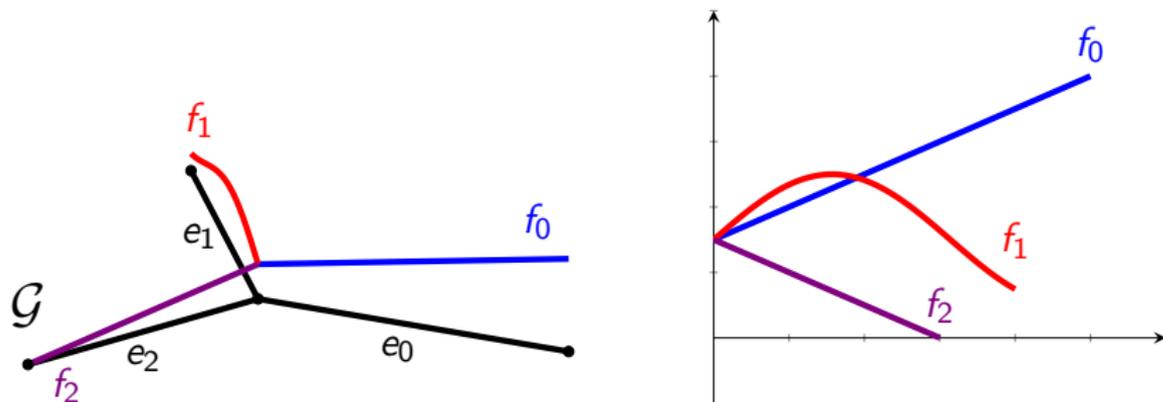
Un graphe métrique \mathcal{G} avec trois arêtes e_0 (longueur 5), e_1 (longueur 4) et e_2 (longueur 3), **une fonction** $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$

Fonctions définies sur des graphes métriques



Un graphe métrique \mathcal{G} avec trois arêtes e_0 (longueur 5), e_1 (longueur 4) et e_2 (longueur 3), **une fonction** $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, et les trois fonctions réelles associées.

Fonctions définies sur des graphes métriques



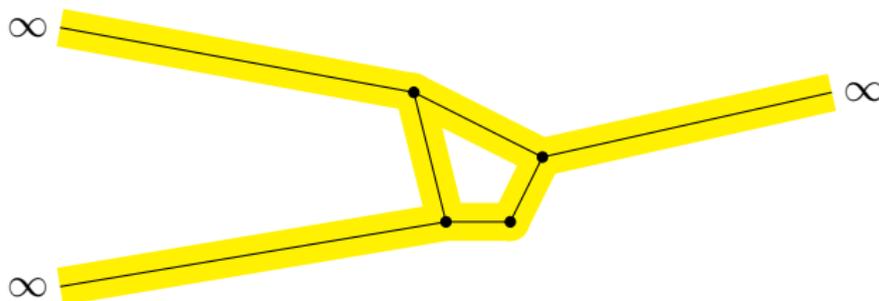
Un graphe métrique \mathcal{G} avec trois arêtes e_0 (longueur 5), e_1 (longueur 4) et e_2 (longueur 3), **une fonction** $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, et les trois fonctions réelles associées.

$$\int_{\mathcal{G}} f \, dx \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^5 f_0(x) \, dx + \int_0^4 f_1(x) \, dx + \int_0^3 f_2(x) \, dx$$

Pourquoi étudier les graphes métriques?

Motivations physiques

Modéliser des structures où *une seule direction spatiale est importante*.



Un « graphe épais » et le graphe métrique sous-jacent

Le système différentiel

Étant données des constantes $p > 2$ et $\lambda > 0$, nous sommes intéressés par les solutions $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ **continues** du système différentiel

Le système différentiel

Étant données des constantes $p > 2$ et $\lambda > 0$, nous sommes intéressés par les solutions $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ **continues** du système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' + |u|^{p-2}u = \lambda u \end{array} \right. \quad \text{pour chaque arête de } \mathcal{G},$$

Le système différentiel

Étant données des constantes $p > 2$ et $\lambda > 0$, nous sommes intéressés par les solutions $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ **continues** du système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' + |u|^{p-2}u = \lambda u & \text{pour chaque arête de } \mathcal{G}, \\ u \text{ converge vers } 0 \text{ à l'infini} & \text{pour chaque demi-droite de } \mathcal{G}, \end{array} \right.$$

Le système différentiel

Étant données des constantes $p > 2$ et $\lambda > 0$, nous sommes intéressés par les solutions $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ **continues** du système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' + |u|^{p-2}u = \lambda u & \text{pour chaque arête de } \mathcal{G}, \\ u \text{ converge vers } 0 \text{ à l'infini} & \text{pour chaque demi-droite de } \mathcal{G}, \\ \sum_{e \succ v} \frac{du}{dx_e}(v) = 0 & \text{pour chaque sommet } v \text{ de } \mathcal{G}, \end{array} \right.$$

Le système différentiel

Étant données des constantes $p > 2$ et $\lambda > 0$, nous sommes intéressés par les solutions $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ **continues** du système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' + |u|^{p-2}u = \lambda u & \text{pour chaque arête de } \mathcal{G}, \\ u \text{ converge vers } 0 \text{ à l'infini} & \text{pour chaque demi-droite de } \mathcal{G}, \\ \sum_{e \succ v} \frac{du}{dx_e}(v) = 0 & \text{pour chaque sommet } v \text{ de } \mathcal{G}, \end{array} \right.$$

où le symbole $e \succ v$ signifie que la somme porte sur toutes les arêtes de sommet v et où $\frac{du}{dx_e}(v)$ est la dérivée sortante de u en v (*condition de Kirchhoff*).

Le système différentiel

Étant données des constantes $p > 2$ et $\lambda > 0$, nous sommes intéressés par les solutions $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ **continues** du système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' + |u|^{p-2}u = \lambda u & \text{pour chaque arête de } \mathcal{G}, \\ u \text{ converge vers } 0 \text{ à l'infini} & \text{pour chaque demi-droite de } \mathcal{G}, \\ \sum_{e \succ v} \frac{du}{dx_e}(v) = 0 & \text{pour chaque sommet } v \text{ de } \mathcal{G}, \end{array} \right. \quad (\text{NLS})$$

où le symbole $e \succ v$ signifie que la somme porte sur toutes les arêtes de sommet v et où $\frac{du}{dx_e}(v)$ est la dérivée sortante de u en v (*condition de Kirchhoff*).

Condition de Kirchhoff: sommets de degré 1



$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{u(x_1 + t) - u(x_1)}{t} = 0$$

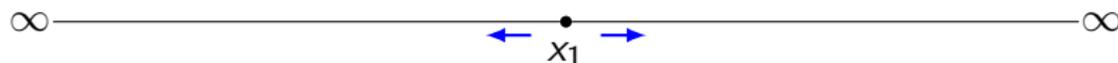
Condition de Kirchhoff: sommets de degré 1



$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{u(x_1 + t) - u(x_1)}{t} = 0$$

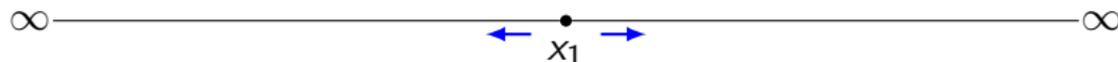
Autrement dit, la dérivée de u en x_1 s'annule. On retrouve alors la condition au bord dite *de Neumann*).

Condition de Kirchhoff: sommets de degré 2



$$\left(\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{u(x_1 + t) - u(x_1)}{t} \right) + \left(\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{u(x_1 - t) - u(x_1)}{t} \right) = 0$$

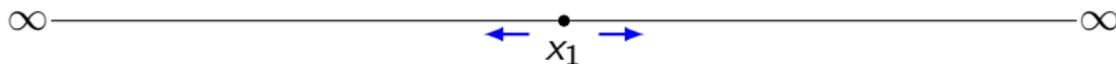
Condition de Kirchhoff: sommets de degré 2



$$\left(\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(x_1 + t) - u(x_1)}{t} \right) + \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(x_1 - t) - u(x_1)}{t} \right) = 0$$

Autrement dit, il faut que les dérivées à gauche et à droite de u soient égales, ce qui signifie que u est dérivable en x_1 .

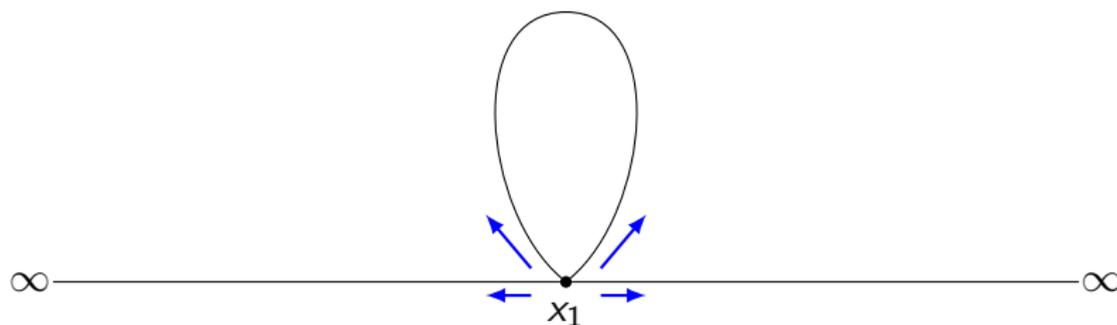
Condition de Kirchhoff: sommets de degré 2



$$\left(\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(x_1 + t) - u(x_1)}{t} \right) + \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(x_1 - t) - u(x_1)}{t} \right) = 0$$

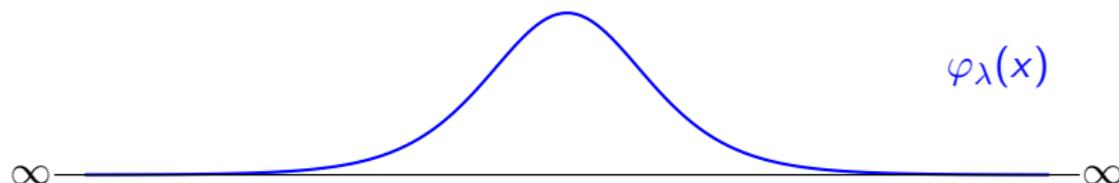
Autrement dit, il faut que les dérivées à gauche et à droite de u soient égales, ce qui signifie que u est dérivable en x_1 . Cette propriété est vérifiée par les solutions de l'équation différentielle, ce qui signifie qu'on peut ajouter ou retirer des sommets de degré 2 sans modifier le problème.

Condition de Kirchhoff dans le cas général: dérivées sortantes



$$\sum_{e \succ v} \frac{du}{dx_e}(v) = 0$$

La droite réelle: $\mathcal{G} = \mathbb{R}$



L'ensemble des solutions de (NLS) est donné par

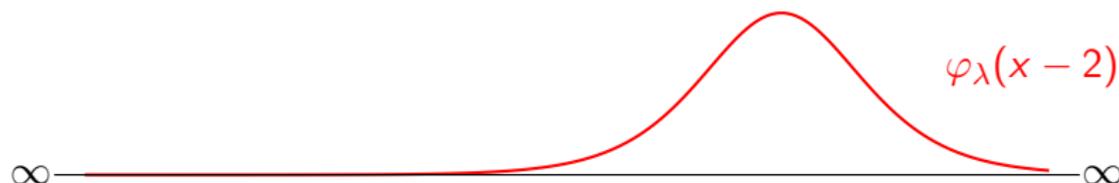
$$\left\{ \pm \varphi_\lambda(x + a) \mid a \in \mathbb{R} \right\},$$

où le *soliton* φ_λ est l'unique solution paire et strictement positive de

$$u'' + |u|^{p-2}u = \lambda u$$

qui converge vers 0 en l'infini.

La droite réelle: $\mathcal{G} = \mathbb{R}$



L'ensemble des solutions de (NLS) est donné par

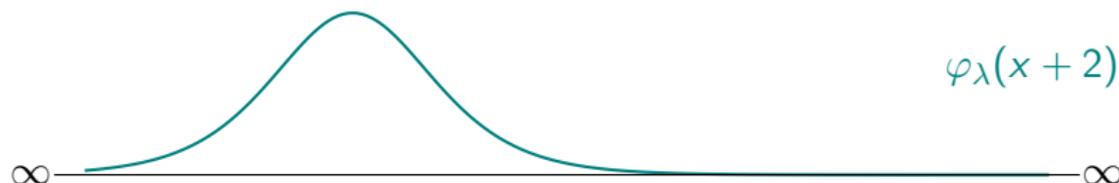
$$\left\{ \pm \varphi_\lambda(x + a) \mid a \in \mathbb{R} \right\},$$

où le *soliton* φ_λ est l'unique solution paire et strictement positive de

$$u'' + |u|^{p-2}u = \lambda u$$

qui converge vers 0 en l'infini.

La droite réelle: $\mathcal{G} = \mathbb{R}$



L'ensemble des solutions de (NLS) est donné par

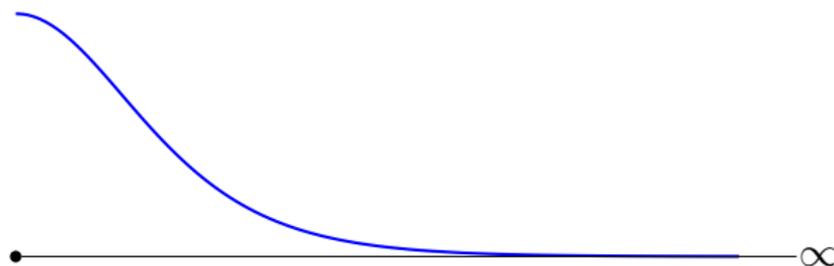
$$\left\{ \pm \varphi_\lambda(x + a) \mid a \in \mathbb{R} \right\},$$

où le *soliton* φ_λ est l'unique solution paire et strictement positive de

$$u'' + |u|^{p-2}u = \lambda u$$

qui converge vers 0 en l'infini.

La demi-droite: $\mathcal{G} = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$

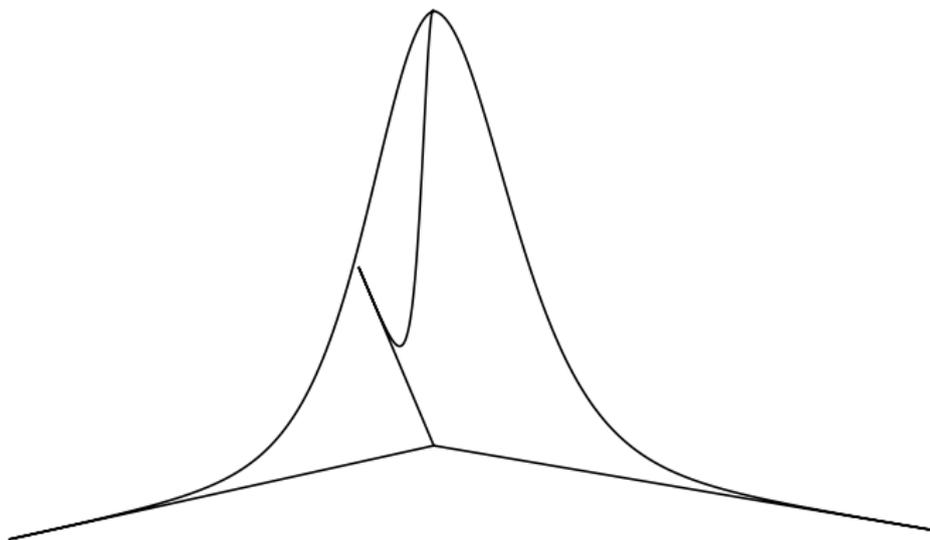


L'ensemble des solutions de (NLS) est donné par

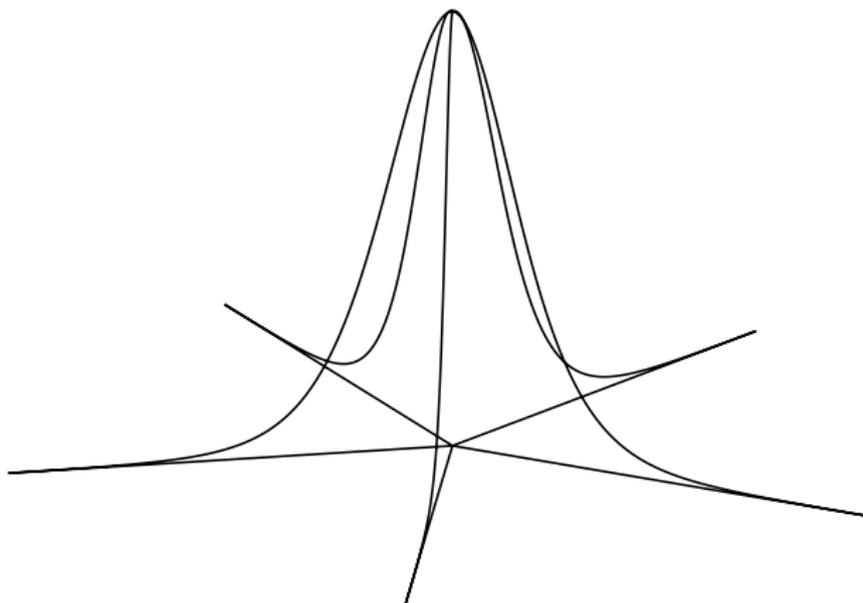
$$\left\{ \pm \varphi_\lambda(x) \Big|_{\mathbb{R}^+} \right\}.$$

Les solutions sont des *demi-solitons*: plus de translations!

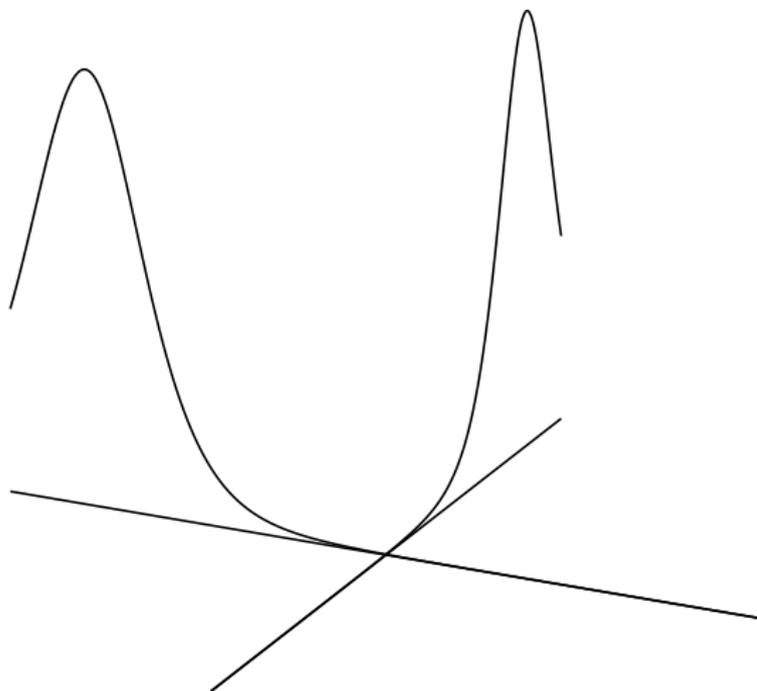
La solution positive sur l'étoile à 3 branches



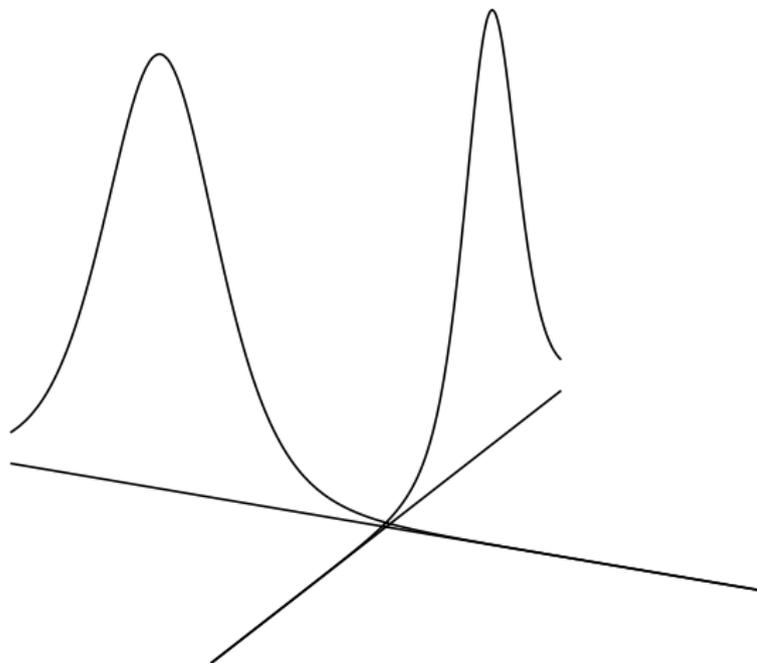
La solution positive sur l'étoile à 5 branches



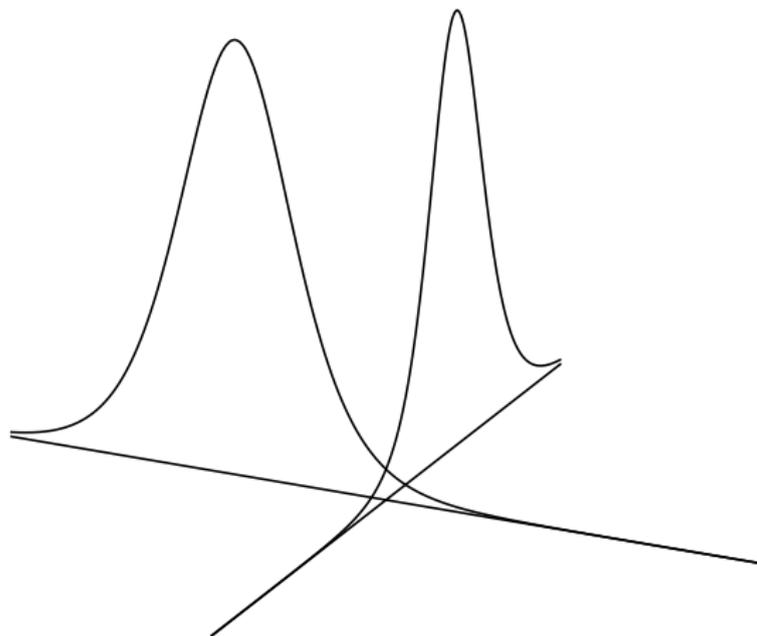
Une famille continue de solutions sur l'étoile à 4 branches



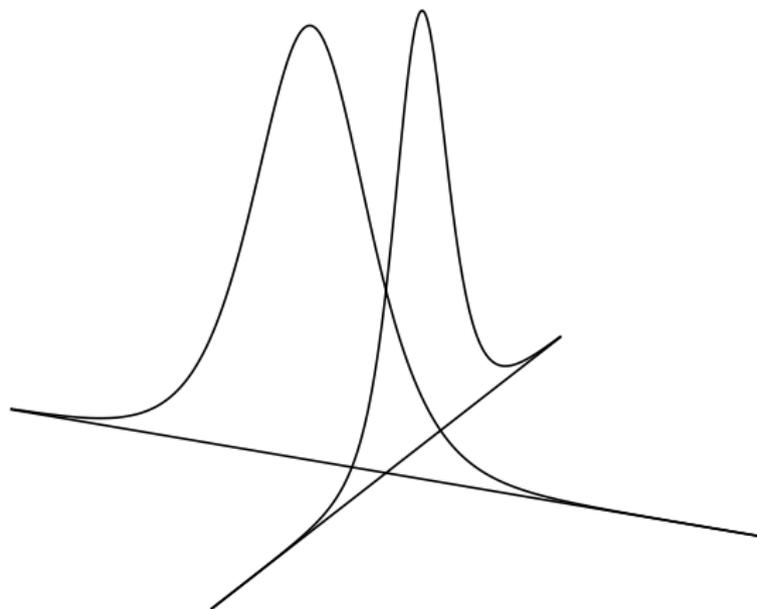
Une famille continue de solutions sur l'étoile à 4 branches



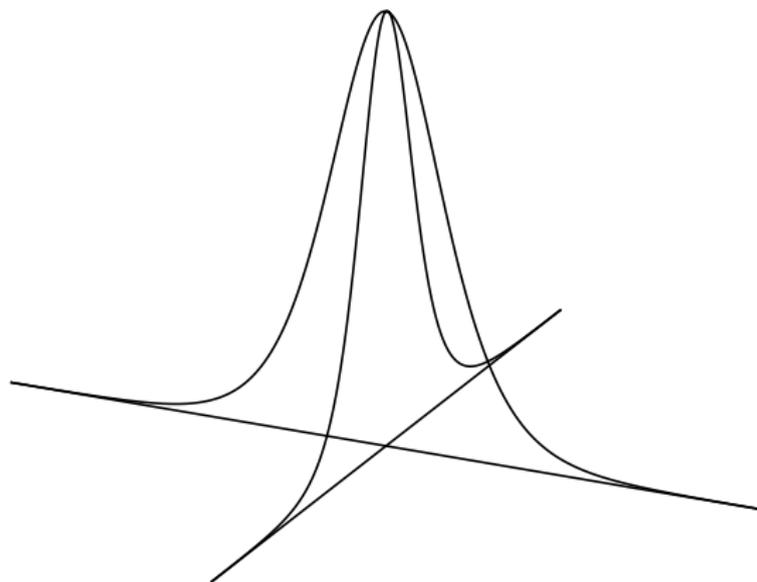
Une famille continue de solutions sur l'étoile à 4 branches



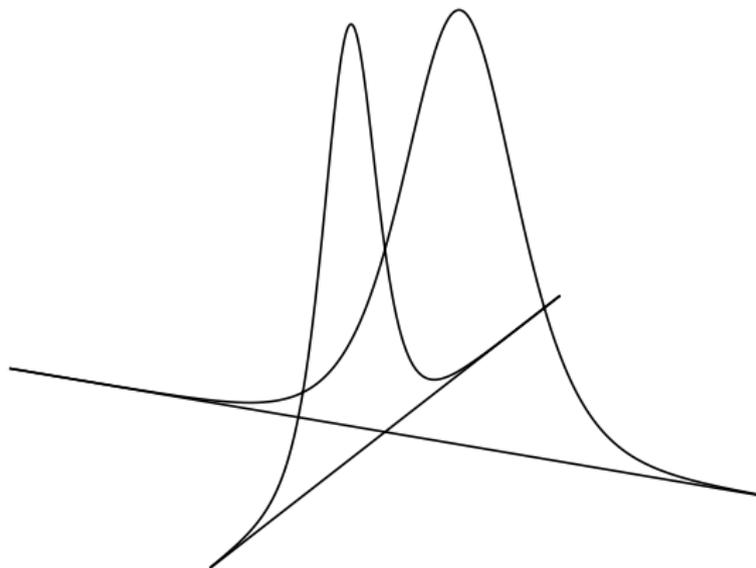
Une famille continue de solutions sur l'étoile à 4 branches



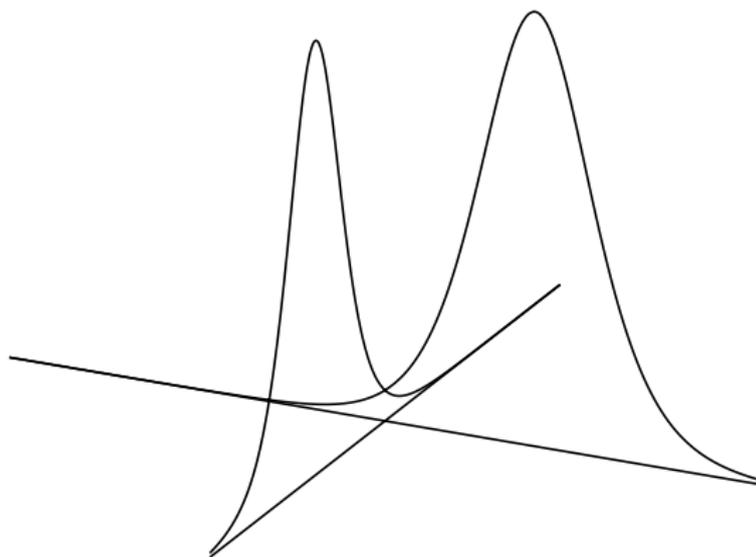
Une famille continue de solutions sur l'étoile à 4 branches



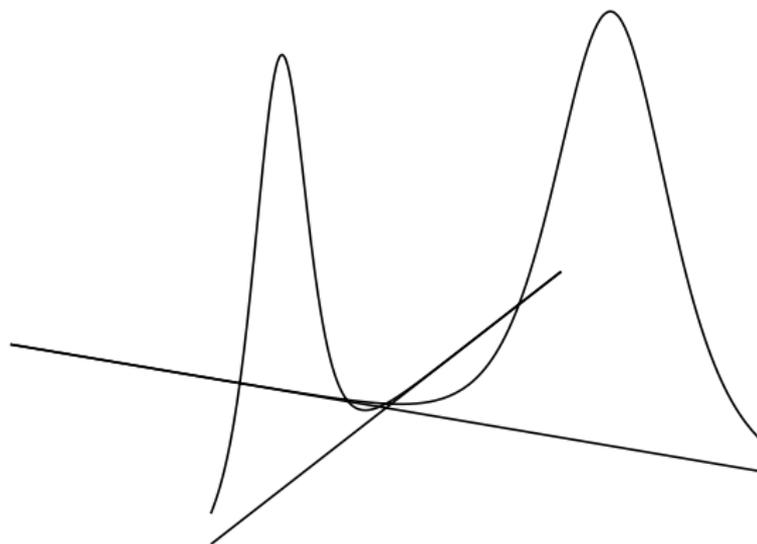
Une famille continue de solutions sur l'étoile à 4 branches



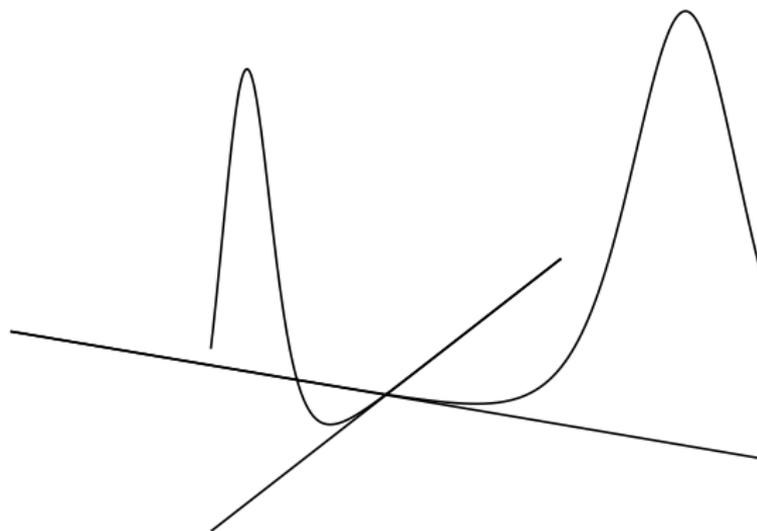
Une famille continue de solutions sur l'étoile à 4 branches



Une famille continue de solutions sur l'étoile à 4 branches



Une famille continue de solutions sur l'étoile à 4 branches



Besoin d'une approche plus conceptuelle

- Dans les exemples des graphes en étoile, on peut calculer « à la main » toutes les solutions car les graphes sont simples. En particulier, ils n'ont qu'un sommet.

Besoin d'une approche plus conceptuelle

- Dans les exemples des graphes en étoile, on peut calculer « à la main » toutes les solutions car les graphes sont simples. En particulier, ils n'ont qu'un sommet.
- Pour montrer l'existence de solutions sur des graphes ayant une structure plus riche, il est utile de disposer d'une approche plus conceptuelle.

Dérivées directionnelles

Définition (Dérivée directionnelle)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soient $u, v \in E$. La dérivée directionnelle de J en u dans la direction v est définie par

$$\partial J(u)[v] \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t},$$

pourvu que cette limite existe.

Dérivées directionnelles

Définition (Dérivée directionnelle)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soient $u, v \in E$. La dérivée directionnelle de J en u dans la direction v est définie par

$$\partial J(u)[v] \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t},$$

pourvu que cette limite existe.

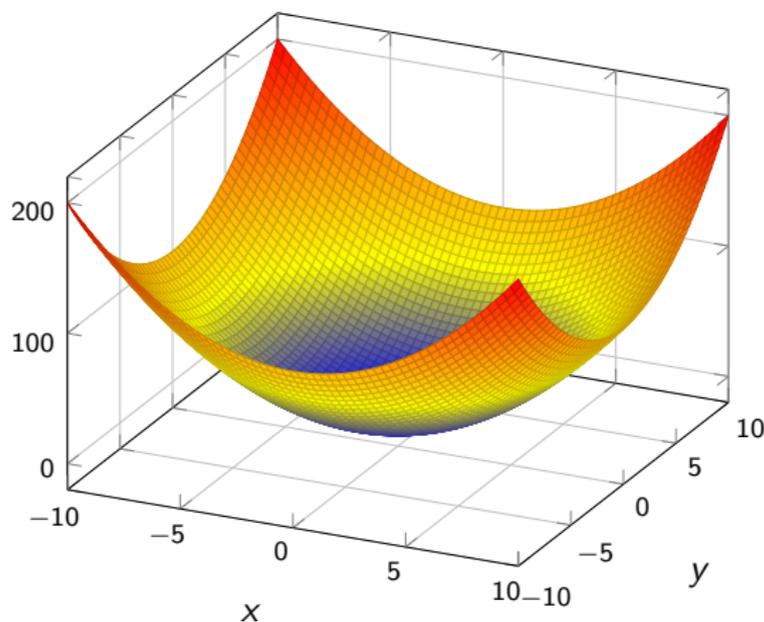
Définition (Point critique)

Avec les notations précédentes, on dit que $u \in E$ est un **point critique** de J si et seulement si $\partial J(u)[v] = 0$ pour tout $v \in E$.

Exemples de points critiques en dimension deux

Un minimum

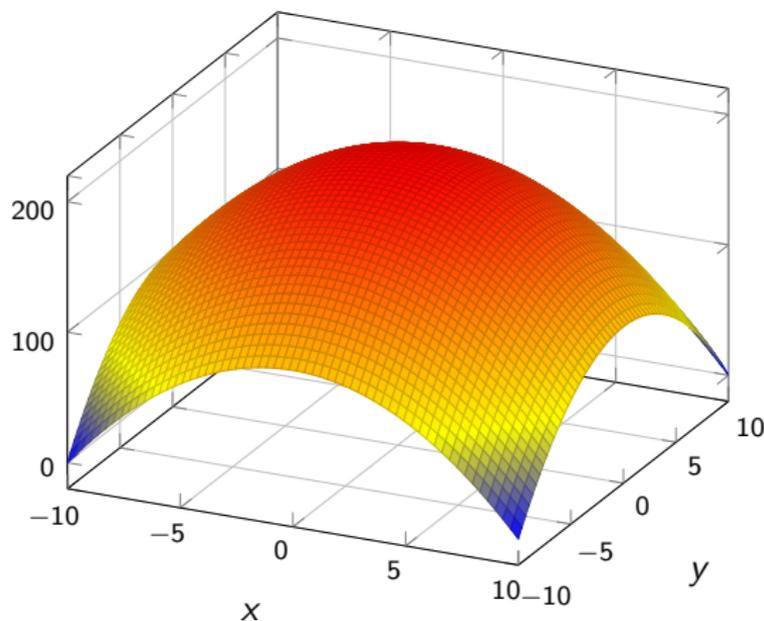
$f_1(x, y) = x^2 + y^2$; $(0, 0)$ est un minimum, donc un point critique



Exemples de points critiques en dimension deux

Un maximum

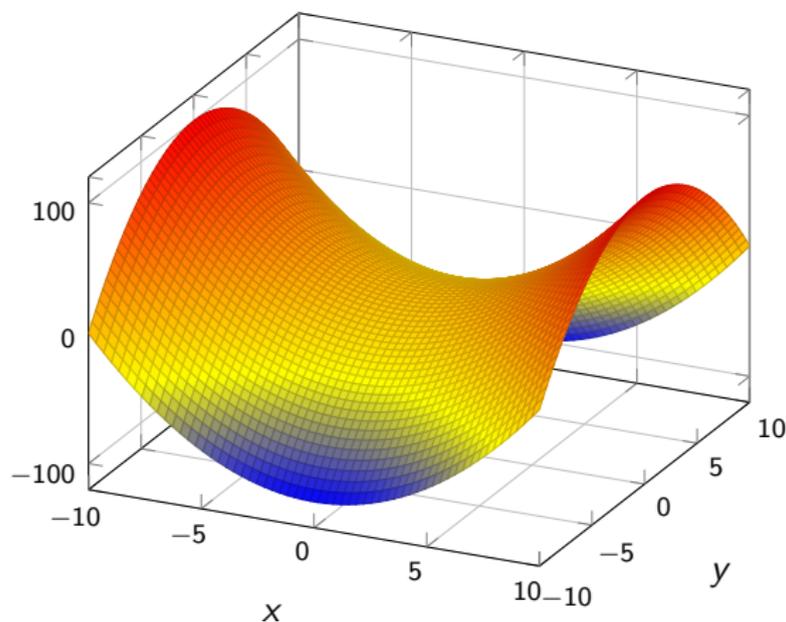
$f_2(x, y) = 200 - (x^2 + y^2)$; $(0, 0)$ est un maximum, donc un point critique



Exemples de points critiques en dimension deux

Un point de selle

$$f_3(x, y) = x^2 - y^2; (0, 0) \text{ est un point critique}$$



La fonctionnelle d'action

Étant donnée une fonction $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, son *action* est définie par

$$J_\lambda(u) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{G}} |u'|^2 + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathcal{G}} |u|^2 - \frac{1}{p} \int_{\mathcal{G}} |u|^p.$$

La fonctionnelle d'action

Étant donnée une fonction $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, son *action* est définie par

$$J_\lambda(u) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{G}} |u'|^2 + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathcal{G}} |u|^2 - \frac{1}{p} \int_{\mathcal{G}} |u|^p.$$

Remarque

La fonction J_λ est définie sur un espace vectoriel **de fonctions** (de dimension infinie), d'où son nom de **fonctionnelle** d'action.

La fonctionnelle d'action

Étant donnée une fonction $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, son *action* est définie par

$$J_\lambda(u) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{G}} |u'|^2 + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathcal{G}} |u|^2 - \frac{1}{p} \int_{\mathcal{G}} |u|^p.$$

Remarque

La fonction J_λ est définie sur un espace vectoriel **de fonctions** (de dimension infinie), d'où son nom de **fonctionnelle** d'action.

Proposition

Une fonction (assez régulière et convergeant vers 0 à l'infini) $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ est solution du système différentiel (NLS) si et seulement si u est un point critique de J_λ .

L'équation différentielle à l'intérieur des arêtes

Les dérivées directionnelles de J_λ sont données par

$$\partial J_\lambda(u)[v] = \int_{\mathcal{G}} u'(x)v'(x) dx + \lambda \int_{\mathcal{G}} u(x)v(x) dx - \int_{\mathcal{G}} |u(x)|^{p-2}u(x)v(x) dx$$

pour tout couple de fonctions u et v (assez régulières).

L'équation différentielle à l'intérieur des arêtes

Les dérivées directionnelles de J_λ sont données par

$$\partial J_\lambda(u)[v] = \int_{\mathcal{G}} u'(x)v'(x) dx + \lambda \int_{\mathcal{G}} u(x)v(x) dx - \int_{\mathcal{G}} |u(x)|^{p-2}u(x)v(x) dx$$

pour tout couple de fonctions u et v (assez régulières).

Si φ a support compact à l'intérieur d'une arête $e = AB$, on a

$$0 = \partial J_\lambda(u)[\varphi]$$

L'équation différentielle à l'intérieur des arêtes

Les dérivées directionnelles de J_λ sont données par

$$\partial J_\lambda(u)[v] = \int_{\mathcal{G}} u'(x)v'(x) dx + \lambda \int_{\mathcal{G}} u(x)v(x) dx - \int_{\mathcal{G}} |u(x)|^{p-2}u(x)v(x) dx$$

pour tout couple de fonctions u et v (assez régulières).

Si φ a support compact à l'intérieur d'une arête $e = AB$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \partial J_\lambda(u)[\varphi] \\ &= \int_e u'(x)\varphi'(x) dx + \lambda \int_e u(x)\varphi(x) dx - \int_e |u(x)|^{p-2}u(x)\varphi(x) dx \end{aligned}$$

L'équation différentielle à l'intérieur des arêtes

Les dérivées directionnelles de J_λ sont données par

$$\partial J_\lambda(u)[v] = \int_{\mathcal{G}} u'(x)v'(x) dx + \lambda \int_{\mathcal{G}} u(x)v(x) dx - \int_{\mathcal{G}} |u(x)|^{p-2}u(x)v(x) dx$$

pour tout couple de fonctions u et v (assez régulières).

Si φ a support compact à l'intérieur d'une arête $e = AB$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \partial J_\lambda(u)[\varphi] \\ &= \int_e u'(x)\varphi'(x) dx + \lambda \int_e u(x)\varphi(x) dx - \int_e |u(x)|^{p-2}u(x)\varphi(x) dx \\ &= \frac{du}{dx_e}(B) \underbrace{\varphi(B)}_{=0} - \frac{du}{dx_e}(A) \underbrace{\varphi(A)}_{=0} \\ &\quad + \int_e (-u''(x) + \lambda u(x) - |u(x)|^{p-2}u(x))\varphi(x) dx \end{aligned}$$

L'équation différentielle à l'intérieur des arêtes

Les dérivées directionnelles de J_λ sont données par

$$\partial J_\lambda(u)[v] = \int_{\mathcal{G}} u'(x)v'(x) dx + \lambda \int_{\mathcal{G}} u(x)v(x) dx - \int_{\mathcal{G}} |u(x)|^{p-2}u(x)v(x) dx$$

pour tout couple de fonctions u et v (assez régulières).

Si φ a support compact à l'intérieur d'une arête $e = AB$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \partial J_\lambda(u)[\varphi] \\ &= \int_e u'(x)\varphi'(x) dx + \lambda \int_e u(x)\varphi(x) dx - \int_e |u(x)|^{p-2}u(x)\varphi(x) dx \\ &= \frac{du}{dx_e}(B) \underbrace{\varphi(B)}_{=0} - \frac{du}{dx_e}(A) \underbrace{\varphi(A)}_{=0} \\ &\quad + \int_e (-u''(x) + \lambda u(x) - |u(x)|^{p-2}u(x))\varphi(x) dx \end{aligned}$$

donc $u'' + |u|^{p-2}u = \lambda u$ sur les arêtes de \mathcal{G} .

La condition de Kirchhoff

Soit A un sommet de \mathcal{G} et soient B_1, \dots, B_D les sommets adjacents à A .

La condition de Kirchhoff

Soit A un sommet de \mathcal{G} et soient B_1, \dots, B_D les sommets adjacents à A . On définit φ , affine sur les arêtes de \mathcal{G} et telle que $\varphi(A) = 1$ et $\varphi(v) = 0$ pour tous les sommets $v \neq A$. On note $e_i \stackrel{\text{déf}}{=} AB_i$. Alors,

La condition de Kirchhoff

Soit A un sommet de \mathcal{G} et soient B_1, \dots, B_D les sommets adjacents à A . On définit φ , affine sur les arêtes de \mathcal{G} et telle que $\varphi(A) = 1$ et $\varphi(v) = 0$ pour tous les sommets $v \neq A$. On note $e_i \stackrel{\text{déf}}{=} AB_i$. Alors,

$$\begin{aligned} 0 &= \partial J_\lambda(u)[\varphi] \\ &= \sum_{1 \leq i \leq D} \left(\int_{e_i} u' \varphi' \, dx + \lambda \int_{e_i} u \varphi \, dx - \int_{e_i} |u|^{p-2} u \varphi \, dx \right) \end{aligned}$$

La condition de Kirchhoff

Soit A un sommet de \mathcal{G} et soient B_1, \dots, B_D les sommets adjacents à A . On définit φ , affine sur les arêtes de \mathcal{G} et telle que $\varphi(A) = 1$ et $\varphi(v) = 0$ pour tous les sommets $v \neq A$. On note $e_i \stackrel{\text{d\'ef}}{=} AB_i$. Alors,

$$\begin{aligned}
 0 &= \partial J_\lambda(u)[\varphi] \\
 &= \sum_{1 \leq i \leq D} \left(\int_{e_i} u' \varphi' dx + \lambda \int_{e_i} u \varphi dx - \int_{e_i} |u|^{p-2} u \varphi dx \right) \\
 &= \sum_{1 \leq i \leq D} \left(\frac{du}{dx_{e_i}}(B_i) \underbrace{\varphi(B_i)}_{=0} - \frac{du}{dx_{e_i}}(A_i) \underbrace{\varphi(A)}_{=1} \right) \\
 &+ \sum_{1 \leq i \leq D} \int_{e_i} \underbrace{(-u'' + \lambda u - |u|^{p-2} u)}_{=0} \varphi(x) dx
 \end{aligned}$$

La condition de Kirchhoff

Soit A un sommet de \mathcal{G} et soient B_1, \dots, B_D les sommets adjacents à A . On définit φ , affine sur les arêtes de \mathcal{G} et telle que $\varphi(A) = 1$ et $\varphi(V) = 0$ pour tous les sommets $V \neq A$. On note $e_i \stackrel{\text{déf}}{=} AB_i$. Alors,

$$\begin{aligned}
 0 &= \partial J_\lambda(u)[\varphi] \\
 &= \sum_{1 \leq i \leq D} \left(\int_{e_i} u' \varphi' dx + \lambda \int_{e_i} u \varphi dx - \int_{e_i} |u|^{p-2} u \varphi dx \right) \\
 &= \sum_{1 \leq i \leq D} \left(\frac{du}{dx_{e_i}}(B_i) \underbrace{\varphi(B_i)}_{=0} - \frac{du}{dx_{e_i}}(A_i) \underbrace{\varphi(A)}_{=1} \right) \\
 &\quad + \sum_{1 \leq i \leq D} \int_{e_i} \underbrace{(-u'' + \lambda u - |u|^{p-2} u)}_{=0} \varphi(x) dx
 \end{aligned}$$

donc $\sum_{1 \leq i \leq D} \frac{du}{dx_{e_i}}(A_i) = 0$, ce qui est la condition de Kirchhoff.

Exemple de résultat “variationnel”: le théorème de Rolle

Théorème (Théorème de Rolle)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $\partial f(\xi) = 0$.

Exemple de résultat “variationnel”: le théorème de Rolle

Théorème (Théorème de Rolle)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $\partial f(\xi) = 0$.

Idée de la preuve.

La fonction f étant continue sur le **compact** $[a, b]$, elle y atteint son minimum en un certain point x_* . Un petit raisonnement montre qu'on peut se ramener au cas où x_* appartient à $]a, b[$. Alors $\partial f(x_*) = 0$. □

Ce qui change en dimension infinie

- Pour trouver des points critiques, par exemple des minima (sous contraintes), on a souvent besoin de compacité. Or, la compacité manque souvent en dimension infinie (si E est un espace vectoriel normé, alors $B[0, 1]$ est compacte si et seulement si $\dim E < \infty$);

Ce qui change en dimension infinie

- Pour trouver des points critiques, par exemple des minima (sous contraintes), on a souvent besoin de compacité. Or, la compacité manque souvent en dimension infinie (si E est un espace vectoriel normé, alors $B[0, 1]$ est compacte si et seulement si $\dim E < \infty$);
- Une façon de s'en sortir est de recourir à d'autres notions de convergence, telles la convergence faible.

Ce qu'on peut montrer grâce à l'approche variationnelle

Théorème

Tout graphe métrique avec un nombre fini d'arêtes de longueurs finies possède au moins une solution de (NLS) non-nulle.

Ce qu'on peut montrer grâce à l'approche variationnelle

Théorème

Tout graphe métrique avec un nombre fini d'arêtes de longueurs finies possède au moins une solution de (NLS) non-nulle.

Remarque

L'hypothèse « nombre fini d'arêtes de longueurs finies » assure que le graphe est compact, en tant qu'espace métrique.

Un problème ouvert

Conjecture

*Tous les graphes avec un nombre fini d'arêtes, **dont des demi-droites**, possèdent au moins une solution de (NLS) non-nulle.*

Le mot de la fin

Pourquoi étudier les graphes métriques?

Les graphes métriques permettent d'étudier des problèmes *unidimensionnels* et sont beaucoup plus riches que la classe usuelle des intervalles de \mathbb{R} .

Le mot de la fin

Pourquoi étudier les graphes métriques?

Les graphes métriques permettent d'étudier des problèmes *unidimensionnels* et sont beaucoup plus riches que la classe usuelle des intervalles de \mathbb{R} .

Intérêt de l'approche variationnelle

L'approche variationnelle peut sembler plus complexe, mais elle permet de travailler à un bon niveau d'abstraction et permet de traiter le cas des graphes compacts ayant une structure très complexe.



Merci pour votre attention!

Références

Introductions au sujet:

-  R. Adami *Ground states of the Nonlinear Schrodinger Equation on Graphs: an overview (Lisbon WADE)*.
<https://www.youtube.com/watch?v=G-FcnRVvoos> (2020)
-  R. Adami, E. Serra, P. Tilli *Nonlinear dynamics on branched structures and networks*. <https://arxiv.org/abs/1705.00529> (2017)
-  A. Kairzhan, D. Noja, D. Pelinovsky *Standing waves on quantum graphs*. *J. Phys. A: Math. Theor.* 55 243001 (2022)

Un article de recherche:

-  C. De Coster, S. Dovetta, D. Galant, E. Serra. *On the notion of ground state for nonlinear Schrödinger equations on metric graphs*, arXiv:2301.08001 [math.AP] (2023).

Une application: l'atomtrique

- Un *boson*¹ est une particule de spin entier.

¹Ici on considère des bosons de spin entier, comme des atomes.

Une application: l'atomtrique

- Un *boson*¹ est une particule de spin entier.
- Quand des bosons identiques sont refroidis à une température proche du zéro absolu, ils occupent un *même état quantique de plus basse énergie*.

¹Ici on considère des bosons de spin entier, comme des atomes.

Une application: l'atomtrique

- Un *boson*¹ est une particule de spin entier.
- Quand des bosons identiques sont refroidis à une température proche du zéro absolu, ils occupent un *même état quantique de plus basse énergie*.
- Ce phénomène est connu sous le nom de *condensation de Bose-Einstein*.

¹Ici on considère des bosons de spin entier, comme des atomes.

Une application: l'atomtronique

- Un *boson*¹ est une particule de spin entier.
- Quand des bosons identiques sont refroidis à une température proche du zéro absolu, ils occupent un *même état quantique de plus basse énergie*.
- Ce phénomène est connu sous le nom de *condensation de Bose-Einstein*.
- C'est vraiment remarquable: *phénomène quantique macroscopique!*

¹Ici on considère des bosons de spin entier, comme des atomes.

Une application: l'atomtrique

- Un *boson*¹ est une particule de spin entier.
- Quand des bosons identiques sont refroidis à une température proche du zéro absolu, ils occupent un *même état quantique de plus basse énergie*.
- Ce phénomène est connu sous le nom de *condensation de Bose-Einstein*.
- C'est vraiment remarquable: *phénomène quantique macroscopique!*
- Depuis les années 2000: émergence de l'*atomtrique*, qui étudie les circuits guidant la propagation d'atomes ultra-froids.

¹Ici on considère des bosons de spin entier, comme des atomes.