UNIVERSITE LIBRE DE BRUXELLES
Faculté des Sciences

L'ANOMALIE CONFORME EN DIMENSIONS 2 ET 4

Dérivation par la méthode de DeWitt-Schwinger et via la correspondance AdS/CFT

Nicolas Boulanger

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade légal de
Licencié en Sciences Physiques

Directeur de mémoire :

Marc Henneaux

Année Académique 1998-1999

REMERCIEMENTS

J'adresse tous mes remerciements à mon promoteur M. Henneaux et à C. Schomblond pour leur aide et leurs précieux conseils.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Les symétries et les lois de conservation qui leurs sont associées jouent un rôle essentiel dans la physique des interactions fondamentales. En théorie des champs, il peut arriver que certaines symétries de la théorie classique soient violées dans la version quantique qui n'a de sens que régularisée puis renormalisée. On parle alors d'anomalie. Ces anomalies sont déjà concevables en mécanique quantique même si les exemples connus viennent de la théorie des champs.

Lorsqu'une telle anomalie est liée à la brisure d'une symétrie de jauge, elle peut mettre en péril la cohérence même de la théorie (déjà, par exemple, dans le décompte du nombre de degrés de liberté du système). Eviter les anomalies ou faire en sorte que les diverses anomalies possibles s'annulent entre elles, impose de sévères contraintes à la classe des modèles théoriques admissibles. Rappelons, par ailleurs, que l'existence d'anomalies (par exemple l'anomalie chirale) permet d'expliquer certains faits expérimentaux (comme la désintégration $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$).

Dans les théories quantiques de champs incluant le champ de gravitation (et aussi dans les théories de cordes), diverses anomalies ont été répertoriées qui font intervenir le tenseur d'énergie-impulsion : nous focaliserons notre attention ici sur l'anomalie conforme. L'anomalie conforme (ou anomalie de Weyl ou encore anomalie de trace) est la non-annulation, dans le formalisme quantique, de la trace du tenseur d'énergie-impulsion pour une théorie où celle-ci est nulle classiquement. La trace du tenseur d'énergie-impulsion est égale à la variation de l'action sous les transformations de Weyl (appelées parfois transformations conformes) de la métrique d'espace-temps. Cette anomalie exprime donc la brisure, au niveau quantique, de l'invariance conforme.

Notons que dans ce cas nous n'avons pas affaire à une brisure de symétrie de jauge, dont les conséquences sont graves. L'anomalie conforme possède d'ailleurs des applications physiques intéressantes. Elle permet d'expliquer la radiation de Hawking en dimension 2 [1], elle intervient dans la création de particules [2], dans le déclenchement de la brisure de symétrie du vide invariant conforme, elle est présente dans le supermultiplet scalaire formé avec la divergence du courant axial et la gamma-trace du courant spinoriel, en théorie des cordes elle est intimement liée aux dimensions critiques des cordes via la charge centrale de l'algèbre de Virasoro, etc.

Le calcul de l'anomalie conforme du champ scalaire réel, en dimension $n = 2$ et $n = 4$, fait l'objet du présent mémoire (nous montrerons que l'anomalie n'apparaît qu'en dimension paire). Nous l'avons abordé par deux voies très différentes que nous présentons successivement. Pour l'historique de l'anomalie conforme, voir [8].

Dans la première partie exposée au chapitre 2, nous avons repris le calcul proposé par B. De Witt du tenseur d'énergie-impulsion du champ scalaire quantifié couplé à un champ de gravitation extérieur classique, à l'ordre des diagrammes à une boucle. Cette méthode utilise tout l'arsenal de la théorie quantique des champs adapté aux espaces courbes; elle a l'avantage d'être systématique mais les développements qu'elle implique sont longs et fastidieux.

Dans la deuxième partie contenue dans le chapitre 3, nous nous sommes intéressés à une approche plus récente, mais aussi plus spéculative et pas encore tout à fait comprise, proposée par E. Witten [17] (voir aussi [18]) et développée par M. Henningson et K. Skenderis [25]. Celle-ci est basée sur la "correspondance AdS/CFT" conjecturée par J.M. Maldacena [16] dont nous retenons ici qu'elle relie des théories conformes (Conformal Field Theory) à n dimensions à la théorie de la gravitation à $n+1$ dimensions en espace à courbure négative (dans l'espace anti de Sitter, noté AdS). Cette correspondance se révèle très puissante car elle permet l'obtention de résultats exacts et généraux de façon relativement simple et, pour le moment, tout porte à croire qu'elle pourrait être bien plus qu'une simple conjecture.

Nous commencerons le chapitre 2 par le rappel de quelques notions de géométrie riemannienne dont nous avons besoin pour obtenir la représentation intégrale du propagateur de Feynman en espace courbe dérivée initialement par B. De Witt (par exemple [3]) et J. Schwinger [4]. L'idée est de généraliser au cas d'un espace courbe les techniques de la théorie quantique des champs en espace plat. Le propagateur de Feynman est un objet important en théorie des champs; sa représentation s'obtient en généralisant l'amplitude de transition d'une particule libre de masse m et en intégrant sur un temps fictif appelé "temps propre de Schwinger". Les calculs étant simples mais fastidieux, nous commenterons l'efficacité des techniques mathématiques mises en oeuvre.

A l'aide des résultats obtenus, nous calculerons le tenseur d'énergie-impulsion du champ scalaire réel en généralisant les techniques du calcul fonctionnel à l'espace courbe. La procédure consiste à inclure le calcul du tenseur d'énergie-impulsion dans le cadre d'une théorie dynamique plus large impliquant la gravitation sous la forme d'un champ classique. Nous montrerons que le tenseur d'énergie-impulsion est divergent. Nous le régulariserons puis le renormaliserons en absorbant une partie de ses divergences dans une redéfinition des constantes, cosmologique et de Newton. Pour une renormalisation complète, il faudra introduire de nouveaux termes tensoriels dans les équations d'Einstein. Les divergences résiduelles seront alors absorbées dans les coefficients de ces nouveaux termes. Les soustractions seront définies de manière à conserver l'invariance de la théorie sous le groupe des difféomorphismes (ou changements de coordonnées) qui sont les symétries de jauge de la relativité générale. Par contre, l'invariance conforme sera brisée dans la renormalisation du tenseur d'énergie-impulsion. La trace de ce dernier nous donnera l'anomalie conforme. Nous calculerons l'anomalie en dimensions 2 et 4.

Dans le troisième chapitre, nous nous servirons d'une idée avancée récemment par J.M. Maldacena [16] reliant une théorie de la gravitation en dimension $n+1$ (en espace AdS) à une théorie conforme de champs dans un espace de dimension n, vu comme le bord de l'espace de la première théorie. Nous calculerons W_{AdS}, la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green connexes de la théorie en dimension $n+1$, et, par la correspondance, nous en déduirons immédiatement la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green connexes de la théorie conforme, W_{CFT}. Dans la théorie en dimension $n+1$, la métrique d'espace-temps $\hat{G}_{\mu\nu}$ est un champ qui se couple, sur le bord, au tenseur d'énergie-impulsion. Les calculs dans cette théorie seront, ici encore, simplifiés par l'approximation des basses énergies. Nous montrerons que le champ $\hat{G}_{\mu\nu}$ induit une classe conforme de métriques au bord et que W_{CFT} est divergente. Pour renormaliser W_{CFT}, l'obligation de fixer un représentant $g_{(0)ij}$ dans la classe des métriques conformes au bord brisera l'invariance de la théorie conforme et nous obtiendrons de ce fait l'anomalie conforme.

De manière plus détaillée, le calcul de W_{CFT} impliquera de résoudre les équations d'Einstein dans AdS_{n+1}. Nous obtiendrons ainsi trois groupes d'équations. Nous montrerons, et cela n'avait pas été fait auparavant à notre connaissance, que seul le premier groupe d'équations est déterminant, les deux autres étant propagés par ce premier. Cela nous assurera que les manipulations effectuées sur ce premier groupe n'entreront pas en contradiction avec les deux autres. De ce premier groupe, nous déduirons la forme générale que prend la métrique $\hat{G}_{\mu\nu}$ sur le bord de AdS_{n+1}. Nous demanderons que cette métrique g_{ij} induite au bord par $\hat{G}_{\mu\nu}$ soit le représentant $g_{(0)ij}$ choisi pour la renormalisation de W_{CFT}. Ensuite, par soucis de complétude et pour combler une lacune dans la littérature, nous analyserons le cas particulier $n = 2$. Nous démontrerons ensuite plus en détail en quoi la métrique $\hat{G}_{\mu\nu}$ induit sur le bord toute une classe de métriques qui sont équivalentes à une transformation conforme près. Ce calcul est également entièrement nouveau et important car il nous permet d'éclaircir quelques aspects de la correspondance AdS/CFT.

Une fois la renormalisation de W_{CFT} faite (avec le représentant $g_{(0)ij}$), nous choisirons un autre représentant dans la classe conforme et regarderons comment $W_{CFT}^{ren.}$ varie en conséquence. La variation non-nulle de $W_{CFT}^{ren.}$ nous donnera l'anomalie conforme. Nous effectuerons les calculs de l'anomalie en dimension $n = 2$ et $n = 4$.

Chapitre 2

Calcul de l'anomalie, méthode traditionnelle

2.1 Geométrie différentielle

En théorie quantique des champs, la notion de fonction de Green, et en particulier le propagateur de Feynman, a un rôle primordial.

En théorie quantique du champ en présence de gravitation, c'est-à-dire dans un espace courbe, la représentation intégrale du propagateur de Feynman n'est pas tout à fait celle que nous connaissons dans les théories quantiques des champs en espace plat.

Un certain nombre de concepts de la géométrie riemannienne nous seront utiles, comme par exemple les notions d'intervalle géodétique, de surface caustique, de déplacement parallèle, etc.

Nous suivrons les travaux de B. S. DeWitt, voir [5] et [3], par exemple.

2.1.1 Conventions

Nous utiliserons une métrique $g_{\mu\nu}$ d'espace-temps de signature $(-,+,+,\dots +)$, le tenseur de Riemann est défini par

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\delta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}. \tag{2.1}$$

et la règle correspondante de commutation des dérivées covariantes est

$$-2\, v_{\alpha;[\gamma;\sigma]} = R^{\lambda}{}_{\alpha\gamma\sigma} v_{\lambda}. \tag{2.2}$$

Le tenseur de Ricci est

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}. \tag{2.3}$$

Nous définissons g par

$$g \equiv \underbrace{(-\det g_{\mu\nu})}_{>0} \tag{2.4}$$

L'opérateur de D'Alembert $\Box$ est défini par

$$\Box = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu\left[\sqrt{g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\right]. \tag{2.5}$$

2.1.2 L'intervalle géodétique.

Une géodésique est une courbe auto-parallèle.

L'équation d'une géodésique peut être obtenue à partir du principe variationnel

$$\delta S = 0, \qquad S\left[x^\mu\right] \equiv \int L d\tau, \qquad L \equiv \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}, \tag{2.6}$$

où τ est un paramètre(que nous choisirons affin) de la courbe $x_\mu(\tau)$. De cette manière la théorie des géodésiques est transformée formellement en une théorie dynamique, et tous les résultats de la théorie d'Hamilton-Jacobi peuvent être immédiatement appliqués ici.

Les moments conjugués et l'Hamiltonien sont donnés respectivement par

$$\begin{aligned} p_\mu &= \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right)} = \frac{dx_\mu}{d\tau}, \\ H &= p_\mu\frac{dx^\mu}{d\tau} - L = \frac{1}{2}\frac{dx_\mu}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{1}{2}p_\mu p^\mu = L. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Les équations des géodésiques

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\sigma}{}^{\mu}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0 \tag{2.8}$$

où les $\Gamma_{\nu\sigma}{}^{\mu}$ sont les symboles de Christoffel, admettent comme intégrale première

$$H = L = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = \text{const.}, \tag{2.9}$$

où s est le temps propre de la courbe, donc $s = a\tau + b$ car par hypothèse τ est un paramètre affin.

L'intégrale d'action "pour un chemin classique" se réduit à

$$S(x,\tau;x',\tau') = \int_{x',\tau'}^{x,\tau} L d\tau = \frac{\sigma(x,x')}{\tau-\tau'}, \tag{2.10}$$

où le bi-scalaire $\sigma(x,x')$, que nous allons appeler l'*intervalle géodétique* (voir [5]), vaut la moitié du carré de la distance le long de la géodésique entre x et x'.

Le bi-scalaire de l'intervalle géodétique satisfait une équation différentielle importante qui provient directement de l'équation d'Hamilton-Jacobi pour la fonction S de l'équation (2.10). Nous avons

$$p_\mu = \frac{\partial S}{\partial x^\mu} = \frac{\sigma_{,\mu}}{\tau-\tau'}, \tag{2.11}$$

où $\sigma_{,\mu}$ peut également signifier la dérivée covariante de σ, σ étant une fonction scalaire. Par la suite nous utiliserons le signe '; 'pour désigner la dérivée covariante et ' , ' pour la dérivée ordinaire. Nous avons

$$0 = \frac{\partial S}{\partial \tau} + H = -\frac{\sigma}{(\tau-\tau')^2} + \frac{1}{2}p_\mu p^\mu, \tag{2.12}$$

où p_μ est à présent "le moment" en x correspondant au "chemin classique" d'extrémités x, τ et x', τ'. Substituant (2.11) dans (2.12), on a

$$\frac{1}{2}\sigma_{;\mu}\sigma_{;}{}^{\mu} = \sigma, \tag{2.13}$$

et similairement, de l'équation d'Hamilton-Jacobi à l'extrémité x' de la géodésique, nous déduisons

$$\frac{1}{2}\sigma_{;\mu'}\sigma_{;}{}^{\mu'} = \sigma. \tag{2.14}$$

$\sigma_{;\mu}$ est un vecteur tangent à la géodésique en x dont la norme est la distance géodésique entre x et x', tandis que $\sigma_{;\mu'}$ est tangent à la géodésique en x', orienté dans la direction opposée et de même norme. L'intervalle géodétique lui-même est manifestement une fonction symétrique de x et x':

$$\sigma(x,x') = \sigma(x',x). \tag{2.15}$$

2.1.3 Surfaces caustiques

En général, dans des espaces de Riemann, l'intervalle géodétique n'est pas une fonction bien définie de x et x', sauf si ces points sont suffisamment rapprochés, car alors on peut montrer qu'une seule géodésique relie ces deux points. Les géodésiques issues d'un point vont souvent commencer à se croiser après une certaine distance. Le lieu des points où les croisements se font forme une enveloppe de la famille de géodésiques considérées, connue sous le nom de *surface caustique*. L'équation de la surface caustique par rapport à un point donné peut être exprimée en fonction du jacobien

$$\left|\frac{\partial\left(\sigma_{;\nu'}, x'^{\tau}\right)}{\partial\left(x^{\mu}, x'^{\sigma}\right)}\right| = \left|\frac{\partial\left(\sigma_{;\nu'}\right)}{\partial\left(x^{\mu}\right)}\right| = \det\left(\sigma_{,\mu\nu'}\right) \underset{\substack{\sigma \text{ bi-scalaire,} \\ \text{et } \sigma_{,\mu} = \sigma_{;\mu}}}{=} \det\left(\sigma_{;\mu\nu'}\right) \tag{2.16}$$

qui caractérise la transformation de coordonnées des variables x^{μ}, x'^{ν}, qui spécifient la(section de)géodésique en terme de ses points finaux, aux variables $\sigma_{;\nu'}, x'^{\tau}$ qui la spécifient au moyen d'un seul de ses points finaux et d'un vecteur tangent à la géodésique en ce point et dont la norme vaut la longueur de la géodésique entre les points finaux. Si nous varions le vecteur tangent $\sigma_{;\nu'}$, la variation correspondante de x^{ν} est donnée par

$$\delta\sigma_{;\nu'} = \sigma_{;\mu\nu'}\delta x^{\mu} \qquad \text{ou bien} \qquad \delta x^{\mu} = -D^{-1\,\mu\nu'}\delta\sigma_{;\nu'}, \tag{2.17}$$

où $D^{-1\,\mu\nu'}$ est le transposé inverse de la matrice finie dont les éléments sont

$$D_{\mu\nu'} \equiv -\sigma_{;\mu\nu'} \tag{2.18}$$

pour x et x' fixés. Quand $D^{-1\,\mu\nu'}$ est singulière il est possible de choisir une variation de $\sigma_{;\nu'}$ qui n'induit aucune variation de x^{μ}. Le point x se trouve alors sur la surface caustique relative à x', et la condition pour avoir cela est évidemment $D = \infty$, ou $D^{-1} = 0$, où

$$D \equiv -\det\left(D_{\mu\nu'}\right), \tag{2.19}$$

avec le signe $-$ comme convention.

Il faut remarquer que les variations de $\sigma_{;\nu'}$ qui laissent x^{μ} inchangé doivent être orthogonales à $\sigma_{;\nu'}$, c'est à dire que la longueur de la géodésique elle-même doit rester inchangée. En prenant la dérivée de (2.13) par rapport à x'^{ν}

$$\sigma_{;}{}^{\mu}\sigma_{;\mu\nu'} = \sigma_{;\nu'}, \tag{2.20}$$

et en réécrivant ceci comme

$$-D^{-1\mu\nu'}\sigma_{;\nu'} = \sigma_{;}{}^{\mu} \neq 0, \tag{2.21}$$

on montre que pour changer la norme de $\sigma_{;\nu'}$ sans changer sa direction il faut décaler nécessairement x^μ d'une distance proportionnelle.

2.1.4 Divergence des géodésiques

Le déterminant D est une *bi-densité,* de poids un aux deux extrémités x et x'. Il joue un rôle privilégié dans la description du taux de divergence ou de convergence des géodésiques émanant d'un point. En prenant la dérivée covariante de (2.20) par rapport à x^σ et en remarquant que les indices σ et μ commutent, nous avons

$$\begin{aligned} \sigma_{;}{}^{\mu}{}_{\sigma}\sigma_{;\mu\nu'} + \sigma_{;}{}^{\mu}\sigma_{;\mu\nu'\sigma} &= \sigma_{;\nu'\sigma} = \sigma_{;\sigma\nu'} && (2.22)\\ &\Leftrightarrow \\ \sigma_{;}{}^{\mu}{}_{\sigma}D_{\mu\nu'} + \sigma_{;}{}^{\mu}\underbrace{D_{\sigma\nu',\mu}}_{D_{\mu\nu',\sigma}} &= D_{\sigma\nu'}, && (2.23) \end{aligned}$$

et en mutipliant par $D^{-1\sigma\nu'}$

$$\begin{aligned} D^{-1\sigma\nu'}\left(\sigma_{;}{}^{\mu}{}_{\sigma}D_{\mu\nu'} + \sigma_{;}{}^{\mu}D_{\sigma\nu',\mu}\right) &= D_{\sigma\nu'}D^{-1\sigma\nu'} && (2.24)\\ &\Leftrightarrow \\ \sigma_{;}{}^{\mu}{}_{\mu} + D^{-1\sigma\nu'}D_{\sigma\nu',\mu}\sigma_{;}{}^{\mu} &= 4. \end{aligned}$$

En remarquant que, selon la règle de dérivation d'un déterminant

$$\left(D\sigma_{;}{}^{\mu}\right)_{;\mu} = D_{;\mu}\sigma_{;}{}^{\mu} + D\sigma_{;}{}^{\mu}{}_{\mu} = DD^{-1\alpha\beta}D_{\alpha\beta;\mu}\sigma_{;}{}^{\mu} + D\sigma_{;}{}^{\mu}{}_{\mu} \tag{2.25}$$

et donc que

$$D^{-1}\left(D\sigma_{;}{}^{\mu}\right)_{;\mu} = D^{-1\alpha\beta}D_{\alpha\beta;\mu}\sigma_{;}{}^{\mu} + \sigma_{;}{}^{\mu}{}_{\mu} \tag{2.26}$$

nous avons finalement

$$D^{-1}\left(D\sigma_{;}{}^{\mu}\right)_{;\mu} = 4. \tag{2.27}$$

Si nous posons

$$\triangle \equiv g^{-\frac{1}{2}}Dg'^{-\frac{1}{2}} \tag{2.28}$$

où $\triangle$ est un bi-scalaire car D est une bi-densité de poids unité et $g^{-\frac{1}{2}} \equiv (-\det g_{\mu\nu})^{-\frac{1}{2}}$ une densité de poids -1, et si nous remarquons que l'opérateur $\sigma_{;}{}^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ donne la dérivée d'une fonction le long de la géodésique à partir de x'

$$\sigma_{;}{}^{\mu} f_{,\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau}(\tau - \tau')\, f_{,\mu} = (\tau - \tau')\,\frac{df}{d\tau} \tag{2.29}$$

où nous avons utilisé (2.13) et (2.11), puis posant $\tau' = 0$, alors (2.27) donne

$$\begin{aligned} 4 &= D^{-1}\left(D\sigma_{;}{}^{\mu}\right)_{;\mu} \underset{g_{;\mu}=0}{=} \sqrt{g(x)}D^{-1}\sqrt{g(x')}\left(\frac{1}{\sqrt{g(x)}}D\frac{1}{\sqrt{g(x')}}\sigma_{;}{}^{\mu}\right)_{;\mu} \\ &\Leftrightarrow\ 4 = \triangle^{-1}\triangle_{;\mu}\sigma_{;}{}^{\mu} + \triangle^{-1}\triangle\,\sigma_{;}{}^{\mu}{}_{\mu} \\ &\Leftrightarrow\ \triangle^{-1}\tau\,\frac{d\triangle}{d\tau} = 4 - \sigma_{;}{}^{\mu}{}_{\mu} \\ &\Leftrightarrow\ \sigma_{;}{}^{\mu}{}_{\mu} = 4 - \frac{d\ln\triangle}{d\ln\tau} \end{aligned} \tag{2.30}$$

ce qui montre que $\triangle$ augmente ou décroît le long de chaque géodésique à partir de x' selon le taux de divergence des géodésiques voisines émanant de x', mesuré par $\sigma_{;}{}^{\mu}{}_{\mu}$, inférieur ou égal à 4 qui est le taux de divergence dans l'espace-temps plat. Si le taux de divergence devient infiniment négatif, une surface caustique se développe et $\triangle$ explose.

2.1.5 Déplacement parallèle géodétique

Une autre quantité géométrique de la plus grande importance est le *bi-vecteur de déplacement parallèle géodétique*, $g(x_{\mu}, x_{\nu'}) \underset{Not.}{=} g_{\mu\nu'}$, qui est défini par les équations différentielles

$$\sigma_{;}{}^{\tau} g_{\mu\nu';\tau} = 0, \tag{2.31}$$

et les conditions limites

$$\lim_{x' \to x} g_{\mu\nu'} = g_{\mu\nu}. \tag{2.32}$$

Le bi-vecteur $g_{\mu\nu'}$ tient son nom du fait que si on l'applique à un vecteur contravariant $A^{\nu'}$ en x' , on obtient la forme covariante du vecteur en x' qui résulte du déplacement parallèle le long de la géodésique de x' à x (on suppose que les points extrêmes sont peu éloignés afin qu'une seule géodésique les relie.). Cela résulte de (2.31) qui impose que la dérivée covariante de $g_{\mu\nu'}$ s'annule dans les directions tangentes à la géodésique. De ceci et du fait que les vecteurs tangents aux géodésiques sont auto-parallèles par définition, nous avons les propriétés suivantes pour $g_{\mu\nu'}$:

$$g_{\mu}{}^{\nu'}\sigma_{;\nu'} = -\sigma_{;\mu} \qquad \text{et} \qquad g^{\nu}{}_{\mu'}\sigma_{;\nu} = -\sigma_{;\mu'}, \tag{2.33}$$

$$\sigma_{;}{}^{\tau'}g_{\mu\nu',\tau'} = 0, \tag{2.34}$$

$$g_{\mu\nu'} = g_{\nu'\mu}, \tag{2.35}$$

$$g_{\mu\sigma'}g_{\nu}{}^{\sigma'} = g_{\mu\nu}, \qquad g_{\sigma\mu'}g^{\sigma}{}_{\nu'} = g_{\mu'\nu'}, \tag{2.36}$$

$$det\left(-g_{\mu\nu'}\right) = g^{\frac{1}{2}}g'^{\frac{1}{2}}. \tag{2.37}$$

2.2 Représentation intégrale du propagateur de Feynman

Nous allons travailler dans un espace de Hilbert abstrait où un opérateur F possède une représentation fonctionnelle (voir aussi [3])

$$F(x', x'') \equiv \langle x' \,|F|\, x''\rangle. \tag{2.38}$$

Nous cherchons à définir en espace courbe la fonction de Green qui serait la généralisation du propagateur de Feynman (nous nous limiterons au champ scalaire réel ϕ de masse m couplé au champ gravitationnel $g_{\mu\nu}$) défini en espace plat par

$$iG(x, x') = \langle 0\,|T\left(\phi(x)\phi(x')\right)|\,0\rangle, \tag{2.39}$$

où T prend le produit chronologique. Nous posons à cet effet

$$\left[-\Box_x + \xi R(x) + m^2\right]G(x, x') = -g^{-\frac{1}{2}}(x)\delta^n(x, x'), \tag{2.40}$$

où n est la dimension d'espace-temps qui pourra différer de 4 par la suite. $R(x)$ la courbure scalaire au point x et $\xi(n) = \frac{1}{4}\frac{(n-2)}{(n-1)}$ la constante de couplage conforme. Il est important de noter que (2.40) ne définit pas l'état $\mid 0\rangle$ apparaissant dans (2.39) et ne garantit pas que la solution possède la propriété d'un produit chronologique. Pour fixer l'état $\mid 0\rangle$ et imposer la propriété d'ordre chronologique, il faut imposer des conditions à la solution de (2.40). En espace plat le propagateur de Feynman est défini de sorte qu'asymptotiquement dans le passé ($t \to -\infty$) il ne contienne que des contributions de fréquences négatives et lorsque $t \longrightarrow \infty$ des contributions de fréquences positives. Il faut pour cela que le concept de fréquences négatives et positives ait un sens, c'est-à-dire que l'espace-temps en question possède un vecteur de Killing de genre temps. En général l'espace courbe ne possède pas de propriété causale simple. Des conditions limites ne peuvent être données que dans des cas particuliers.

En écrivant (2.40) sous la forme symbolique d'une relation entre opérateurs

$$KG = -g^{-\frac{1}{2}}I \tag{2.41}$$

où K joue le role d'"Hamiltonien", nous définissons G par

$$g^{\frac{1}{4}}Gg^{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{K - i\varepsilon} = -i\int_0^\infty e^{-iKs}ds. \tag{2.42}$$

En prenant les éléments de matrice de (2.42) nous avons

$$g^{\frac{1}{4}}G(x,x')g'^{\frac{1}{4}} = -i\int_0^\infty \langle x, s \mid x', 0\rangle ds, \tag{2.43}$$

où

$$\langle x, s \mid x', 0\rangle \equiv \langle x \left| e^{-iKs} \right| x'\rangle, \tag{2.44}$$

et nous sommes donc amenés à un problème dynamique associé à l' "Hamiltonien" K.

L' amplitude de transition $\langle x, s \mid x', 0\rangle$ obéit à l'équation de Schrödinger

$$i\frac{\partial}{\partial s}\langle x, s \mid x', 0\rangle = \langle x, s \left| K \right| x', 0\rangle = \left(-\Box_x + \xi R(x) + m^2\right)\langle x, s \mid x', 0\rangle, \tag{2.45}$$

avec la condition initiale

$$\langle x, 0 \mid x', 0\rangle = \delta^n(x - x')g^{\frac{1}{2}}(x). \tag{2.46}$$

Nous utilisons comme ansatz de solution une forme d'approximation WKB:

$$\langle x, s \mid x'. 0\rangle = \frac{-i}{(4\pi)^2}\frac{D^{\frac{1}{2}}(x,x')}{s^2}e^{\left(i\frac{\sigma(x,x')}{2s} - im^2 s + \Omega(x,x',s)\right)} \tag{2.47}$$

où Ω est une fonction à déterminer qui s'annule pour $s = 0$.

A n dimensions, on généralise (2.47) par

$$\langle x, s \mid x', 0\rangle = -i\frac{D(x,x')^{\frac{1}{2}}}{(4\pi i s)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{i\sigma(x,x')}{2s} - im^2 s + \Omega} \tag{2.48}$$

Cet ansatz est inspiré par la forme que prend l'amplitude de transition $\langle x,t \mid x',t'\rangle$ de la particule libre de masse m en espace plat à n degrés de libertés

$$\begin{aligned}\langle x,t \quad\mid\quad x',t'\rangle &= \left\langle x \left| e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t')\hat{H}} \right| x' \right\rangle \\ &= \left(\frac{-im}{2\pi\hbar(t-t')}\right)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{im(x-x')^2}{2\hbar(t-t')}}. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Nous pouvons à présent déterminer à quelle équation obéit Ω en substituant (2.47) dans (2.45). Après quelques calculs nous obtenons

$$i\frac{\partial \Omega}{\partial s} + D^{-1}\left(D\Omega_{;}{}^{\mu}\right)_{;\mu} + \Omega_{;}{}^{\mu}\Omega_{;\mu} + is^{-1}\sigma_{;}{}^{\mu}\Omega_{;\mu} = \xi R - D^{-\frac{1}{2}}\left(D^{\frac{1}{2}}\right)_{;\mu}{}^{\mu} \tag{2.50}$$

Si nous écrivons la fonction Ω comme un développement formel en la variable (is)

$$\Omega(x,x') = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x,x')(is)^n \tag{2.51}$$

que nous substituons dans (2.50), nous obtenons

$$\begin{aligned}\xi R - D^{-\frac{1}{2}}\left(D^{\frac{1}{2}}\right)_{;\mu}{}^{\mu} &= \sum_{n=1}^{\infty} ia_n n\,(is)^{n-1}\,i + D^{-1}\left(D\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)_{;}{}^{\mu}\,(is)^n\right)_{;\mu} \\ &+ \sum_{n=1}\sum_{m=1}(a_n)_{;\mu}\,(a_m)_{;}{}^{\mu}\,(is)^n\,(is)^m \\ &+ \frac{i}{s}\sigma_{;}{}^{\mu}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)_{;\mu}\,(is)^n. \end{aligned} \tag{2.52}$$

En identifiant les termes ordre par ordre en les puissances de la variable, nous trouvons

$$\sigma_{;}{}^{\mu}a_{0;\mu} = 0 \tag{2.53}$$

$$a_1 + \sigma_{;}{}^{\mu}a_{1;\mu} = D^{-\frac{1}{2}}\left(D^{\frac{1}{2}}\right)_{;\mu}{}^{\mu} - \xi R \tag{2.54}$$

$$\sigma_{;}{}^{\mu}a_{2;\mu} + 2a_2 = D^{-1}\left(D(a_1)_{;}{}^{\mu}\right)_{;\mu} \tag{2.55}$$

$$\sigma_{;}{}^{\mu}a_{3;\mu} + 3a_2 = D^{-1}\left(D(a_2)_{;}{}^{\mu}\right)_{;\mu} + a_{1;\mu}\,a_{1;}{}^{\mu} \tag{2.56}$$

ou plus généralement

$$\sigma_;{}^{\mu} a_{n;\mu} + n a_n = D^{-1}\left(D(a_{n-1})_;{}^{\mu}\right)_{;\mu} + \sum_{r=1}^{n-2} a_{r;\mu}\, a_{n-r-1;}{}^{\mu} \qquad n = 3, 4, \dots \tag{2.57}$$

L'expression formelle du propagateur de Feynman en espace courbe de dimension 4 est donnée par

$$G(x,x') = \frac{-\triangle^{\frac{1}{2}}}{(4\pi)^2}\int_0^{\infty}\frac{1}{s^2}\exp\left(\frac{i\sigma}{2s} - im^2\right)e^{\Omega(x,x',s)}ds, \tag{2.58}$$

ou encore, en remplaçant Ω par son développement (2.51),

$$G(x,x') \sim \frac{-\triangle^{\frac{1}{2}}}{(4\pi)^2}\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(-\frac{\partial}{\partial m^2}\right)^n\right)\int_0^{\infty}\frac{1}{s^2}\exp\left(\frac{i\sigma}{2s} - im^2\right)ds. \tag{2.59}$$

L'égalité faible rappelle que Ω est un développement formel. Les dérivées partielles par rapport à m^2 apportent les puissances de (is) voulues dans l'intégrale et l'on intègre terme par terme.

A présent nous allons calculer les valeurs limites de nos "bi-objets" lorsque $x \to x'$. Nous obtiendrons ainsi les expressions des coefficients a_n présents dans la représentation intégrale du propagateur de Feynman. En fait nous le ferons explicitement pour a_1. La longueur des calculs devenant impressionnante, nous nous contenterons de donner l'expression du a_2 sans les calculs, rien de nouveau n'apparaissant dans ceux-ci par rapport aux calculs de a_1.

Prenons les dérivées covariantes par rapport à $x^\nu, x^\delta, x^\tau, x^\rho$, respectivement, de l'équation (2.13), nous obtenons successivement

$$\sigma_{;\nu} = \sigma_;{}^{\mu}\sigma_{;\mu\nu}, \tag{2.60}$$

$$\sigma_{;\nu\delta} = \sigma_;{}^{\mu}{}_{\delta}\sigma_{;\mu\nu} + \sigma_;{}^{\mu}\sigma_{;\mu\nu\sigma}, \tag{2.61}$$

$$\sigma_{;\nu\delta\tau} = \sigma_;{}^{\mu}{}_{\delta\tau}\,\sigma_{;\mu\nu} + \sigma_;{}^{\mu}{}_{\xi}\sigma_{;\mu\nu\tau} + \sigma_;{}^{\mu}\sigma_{;\mu\nu\delta} + \sigma_;{}^{\mu}\sigma_{;\mu\nu\delta\tau}, \tag{2.62}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{;\nu\delta\tau\rho} \;=\;& \sigma_;{}^{\mu}{}_{\delta\tau\rho}\,\sigma_{;\mu\nu} + \sigma_;{}^{\mu}{}_{\xi\tau}\,\sigma_{;\mu\nu\rho} + \sigma_;{}^{\mu}{}_{\delta\rho}\,\sigma_{;\mu\nu\tau} + \sigma_;{}^{\mu}{}_{\delta}\sigma_{;\mu\nu\tau\rho}\\ &+\sigma_;{}^{\mu}{}_{\rho}\,\sigma_{;\mu\nu\delta} + \sigma_;{}^{\mu}\sigma_{;\mu\nu\delta\rho} + \sigma_;{}^{\mu}{}_{\rho}\sigma_{;\mu\nu\delta\tau} + \sigma_;{}^{\mu}\sigma_{;\mu\nu\delta\tau\rho},\end{aligned} \tag{2.63}$$

Comme nous savons déjà que

$$\lim_{x'\to x}\sigma = 0, \qquad \lim_{x'\to x}\sigma_{;\,\mu} = 0, \tag{2.64}$$

prendre la limite de (2.61) donne

$$\lim_{x'\to x} \sigma_{;\nu\delta} = \lim_{x'\to x} \sigma_{;\nu\mu} g^{\mu\tau} \sigma_{;\tau\delta}, \tag{2.65}$$

ce qui implique

$$\lim_{x'\to x} \sigma_{;\mu\nu} = g_{\mu\nu}, \tag{2.66}$$

à condition que $\sigma_{;\mu\nu}$ soit une matrice non singulière. Cette non-singularité est la conséquence immédiate de celle de $D_{\mu\nu'}$ (lorsque les deux points sont suffisamment proches) car (2.20) implique

$$\sigma_{;\delta\nu'} = \sigma_{;}{}^{\mu}{}_{\delta} \sigma_{;\mu\nu'} + \sigma_{;}{}^{\mu} \sigma_{;\mu\nu'\delta}, \tag{2.67}$$

dont la limite fournit (2.66). En utilisant ces résultats, nous obtenons pour la limite des équations (2.62),

$$\begin{aligned} \lim_{x'\to x} \sigma_{;\nu\delta\tau} &= \lim_{x'\to x} (\sigma_{;\nu\delta\tau} + \sigma_{;\delta\nu\tau} + \sigma_{;\tau\nu\delta}) \\ &= \lim_{x'\to x} (\sigma_{;\nu\delta\tau} - R_{\tau\delta\nu}{}^{\mu} \sigma_{;\mu}) = 0, \end{aligned} \tag{2.68}$$

où nous nous sommes servis de la règle de commutation des dérivées covariantes (2.2). La limite de (2.63) donne

$$\begin{aligned} \lim_{x'\to x} \sigma_{;\nu\delta\tau\rho} &= \lim_{x'\to x} (\sigma_{;\nu\delta\tau\rho} + \sigma_{;\delta\nu\tau\rho} + \sigma_{;\tau\nu\delta\rho} + \sigma_{;\rho\nu\delta\tau}) \\ &= \lim_{x'\to x} (2\sigma_{;\nu\delta\tau\rho} + \sigma_{;\tau\nu\delta\rho} + \sigma_{;\rho\nu\delta\tau}) \\ &= \lim_{x'\to x} \left(3\sigma_{;\nu\delta\tau\rho} + (-R_{\tau\delta\nu}{}^{\mu} \sigma_{;\mu})_{;\rho} + \sigma_{;\nu[\rho\delta]\tau} + \sigma_{;\nu\delta\rho\tau}\right) \\ &= \lim_{x'\to x} \left(3\sigma_{;\nu\delta\tau\rho} - R_{\tau\delta\nu\rho} + (-R_{\rho\delta\nu}{}^{\mu} \sigma_{;\mu})_{;\tau} + \sigma_{;\nu\delta\rho\tau}\right) \\ &= \lim_{x'\to x} \left(4\sigma_{;\nu\delta\tau\rho} - R_{\tau\delta\nu\rho} - R_{\rho\delta\nu\tau} + \sigma_{;\nu\delta[\rho\tau]}\right) \\ &= -\frac{1}{3} \left(R_{\nu\tau\delta\rho} + R_{\nu\rho\delta\tau}\right) \end{aligned} \tag{2.69}$$

Nous remarquons que l'information désirée sur σ est obtenue simplement en utilisant (2.2). En continuant de cette manière, la contraction de (2.63) donne

$$\begin{aligned} \sigma_{;\nu}{}^{\nu}{}_{\delta}{}^{\delta} = {} & \sigma_{;}{}^{\alpha\nu}{}_{\delta}{}^{\delta} \sigma_{;\alpha\nu} + \sigma_{;}{}^{\alpha\nu}{}_{\delta} \sigma_{;\alpha\nu}{}^{\delta} + \sigma_{;}{}^{\alpha\nu\delta} \sigma_{;\alpha\nu\delta} + \sigma_{;}{}^{\alpha\nu} \sigma_{;\alpha\nu\delta}{}^{\delta} \\ & + \sigma_{;}{}^{\alpha}{}_{\delta}{}^{\delta} \sigma_{;\alpha\nu}{}^{\nu} + \sigma_{;}{}^{\alpha}{}_{\delta} \sigma_{;\alpha\nu}{}^{\nu\delta} + \sigma_{;}{}^{\alpha\delta} \sigma_{;\alpha\nu}{}^{\nu} + \sigma_{;}{}^{\alpha} \sigma_{;\alpha\nu}{}^{\nu}{}_{\delta}{}^{\delta}. \end{aligned} \tag{2.70}$$

En dérivant (de manière covariante) par rapport à x^μ et en considérant les égalités à la limite considérée($x' \to x$), il vient

$$
\begin{aligned}
\sigma_{;\nu}{}^{\nu}{}_{\delta}{}^{\delta}{}_{\mu} &= \sigma_{;}{}^{\alpha\nu}{}_{\delta}{}^{\delta}{}_{\mu}\sigma_{;\alpha\nu} + \sigma_{;}{}^{\alpha\nu}\sigma_{;\alpha\nu\delta}{}^{\delta}{}_{\mu} + \sigma_{;}{}^{\alpha}{}_{\delta}\sigma_{;\alpha\nu}{}^{\nu\delta}{}_{\mu} + \sigma_{;}{}^{\alpha\delta}\sigma_{;\alpha\nu}{}^{\nu}{}_{\delta\mu} + \sigma_{;}{}^{\alpha}{}_{\mu}\sigma_{;\alpha\nu}{}^{\nu}{}_{\delta}{}^{\delta} \\
&= \sigma_{;\nu}{}^{\nu\delta}{}_{\delta\mu} + \sigma_{;\nu}{}^{\nu\delta}{}_{\delta\mu} + \sigma_{;\delta\nu}{}^{\nu\delta}{}_{\mu} + \sigma_{;\delta\nu}{}^{\nu}{}_{\delta\mu} + \sigma_{;\mu\nu}{}^{\nu}{}_{\delta}{}^{\delta} \\
&= 2\sigma_{;\nu}{}^{\nu\delta}{}_{\delta\mu} + \sigma_{;\nu\delta}{}^{\nu\delta}{}_{\mu} + \sigma_{;\nu\delta}{}^{\nu\delta}{}_{\mu} + \sigma_{;\nu\mu}{}^{\nu}{}_{\delta}{}^{\delta} \\
&= 2\sigma_{;\nu}{}^{\nu\delta}{}_{\delta\mu} + \sigma_{;\nu}{}^{\nu}{}_{\delta}{}^{\delta}{}_{\mu} + \sigma_{\nu}{}^{\lceil\delta}{}_{\nu\rfloor}{}^{\delta}{}_{\mu} + \sigma_{;\nu}{}^{\nu}{}_{\delta}{}^{\delta}{}_{\mu} + \sigma_{;\nu}{}^{[\delta\nu]}{}_{\delta\mu} + \sigma_{;\nu}{}^{\nu}{}_{\mu}{}^{\delta}{}_{\delta} + \sigma_{;\nu\lfloor\mu}{}^{\nu\rceil}{}_{\delta}{}^{\delta} \\
&= 4\sigma_{;\nu}{}^{\nu}{}_{\delta}{}^{\delta}{}_{\mu} - (R_{\delta}{}^{\nu}{}_{\nu}{}^{\alpha}\,\sigma_{;\alpha})_{;}{}^{\delta}{}_{\mu} - \left(R^{\delta\nu}{}_{\nu}{}^{\alpha}\;\sigma_{;\alpha}\right)_{;\delta\mu} + \sigma_{;\nu}{}^{\nu}{}_{\delta\mu}{}^{\delta} - \left(R_{\mu}{}^{\nu}{}_{\nu}{}^{\alpha}\;\sigma_{;\alpha}\right)_{;}{}^{\delta}{}_{\delta} \\
&= 5\sigma_{;\nu}{}^{\nu}{}_{\delta}{}^{\delta}{}_{\mu} - (R_{\delta}{}^{\nu}{}_{\nu\mu})_{;}{}^{\delta} - \left(R_{\delta}{}^{\nu}{}_{\nu}{}^{\delta}\right)_{;\mu} - \left(R_{\delta}{}^{\nu}{}_{\nu}{}^{\delta}\right)_{;\mu} - (R_{\delta}{}^{\nu}{}_{\nu\mu})_{;\delta} - (R_{\delta}{}^{\nu}{}_{\nu\mu})_{;}^{\delta} \\
&\quad -(R_{\mu}{}^{\nu}{}_{\nu}{}^{\delta})_{;\delta} - \sigma_{;\nu}{}^{\nu}{}_{\delta\lfloor\mu}{}^{\delta\rceil} \\
&= 5\sigma_{;\nu}{}^{\nu}{}_{\delta}{}^{\delta}{}_{\mu} + 2R_{;\mu} + 4R_{\delta\mu;}{}^{\delta}
\end{aligned} \tag{2.71}
$$

où nous avons utilisé

$$
(R_{\delta}{}^{\nu}{}_{\nu}{}^{\alpha}\,\sigma_{;\alpha})_{;}{}^{\delta}{}_{\mu} \underset{\lim x' \to x}{=} (R_{\delta}{}^{\nu}{}_{\nu\mu})_{;}^{\delta} + (R_{\delta}{}^{\nu}{}_{\nu}{}^{\delta})_{;\mu} \tag{2.72}
$$

et

$$
\sigma_{;\alpha\beta\gamma[\delta\varepsilon]} = -\sigma_{;\rho\beta\gamma}R_{\alpha}{}^{\rho}{}_{\varepsilon\delta} - \sigma_{;\alpha\rho\gamma}R_{\beta}{}^{\rho}{}_{\varepsilon\delta} - \sigma_{;\alpha\beta\rho}R_{\gamma}{}^{\rho}{}_{\varepsilon\delta} \underset{\lim x' \to x}{=} 0. \tag{2.73}
$$

Avec l'identité de Bianchi contractée

$$
R_{;\mu} = 2R^{\alpha\beta}{}_{\alpha\mu;\beta}, \tag{2.74}
$$

nous obtenons finalement

$$
\lim_{x' \to x} \sigma_{;\nu}{}^{\nu}{}_{\delta}{}^{\delta}{}_{\mu} = -R_{;\mu}. \tag{2.75}
$$

Le déterminant D peut être analysé de la même façon. De (2.33) nous avons

$$
g^{\nu}{}_{\mu';\sigma}\sigma_{;\nu} + g^{\nu}{}_{\mu'}\sigma_{;\nu\sigma} = -\sigma_{;\mu'\nu} = D_{\mu'\sigma} = D_{\sigma\mu'}, \tag{2.76}
$$

d'où

$$
\lim_{x' \to x} D_{\sigma\mu'} = g_{\sigma\mu}, \tag{2.77}
$$

et

$$
\lim_{x' \to x} D = g, \qquad \lim_{x' \to x} \triangle = 1, \tag{2.78}
$$

résultat que l'on avait déjà supposé implicitement dans l'écriture de l'ansatz (2.47). Maintenant, de l'équation (2.27), nous tirons

$$\begin{aligned} 4\Delta^{\frac{1}{2}} &= \Delta^{-\frac{1}{2}}\left(\Delta\sigma_{;}{}^{\mu}\right)_{;\mu} \\ &= \Delta^{-\frac{1}{2}}\Delta_{;\mu}\sigma_{;}{}^{\mu} + \Delta^{\frac{1}{2}}\sigma_{;\mu}{}^{\mu}, \end{aligned} \tag{2.79}$$

or

$$\begin{aligned} \Delta^{\frac{1}{2}}{}_{;\mu} &= \frac{1}{2}\Delta^{-\frac{1}{2}}\Delta_{;\mu} \\ &\Leftrightarrow \\ \Delta_{;\mu} &= 2\Delta^{\frac{1}{2}}{}_{;\mu}\Delta^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{2.80}$$

donc

$$4\Delta^{\frac{1}{2}} = 2\Delta^{\frac{1}{2}}{}_{;\mu}\sigma_{;}{}^{\mu} + \Delta^{\frac{1}{2}}\sigma_{;\mu}{}^{\mu}, \tag{2.81}$$

de ceci nous déduisons

$$4\Delta^{\frac{1}{2}}{}_{;\nu} = 2\Delta^{\frac{1}{2}}{}_{;\mu\nu}\sigma_{;}{}^{\mu} + 2\Delta^{\frac{1}{2}}{}_{;\mu}\sigma_{;}{}^{\mu}{}_{\nu} + \Delta^{\frac{1}{2}}{}_{;\nu}\sigma_{;\mu}{}^{\mu} + \Delta^{\frac{1}{2}}\sigma_{;\mu}{}^{\mu}{}_{\nu}, \tag{2.82}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{x'\to x}\Delta^{\frac{1}{2}}{}_{;\nu} &= \frac{1}{4}\left(2\Delta^{\frac{1}{2}}{}_{;\nu} + 4\Delta^{\frac{1}{2}}{}_{;\nu}\right) \\ &\Leftrightarrow \\ \lim_{x'\to x}\Delta^{\frac{1}{2}}{}_{;\nu} &= 0. \end{aligned} \tag{2.83}$$

En différentiant (2.82) :

$$\begin{aligned} 4\Delta^{\frac{1}{2}}{}_{;\nu\delta} = &\ 2\Delta^{\frac{1}{2}}{}_{;\mu\nu\delta}\sigma_{;}{}^{\mu} + 2\Delta^{\frac{1}{2}}{}_{;\mu\nu}\sigma_{;}{}^{\mu}{}_{\delta} + 2\Delta^{\frac{1}{2}}{}_{;\mu\delta}\sigma_{;}{}^{\mu}{}_{\nu} + 2\Delta^{\frac{1}{2}}{}_{;\mu}\sigma_{;}{}^{\mu}{}_{\nu\delta} \\ &-\Delta^{\frac{1}{2}}{}_{;\nu\delta}\sigma_{;\mu}{}^{\mu} + \Delta^{\frac{1}{2}}{}_{;\nu}\sigma_{;\mu}{}^{\mu}{}_{\delta} + \Delta^{\frac{1}{2}}{}_{;\delta}\sigma_{;\mu}{}^{\mu}{}_{\nu} + \Delta^{\frac{1}{2}}\sigma_{;\mu}{}^{\mu}{}_{\nu\delta}, \end{aligned} \tag{2.84}$$

et en prenant la limite et en utilisant (2.69) :

$$4\Delta^{\frac{1}{2}}{}_{;\nu\delta} = 2\Delta^{\frac{1}{2}}{}_{;\delta\nu} + 2\Delta^{\frac{1}{2}}{}_{;\nu\delta} + 4\Delta^{\frac{1}{2}}{}_{;\nu\delta} - \frac{1}{3}\left(R_{\mu\nu}{}^{\mu}{}_{\delta} + R_{\mu\delta}{}^{\mu}{}_{\nu}\right), \tag{2.85}$$

nous avons

$$\lim_{x'\to x}\Delta^{\frac{1}{2}}{}_{;\nu\delta} = \frac{1}{6}R_{\nu\delta}, \tag{2.86}$$

et en remarquant que

$$\lim_{x'\to x} \triangle^{\frac{1}{2}}{}_{;\nu\mu} = \lim_{x'\to x} \left(-\frac{1}{4}\triangle_{;\nu}\triangle_{;\mu} + \frac{1}{2}\triangle_{;\nu\mu}\right) = \lim_{x'\to x} \frac{1}{2}\triangle_{;\nu\mu} \tag{2.87}$$

et que

$$\lim_{x'\to x} \triangle^{-\frac{1}{2}}{}_{;\nu\mu} = \lim_{x'\to x} \left(-\frac{3}{4}\triangle_{;\nu}\triangle_{;\mu} - \frac{1}{2}\triangle_{;\nu\mu}\right) = -\lim_{x'\to x} \frac{1}{2}\triangle_{;\nu\mu}, \tag{2.88}$$

nous avons également

$$\lim_{x'\to x} \triangle^{-\frac{1}{2}}{}_{;\nu\delta} = -\frac{1}{6}R_{\nu\delta}. \tag{2.89}$$

En différentiant (2.84) et en prenant les valeurs limites

$$4\triangle^{\frac{1}{2}}{}_{;\nu\delta\rho} = 2\triangle^{\frac{1}{2}}{}_{;\mu\nu\delta}\sigma_{;}{}^{\mu}{}_{\rho} + 2\triangle^{\frac{1}{2}}{}_{;\mu\nu\rho}\sigma_{;}{}^{\mu}{}_{\delta} + 2\triangle^{\frac{1}{2}}{}_{;\mu\delta\rho}\sigma_{;}{}^{\mu}{}_{\nu} + \triangle^{\frac{1}{2}}{}_{;\nu\delta\rho}\sigma_{;}{}^{\mu}{}_{\mu} + \triangle^{\frac{1}{2}}\sigma_{;\mu}{}^{\mu}{}_{\nu\delta\rho}, \tag{2.90}$$

en rappelant que

$$\begin{aligned} \triangle^{\frac{1}{2}}{}_{;\rho\delta} &= \triangle^{\frac{1}{2}}{}_{;\delta\rho}, \\ \triangle^{\frac{1}{2}}{}_{;\alpha\beta\gamma} &= \triangle^{\frac{1}{2}}{}_{;\alpha\gamma\beta} \text{ en utilisant la règle de commutation des dérivées covariantes, et} \\ &\quad \triangle^{\frac{1}{2}}{}_{;\alpha} \underset{\lim}{=} 0, \end{aligned} \tag{2.91}$$

nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} 6\lim_{x'\to x} \triangle^{\frac{1}{2}}{}_{;\nu\delta\rho} &= -\lim_{x'\to x} \sigma_{;\mu}{}^{\mu}{}_{\nu\delta\rho} \\ &\Leftrightarrow \\ \lim_{x'\to x} \triangle^{\frac{1}{2}}{}_{;\nu}{}^{\nu}{}_{\rho} &= -\frac{1}{6}\lim_{x'\to x} \sigma_{;\mu}{}^{\mu}{}_{\nu}{}^{\nu}{}_{\rho} \\ &\Leftrightarrow \\ \lim_{x'\to x} \triangle^{\frac{1}{2}}{}_{;\nu}{}^{\nu}{}_{\rho} &= \frac{1}{6}\lim_{x'\to x} R_{;\rho}, \end{aligned} \tag{2.92}$$

où nous avons utilisé (2.75).

En réécrivant (2.54) comme

$$a_1 + \sigma_{;}{}^{\mu}a_{1;\mu} = \triangle^{-\frac{1}{2}}\left(\triangle^{\frac{1}{2}}\right)_{;\mu}{}^{\mu} - \xi R, \tag{2.93}$$

en prenant la limite et en utilisant (2.86), nous obtenons l'expression du coefficient a_1 :

$$\lim_{x' \to x} a_1(x', x) = a_1(x, x) = \left(\frac{1}{6} - \xi \right) R(x). \tag{2.94}$$

Pour les auteurs qui emploient la convention de signe pour le tenseur de Riemann opposée à celle prise dans nos conventions, le résultat est

$$\lim_{x' \to x} a_1(x', x) = a_1(x, x) = \left(-\frac{1}{6} - \xi \right) R(x). \tag{2.95}$$

2.3 Remarque sur le calcul des a_n, $n = 2, 3, \ldots$

Pour le calcul de a_2, les procédés sont les mêmes. Il faut différentier davantage le bi-scalaire σ et remettre les indices de dérivation dans un certain ordre, i.e. permuter les dérivées covariantes. Lorsqu'il y a de plus en plus de dérivations, on doit manipuler de plus en plus de dérivées du tenseur de Riemann. De ce fait le calcul des valeurs limites devient de plus en plus fastidieux.

La longueur des calculs croît comme 2^N, où N est le nombre de dérivations du bi-scalaire σ, et Christensen a montré [15] que le calcul symbolique améliorait grandement le rendement. Nous verrons plus loin que, pour ce qui est de la régularisation et la renormalisation du lagrangien en dimension n, ce sont les $\frac{n}{2}$ premiers coefficients a_n qui comptent. Ainsi, en dimension 4, on a besoin de a_1 et de a_2. Comme on s'en convainc facilement d'après les calculs effectués pour a_1, la valeur de a_2 requiert les dérivées de σ jusqu'à l'ordre six. En dimension dix, (nous verrons également bientôt que l'anomalie n'existe pas en dimension impaire) nous avons besoin de a_5 qui implique de manipuler les dérivées de σ jusqu'à l'ordre douze.

Malgrès donc la simplicité des outils mis en oeuvre pour ce genre de calcul, la longueur de ces calculs les rend presque impossibles à faire à la main.

Pour plus de complétude et afin de poursuivre le calcul de l'anomalie en dimension 4, voici l'expression de a_2 :

$$a_2 = \frac{1}{180} R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{180} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{5} - \xi \right) \Box R, \tag{2.96}$$

dans nos conventions de signe.

Il faut aussi signaler que chez certains auteurs, les coefficients ne sont pas ceux-ci. C'est parce qu'ils définissent l'approximation WKB de l'amplitude de transition $\langle x, s \mid x', 0\rangle$ avec une fonction $F(x, x', s)$ à la place de $e^{\Omega(x,x',s)}$ dans (2.47). Le lien entre les coefficients a_n exprimés ici et les "leurs" appelés b_n se fait comme le lien entre les coefficients d'une série et ceux de son exponentielle. Donc si nous remplacons e^{Ω} par F nous aurons les coefficients

$$\begin{aligned}
b_0 &= 1 \\
b_1 &= \left(\frac{1}{6} - \xi\right) R \qquad (2.97) \\
b_2 &= \frac{1}{180} R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{180} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{5} - \xi\right) \Box R + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} - \xi\right)^2 R^2.
\end{aligned}$$

2.4 Anomalie conforme dans le cas $m = 0$

2.4.1 Commentaires

Nous abordons maintenant les calculs de théorie des champs en présence de champ gravitationnel qui vont nous donner, après régularisation dimensionnelle, l'anomalie conforme en dimensions 2 et 4.

Nous nous baserons surtout sur le livre [6].

Comme l'anomalie est donnée par la trace du tenseur d'énergie-impulsion renormalisé, $A = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^{ren.}$, nous allons commencer par l'étude du tenseur d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ en espace courbe.

$T_{\mu\nu}(x)$ est un objet physique très important. Il décrit une partie de la structure physique du champ quantique en x (il est local). Il est aussi le terme de source dans les équations d'Einstein du champ de gravitation. Il joue donc un rôle important dans la recherche d'une description dynamique self consistante impliquant le champ gravitationnel couplé au champ quantique. Nous allons présenter le formalisme nécessaire pour le calcul du tenseur d'énergie-impulsion du champ scalaire réel quantique, le passage aux autres types de champs ne posant en principe pas de problèmes.

Nous allons d'abord montrer que le tenseur d'énergie-impulsion est divergent. Ensuite nous le régulariserons puis renormaliserons, (l'action lagrangienne, pour être plus précis) pour terminer par calculer sa trace. Celle-ci ne sera plus nulle contrairement au cas classique et donnera l'anomalie conforme.

2.4.2 Cadre Formel

Nous allons effectuer le calcul du tenseur d'énergie-impulsion dans une théorie dynamique plus vaste impliquant la gravitation, le champ gravitationnel sera traité classiquement tandis que les champs de matière seront traités quantiquement. De même que dans le problème de l'atome quantique dans un champ externe classique, on peut montrer que, dans une certaine échelle d'énergie considérée (voir [6]), cette approximation est parfaitement justifiée. De même que dans cette approche semi-classique de l'électrodynamique où le champ électromagnétique classique est couplé à la *valeur moyenne* de l'opérateur courant électrique, nous cherchons une théorie basée sur les équations d'Einstein avec constante cosmologique

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{2.98}$$

mais avec le tenseur d'énergie-impulsion considéré maintenant comme une valeur moyenne d'opérateur quantique:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda_B g_{\mu\nu} = 8\pi G_B \langle T_{\mu\nu}\rangle. \tag{2.99}$$

La signification du 'B' en-dessous des constantes cosmologique et de constante de Newton sera expliquée plus tard, dans le cadre de la renormalisation.

Les équations classiques (2.98) dérivent de l'action

$$S = S_g + S_m \tag{2.100}$$

par la condition

$$\frac{2}{g^{\frac{1}{2}}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0. \tag{2.101}$$

Le premier terme du membre de droite de (2.100) est l'action gravitationnelle avec constante cosmologique

$$S_g = \int L_g g^{\frac{1}{2}} d^n x = \int g^{\frac{1}{2}} \left(16\pi G_B\right)^{-1} \left(R - 2\Lambda\right) d^n x \tag{2.102}$$

pour laquelle $2g^{-\frac{1}{2}}\frac{\delta S_g}{\delta g^{\mu\nu}}$ donne le membre de gauche de (2.98). Le second terme dans (2.100), S_m, est l'action de matière classique, pour laquelle

$$\frac{2}{g^{\frac{1}{2}}}\frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} = T_{\mu\nu}, \tag{2.103}$$

donne le membre de droite de (2.98).

Dans le contexte d'une théorie semi-classique (2.99) on cherche une quantité W, appelée l'*action effective* pour les champs de matière dont la variation fonctionnelle donne $\langle T_{\mu\nu}\rangle$:

$$\frac{2}{g^{\frac{1}{2}}}\frac{\delta W}{\delta g^{\mu\nu}} = \langle T_{\mu\nu}\rangle, \tag{2.104}$$

où la signification précise des crochets sera expliquée plus loin.

Dans le but de construire W, essayons de partir de

$$Z\left[J, g_{\mu\nu}\right] = \int D\phi \exp\left(iS_m\left[\phi, g_{\mu\nu}\right] + i\int J\left(x\right)\phi\left(x\right)d^n x\right), \tag{2.105}$$

qui, en espace plat, est interprétée comme l'amplitude de transition vide-vide $\langle out, 0 \mid 0, in\rangle$. La présence du courant extérieur J peut rendre instable l'état de vide initial $\mid 0, in\rangle$ et induire une création de particules. En espace plat, à la limite $J = 0$, aucune particule n'est créée, et on peut imposer la condition de normalisation

$$Z\left[0\right] \equiv \langle out, 0 \mid 0, in\rangle_{J=0} = \langle 0 \mid 0\rangle = 1. \tag{2.106}$$

Cependant, quand l'espace-temps est courbe, on peut montrer que $\mid 0, in\rangle \neq \mid 0, out\rangle$, même en l'absence de source J. Ainsi la deuxième égalité de (2.106) ne tient plus.

La quantification par l'intégrale fonctionnelle marche toujours en espace courbe, on traite simplement S_m dans (2.105) comme l'action de matière dans le champ externe $g_{\mu\nu}$, et $J(x)$ comme une densité de courant (une densité scalaire dans le cas du champ scalaire). Nous posons $J = 0$ dans (2.105) et examinons la variation de $Z\left[0, g_{\mu\nu}\right]$:

$$\begin{aligned} \delta Z\left[0, g_{\mu\nu}\right] &= i\int D\phi \delta S_m e^{iS_m[\phi]} \\ &= i\langle out, 0\left|\delta S_m\right|0, in\rangle, \end{aligned} \tag{2.107}$$

en vertu du principe variationnel établi par Schwinger. De (2.107) et (2.103) nous extrayons

$$\frac{2}{g^{\frac{1}{2}}}\frac{\delta Z\left[0\right]}{\delta g^{\mu\nu}} = i\langle out, 0\left|T_{\mu\nu}\right|0, in\rangle. \tag{2.108}$$

Avec

$$Z[0] = e^{iW}, \tag{2.109}$$

ou

$$W = -i \ln Z \tag{2.110}$$

(2.108) devient

$$\frac{2}{g^{\frac{1}{2}}} \frac{\delta W}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\langle out, 0 \,| T_{\mu\nu} |\, 0, in \rangle}{\langle out, 0 \mid 0, in \rangle}. \tag{2.111}$$

La fonctionnelle $Z[0]$ est évaluée de la même manière qu'en espace plat. Les principales différences résident dans (i) le remplacement de la mesure $d^n x$ par la mesure covariante $d^n x \sqrt{g}$; (ii) le remplacement de $\delta^n(x,y)$ par $\delta^n(x,y) \left(g(y)^{-\frac{1}{2}} \right)$ tel que

$$\int d^n x \, (g(x))^{\frac{1}{2}} \, \delta^n(x,y) \, (g(y))^{-\frac{1}{2}} = 1; \tag{2.112}$$

(iii) le remplacement du noyau de l'opérateur de Klein-Gordon

$$\left(-\Box_x + m^2 - i\varepsilon\right) \delta^n(x,y) \tag{2.113}$$

par le noyau

$$K_{xy} = \left(-\Box_x + m^2 + \xi R(x) - i\varepsilon\right) \delta^n(x,y) \sqrt{g(y)} \tag{2.114}$$

qui, avec

$$\int d^n y \, (g(y))^{\frac{1}{2}} \, K_{xy} K^{-1}_{yz} = \delta^n(x,z) \left(g(z)^{-\frac{1}{2}} \right) \tag{2.115}$$

et

$$\left(-\Box_x + m^2 + \xi R(x)\right) G(x,x') = -\left(g(x)^{-\frac{1}{2}} \right) \delta^n(x,x') \tag{2.116}$$

implique

$$K^{-1}_{xx'} = -G(x,x'). \tag{2.117}$$

De même qu'en espace plat, nous trouvons (car nous avons affaire à une action quadratique en le champ scalaire)

$$Z[0] \propto (\det(-G))^{\frac{1}{2}} \tag{2.118}$$

où la constante de proportionnalité est indépendante de la métrique $g_{\mu\nu}$ et peut donc être ignorée. On arrive ainsi à

$$W = -i \ln Z[0] = -\frac{1}{2} i Tr \left[\ln(-G) \right]. \tag{2.119}$$

Dans (2.119) G doit être interprété comme un opérateur qui agit sur un espace de vecteurs $\mid x\rangle$, normalisés par

$$\langle x \mid x' \rangle = \delta^n(x, x') g^{\frac{1}{2}}(x), \tag{2.120}$$

de sorte que

$$G(x, x') = \langle x \left| G \right| x' \rangle. \tag{2.121}$$

La trace d'un opérateur M qui agit dans cet espace est définie par

$$TrM = \int d^n x g(x)^{\frac{1}{2}} M_{xx} = \int d^n x g(x)^{\frac{1}{2}} \langle x \left| M \right| x \rangle. \tag{2.122}$$

Pour donner un sens à (2.117) nous allons utiliser la représentation intégrale du propagateur de Feynman de De Witt-Schwinger dérivée plus haut. Nous la récrivons cette fois sous la forme

$$G^{DS}(x, x') = -i \frac{\triangle^{\frac{1}{2}}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty i ds \frac{1}{(is)^{\frac{n}{2}}} e^{-im^2 s + \frac{i\sigma}{2s}} F(x, x', s) \tag{2.123}$$

où n est la dimension de l'espace-temps, $F(x, x'; s) = e^{\Omega(x,x',s)}$ et la notation G^{DS} vise à rappeler que cette représentation de l'opérateur G défini par (2.42) est due à DeWitt et Schwinger ([3], [4]). Comme on l'a fait précédement, l'opérateur associé à (2.117) est mis sous la forme

$$G = -K^{-1} = -i \int_0^\infty e^{-iKs} ds, \tag{2.124}$$

où il est sous entendu que K possède une petite partie imaginaire négative comme nous l'avons écrit en (2.114), de sorte que

$$-i \int_0^\infty e^{-iKs} ds = \frac{-i}{-iK} \left[e^{-iKs} \right]_0^\infty = -\frac{1}{K}, \tag{2.125}$$

et nous tirons de (2.123) le résultat utile

$$\langle x \left| e^{-iKs} \right| x' \rangle = i \frac{\triangle(x, x')^{\frac{1}{2}}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{(is)^{\frac{n}{2}}} e^{-im^2 s + \frac{i\sigma(x,x')}{2s}} F(x, x'; s). \tag{2.126}$$

que nous avions obtenu auparavant sous une forme légèrement différente[1]. A l'aide de la représentation intégrale

$$\int_{\Lambda}^{\infty} ids \frac{1}{(is)} e^{-iKs} = -\operatorname{Ei}(-i\Lambda K) \tag{2.127}$$

de la fonction exponentielle intégrale Ei dont le développement pour des petites valeurs de son argument est

$$\operatorname{Ei}(x) = \gamma + \ln(-x) + O(x), \tag{2.128}$$

(γ est la constante d'Euler) nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{\Lambda}^{\infty} ids \frac{1}{(is)} e^{-iKs} &= -\left[\gamma + \ln\left(i\Lambda \operatorname{Re} K + \Lambda\varepsilon\right) + \ldots\right] \\
&= -\left[\gamma + \ln\left(|\Lambda| \sqrt{(\operatorname{Re} K)^2 + \varepsilon^2}\right) + i \arctan \frac{\operatorname{Re} K}{\varepsilon} + \ldots\right] \\
&\underset{0<\varepsilon<<1}{\simeq} -\left[\gamma + \ln|\Lambda| + \ln|\operatorname{Re} K| + i \arctan \frac{\operatorname{Re} K}{\varepsilon} + \ldots\right] \\
&\simeq -\ln K - \ln|\Lambda| \qquad (2.129)
\end{aligned}$$

à des termes finis près indépendants de la métrique. Si nous laissons Λ tendre vers zéro en négligeant l'infini $\ln\underset{\Lambda\to 0}{|\Lambda|}$ indépendant de la métrique, nous avons

$$-\ln K = \int_{0}^{\infty} ids \frac{1}{(is)} e^{-iKs}. \tag{2.130}$$

Ainsi donc, la représentation intégrale du propagateur s'écrit

$$\langle x \left| \ln(-G^{DS}) \right| x' \rangle = -\int_{m^2}^{\infty} G^{DS}(x, x') dm^2, \tag{2.131}$$

où l'intégrale par rapport à m^2 (à qui on donne une petite partie imaginaire négative) apporte la puissance de $(is)^{-1}$ supplémentaire qui apparaît dans (2.130).

Retournant à l'expression (2.119) pour W, (2.122) et (2.131) donnent

$$W = \lim_{x' \to x} \frac{1}{2} i \int d^n x \sqrt{g(x)} \int_{m^2}^{\infty} dm^2 G^{DS}(x, x'), \tag{2.132}$$

[1]Voir "remarque sur le calcul des a_n, $n = 2, 3, \ldots$".

en changeant l'ordre des intégrations et prenant la limite $x' \to x$, nous obtenons

$$W = \frac{1}{2} i \int_{m^2}^{\infty} dm^2 \int d^n x \sqrt{g(x)} G^{DS}(x,x), \tag{2.133}$$

et l'intégrale sur x a précisement la forme de la fonction génératrice des diagrammes de Feynman à une boucle. C'est pourquoi W est appelée l'action effective à une boucle (*one-loop effective action*). Dans le cas de champs fermioniques, il faudrait encore prendre la trace sur les indices spinoriels.

De (2.132) on peut définir un Lagrangien effectif:

$$W \equiv \int \sqrt{g(x)} L_{eff}(x) d^n x \tag{2.134}$$

d'où

$$L_{eff}(x) = \frac{1}{2} i \lim_{x' \to x} \int_{m^2}^{\infty} dm^2 G^{DS}(x,x'). \tag{2.135}$$

L'inspection de (2.123) montre que, pour $n = 4$, puisque $\sigma(x,x) = 0$, L_{eff} diverge à la borne inférieure pour $s \to 0$, de fait

$$\begin{aligned} L_{eff}^{div} &= \frac{1}{2} i \lim_{x' \to x} \left[-i \frac{\triangle^{\frac{1}{2}}(x,x')}{16\pi^2} \int_0^{\infty} ids \frac{1}{(is)^2} \frac{1}{(is)} e^{-im^2 s} \begin{bmatrix} a_0(x,x') \\ +a_1(x,x')(is) \\ +a_2(x,x')(is)^2 + \dots \end{bmatrix} \right] \\ &= \lim_{x' \to x} \left\{ \frac{-\triangle^{\frac{1}{2}}(x,x')}{32\pi^2} \int_0^{\infty} ds \frac{1}{s^3} e^{-im^2 s} \begin{bmatrix} a_0(x,x') \\ +a_1(x,x')(is) \\ +a_2(x,x')(is)^2 + \dots \end{bmatrix} \right\}, \end{aligned} \tag{2.136}$$

Rem: en dimension 2:

$$L_{eff}^{div} = - \lim_{x' \to x} i \frac{\triangle^{\frac{1}{2}}(x.x')}{8\pi} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^2} e^{-i(m^2 s)} \left[a_0(x.x') + a_1(x,x')(is) \right]. \tag{2.137}$$

Sur (2.111) nous voyons que ces divergences sont les mêmes que pour $\langle T_{\mu\nu} \rangle$. Les termes entre crochets dans (2.136) et (2.137) sont purement géométriques, i.e. construits à partir du tenseur de Riemann en x et de ses dérivées. On interprète ces divergences comme étant dues aux modes d'excitation ultra-violets des champs. Ces petites longueurs d'ondes sondent seulement la géométrie dans le voisinage de x, elles ne sont pas sensibles à la structure globale de l'espace-temps. Ces divergences sont aussi indépendantes de l'état quantique utilisé, comme nous le verrons plus bas.

Comme L_{eff}^{div} est purement géométrique, on préfère le considérer comme faisant partie de S_g plutôt que du Lagrangien quantique de matière. Il est évident que l'action totale S n'est pas modifiée. Bien sûr la partie finie de L_{eff} reste où elle est. Elle comprend les grandes longueurs d'ondes qui sondent les grandes distances.

2.4.3 Renormalisation de l'action effective

Nous voulons comparer les termes de L_{eff}^{div} avec ceux du lagrangien gravitationnel classique L_g qui figurent dans

$$S_g = \int \sqrt{g} L_g d^n x = \int \sqrt{g} \left(16\pi G_B\right)^{-1} (R - 2\Lambda)\, d^n x \tag{2.138}$$

c'est pourquoi nous voulons faire apparaître les termes divergents sous la forme $\infty\times$ (object géométrique). Nous allons le faire en utilisant la régularisation dimensionnelle.

Ainsi, en dimension n, le développement formel de L_{eff} est

$$L_{eff} \approx \lim_{x' \to x} \frac{\triangle^{\frac{1}{2}}(x,x')}{2\,(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x,x') \int_0^{\infty} (is)^j \, (is)^{-1} \, (is)^{-\frac{n}{2}} \, e^{-i\left(m^2 s - \frac{\sigma}{2s}\right)} i ds \tag{2.139}$$

dans lequel les $\frac{n}{2}+1$ premiers termes divergent en $s=0$ lorque $\sigma \longrightarrow 0$, $(x' \longrightarrow x)$. Si n est considéré comme une variable complexe qui peut être étendue dans tout le plan complexe, on peut alors prendre la limite $x' \longrightarrow x$:

$$\begin{aligned} L_{eff} &\approx \frac{1}{2}\frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) \int_0^{\infty} (is)^{j-1-\frac{n}{2}} \, e^{-im^2 s} i ds & (2.140) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) \left(m^2\right)^{\frac{n}{2}-j} \Gamma(j - \frac{n}{2}) & (2.141) \end{aligned}$$

où $a_j(x) \equiv a_j(x.x)$, et Γ est la fonction d'Euler.

Nous souhaitons que les dimensions portées par L_{eff} restent $[L]^{-4}$, même si $n \neq 4$. C'est pourquoi il est nécessaire d'introduire dans (2.141) un paramètre portant la dimension d'une masse, μ,

$$L_{eff} \approx \frac{1}{2}\frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{m}{\mu}\right)^{n-4} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) m^{4-2j} \Gamma(j - \frac{n}{2}). \tag{2.142}$$

Lorsque $n \to 4$, les trois premiers termes de (2.142) divergent à cause des pôles de la fonction gamma

$$\begin{aligned}
\Gamma(-\frac{n}{2}) &= \frac{4}{n(n-2)}\left(\frac{2}{4-n}-\gamma\right)+O(n-4)\\
\Gamma(1-\frac{n}{2}) &= \frac{2}{2-n}\left(\frac{2}{4-n}-\gamma\right)+O(n-4) \qquad (2.143)\\
\Gamma(2-\frac{n}{2}) &= \left(\frac{2}{4-n}-\gamma\right)+O(n-4),
\end{aligned}$$

et donc nous récrivons (2.136) au voisinage de $n=4$ sous la forme

$$L_{eff}^{div} = \frac{1}{2}\frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\left(\frac{m}{\mu}\right)^{n-4}\left[\begin{array}{c} a_0(x)m^4\frac{4}{n(n-2)}\left(\frac{2}{4-n}-\gamma\right)\\ +a_1(x)m^2\frac{2}{2-n}\left(\frac{2}{4-n}-\gamma\right)\\ +a_2(x)\left(\frac{2}{4-n}-\gamma\right)\end{array}\right], \qquad (2.144)$$

ou bien

$$L_{eff}^{div} = \frac{1}{2}\frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\left(1+\frac{1}{2}(n-4)\ln(\frac{m^2}{\mu^2})\right)\left[\begin{array}{c} a_0(x)m^4\left(\frac{4}{n(n-2)}\left[\frac{2}{4-n}-\gamma\right]\right)\\ +a_1(x)m^2\left(\frac{2}{2-n}\left[\frac{2}{4-n}-\gamma\right]\right)\\ +a_2(x)\left(\frac{2}{4-n}-\gamma\right)\end{array}\right] \qquad (2.145)$$

où nous avons utilisé

$$\left(\frac{m}{\mu}\right)^{n-4} = 1+\frac{1}{2}(n-4)\ln(\frac{m^2}{\mu^2})+O\left((n-4)^2\right), \qquad (2.146)$$

et encore, en laissant tomber les termes qui s'annulent lorsque n tend vers 4,

$$L_{eff}^{div} = -\frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\left[\frac{1}{n-4}+\frac{1}{2}\left(\gamma+\ln(\frac{m^2}{\mu^2})\right)\right]\left[\frac{4m^4a_0}{n(n-2)}-\frac{2m^2a_1}{n-2}+a_2\right]. \qquad (2.147)$$

Les coefficients a_j, $j=0,1,2$ sont donnés dans cette représentation par

$$a_0(x) = 1 \qquad (2.148)$$

$$a_1(x) = \left(\frac{1}{6}-\xi\right)R \qquad (2.149)$$

$$\begin{aligned}
a_2(x) &= \frac{1}{180}R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}-\frac{1}{180}R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}\\
&+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{5}-\xi\right)\Box R+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\xi\right)^2R^2. \qquad (2.150)
\end{aligned}$$

La somme de L_{eff}^{div} et du lagrangien gravitationnel (2.102) devient

$$L_g' = -\left(A + \frac{\Lambda_B}{8\pi G_B}\right) + \left(B + \frac{1}{16\pi G_B}\right) R - \frac{a_2(x)}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\left[\frac{1}{n-4} + \frac{1}{2}\left(\gamma + \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)\right)\right] \tag{2.151}$$

où

$$A = \frac{4m^4}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}\, n(n-2)}\left(\frac{1}{n-4} + \frac{1}{2}\left[\gamma + \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)\right]\right) \tag{2.152}$$

et

$$B = \frac{2m^2\left(\frac{1}{6} - \xi\right)}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}\,(n-2)}\left(\frac{1}{n-4} + \frac{1}{2}\left[\gamma + \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)\right]\right). \tag{2.153}$$

Le premier terme dans (2.151) est une constante. La contribution de L_{eff}^{div}, i.e., le terme A, est impossible à distinguer physiquement de Λ_B. C'est la partie du lagrangien gravitationnel qui donne naissance au terme cosmologique $\Lambda g_{\mu\nu}$ dans les équations du champ gravitationnel (2.99). Ainsi, l'effet du champ scalaire quantique est de changer, ou renormaliser, la constante cosmologique de Λ_B à

$$\Lambda \equiv \Lambda_B + \frac{32\pi m^4 G_B}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}\, n\,(n-2)}\left(\frac{1}{n-4} + \frac{1}{2}\left[\gamma + \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)\right]\right). \tag{2.154}$$

Parce que l'observation physique donnera seulement la valeur renormalisée Λ, nous ne nous préoccupons pas de la valeur "nue"[2], ni du fait que, lorsque finalement nous relaxerons n vers sa valeur initiale 4, la valeur divergera : nous ne voyons jamais ce terme isolé. De la même manière, en électrodynamique quantique, un électron est "habillé" de son nuage de photons virtuels qui contribuent (de manière infiniement grande) à la masse totale de l'électron. On ne mesure que la masse renormalisée de l'électron, qui est finie. L'électron est inséparable de son nuage de photons, c'est pourquoi nous ne "voyons" jamais sa masse nue.

Regardant le second terme dans (2.151), nous voyons que L_{eff}^{div} renormalise la constante de Newton en changeant G_B par

$$G = \frac{G_B}{(1 + 16\pi G_B B)}. \tag{2.155}$$

Le dernier terme ne se trouve pas dans le lagrangien de départ qui donne les équations d'Einstein habituelles. Le facteur $a_2(x)$ est d'ordre quatre en les

[2] "bare" en anglais, d'où le "B" en indice des constantes cosmologique et de Newton.

dérivées de la métrique (voir (2.150)), et représente de ce fait une correction à la théorie de la relativité générale, qui ne contient des dérivées de la métrique que jusqu'à l'ordre 2. Quand ce terme supplémentaire est inséré dans S_g, le membre de gauche des équations d'Einstein devient

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \alpha H^{(1)}_{\mu\nu} + \beta H^{(2)}_{\mu\nu} + \gamma H_{\mu\nu} \tag{2.156}$$

où

$$H^{(1)}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int \sqrt{g} R^2 d^n x = -2R_{;\mu\nu} + 2 g_{\mu\nu} \Box R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^2 + 2 R R_{\mu\nu}, \tag{2.157}$$

$$\begin{aligned} H^{(2)}_{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int \sqrt{g} R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} d^n x \\ &= R_{;\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Box R - \Box R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + 2 R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta\mu\nu} \\ &= -2 R_{\mu}{}^{\alpha}{}_{;\nu\alpha} + \Box R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Box R \\ &\quad + 2 R_{\mu}{}^{\alpha} R_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}, \end{aligned} \tag{2.158}$$

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int \sqrt{g} R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} d^n x \\ &= -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} + 2 R_{\mu\beta\gamma\delta} R_{\nu}{}^{\alpha\beta\gamma} + 4 \Box R_{\mu\nu} - 2 R_{;\mu\nu} \\ &\quad - 4 R_{\mu}{}^{\alpha} R_{\alpha\nu} + 4 R^{\alpha\beta} R_{\alpha\nu\beta\mu}. \end{aligned} \tag{2.159}$$

Nous avons démontré ces expressions, mais à cause de leur longueur et pour ne pas aloudir la présentation du travail nous n'en donnerons pas le détail. Remarquons que dans le cas $n = 4$, le théorème de Gauss-Bonnet généralisé nous dit que

$$\int d^4 x \sqrt{g(x)} \left(R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R^2 - 4 R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \right) \tag{2.160}$$

est un invariant topologique (il est appelé le nombre d'Euler), de sorte que sa variation par rapport à la métrique s'annule identiquement (nous n'en donnerons pas la preuve ici, cfr. [7]). Il s'ensuit alors, avec (2.157), (2.158) et (2.159) que

$$H_{\mu\nu} = -H^{(1)}_{\mu\nu} + 4 H^{(2)}_{\mu\nu}. \tag{2.161}$$

2.4.4 Renormalisation du Lagrangien

Nous avions donc, pour le membre de gauche des équations d'Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + (\alpha - \gamma)H^{(1)}_{\mu\nu} + (\beta + 4\gamma)H^{(2)}_{\mu\nu}, \tag{2.162}$$

car

$$H_{\mu\nu} = -H^{(1)}_{\mu\nu} + 4H^{(2)}_{\mu\nu}. \tag{2.163}$$

Les coefficients $(\alpha - \gamma)$ et $(\beta + 4\gamma)$ que nous rebaptisons α et β divergent quand $n \to 4$. Nous devons donc ajouter au Lagrangien nu des contre termes contenant des dérivées d'ordre 4 de la métrique avec des coefficients nus: a_B, b_B dans lesquels les termes en α et β pourront être englobés pour donner des coefficients renormalisés a et b. Les valeurs de a et b peuvent seulement être déterminées par l'expérience. En principe, il n'y a aucune raison pour laquelle ces quantités renormalisées ne pourraient pas être fixées à zéro, pour retrouver les équations d'Einstein habituelles. La théorie quantique des champs indique seulement qu'*a priori* il pourrait exister des termes d'ordre quatre en les dérivées de la métrique.

Cette technique de laisser partir la dimension d'espace-temps dans le plan complexe pour pouvoir manipuler des quantités ayant un sens (un sens mathématique s'entend) et d'injecter des termes dans le Lagrangien gravitationnel afin d'écarter des infinis est appelée *régularisation dimensionnelle.* A la fin des calculs, quand la renormalisation des constantes nues a été effectuée, la régularisation peut être relâchée, c'est-à-dire $n \to 4$.

Une fois que les termes L^{div}_{eff} ont été écartés de L_{eff}, ce qui reste est fini et est appelé le Lagrangien effectif renormalisé:

$$L^{eff}_{ren} \equiv L_{eff} - L^{div}_{eff}. \tag{2.164}$$

A quatre dimensions, le Lagrangien renormalisé est donné par tous les termes en les a_j, $j = 3, 4, ...$

$$L^{eff}_{ren} \approx \frac{1}{32\pi^2}\int_0^\infty \sum_{j=3}^{\infty} a_j(x)\,(is)^{j-3}\, e^{-im^2 s} ids \tag{2.165}$$

que nous intègrons trois fois par partie pour obtenir

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{64\pi^2}\int_0^\infty \ln(is)\,\frac{\partial^3}{\partial(is)^3}\left[F(x,x;s)e^{-im^2 s}\right] ids \\ &+\frac{1}{64\pi^2}\int_0^\infty \ln(is)\,\frac{\partial^3}{\partial(is)^3}\left(\begin{bmatrix} a_0 + a_1(is) \\ +a_2(is)^2 \end{bmatrix} e^{-im^2 s}\right) ids \end{aligned} \tag{2.166}$$

Les trois derniers termes, finis, renormalisent simplement Λ, G, a, b et c par des quantités finies, i.e., ont la même forme que L_{eff}^{div}, impliquant des constantes $\times$ a_j, $j = 0, 1, 2$. De toute évidence le Lagrangien effectif renormalisé sera toujours ambigu quant à l'ajout de tels termes, de sorte que nous pouvons les laisser tomber dans (2.166) sans perdre de généralité, ni sans perdre d'information physique. Pour de mêmes raisons nous ne devons pas nous préoccuper du choix de la masse μ introduite dans (2.142). Changer μ (faire un rescaling de μ) change L_{eff}^{div} d'une quantité finie, mais seulement à travers les termes en a_j, $j = 0, 1, 2$.

C'est pourquoi nous pouvons réécrire, à la place de (2.166) :

$$L_{ren} = -\frac{1}{64\pi^2}\int_0^\infty \ln(is)\,\frac{\partial^3}{\partial\,(is)^3}\left[F(x,x;s)e^{-im^2 s}\right] ids \tag{2.167}$$

compris comme donné *modulo* des termes en a_j, $j = 0, 1, 2$.

Rem: dans l'espace-temps à deux dimensions, le développement (2.141) montre que seuls les termes en a_0 et a_1 dans le développement asymptotique peuvent conduire à des divergences. Ces termes peuvent être absorbés par la renormalisation de Λ et G dans l'action effective, comme en dimension quatre. Il faut remarquer que

$$\int d^2x\sqrt{g(x)}R(x) \tag{2.168}$$

est un invariant topologique en dimension 2, de sorte que sa variation dans l'action effective ne donne aucune contribution à l'équation (une seule) d'Einstein en dimension deux. Le cas $n = 2$ est particulier sous beaucoup d'aspects, entre autres parce que le membre de gauche de l'équation d'Einstein sans constante cosmologique

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \tag{2.169}$$

s'annule identiquement. On doit cependant inclure un terme en R^2 dans le Lagrangien pour permettre la renormalisation. Nous avons

$$L_{ren} = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \sum_{j=2}^{\infty} a_j(x)\,(is)^{j-2}\,e^{-im^2 s} ids. \tag{2.170}$$

En intégrant deux fois par partie (et négligeant les termes aux bords), en ajoutant puis soustrayant les deux termes en a_0 et a_1 nous obtenons

$$L_{ren} = -\frac{1}{8\pi}\int_0^\infty \ln(is)\,\frac{\partial^2}{\partial(is)^2}\left[F(x,x;s)e^{-im^2 s}\right] ids. \tag{2.171}$$

2.4.5 Discussion sur la renormalisation

La technique de renormalisation nous permet de travailler avec une action pour le champ gravitationnel couplé au(x) champ(s) de matière de la forme

$$S = S_g + W \tag{2.172}$$

et de faire passer les termes divergents (purement géométriques) de W dans S_g, d'une manière sensée, cohérente. Ces termes divergents seront absorbés via la redéfinition de constantes de couplages. Ainsi

$$S = (S_g)_{ren} + W_{ren} \tag{2.173}$$

où $(S_g)_{ren}$contient les constantes physiques renormalisées et W_{ren} est à présent fini.

Substituant S dans (2.101), on engendre par calcul variationnel les équations semi-classiques (en dimension quatre) :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + aH^{(1)}_{\mu\nu} + bH^{(2)}_{\mu\nu} = 8\pi G\frac{\langle out, 0\,|T_{\mu\nu}|\,in, 0\rangle_{ren}}{\langle out, 0 \mid 0, in\rangle}, \tag{2.174}$$

dont le membre de droite est à présent fini et les constantes Λ, a, b et G doivent être déterminées par l'expérience.

La renormalisation n'a pas utilisé de manière explicite les états $\mid 0, out\rangle$ et $\mid 0, in\rangle$. En particulier, il n'est pas nécessaire de supposer que les régions asymptotiques *in* et *out* existent, régions dans lesquelles le concept de vide est "simple" (ou du moins correspond au concept physique de vide utilisé en physique des particules). Les états *in* et *out* entrent ici en jeu de manière purement formelle.

L'ajout du $-i\varepsilon$ dans la représentation intégrale de DeWitt-Schwinger du propagateur de Feynman assure les bonnes conditions limites à $\langle out, 0\,|T_{\mu\nu}|\,in, 0\rangle$ lorsque l'espace-temps possède un vecteur de Killing de genre temps. Autrement il faut voir l'écriture $\langle out, 0\,|T_{\mu\nu}|\,in, 0\rangle$ de manière purement formelle.

2.4.6 Anomalie conforme dans le cas $m = 0$.

Nous avons à présent tous les éléments en mains pour le calcul explicite de l'anomalie, tel qu'il a été fait initialement.

Considérons une théorie de champ dans un champ gravitationnel extérieur dont l'action classique possède, en plus des invariances obligatoires sous les difféomorphismes et les transformations du groupe de **Poincaré**, une invariance conforme, c'est-à-dire qu'elle est invariante sous la **transformation**

$$g_{\mu\nu}(x) \to e^{2\sigma(x)} g_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}. \tag{2.175}$$

Par définition de la dérivée fonctionnelle nous avons :

$$S[\bar{g}_{\mu\nu}] = S[g_{\mu\nu}] + \int \frac{\delta S[g_{\mu\nu}]}{\delta g^{\rho\sigma}} \delta g^{\rho\sigma}(x) d^n x, \tag{2.176}$$

qui, en utilisant

$$\delta g^{\mu\nu}(x) = -2\delta\sigma(x)\bar{g}^{\mu\nu}(x), \tag{2.177}$$

et (2.103):

$$\frac{2}{g^{\frac{1}{2}}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = T_{\mu\nu}, \tag{2.178}$$

donne

$$S[\bar{g}_{\mu\nu}] = S[g_{\mu\nu}] - \int \sqrt{g(x)} T_\rho{}^\rho [g_{\mu\nu}(x)] \delta\sigma(x) d^n x. \tag{2.179}$$

De cette équation nous tirons immédiatement

$$T_\rho{}^\rho [g_{\mu\nu}(x)] = -\frac{1}{\sqrt{g(x)}} \left| \frac{\delta S[\bar{g}_{\mu\nu}]}{\delta\sigma(x)} \right|_{\sigma=0}, \tag{2.180}$$

et il est clair que si l'action *classique* est invariante sous les transformations conformes (2.175), alors la trace du tenseur d'énergie-impulsion classique est nulle. C'est le cas par exemple de l'action classique:

$$S[g_{\mu\nu}; \phi] = \int_M d^n x \sqrt{g(x)} \frac{1}{2} \left(-g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \xi(n) R(x) \phi^2(x) \right), \tag{2.181}$$

qui donne l'équation du champ scalaire sans masse à couplage conforme :

$$(-\Box_x + \xi(n) R(x)) \phi = 0, \tag{2.182}$$

où

$$\xi(n) = \frac{1}{4} \left[\frac{(n-2)}{(n-1)} \right] \tag{2.183}$$

est la constante de couplage conforme.

Parce que les transformations conformes ont essentiellement pour effet de changer les échelles de longueur (les angles sont préservés) en chaque point de l'espace-temps, la présence d'une masse (et donc d'une unité de longueur fixée) dans la théorie va toujours entraîner une brisure de l'invariance conforme. C'est pourquoi nous seront amenés à prendre la limite $m \to 0$ dans les procédures de régularisation et de renormalisation précédentes.

Bien que tous les termes a_j, $j \geqslant 3$ dans le lagrangien effectif (2.142) aient des divergences infrarouges pour $n = 4$ lorsque $m \to 0$, nous pouvons toujours utiliser cette expression pour avoir les termes en a_j, $j = 0, 1$ (en dimension 2) et $j = 0, 1, 2$ (en dimension 4) qui ont les divergences ultaviolettes. Nous pouvons poser $m = 0$ immédiatement dans les deux termes $j = 0, 1$ (dimension 4) car ils contiennent des puissances positives de m pour $n \sim 4$. Ces termes disparaissent. Le seul terme potentiellement "divergent-ultra-violet" est donc $j = 2$:

$$\frac{1}{2}(4\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\frac{m}{\mu}\right)^{n-4} a_2(x)\Gamma(2-\frac{n}{2}), \tag{2.184}$$

et doit être manipulé précautionneusement.

En substituant $a_2(x)$ donné par (2.150) avec $\xi = \xi(n)$ dans (2.184) et en réarrangeant les termes, nous écrivons les termes divergents de W venant de (2.184) comme suit :

$$\begin{aligned} W_{div} &= \frac{1}{2}\frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\left(\frac{m}{\mu}\right)^{n-4}\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)\int d^n x\sqrt{g(x)}a_2(x) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\left(\frac{m}{\mu}\right)^{n-4}\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)\int d^n x\sqrt{g(x)}\left[\alpha F(x)+\beta G(x)\right] \\ &\quad +O(n-4) \end{aligned} \tag{2.185}$$

où

$$F = R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} - 2R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}R^2 \tag{2.186}$$

$$G = R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} - 4R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + R^2 \tag{2.187}$$

$$\alpha = \frac{1}{120} \tag{2.188}$$

$$\beta = -\frac{1}{360} \tag{2.189}$$

Pour obtenir (2.185) nous avons laissé tomber le terme en $\Box R$ car il donne un terme de surface à l'infini (nous supposons toujours les champs nuls à l'infini) et le terme en R^2 car son coefficient est $(n-4)^2$ qui tue le pôle de la fonction gamma et la puissance de $(n-4)$ restante disparaît à la limite $n \to 4$.

La raison de l'arrangement (2.185) est que, pour $n = 4$, $F = C_{\alpha\beta\gamma\delta}C^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est le tenseur de Weyl, et G est un invariant topologique (Gauss-Bonnet), il s'ensuit que, pour $n = 4$, W_{div} est invariant conforme pour un couplage conforme $\xi(n)$, et à la limite $m = 0$. Cependant nous ne pouvons relâcher la régularisation et passer à $n = 4$ qu'après avoir calculé les quantités physiques d'intérêt et, en dehors de $n = 4$, W_{div} n'est pas invariant conforme. Ceci est important car nous allons voir que si $\langle T_{\mu\nu}\rangle = \langle T^{ren}_{\mu\nu}\rangle + \langle T^{div}_{\mu\nu}\rangle$ est divergent, $\langle T_\mu{}^\mu\rangle = \langle T_\mu{}^\mu\rangle^{ren} + \langle T_\mu{}^\mu\rangle^{div} = 0$. Il est capital alors de rappeler que l'anomalie conforme est définie par $\Theta_\mu{}^\mu = \langle T_\mu{}^\mu\rangle^{ren}$, et nous allons voir tout de suite qu'elle n'est pas nulle. Cette nuance a été la source de nombreuses discussions, certains prétendant que l'anomalie était réellement nulle (voir [8] pour plus de détails).

Pour voir cela, nous utilisons

$$\frac{2}{\sqrt{g}}g^{\mu\nu}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\int\sqrt{g}F d^n x = -(n-4)\left(F + \frac{2}{3}\Box R\right) \tag{2.190}$$

$$\frac{2}{\sqrt{g}}g^{\mu\nu}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\int\sqrt{g}G d^n x = -(n-4)\,G, \tag{2.191}$$

expressions que nous trouvons par les mêmes procédés que ceux utilisés pour l'obtention de $H_{\mu\nu}$ (2.159). Nous pouvons ainsi (voir(2.104)) calculer la contribution de W_{div} à la trace du tenseur d'énergie-impulsion:

$$\begin{aligned}\langle T_\mu{}^\mu\rangle_{div} &= g^{\mu\nu}\frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\delta W_{div}}{\delta g^{\mu\nu}} \\ &= \frac{(4-n)}{2\,(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\left(\frac{m}{\mu}\right)^{n-4}\underbrace{\Gamma(2-\frac{n}{2})}_{\frac{2}{4-n}-\gamma+O(n-4)}\left[\begin{array}{c}\alpha\left(F+\frac{2}{3}\Box R\right)\\ +\beta G\end{array}\right]\end{aligned} \tag{2.192}$$

Le facteur $(n-4)$ tue le pôle de $\Gamma(2-\frac{n}{2})$ (voir(2.143)), lorsque n tend vers 4. Il reste donc:

$$\langle T_\mu{}^\mu\rangle_{\substack{div\\ n=4}} = \frac{1}{16\pi^2}\left[\alpha\left(F + \frac{2}{3}\Box R\right) + \beta G\right]. \tag{2.193}$$

Comme ce résultat est indépendant de $\frac{m}{\mu}$, qui était présent dans (2.192) essentiellement en tant que cut-off infrarouge, nous pouvons poser $m = 0$ sans changer le résultat fini (2.193). Notons que, comme W_{div} est local et indépendant de l'état, il en est de même de $\langle T_\mu{}^\mu \rangle_{div}$. Il dépend seulement de la géométrie au point considéré.

Du fait que W est conformément invariant dans la limite couplage conforme, masse nulle, la valeur moyenne de la trace du tenseur d'énergie-impulsion *total* est nulle :

$$\langle T_\mu{}^\mu \rangle_{m=0,\xi=\frac{1}{6}} = -\frac{1}{\sqrt{g(x)}} \left| \frac{\delta W\left[\bar{g}_{\mu\nu}\right]}{\delta \sigma(x)} \right|_{m=0,\xi=\frac{1}{6},\sigma=0} = 0. \tag{2.194}$$

En conséquent la trace du tenseur d'énergie-impulsion *fini, renormalisé,* est égale à *moins* (2.193) :

$$\begin{aligned}
\langle T_\mu{}^\mu \rangle_{ren} &= -\frac{1}{16\pi^2}\left[\alpha\left(F + \frac{2}{3}\Box R\right) + \beta G\right] && (2.195)\\
&= -\frac{a_2}{16\pi^2} && (2.196)\\
&= -\frac{1}{2880\pi^2}\left[R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} - R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + \Box R\right] && (2.197)\\
&= -\frac{1}{2880\pi^2}\left[C_{\alpha\beta\gamma\delta}C^{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}R^2 + \Box R\right]. && (2.198)
\end{aligned}$$

En dimension $n = 2$, la seule contribution à l'action effective possédant des divergences ultra-violettes à la limite $m \to 0$ est

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\left(\frac{m}{\mu}\right)^{n-2}\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)\int d^n x\sqrt{g(x)}a_1(x) && (2.199)\\
&= \frac{\left(\frac{m}{\mu}\right)^{n-2}}{2\,(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)\int d^n x\sqrt{g(x)}\left(\frac{1}{6}-\xi(n)\right)R(x) && (2.200)\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{(4\pi)}\left(\frac{2}{2-n}-\gamma\right)\frac{1}{6}\int d^2 x\sqrt{g(x)}R(x) + O(n-2). && (2.201)
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé (2.149), (2.183) et le développement

$$\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right) \underset{n\sim 2}{=} \frac{2}{2-n} + const. + O(n-2). \tag{2.202}$$

A présent, un calcul simple montre que

$$\frac{g^{\mu\nu}(x)}{\sqrt{g(x)}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}(x)}\int d^2y\sqrt{g(y)}R(y) = \frac{(2-n)}{2}R(x) \tag{2.203}$$

et donc

$$\begin{aligned} \langle T_\mu{}^\mu\rangle_{div} &= g^{\mu\nu}\frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\delta W_{div}}{\delta g^{\mu\nu}} \\ &= \frac{1}{24\pi}\left(\frac{2}{(2-n)}\right)\frac{(2-n)}{2}R(x) \\ &= \frac{R(x)}{24\pi} \end{aligned} \tag{2.204}$$

avec en conséquence l'anomalie conforme en dimension 2 pour un champ bosonique :

$$A = \langle T_\mu{}^\mu\rangle_{ren.} = -\langle T_\mu{}^\mu\rangle_{div.} = -\frac{R}{24\pi}. \tag{2.205}$$

2.4.7 Discussion des résultats

La trace (2.195)-(2.198) est apparue dans la théorie quantique alors que la trace classique est nulle et que W et W_{div} sont invariants conforme en dimension quatre. Cela est dû au caractère non-invariant conforme de W_{div} (pas de W) en dehors de $n = 4$ qui "laisse des traces" même après que l'on autorise n à retrouver sa valeur 4. Ce résultat est connu sous le nom d'*anomalie de trace*, ou *anomalie conforme*, ou encore *anomalie de Weyl.* Il faut également signaler que toutes les techniques de régularisation et renormalisation donnent le même résultat, ce qui est heureux. Remarquons que l'anomalie n'existe pas en dimension impaire car L_{eff} est fini, comme le montre (2.142).

Pour n paire, égale à n_0, seuls les $1 + \frac{n_0}{2}$ premiers termes dans (2.142) présentent des divergences ultraviolettes i.e.ont des pôles dans leur fonction gamma respective en $n = n_0$. De ces termes, tous sauf celui qui contient a_{n_0} disparaissent en $n = n_0$ lorsque $m \to 0$. Ce terme contenant $a_{\frac{n_0}{2}}$ possède en facteur m^{n-n_0} et est responsable de l'anomalie de trace :

$$\langle T_\mu{}^\mu\rangle_{ren} = -\frac{1}{(4\pi)^{\frac{n_0}{2}}}a_{\frac{n_0}{2}}. \tag{2.206}$$

Ainsi, pour $n_0 = 2$ nous avons :

$$\langle T_\mu{}^\mu \rangle_{ren} = -\frac{1}{(4\pi)} a_1 = -\frac{R}{24\pi} \tag{2.207}$$

qui reproduit bien (2.205), où nous avons utilisé (2.149) avec le couplage conforme en dimension 2, $\xi(2) = 0$.

Il est possible d'éliminer le terme en $\Box R$ dans (2.197) ou (2.198) en se servant du résultat (voir(2.157)) :

$$\frac{2}{\sqrt{g}} g^{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int \sqrt{g} R^2 d^4x = 12 \Box R. \tag{2.208}$$

En ajoutant un terme en R^2 dans L_{eff} (en se rappelent de (2.186)-(2.189) que $\alpha F + \beta G$ ne contiennent pas de tels termes) le coefficient de $\Box R$ dans l'anomalie peut être modifié comme nous le désirons. Nous pouvons ainsi l'amener à zéro. Bien sûr, l'introduction de tels termes dans L_{eff} conduira à une perte d'invariance conforme de W qui est discutable. En fait, des arguments cohomologiques qui ne pourront pas être expliqués dans ce travail montrent que le terme en $\Box R$ dans l'anomalie est tout à fait inessentiel car trivial, et peut donc être éliminé de l'anomalie sans perte de généralité (voir [13]).

La généralisation de (2.196) au cas de champs de spin arbitraire en dimension quatre a été donnée par Christensen et Duff [12] :

$$\langle T_\mu{}^\mu \rangle_{ren} = -\frac{(-1)^{2A+2B}}{16\pi^2} Tr(a_2(A, B)), \tag{2.209}$$

où (A, B) caractérise la représentation du groupe de Lorentz sous laquelle les champs en question se transforment. (2.209) peut se récrire en termes de quatre paramètres comme :

$$\langle T_\mu{}^\mu \rangle_{ren} = \frac{1}{2880\pi^2} \left[a C_{\alpha\beta\gamma\delta} C^{\alpha\beta\gamma\delta} + b(R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - \frac{1}{3} R^2) + c \Box R + d R^2 \right]. \tag{2.210}$$

Il existe une *condition de cohérence* pour les coefficients a, b, c, et d [14]. Une comparaison de (2.195) et (2.210) montre que pour le champ scalaire réel :

$$a = -180(\alpha + \beta), \quad b = 360\beta, \quad c = 120\alpha, \quad d = 0 \tag{2.211}$$

qui donne la relation de contrainte :

$$2a + b + 3c = 0, \qquad d = 0, \tag{2.212}$$

et clairement des quatre paramètres, deux seulements sont indépendants.

En fait, cette condition de cohérence est indépendante des types de champs présents dans la théorie invariante conforme au niveau classique. C'est donc réellement une signature de l'anomalie conforme. Ce résulat a été redérivé par d'autres techniques totalement différentes (voir [13]). Pour l'expression des deux coefficients indépendants en présence d'autres champs, voir par exemple [9], [10], [11].

Enfin, pour terminer cette partie, il convient de dire que comme l'anomalie conforme existe parce que régulariser-renormaliser $\langle T^{\mu\nu} \rangle$ et prendre sa trace sont des opérations qui ne commutent pas, l'anomalie conforme dans une théorie qui n'est pas classiquement invariante conforme peut être définie par

$$A = g^{\mu\nu} \langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren.} - \langle g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \rangle_{ren.}. \tag{2.213}$$

Le deuxième terme disparaît quand la théorie est classiquement invariante conforme.

Chapitre 3

Correspondance AdS/CFT

3.1 Utilisation de la correspondance AdS/CFT

Dans cette partie du mémoire, nous allons utiliser cette correspondance pour calculer l'anomalie conforme. Nous allons voir que le calcul sera nettement moins long que par la méthode "traditionnelle" de DeWitt-Schwinger exposée précédement.

Maldacena[16] a **conjecturé** qu'il existait une relation de dualité entre une théorie de cordes, ou de super-gravité dans un espace anti de Sitter(AdS) (cet espace sera noté $\bar{X}_{n+1}$ où $n+1$ est la dimension de cet espace avec bord) et une théorie invariante conforme sur le bord de $\bar{X}_{n+1}$ (cet espace $\partial\bar{X}_{n+1}$ sera noté M_n) dans laquelle le champ gravitationnel est considéré comme un champ externe. C'est une conjecture car rien n'a été démontré, les théorèmes confirmant les idées émises ne sont pas encore trouvés. Il reste de ce fait beaucoup de zones d'ombre.

Witten a précisé cette correspondance[17] en faisant correspondre aux champs de jauge dans l'intérieur de $\bar{X}_{n+1}$ (noté X_{n+1}) des opérateurs au bord : les valeurs limites prises par les champs de jauge au bord sont considérées comme les sources respectives de ces opérateurs dans la théorie sur M_n. Ainsi Witten a dressé une "recette" de correspondance : champ de jauge dans $\bar{X}_{n+1}$/ opérateur au bord dans M_n.

Ce qui nous intéresse dans ce travail, c'est la valeur moyenne de l'opérateur énergie-impulsion au bord. La "recette" nous dit que le champ de jauge auquel il est couplé est le champ gravitationnel g_{ij} au bord. Nous montrerons que la métrique g_{ij} vue comme limite (dans un certain sens à préciser) du champ de jauge $\hat{G}_{\mu\nu}$ dans X_{n+1} n'est pas unique, mais que c'est en fait toute une classe d'équivalence de métriques sous transformations conformes qui, au bord, est associée au champ $\hat{G}_{\mu\nu}$.

Via la correspondance, nous évaluerons W_{CFT}, la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green connexes de la théorie conforme sur M_n pour un certain représentant $g_{(0)ij}$ dans la classe conforme. Ensuite nous passerons à un autre représentant dans la classe d'équivalence et regarderons comment W_{CFT} change en conséquence. La variation (non nulle) de cette fonctionnelle nous donnera donc l'anomalie conforme de la théorie au bord. Nous effectuerons tous les calculs dans le cadre de la théorie de corde approximée à la limite des basses énergies et nous utiliserons la correspondance pour obtenir ce qui nous intéresse dans la théorie conforme au bord.

On peut montrer que lorsque les énergies sont faibles par rapport aux énergies correspondant à la longueur de Planck $\sqrt{G_N\hbar/c^3} = 1,616\,.10^{-33}cm$ c'est-à-dire en dessous de $10^{19}GeV$, la théorie de corde (ou de super-gravité en espace AdS) peut être approximée par une théorie de super-gravité *classique* sur un espace AdS.

Ces simplifications importantes obtenues à la limite des basses énergies nous permettront d'effectuer les calculs de manière aisée dans X_{n+1}.

Nous avons dit que les champs de jauge dans X_{n+1} se couplent à des opérateurs dans M_n. La présence d'un bord implique que l'on doit adjoindre à la fonctionnelle d'action de la théorie de super-gravité $S[\phi]$ des conditions sur les champs ϕ , i.e. on doit préciser $\phi^{(0)}$ sur M_n. La fonction de partition est donc une fonctionnelle des conditions au bord

$$Z_{string}\left[\phi^{(0)}\right] = \int_{\phi^{(0)}} D\phi \exp\left(-S[\phi]\right), \tag{3.1}$$

(nous adoptons dans la suite la formulation euclidienne de la théorie de champ), le $\phi^{(0)}$ au bas de l'intégrale de chemin indique que l'intégrale fonctionnelle est prise sur toutes les configurations des champs qui satisfont la condition au bord donnée par $\phi^{(0)}$. La conjecture de Maldacena est que la fonction de partition de la théorie des cordes dans $\bar{X}_{n+1}$, vue comme fonctionnelle des conditions au bord $\phi^{(0)}$, est égale à la fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélation dans la théorie conforme sur M_n :

$$Z_{CFT}\left[\phi^{(0)}\right] = \int D\varphi \exp\left(-S_{CFT}[\varphi] + \int_{M_d} d^d x \phi^{(0)} O[\varphi]\right) \tag{3.2}$$

où O est un opérateur dans M_n. Comme nous l'avons dit, les champs $\phi^{(0)}$ agissent comme des sources pour les opérateurs (courants globaux) dans la théorie conforme au bord.

Sous la condition des "basses énergies", on se fie à l'approximation corde→super-gravité classique et Z_{string} se réduit à l'exponentielle de l'action de la théorie de super-gravité évaluée pour une configuration $\phi^{cl}\left(\phi^{(0)}\right)$ solution des équations classiques du mouvement et qui satisfait les conditions au bord données par $\phi^{(0)}$. A l'approximation des diagrammes en arbre on a :

$$Z^{tree}_{string}\left[\phi^{(0)}\right] = \exp\left(-S\left[\phi^{cl}\left(\phi^{(0)}\right)\right]\right). \tag{3.3}$$

Comme nous examinerons les fonctions de partitions qui contiennent le tenseur d'énergie-impulsion, la seule partie de l'action dans X_{n+1} qui nous intéresse est la partie gravitationnelle. C'est pourquoi nous allons fixer tous les autres champs à zéro. A l'approximation en arbre, nous sommes donc ramenés à résoudre les équations du mouvement classique de la super-gravitation dans X_{n+1} avec les conditions que la métrique $\hat{G}_{\mu\nu}$ dans X_{n+1} induise une classe conforme $\left[g_{(0)}\right]$ sur M_n et que tous les autres champs s'annulent. Dans la théorie en considération, cela veut dire que $\hat{G}_{\mu\nu}$ doit satisfaire les équations d'Einstein :

$$\hat{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\hat{G}_{\mu\nu}\hat{R} + \Lambda\hat{G}_{\mu\nu} = 0, \tag{3.4}$$

et que tous les autres champs doivent s'annuler sur X_{d+1}. Selon un théorème dû à Graham et Lee[20], à un difféomorphisme près il existe une et une seule métrique qui satisfait les conditions énoncées ci-dessus. En appliquant la correspondance (3.3) on va obtenir $Z_{CFT}\left[g_{(0)}\right]$ puis $W_{CFT}\left[g_{(0)}\right] = -\ln Z_{CFT}\left[g_{(0)}\right]$ la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green connexes en calculant l'action de la théorie gravitationnelle en considération dans $\bar{X}_{n+1}$:

$$\begin{aligned} S\left[\hat{G}_{\mu\nu}\right] &= S_{X_{n+1}} + S_{M_n} \\ &= \frac{1}{16\pi G^{(n+1)}}\left[\begin{array}{c} \int_{X_{d+1}} d^{n+1}x\sqrt{\det\hat{G}}\left(2\Lambda - \hat{R}\right) \\ + \int_{M_d} d^n x\sqrt{\det\bar{g}}\left(2\nabla_\mu n^\mu + \alpha\right) \end{array}\right] \end{aligned} \tag{3.5}$$

pour cette métrique.

Dans l'intégrale sur le bord, $\bar{g}$ désigne la métrique induite (précisée dans la suite) au bord par $\hat{G}_{\mu\nu}$, le premier terme $2\nabla_\mu n^\mu$ est nécessaire dans un domaine possédant un bord pour obtenir une action qui dépend seulement des dérivées premières de la métrique[21]. Pour le second terme, voir [22]. Nous n'explicitons pas l'origine de ces termes car nous allons montrer par la suite qu'ils ne jouent aucun rôle dans le calcul de l'anomalie conforme.

La description faite ci-dessus semble indiquer que W_{CFT} obtenue via la correspondance (3.3) dépendra seulement de la classe d'équivalence de métriques sur M_n. Ce serait le cas si on avait une théorie invariante conforme, cependant, l'action (3.5) est infinie pour la métrique $\hat{G}_{\mu\nu}$ donnée par (3.4) et les conditions au bord. En effet, le premier terme de (3.5), l'action dans X_{n+1}, est divergent car proportionnel au volume infini de X_{n+1} (dans un espace AdS la courbure scalaire est constante). Le terme au bord n'a aucun sens non plus car la métrique induite au bord par $\hat{G}_{\mu\nu}$ -voir plus bas- possède un pôle double. L'action doit donc être renormalisée par une méthode qui préserve la covariance générale de sorte que les divergences puissent être éliminées par des contre-termes locaux. Comme nous le verrons, cette renormalisation impliquera de choisir un représentant arbitraire dans la classe conforme des métriques au bord. Nous obtiendrons alors une action finie mais dépendant du choix du représentant de la classe conforme des métriques induites au bord par $\hat{G}_{\mu\nu}$. En vertu de la correspondance (3.3), la fonctionnelle finie W_{CFT} dépendra elle aussi du représentant $g_{(0)ij}$ arbitraire et l'invariance conforme sera brisée dans la théorie au bord.

Avant de continuer, il importe de préciser tout ce que nous venons de dire à propos de métrique induite au bord dans le sens naïf, dans le sens correct, de classe conforme de métrique au bord, de pôle d'ordre deux de la métrique $\hat{G}_{\mu\nu}$, de métrique en espace AdS, etc.

3.2 Cadre formel

L'espace anti-de Sitter à $n+1$ dimensions peut être obtenu en imposant une contrainte à $n+2$ coordonnées d'un espace plat de signature $(+,+,-,-,...,-)$:

$$y_0^2 + y_{n+1}^2 - (y_1^2 + ... + y_n^2) = l^2. \tag{3.6}$$

De cette réalisation, il est facile de voir que cet espace-hyperboloïde possède le groupe d'isométrie $SO(2,n)$. L'algèbre de $SO(2,n)$ est la même que l'algèbre des transformations conformes sur un espace minkowskien de dimension n (voir théorie générale).

Dans un système de coordonnées adaptées, la métrique AdS_{n+1} peut être donnée par

$$ds^2_{AdS_{n+1}} = \frac{l^2}{4\rho^2}d\rho^2 + \rho^{-1}\sum_{i,j=1}^{n}\eta_{ij}dx^i dx^j, \qquad \rho \geqslant 0, \tag{3.7}$$

où ρ est une variable radiale de genre espace et η_{ij} la métrique minkowskienne de signature $(+,+,...,-)$, ou bien par

$$ds^2_{AdS_{n+1}} = \frac{1}{r^2}\left[dr^2 + \sum_{i,j=1}^{n}\eta_{ij}dx^i dx^j\right] \tag{3.8}$$

en posant

$$r^2 = \rho, \qquad l = 1. \tag{3.9}$$

Il serait plus correct de dire que la variable temporelle a été déroulée, i.e. les métriques (3.7) et (3.8) correspondent au recouvrement universel d'AdS que l'on note CAdS, C pour 'covering'. Lorsque par la suite nous écrirons AdS, il faudra comprendre réellement CAdS.

Le bord est en $\rho = 0$. La topologie du bord $\rho = 0$ est celle d'un espace minkowskien de dimension n. On montre que $SO(2,n)$ agit sur le bord comme le groupe des transformations conformes. Dire que pour obtenir la métrique au bord d'AdS_{n+1} il suffit de poser ρ (ou r) égal à zéro dans (3.7) (ou (3.8)) n'a pas de sens car la métrique possède un pôle double en $\rho = 0$. Cette notion de métrique induite au bord n'est donc pas correcte. Pour que l'on puisse parler de métrique induite au bord, il faut s'y prendre autrement.

3.2.1 Notion d'infini conforme

Soient $\bar{X}_{n+1}$ un espace avec bord $\partial X_{n+1} = M_n$ (X_{n+1} est l'intérieur de $\bar{X}_{n+1}$) et g^+ une métrique complète sur X_{n+1}. Soit $r(x_0,\dots,x_n)$ une fonction dans $\bar{X}_{n+1}$ telle que

$$\begin{aligned} \left|\vec{\nabla}_{n+1} r\right| &< 1, && (3.10)\\ r &= 0 \text{ sur } M_n \text{ mais } \vec{\nabla}_{n+1} r \neq 0 \text{ sur } M_n. && (3.11)\\ r &> 0 \text{ sur } X_{n+1}. && (3.12) \end{aligned}$$

Une telle fonction est appelée *fonction de définition* (*defining function*, voir par exemple [23]).

On dit que g^+ a un pôle double sur M_n si pour toute fonction de définition r, $\bar{g} = r^2 g^+$ est une métrique régulière sur $\bar{X}_{n+1}$. Alors la restriction de $\bar{g}$ à M_n fournit une métrique sur M_n. Cette restriction de $\bar{g}$ à M_n change par une transformation conforme si la fonction de définition r change.

On peut montrer (cfr. [19]) que si X_{n+1} est un espace d'Einstein (i.e. le tenseur de Ricci est partout proportionnel à la métrique) avec courbure négative, alors avec un bon choix de coordonnées, la métrique sur X_{n+1} prend la forme

$$g^+ = \frac{1}{r^2}(dr^2 + g_r), \tag{3.13}$$

où g_r est une famille de métriques régulières sur M_n dépendant de r. Avec ce choix de fonction de définition on constate bien que $\bar{g} = r^2 g^+ = (dr^2 + g_r)$ est une métrique régulière sur $\bar{X}_{n+1}$. La restriction de $\bar{g}$ sur M_n, c'est-à-dire $g_{r=0} \underset{not.}{=} g_{(0)}$ est une métrique sur le bord.

On voit également que si l'on change la fonction de définition

$$r' = f(x,r)r, \quad f > 0, \text{ régulière}, \tag{3.14}$$

alors

$$g^+ = \frac{f^2(x,r)}{r'^2}\left[\left(\frac{f dr' - r' df}{f^2}\right)^2 + g_{r'/f}\right]. \tag{3.15}$$

Il est clair qu'à l'ordre r^0 la métrique sur M_n change par une transformation conforme

$$g'_{(0)} = f^2(x,r)_{/r=0}\, g_{(0)}. \tag{3.16}$$

Si on va jusqu'à l'ordre r^2 (on montre qu'il n'y a pas d'ordre r, i.e. $g_r(x) = g_{(0)}(x) + r^2 g_{(2)}(x) + r^4 ...$, voir [24]) les choses se compliquent. Néanmoins nous montrerons au chapitre 7 que le changement de la fonction de définition induit bien une transformation conforme au bord y compris jusqu'à l'ordre r^2.

On comprend pourquoi la structure au bord est une classe d'équivalence de métriques conformes : la métrique au bord est définie à une transformation conforme près car la fonction de définition est arbitraire.

Maintenant que ces quelques rappels et définitions sont faites, nous pouvons revenir à la recherche de l'action (3.5).

3.3 Equations d'Einstein

A partir de maintenant nous suivrons d'assez près l'article [25].

Comme nous l'avons dit avant, il existe une et une seule métrique, à un difféomorphisme près, qui vérifie les équations d'Einstein :

$$\hat{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\hat{G}_{\mu\nu}\hat{R} + \Lambda\hat{G}_{\mu\nu} = 0 \tag{3.17}$$

et qui possède au bord une structure conforme $[g_{(0)}]$ donnée (pour plus de précision, voir [24]). L'espace dans lequel ces équations s'appliquent est un espace d'Einstein avec bord, de dimension $n+1$. La métrique $\hat{G}_{\mu\nu}$ est l'équivalent de la métrique g^+ du chapitre précédent. Nous mettons des chapeaux sur les objets vivant dans l'espace à $n+1$ dimensions pour les distinguer des objets vivant dans le bord M_n.

En contractant (3.17) nous trouvons

$$\hat{R} = 2\Lambda\frac{(n+1)}{(n-1)} \tag{3.18}$$

qui indique que la courbure est constante et négative pour $\Lambda < 0$. Dans nos conventions le lien entre l^2 et Λ est donné par

$$\Lambda = -\frac{n(n-1)}{2l^2} \tag{3.19}$$

où l est l'échelle de longueur dans AdS_{n+1} présente dans (3.6) et (3.7).

A présent nous choisissons une métrique $g_{(0)}$ dans la classe conforme.

Nous considérons des fluctuations autour de la métrique AdS et supposons à cet effet que notre métrique s'écrit sous la forme

$$\hat{G}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \frac{l^2}{4}\rho^{-2}d\rho d\rho + \rho^{-1}g_{ij}(\rho,x)dx^i dx^j, \tag{3.20}$$

où le tenseur g_{ij} tend vers $g_{(0)}$ lorsqu'on s'approche du bord représenté par $\rho = 0$. C'est l'équivalent de g_r écrit dans l'équation (3.13).

En tenant compte de (3.18) et de l'expression de Λ en fonction de l les équations d'Einstein s'écrivent :

$$\hat{R}_{\mu\nu} = -\frac{n}{l^2}\hat{G}_{\mu\nu}. \tag{3.21}$$

3.3.1 Derivation des équations

Dans cette sous-section, les indices romains se réfèreront aux variables du bord M_n, i.e. $i, j, ... = 1, 2, ..., n$ tandis que les lettres grecques indiceront toutes les variables de $\bar{X}_{n+1}$, i.e. $\alpha, \beta, ... = 0, 1, 2, ..., n$, où l'indice 0 se réfère à la variable ρ qui s'annule au bord. Nous écrirons aussi ρ en indice, ce qu'il faudra comprendre comme l'indice se référant à la variable ρ (d'indice $\lambda = 0$). Nous écrirons g'_{ij} pour $\frac{\partial g_{ij}}{\partial \rho}$.

Calculons les symboles de Christoffel:

$$\hat{\Gamma}^{\rho}_{\rho\rho} = -\frac{1}{\rho}, \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}^{\rho}_{i\rho} &= \frac{\hat{G}^{\lambda\rho}}{2}\left(\hat{G}_{\lambda i,\rho} + \hat{G}_{\lambda\rho,i} - \hat{G}_{i\rho,\lambda}\right) \\ &= 0, \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\Gamma^{\rho}_{ij} = \frac{2g_{ij}}{l^2} - \frac{2\rho}{l^2}g'_{ij}, \tag{3.24}$$

$$\hat{\Gamma}^{i}_{\rho\rho} = \hat{G}^{\lambda i}\frac{1}{2}\left(2\hat{G}_{\lambda\rho,\rho} - \hat{G}_{\rho\rho,\lambda}\right) = 0, \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}^{i}_{j\rho} &= \rho\frac{g^{ki}}{2}\left[-\frac{1}{\rho^2}g_{kj} + \frac{1}{\rho}g'_{kj}\right] \\ &= -\frac{1}{2\rho}\delta^i_j + \frac{1}{2}g^{ki}g'_{kj}, \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\hat{\Gamma}^{i}_{jk} = \frac{1}{2}g^{il}\left[g_{lj,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l}\right] \tag{3.27}$$

$$= \Gamma^{i}_{jk}. \tag{3.28}$$

Le calcul des composantes du tenseur de Riemann et de Ricci est direct, pas nécessairement court et ne nous apprend rien de neuf:

$$\begin{aligned} \hat{R}_{ij} &= \hat{R}^{\alpha}{}_{i\alpha j} \\ &= \frac{1}{l^2}(-\rho)\left[2g''_{ij} - 2g'_{ik}g^{kl}g'_{lj} + g^{kl}g'_{kl}g'_{ij}\right] + R_{ij} \\ &\quad -\frac{n}{l^2\rho}g_{ij} + \frac{1}{l^2}(n-2)g'_{ij} + \frac{1}{l^2}g^{kl}g'_{kl}g_{ij}, \end{aligned} \tag{3.29}$$

(notre convention pour le tenseur de Riemann est l'opposée de celle utilisée par Henningson et Skenderis[1] [25].)

Les équations d'Einstein (3.21) donnent alors

$$\begin{aligned} -\rho\left[2g''_{ij}-2g'_{ik}g^{kl}g'_{lj}+g^{kl}g'_{kl}g'_{ij}\right]+l^2R_{ij}+(n-2)\,g'_{ij}+g^{kl}g'_{kl}g_{ij} &= -\frac{n}{\rho}g_{ij}+\frac{n}{\rho}g_{ij} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.30}$$

A présent voyons le calcul de $\hat{R}^{\alpha}{}_{i\alpha 0}=\hat{R}^{\alpha}{}_{i\alpha\rho}$.

$$\hat{R}_{i\rho}=\partial_\alpha\hat{\Gamma}^{\alpha}_{i\rho}-\partial_\rho\hat{\Gamma}^{\alpha}_{i\alpha}+\hat{\Gamma}^{\alpha}_{\lambda\alpha}\Gamma^{\lambda}_{i\rho}-\hat{\Gamma}^{\alpha}_{\lambda\rho}\hat{\Gamma}^{\lambda}_{i\alpha}, \tag{3.31}$$

qui, après quelques simplifications s'écrit

$$\hat{R}_{i\rho}=\partial_k\hat{\Gamma}^{k}_{i\rho}-\partial_\rho\Gamma^{k}_{ik}+\Gamma^{k}_{nk}\hat{\Gamma}^{n}_{i\rho}-\hat{\Gamma}^{k}_{n\rho}\Gamma^{n}_{ik}. \tag{3.32}$$

En remarquant que $\partial_\rho\Gamma^{k}_{ik}$ est un tenseur (la différence spatiale de deux connexions métriques en ρ et $\rho+d\rho$) nous avons

$$(\Gamma^{j}_{ij})'=(g^{jm}\Gamma_{m,ij})'=g'^{jm}\Gamma_{m,ij}+g^{mj}\Gamma'_{m,ij}. \tag{3.33}$$

Dans le repère où les symboles de Christoffel sont nuls et où les dérivées ordinaires sont égales aux dérivées covariantes nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} (\Gamma^{k}_{ik})' &= \frac{g^{jm}}{2}\partial_i g'_{mj} \\ &= \frac{1}{2}g^{jm}\nabla_i g'_{mj}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Avec (3.34), la suite du calcul est directe et nous avons

$$\hat{R}_{i\rho}=\frac{1}{2}g^{jk}(\nabla_k g'_{ji}-\nabla_i g'_{kj}). \tag{3.35}$$

Les équations (3.21) nous donnent

$$\frac{1}{2}g^{jk}(\nabla_i g'_{kj}-\nabla_k g'_{ji})=0. \tag{3.36}$$

[1] Ils définissent $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}=\partial_\delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}-\ldots$. Par contre ils contractent le tenseur de Riemann comme nous, ce qui fait que, comme ils adoptent la même signature de la métrique que la nôtre, leur signe des tenseurs de Riemann, Ricci et de la courbure scalaire est l'opposé du nôtre.

L' équation d'Einstein $\hat{R}_{\rho\rho} = -\frac{n}{l^2}\hat{G}_{\rho\rho} = -\frac{n}{4\rho^2}$ est :

$$g'^{kl}g'_{kl} + g^{kl}g''_{kl} + \frac{1}{2}g^{kl}g'_{lm}g^{mn}g'_{nk} = 0, \tag{3.37}$$

mais en remarquant que

$$\begin{aligned} \left(g^{ik}g_{kj}\right)' &= 0 \\ &\Leftrightarrow \\ -g^{ik}g'_{kl}g^{lj} &= g'^{ij}, \end{aligned} \tag{3.38}$$

nous trouvons finalement

$$g^{kl}g''_{kl} - \frac{1}{2}g^{kl}g'_{lm}g^{mn}g'_{nk} = 0. \tag{3.39}$$

3.3.2 Redondance des équations

Nous allons montrer dans cette sous-section que si on se donne les équations (3.36) et (3.39) en un point caractérisé par une certaine valeur de la coordonnée ρ, alors elles restent valables en tous les points possédant les mêmes coordonnées de bord x^i, x^j mais différant par la variable ρ. Ceci n'avait pas été démontré auparavant mais possède un analogue (voir [26] chap. 21) : pour une métrique régulière dans un espace temps de coordonnées $(\vec{x}, t)$ on montre que si on se donne des données de Cauchy g_{ij} et $\frac{d}{dt}g_{ij}$ sur une hypersurface régulière de type espace, les équations d'Einstein dans le vide et sans constante cosmologique sont telles que si les équations $G_{tt} = 0$, $G_{ti} = 0$ (qui contiennent la métrique et sa dérivée première par rapport au temps et qui sont donc des équations de contraintes) sont vérifiées à l'instant initial sur l'hypersurface de Cauchy considérée, alors elles sont vérifiées pour tous les "instants"[2] ultérieurs en vertu des équations $G_{ij} = 0$. En d'autres termes, les équations des contraintes $G_{tt} = 0$, $G_{ti} = 0$ sont propagées dans le temps en vertu des équations $G_{ij} = 0$. On ne doit donc plus s'en préoccuper si elles sont vérifiées en un instant initial.

Dans le cas qui nous occupe, la variable ρ est la variable qui joue le rôle du temps et qui est nulle sur M_n.

[2] la coordonnée t n'est pas nécessairement le temps propre d'un point sur l'hypersurface de Cauchy, c'est juste la coordonnée temporelle.

Les équations (3.21) se séparent en trois groupes

$$(i)\hat{R}_{ij} - \frac{n}{l^2}\hat{G}_{ij} = 0 \tag{3.40}$$

$$(ii)\hat{R}_{\rho i} - \frac{n}{l^2}\hat{G}_{\rho i} = \hat{R}_{\rho i} = 0 \tag{3.41}$$

$$(iii)\hat{R}_{\rho\rho} - \frac{n}{l^2}\hat{G}_{\rho\rho} = \hat{R}_{\rho\rho} + \frac{n}{4l^2} = 0, \tag{3.42}$$

les deux derniers pouvant être vus comme les "contraintes".

Nous avons

$$\begin{aligned} \hat{R}^{\rho}{}_{i;\rho} &= \partial_\rho \hat{R}^{\rho i} + \hat{\Gamma}^{\rho}_{\rho\lambda}\hat{R}^{\lambda i} + \hat{\Gamma}^{i}_{\rho\lambda}\hat{R}^{\lambda\rho} \\ &= \partial_\rho \hat{R}^{\rho i} - \frac{1}{\rho}\hat{R}^{\rho i} + \hat{\Gamma}^{\rho}_{\rho k}\hat{R}^{ki} + \hat{\Gamma}^{i}_{\rho\rho}\hat{R}^{\rho\rho} + \hat{\Gamma}^{i}_{\rho k}\hat{R}^{\rho k} \qquad (3.43) \\ &= \partial_\rho \hat{R}^{\rho i} \qquad (3.44) \end{aligned}$$

parce que $\hat{\Gamma}^{\rho}_{\rho k}$ et $\hat{\Gamma}^{i}_{\rho\rho}$ sont identiquement nuls et que $\hat{R}^{\rho i}$ et $\hat{R}^{\rho i}$ sont nuls si les contraintes (3.41) sont vérifiées au point considéré.

Par ailleurs en vertu des équations de Bianchi contractées,

$$\hat{R}^{\lambda}{}_{i;\lambda} = \hat{R}^{\rho}{}_{i;\rho} + \hat{R}^{k}{}_{i;k} = \frac{1}{2}\frac{\partial \hat{R}}{\partial x^i} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\kappa(n+1)\right) = 0 \tag{3.45}$$

et donc

$$-\hat{R}^{k}{}_{i;k} = \hat{R}^{\rho}{}_{i;\rho}. \tag{3.46}$$

Finalement

$$-\partial_\rho \hat{R}^{\rho i} = \hat{R}^{k}{}_{i;k} = \left(\kappa \hat{G}^{k}{}_{i;k}\right) = 0 \tag{3.47}$$

où nous avons utilisé (3.40) et le fait que les dérivées covariantes de la métrique sont nulles.

Pour l'équation (3.42) nous avons

$$\hat{R}_{\rho\rho;\rho} = \hat{R}_{\rho\rho,\rho} - 2\hat{\Gamma}^{\alpha}_{\rho\rho}\hat{R}_{\rho\alpha} = \hat{R}_{\rho\rho,\rho} + \frac{2}{\rho}\frac{(-n)}{4\rho^2} \tag{3.48}$$

et nous remarquons que

$$\hat{R}_{\rho\rho;\rho} = \left[\hat{R}_{\rho\rho,\rho} - \frac{n}{2\rho^3}\right] = \partial_\rho\,[3.42]\,. \tag{3.49}$$

Par ailleurs, les équations de Bianchi contractées nous disent que

$$\hat{R}^{\rho}{}_{\rho;\rho} + \hat{R}^{i}{}_{\rho;i} = 0 \tag{3.50}$$

ou

$$\hat{R}^{\rho}{}_{\rho;\rho} = -\hat{R}^{i}{}_{\rho;i} = 0 \tag{3.51}$$

en vertu de (3.41). Donc $\partial_\rho\,[3.42] = 0$ en vertu des équations (3.41) qui elles-même sont propagées par (3.40).

Nous avons donc montré que si les équations "de contrainte" (3.41) et (3.42) sont vérifiées pour une valeur initiale de $\rho = \rho_0$, elles le seront alors pour toute autre valeur de la coordonnée ρ en vertu des équations (3.40). Ce que nous avons montré ici est important car par la suite nous n'utiliserons pas les équations (3.41), et nous ne nous servirons de l'équation (3.42) qu'en $\rho = 0$, c'est-à-dire à l''instant initial". Il est donc bon de savoir que ces équations de contraintes sont également vérifiées pour des "instants" ultérieurs en vertu des équations (3.40) qui seront quant à elles utilisées pour toute valeur positive de ρ, pas seulement en $\rho = 0$. Ainsi lors de manipulations que nous effectuerons sur les équations (3.40) avec des valeurs $\rho > 0$, nous pourrons en toute légitimité utiliser l'équation (3.42) donnée en $\rho = 0$.

3.3.3 Recherche des solutions formelles

Rappelons les équations (3.30) et (3.39) :

$$\rho\left[2g''_{ij} - 2g'_{ik}g^{kl}g'_{lj} + g^{kl}g'_{kl}g'_{ij}\right] - l^2 R_{ij} - (n-2)\,g'_{ij} - g^{kl}g'_{kl}g_{ij} = 0, \tag{3.52}$$

$$g^{kl}g''_{kl} - \frac{1}{2}g^{kl}g'_{lm}g^{mn}g'_{nk} = 0. \tag{3.53}$$

nous allons essayer de construire des solutions sous forme de séries en les puissances de la variable ρ, et pour simplifier les notations nous n'indiquerons plus les indices matriciels, c'est-à-dire que nous écrirons g à la place de g_{ij}. Nous voulons que lorsque $\rho = 0$ la matrice obtenue soit $g_{(0)}$, notre représentant dans la classe conforme. Elle abaisse les indices dans M_n. Nous analyserons le cas particulier $n = 2$ plus loin.

Posons donc

$$\begin{aligned} g &= g_{(0)} + \rho g_{(2)} + \rho^2 g_{(4)} + \ldots + \rho^n g_{(2n)} + \ldots, & (3.54)\\ g^{-1} &= g_{(0)}^{-1} - \rho g_{(0)}^{-1} g_{(2)} g_{(0)}^{-1} + \ldots, & (3.55)\\ g' &= g_{(2)} + 2\rho g_{(4)} + \ldots + n\rho^{n-1} g_{(2n)} + \ldots. & (3.56) \end{aligned}$$

L'équation (3.53) nous donne à l'ordre ρ^0

$$2Tr\left(g_{(0)}^{-1}g_{(4)}\right) = \frac{1}{2}Tr\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right), \tag{3.57}$$

tandis que (3.52) implique à l'ordre ρ^0

$$0 = -l^2 Ricci(g_{(0)}) - (n-2)g_{(2)} - Tr\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right)g_{(0)}. \tag{3.58}$$

En contractant (3.58) à l'aide de la métrique au bord, nous avons

$$\begin{aligned} 0 &= l^2 R(g_{(0)}) + (n-2)Tr(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}) + nTr\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right), && (3.59)\\ &\Leftrightarrow \\ Tr(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}) &= -\frac{l^2}{2(n-1)}R(g_{(0)}) && (3.60)\end{aligned}$$

que nous injectons dans (3.58) qui devient

$$(n-2)\,g_{(2)} = \frac{l^2}{2\,(n-1)}R(g_{(0)})g_{(0)} - l^2 Ricci(g_{(0)}). \tag{3.61}$$

Nous voyons que $g_{(2)}$ est donné par une expression covariante qui contient des dérivées secondes de la métrique, ce qui explique l'indice 2 de $g_{(2)}$.

Les équations (3.52) nous donnent, à l'ordre ρ^1 :

$$\begin{aligned} 0 &= 4g_{(4)} - 2g_{(2)}g_{(0)}^{-1}g_{(2)} + Tr(g_{(0)}^{-1}g_{(2)})g_{(2)} - l^2 Ricci/_{ordre\rho} - 2(n-2)g_{(4)} \\ &\quad -Tr(g_{(0)}^{-1}g_{(2)})g_{(2)} - \left[Tr\left(2g_{(0)}^{-1}g_{(4)} - g_{(0)}^{-1}g_{(2)}g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right)\right]g_{(0)} \\ &\quad \text{ou bien} \\ 0 &= (4-2n+4)g_{(4)} - 2g_{(2)}g_{(0)}^{-1}g_{(2)} - l^2 Ricci/_{ordre\rho} \\ &\quad +\frac{1}{2}g_{(0)}Tr\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right). && (3.62)\end{aligned}$$

Remarquons qu'en multipliant par $g_{(0)}^{-1}$ et en prenant la trace, nous avons

$$2(4-n)Tr\left(g_{(0)}^{-1}g_{(4)}\right) - \frac{3}{2}Tr\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right) - l^2 Tr\left(g_{(0)}^{-1}Ricci/_{ordre\rho}\right) = 0. \tag{3.63}$$

qui, avec l'aide de (3.57), donne

$$Tr\left(g_{(0)}^{-1}Ricci/_{ordre\rho}\right) = 0. \tag{3.64}$$

La relation (3.62) se laisse récrire sous la forme

$$2(4-n)g_{(4)} = 2g_{(2)}g_{(0)}^{-1}g_{(2)} + l^2 Ricci/_{ordre\rho} - \frac{1}{2}g_{(0)}Tr\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right), \quad (3.65)$$

qui exprime que l'on peut trouver l'expression de $g_{(4)}$ en fonction de $g_{(2)}$ et $g_{(0)}$ *à condition que* $g_{(2)}$ vérifie (3.60) et que n *soit différent de* 4. L'expression est covariante, la seule difficulté est de calculer le tenseur de Ricci à l'ordre ρ. Nous avons montré (mais c'est un peu lourd à écrire) que le tenseur de Ricci à l'ordre ρ contient des dérivées secondes de $g_{(2)}$ donc des dérivées quatrièmes de $g_{(0)}$. Ainsi les indices au bas des objets représentent le nombre de dérivées de la métrique.

On montre sans difficultés que si on recherche $g_{(6)}$ il faut que la dimension au bord soit différente de 6.

Montrons qu'en toute généralité (sauf $n = 2$, qui sera traité plus tard) les dimensions paires posent problème. Posons

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} g_{(2n)}\rho^n, \quad g' = \sum_{n=1}^{\infty} n g_{(2n)}\rho^{n-1}, \quad (3.66)$$

$$g'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)g_{(2n)}\rho^{n-2}, \quad g^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(g_{(2n)})\rho^n, \quad (3.67)$$

où $\Phi(g_{(2n)})$, $n > 0$ est une fonction de $g_{(2m)}$, $2m \leqslant 2n$ avec $\Phi(g_{(0)}) = g_{(0)}^{-1}$ comme il est facile de s'en convaincre.

En insérant ces expressions dans (3.53), nous avons

$$\begin{aligned}
0 = {} & 2\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)g_{(2k)}\rho^{k-1} - 2\rho\left(\sum_{n=2}^{\infty} n g_{(2n)}\rho^{n-1}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} m g_{(2m)}\rho^{m-1}\right) \times \\
& \times \left(\sum_{p=0}^{\infty} i\Phi(g_{(2p)})\rho^p\right) \\
& + \rho Tr\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty}\Phi(g_{(2n)})\rho^n\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} m g_{(2m)}\rho^{m-1}\right)\right]\left(\sum_{p=1}^{\infty} p g_{(2p)}\rho^{p-1}\right) \\
& - l^2\sum_{n=0}^{\infty} Ricci_{(n)}\rho^n - (n-2)\left(\sum_{k=1}^{\infty} k g_{(2k)}\rho^{k-1}\right) \\
& - Tr\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty}\Phi(g_{(2n)})\rho^n\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} m g_{(2m)}\rho^{m-1}\right)\right]\left(\sum_{p=0}^{\infty} g_{(2p)}\rho^p\right), \quad (3.68)
\end{aligned}$$

où $\sum_{n=0}^{\infty} Ricci_{(n)}\rho^n$ est le développement de $Ricci(g)$ en puissances de ρ.
En isolant les termes en la puissance $k-1$ de ρ, $k \geqslant 2$, nous avons

$$\begin{aligned} 0 &= 2k\,(k-1)\,g_{(2k)} - C(g_{(2k)}) + D(g_{(2k)}) - l^2 Ricc_{(k-1)} \\ &\quad - (n-2)\,kg_{(2k)} - E(g_{(2k)}), \end{aligned} \tag{3.69}$$

où $C(g_{(2k)})$, $D(g_{(2k)})$ et $E(g_{(2k)})$ sont des fonctions de $g_{(2m)}$, $2m \leqslant 2k-2$, comme l'analyse de (3.68) le montre. Ainsi, $g_{(2k)}$ apparaît pour la première fois avec en facteur le coefficient

$$[2k\,(k-1) - k\,(n-2)] = \left(2k^2 - nk\right) \tag{3.70}$$

qui est nul si $n = 2k$.

Il faut remarquer qu'il n'y a aucun problème pour une dimension n impaire. La récurrence ne s'arrête pas, c'est-à-dire que chaque coefficient peut être exprimé en fonction des précédents. Nous verrons plus loin que ceci correspondra au fait qu'il n'y a pas d'anomalie conforme en dimension impaire.

Lors des résolutions d'équations linéaires du second degré de Fuchs, lorsque l'équation indicielle analogue à (3.70) possède deux solutions différant d'un entier, on pose dans le développement de Frobenius de la deuxième solution un terme logarithmique à l'ordre r^s, si s est la plus petite solution de l'équation aux indices. Ici, pour n pair, on introduit également un terme logarithmique pour pouvoir continuer la récurrence, même si on n'a pas affaire à une équation de Fuchs:

$$g = g_{(0)} + \rho g_{(2)} + \ldots + \rho^{n/2} g_{(n)} + \rho^{n/2} h_{(n)} \ln \rho + O(\rho^{n/2+1}). \tag{3.71}$$

Voyons ce que le terme logarithmique vient faire dans le problème pour $n = 4$. Nous avons tout d'abord

$$\begin{aligned} g &= g_{(0)} + \rho g_{(2)} + \rho^2 g_{(4)} + \rho^2 h_{(4)} \ln \rho + \rho^3 \ldots, \\ g' &= g_{(2)} + 2\rho \left[g_{(4)} + h_{(4)} \ln \rho + \frac{1}{2} h_{(4)} \right] + \rho^2 \ldots, \\ g'' &= 2g_{(4)} + 2 \ln \rho + h_{(4)} + 2h_{(4)} + \ldots \\ &= 2g_{(4)} + 2 \ln \rho + 3h_{(4)} + \ldots \end{aligned} \tag{3.72}$$

L'ordre zéro de l'équation (3.53) donne

$$Tr\left[g_{(0)}^{-1}(2g_{(4)} + 3h_{(4)})\right] = \frac{1}{2} Tr\left[g_{(0)}^{-1} g_{(2)} g_{(0)}^{-1} g_{(2)}\right] \tag{3.73}$$

tandis qu'à l'ordre $\ln \rho$,(3.53) nous apprend que

$$Tr\left(g_{(0)}^{-1}h_{(4)}\right) = 0. \tag{3.74}$$

Ainsi la trace de $h_{(4)}$ par rapport à $g_{(0)}$ est nulle et (3.73) devient:

$$Tr\left[g_{(0)}^{-1}g_{(4)}\right] = \frac{1}{4}Tr\left[g_{(0)}^{-1}g_{(2)}g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right] \tag{3.75}$$

comme (3.57). Nous voyons donc que la trace de $g_{(4)}$ par rapport à $g_{(0)}$ est déterminée.

A l'ordre zéro l'équation (3.52) n'est pas modifiée; elle donne, pour $n = 4$:

$$g_{(2)} = \frac{l^2 R\left(g_{(0)}\right)}{12}g_{(0)} - \frac{l^2 Ricci\left(g_{(0)}\right)}{2}, \tag{3.76}$$

et donc (3.75) est un produit de deux facteurs en les dérivées secondes de la métrique. On montre de la même façon en analysant (3.39) que $Tr(g_{(0)}^{-1}g_{(6)})$ est formé de produits de trois facteurs en $\frac{\partial^2 g_{(0)}}{\partial x^2}$ et d'un facteur en $\frac{\partial^4 g_{(0)}}{\partial x^4}$ par un facteur en $\frac{\partial^2 g_{(0)}}{\partial x^2}$. En toute généralité, on peut dire que $Tr(g_{(0)}^{-1}g_{(2k)})$ est somme de termes de la forme

$$a_{(2k)} = \prod_\eta \frac{\partial^{2i_\eta} g_{(0)}}{\partial x^{2i_\eta}}, \qquad i_\eta = 0, 1, 2, ..., k-1, \qquad \sum_\eta i_\eta = k. \tag{3.77}$$

L'ordre ρ de (3.52) nous donne

$$6h_{(4)} - 2g_{(2)}g_{(0)}^{-1}g_{(2)} - l^2 Ricci/_{ordre\rho} + \frac{1}{2}g_{(0)}Tr\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right) = 0 \tag{3.78}$$

et donc

$$h_{(4)} = \frac{1}{6}\left[2g_{(2)}g_{(0)}^{-1}g_{(2)} + l^2 Ricci/_{ordre\rho} - \frac{1}{2}g_{(0)}Tr\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right)\right]. \tag{3.79}$$

Nous en concluons que $h_{(4)}$ est localement déterminé et de trace nulle. La trace de $g_{(4)}$ est déterminée localement mais c'est tout ce que nous savons sur $g_{(4)}$, puisque son coefficient s'annule dans le calcul.

3.3.4 Conclusions

Pour n pair $\neq 0$, le développement de g est de la forme :

$$g = g_{(0)} + \rho g_{(2)} + \ldots + h_{(n)}\rho^{n/2}\ln\rho + g_{(n)}\rho^{n/2} + \ldots \tag{3.80}$$

où les $g_{(i)}$ sont des expressions covariantes déterminées localement pour i pair$\leqslant n-2$, définies sur M_n, et qui contiennent des dérivées de la métrique $g_{(0)}$ jusqu'à l'ordre i.

$h_{(n)}$ est déterminé localement et de trace nulle par rapport à $g_{(0)}$.

La trace de $g_{(n)}$ (par rapport à $g_{(0)}$) est déterminée localement, le reste est indéterminé.

Tant que $n \geqslant 3$, on a

$$(n-2)\, g_{(2)} = \frac{l^2}{2\,(n-1)} R(g_{(0)}) g_{(0)} - l^2 Ricci(g_{(0)}) \tag{3.81}$$

où $Ricci(g_{(0)})$ et $R(g_{(0)})$ sont respectivement le tenseur de Ricci et la courbure scalaire de la métrique $g_{(0)}$ de M_n.

Le fait d'obtenir encore des indéterminations sur le développement de g implique une indétermination sur la métrique $\hat{G}$. Ceci peut paraître en contradiction avec le théorème d'unicité de la métrique $\hat{G}$ donné dans [20], à savoir que pour une structure conforme donnée au bord, la métrique $\hat{G}_{\mu\nu}$ dans X_{n+1} qui induit cette structure est unique à un difféomorphisme près. La raison de cette apparente contradiction est que nos calculs ont été faits localement alors que le théorème s'applique à un espace X_{n+1} topologiquement semblable à la boule B_{n+1}. En rajoutant alors les conditions globales qu'imposent les hypothèses du théorème, les indéterminations sur $\hat{G}_{\mu\nu}$ disparaissent.

3.3.5 Cas $n = 2$

Analysons à présent le cas spécial correspondant à $n = 2$.

L'équation (3.52) donne, à l'ordre zéro

$$l^2 Ricci\left(g_{(0)}\right) = -Tr\left[g_{(0)}^{-1} g_{(2)}\right] g_{(0)} \tag{3.82}$$

c'est-à-dire

$$Tr\left[g_{(0)}^{-1} g_{(2)}\right] = -\frac{l^2}{2} R\left(g_{(0)}\right). \tag{3.83}$$

L'équation (3.53) donne, comme dans le cas général

$$2Tr\left(g_{(0)}^{-1}g_{(4)}\right) = \frac{1}{2}Tr\left[g_{(0)}^{-1}g_{(2)}g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right] \tag{3.84}$$

L'équation (3.52) donne, à l'ordre un et en se servant de (3.84)

$$4g_{(4)} - 2g_{(2)}g_{(0)}^{-1}g_{(2)} - l^2 Ricci/_{ordre1} + \frac{1}{2}g_{(0)}Tr(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}g_{(0)}^{-1}g_{(2)}) = 0 \tag{3.85}$$

c'est-à-dire

$$g_{(4)} = \frac{1}{4}\left[2g_{(2)}g_{(0)}^{-1}g_{(2)} + l^2 Ricci/_{ordre1} - \frac{1}{2}g_{(0)}Tr(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}g_{(0)}^{-1}g_{(2)})\right] \tag{3.86}$$

et nous constatons qu'en choisissant un $g_{(2)}$ qui vérifie (3.83), nous pouvons donner une expression locale de $g_{(4)}$ qui est (3.86).

Ainsi le cas $n = 2$ est spécial car on voit que la série (3.80) n'est pas bloquée à l'ordre $\frac{n}{2} = 1$ mais qu'au contraire, si $g_{(2)}$ vérifie (3.83), les coefficients des puissances suivantes de ρ sont déterminés localement, avec pour $g_{(4)}$ la condition (3.84). De même, on pourrait calculer $g_{(6)}$ avec éventuellement une condition sur sa trace, mais l'important est que l'on ne doit pas rajouter de terme logarithmique à l'ordre ρ, et qu'*a priori* la série peut être déterminée formellement aussi loin que l'on veut.

Ceci n'est pas étonnant car on sait qu'en dimension $n = 2$ la métrique est conformément plate, le tenseur d'Einstein est identiquement nul, et l'équation (3.81) devient

$$0.g_{(2)} = 0 \tag{3.87}$$

qui est indéterminée. Nous avons juste une condition (3.83) sur la trace.

Dans ce cas particulier $n = 2$, le fait que g et donc la métrique $\hat{G}$ est indéterminée vient du fait qu'en dimension 2 toute métrique est conformément plate. Donc demander que $\hat{G}$ induise une certaine structure conforme donnée dans un espace de dimension 2 est un faux problème car toujours vérifié, pour n'importe quelle métrique $\hat{G}$.

3.4 Changement de fonction de définition, invariance conforme.

Avant de passer au calcul de l'anomalie, nous voulons expliciter que la variation de $g_{(2)}$ induite par une transformation conforme sur $g_{(0)}$ peut être obtenue en changeant la fonction de définition r (cfr(3.13)) et en effectuant éventuellement des changements de coordonnées. Nous voulons ainsi montrer que jusqu'à l'ordre ρ (ou r^2) un changement de fonction de définition induit bien une transformation conforme de la métrique $g(x,\rho)$ qui tend vers $g_{(0)}$ donné lorsque ρ (ou r^2) tend vers zéro.

Le premier ordre du développement de la métrique (cfr(3.81)) est $g_{(2)} = \frac{l^2}{n-2}\left[\frac{1}{2(n-1)}R(g_{(0)})g_{(0)} - Ricci(g_{(0)})\right]$, où n est la dimension du bord de AdS, $Ricci(g_{(0)})$ le tenseur de Ricci calculé à partir de $g_{(0)}$ et $R(g_{(0)})$ la courbure scalaire calculée à partir de $g_{(0)}$.

En effectuant la transformation conforme

$$g_{(0)} \longrightarrow e^{2w} g_{(0)} \tag{3.88}$$

on regarde comment $g_{(2)}$ se transforme en conséquence.

Les formules bien connues (voir [29] par exemple) des variations du tenseur de Ricci et de la courbure scalaire sous la transformation (3.88) nous donnent :

$$\frac{(n-2)}{l^2}g_{(2)} \longrightarrow \frac{(n-2)}{l^2}g_{(2)} + (n-2)\left[(\partial_{ij}w - \partial_i w \partial_j w) + \frac{1}{2}g_{(0)ij}g^{kl}_{(0)}\partial_k w \partial_l w\right]. \tag{3.89}$$

En manipulant la métrique donnée sous la forme (3.13)

$$g_+ = \frac{1}{r^2}\left[drdr + \left(g_{(0)ij}(x) + r^2 g_{(2)ij} + \dots\right) dx^i dx^j\right] \tag{3.90}$$

par des changements de variables affectant la fonction de définition r et les coordonnées au bord, nous espérons retrouver(3.89) à l'ordre r^2.

Soit le changement de variable

$$r = e^{-(w_{(0)}(x) + \frac{1}{2}r'^2 w_{(2)})}\, r' \quad = e^{-\overline{w}}\, r', \tag{3.91}$$

il fournit

$$\begin{aligned} dr \;&=\; -(\, dw_{(0)} + \frac{1}{2}\, r'^2\, dw_{(2)} + r'\, dr'\, w_{(2)}\,)\, e^{-(w_{(0)}(x) + \frac{1}{2}r'^2 w_{(2)})}\, r' \\ &\quad + e^{-(w_{(0)}(x) + \frac{1}{2}r'^2 w_{(2)})}\, dr', \end{aligned} \tag{3.92}$$

$$drdr = e^{-2\overline{w}}\left[\begin{array}{c} \left(1 - 2\, r'^2\, w_{(2)}\right) dr'\, dr' + r'^2\, dw_{(0)}\, dw_{(0)} \\ -2\, r'\, dw_{(0)}\, dr' - r'^3\, dr'\, dw_{(2)} + 2\, r'^3\, w_{(2)}\, dw_{(0)}\, dr' \end{array}\right]. \tag{3.93}$$

La métrique devient

$$g_+ = \frac{1}{r'^2}\left[\begin{array}{c} \left(1 - 2\,r'^2\,w_{(2)}\right)\,dr'\,dr' - 2\,r'\,\partial_i w^i_{(0)}\,\underline{dx^i\,dr'} + r'^2\,\partial_i w_{(0)}\,\partial_j w_{(0)}\;dx^i dx^j \\ +r'^3\,\left(2\,w_{(2)}\,\partial_i w_{(0)} - \partial_i w_{(2)}\,\right)\underline{dx^i\,dr'} \\ +e^{2\overline{w}}\,g_{(0)\,ij}(x) dx^i dx^j + r'^2\,g_{(2)\,ij}(x)\,dx^i dx^j \end{array}\right]. \tag{3.94}$$

Pour nous débarrasser des termes croisés, nous utilisons le changement de variable suivant :

$$x^i = x'^i + \frac{1}{2}\,r'^2\,h^i(x') \tag{3.95}$$

et identifions

$$e^{2w_{(0)}(x(x'))} g_{(0)\,ij}(x(x'))\,h^j \;= \partial_i w_{(0)} \Leftrightarrow h^j \,=\, e^{-2w_{(0)}(x(x'))} g^{ij}_{(0)} \partial_i w_{(0)}. \tag{3.96}$$

g^+ devient alors

$$\frac{1}{r'^2}\left[\begin{array}{c} \left(1 - 2r'^2 w_{(2)} - r'^2 e^{-2w_{(0)}} g^{kl}_{(0)} \partial_k w_{(0)} \partial_l w_{(0)}\right) dr' dr' \\ + \left(\begin{array}{c} e^{2w_{(0)}} g_{(0)\,ij}(x(x')) + r'^2 \partial_{ij} w_{(0)} - r'^2 \partial_i w_{(0)}\,\partial_j w_{(0)} \\ +r'^2 e^{2w_{(0)}} g_{(0)\,ij} w_{(2)} + r'^2 g_{(2)\,ij} \end{array}\right) dx'^i dx'^j \\ +r'^3 \left(\begin{array}{c} 2\partial_i w_{(0)}\,\partial_j w_{(0)} h^j dx'^i + 2w_{(2)}\partial_i w_{(0)} dx'^i - \partial_i w_{(2)} dx'^i \\ +2e^{2w_{(0)}} g_{(0)\,ij} w_{(2)} h^j dx'^i + 2g_{(2)ij} h^j dx'^i \end{array}\right) dr' \end{array}\right] \tag{3.97}$$

où nous avons utilisé

$$e^{2w_{(0)}} dh^i g_{(0)ij} dx'^j = \partial_{ij} w_{(0)} dx'^i dx'^j - 2e^{2w_{(0)}} \partial_j w_{(0)} h^k g_{(0)ki} dx'^i dx'^j$$

obtenu en dérivant (3.96).

Pour que le coefficient du terme en $dr'dr'$ soit égal à 1, nous imposons :

$$-2r'^2 w_{(2)} - r'^2 e^{-2w_{(0)}} g^{kl}_{(0)} \partial_k w_{(0)} \partial_l w_{(0)} = 0 \tag{3.98}$$

et donc

$$w_{(2)} = -\frac{1}{2} e^{-2w_{(0)}} g^{kl}_{(0)} \partial_k w_{(0)} \partial_l w_{(0)}. \tag{3.99}$$

Par ailleurs, en remarquant que

$$e^{2w_{(0)}(x(x'))} \;=\; e^{2w_{(0)}(x' + \frac{1}{2}\,r'^2\,h(x'))} = e^{2w_{(0)}(x') + r'^2 h^i(x')\partial_i w_{(0)}} \tag{3.100}$$

$$=\; e^{2w_{(0)}(x')}\left(1 + r'^2 h^i \partial_i w_{(0)}\right) \tag{3.101}$$

nous voyons que

$$
\begin{aligned}
e^{2w_{(0)}(x(x'))}g_{(0)ij} &= e^{2w_{(0)}(x')}g_{(0)ij} + r'^2 e^{2w_{(0)}(x')}g_{(0)ij}h^k\partial_k w_{(0)} \qquad (3.102)\\
&= e^{2w_{(0)}(x')}g_{(0)ij} + r'^2 e^{2w_{(0)}(x')}g_{(0)ij}e^{-2w_{(0)}(x')}g_{(0)}^{kl}\partial_k w_{(0)}\partial_l w_{(0)}\\
&= e^{2w_{(0)}(x')}g_{(0)ij} + r'^2 g_{(0)ij}g_{(0)}^{kl}\partial_k w_{(0)}\partial_l w_{(0)}.
\end{aligned}
$$

Finalement, les termes supplémentaires à l'ordre r'^2 sont :

$$
\partial_{ij}w_{(0)} - \partial_i w_{(0)}\,\partial_j w_{(0)} + \frac{1}{2}g_{(0)ij}g_{(0)}^{kl}\partial_k w_{(0)}\partial_l w_{(0)} \qquad (3.103)
$$

ce qui reproduit bien le résultat (3.89).

3.5 Calcul de l'anomalie, cas $n = 2$, $n = 4$.

Reprenons l'action dans $AdS_{n+1} \equiv \bar{X}_{n+1}$:

$$
\begin{aligned}
S\left[\hat{G}_{\mu\nu}\right] &= S_{X_{n+1}} + S_{M_n}\\
&= \frac{1}{16\pi G^{(n+1)}}\left[\begin{array}{c} \int_{X_{n+1}} d^{n+1}x\sqrt{\det\hat{G}}\left(2\Lambda - \hat{R}\right)\\ + \int_{M_n} d^n x\sqrt{\det\bar{g}}\left(2\nabla_\mu n^\mu + \alpha\right)\end{array}\right] \qquad (3.104)
\end{aligned}
$$

qui diverge pour les raisons expliquées plus haut.

Le procédé de régularisation consiste à restreindre l'intégrale sur X_{n+1} au domaine $\rho > \varepsilon$ pour un cutt-off $\varepsilon > 0$ et à évaluer l'intégrand dans l'intégrale sur M_n en $\rho = \varepsilon$. L'action régularisée évaluée pour la métrique $\hat{G}_{\mu\nu}$ est donc $\left(16\pi G_N^{(n+1)}\right)^{-1}\int d^n x \pounds$, où

$$
\pounds = \left(\frac{n}{l}\int_\varepsilon d\rho\rho^{-\frac{n}{2}-1}\sqrt{\det g}\right) + \rho^{-\frac{n}{2}}\left(\begin{array}{c}\frac{2n}{l}\sqrt{\det g} + \frac{4}{l}\rho\partial_\rho\sqrt{\det g}\\ +\alpha\sqrt{\det g}\end{array}\right)_{\rho=\varepsilon}. \qquad (3.105)
$$

Dans le premier terme qui vient de l'intégrale sur le domaine X_{n+1}, nous avons utilisé (3.19), le fait que $\hat{G}_{\mu\nu}$ est la métrique d'un espace d'Einstein de sorte que

$$
2\Lambda - \hat{R} = \frac{2n}{l^2}, \qquad (3.106)
$$

et le fait que la métrique $\hat{G}$ est diagonale par bloc : le premier bloc 1×1 est constitué de l'élément $\left(\frac{l}{2\rho}\right)^2$ et le deuxième bloc $n \times n$ vaut

$$\frac{1}{\rho}g. \tag{3.107}$$

Donc

$$\frac{2n}{l^2}\sqrt{\det \hat{G}} = \frac{2n}{l^2}\frac{l}{2\rho}\rho^{-\frac{n}{2}}\sqrt{\det g} = \frac{n}{l}\rho^{-\frac{n}{2}-1}\sqrt{\det g}. \tag{3.108}$$

Nous n'avons pas besoin d'expliciter les termes résultant de l'intégrale sur M_n car comme nous le verrons, ils ne contribuent pas au calcul de l'anomalie conforme. La seule chose qu'il faut remarquer c'est que l'élément de volume de l'intégrale sur M_n , à savoir $\rho^{-\frac{n}{2}}\sqrt{\det g}$, amène dans l'intégrand une puissance de ρ en plus que celle qui figure dans l'élément de volume sur X_{n+1}. Ceci est important car dans le cas n pair $\sqrt{\det g}$ est une série de puissances de ρ avec des coefficients covariants jusqu'à l'ordre $\rho^{n/2}$ inclus (on négligera les corrections d'ordre supérieur), donc $\rho^{-\frac{n}{2}-1}\sqrt{\det g}$ est donné par une suite de termes commençant par $\rho^{-\frac{n}{2}-1}$ et se terminant par un terme en ρ^{-1}dont tous les coefficients sont donnés par des expressions covariantes. Après avoir effectué l'intégration par rapport à ρ dans $\int_{X_{n+1}}$ et avoir pris le résultat à la borne $\rho = \varepsilon$, nous nous retrouvons donc avec des puissances négatives de ε à partir de $\varepsilon^{-\frac{n}{2}}$ jusqu'à un terme en $\ln \varepsilon$ (résultant de l'intégration du terme en ρ^{-1}). Les corrections d'ordre supérieur s'annuleront à la limite $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Dans le cas de l'intégrale sur M_n, la dépendance en ρ de l'intégrand est donnée par $\rho^{-\frac{n}{2}}\sqrt{\det g}$ qui fournira une séquence de termes à coefficients covariants commençant par $\rho^{-\frac{n}{2}}$ et terminant par un terme constant. En évaluant l'expression en $\rho = \varepsilon$, comme le demande le procédé de régularisation par cutt-off ε, on obtient des puissances de ε allant de $-\frac{n}{2}$ à -1, *mais pas de termes logarithmiques* puique nous n'effectuons pas d'intégration.

Montrons à présent que l'anomalie conforme vient uniquement du terme logarithmique présent dans l'intégrale sur X_{n+1}, ainsi nous aurons montré que l'intégrale sur le bord M_n peut être oubliée.

Tout d'abord écrivons le développement en puissance de ρ de $\sqrt{\det g} = \exp\left[\frac{1}{2}Tr\left(\ln g\right)\right]$ dans le cas particulier $n = 4$:

$$\begin{aligned} g &= g_{(0)} + \rho g_{(2)} + \rho^2 g_{(4)} + \rho^2 h_{(4)} \ln \rho + O(\rho^3) \\ &= g_{(0)}\left[I + \rho g_{(0)}^{-1}g_{(2)} + \rho^2 g_{(0)}^{-1}g_{(4)} + \rho^2 \ln \rho g_{(0)}^{-1}h_{(4)} + O(\rho^3)\right], \end{aligned} \tag{3.109}$$

$$\exp\left[\frac{1}{2}Tr\left(\ln g\right)\right]=\sqrt{\det g_{(0)}}\exp\left\{\frac{1}{2}\left[\begin{array}{c}\rho Tr\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right)\\+\rho^2 Tr\left(g_{(0)}^{-1}g_{(4)}-\frac{1}{2}\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right)^2\right)\\+\rho^2\ln\rho\underline{Tr\left(g_{(0)}^{-1}h_{(4)}\right)}+\rho^3\ldots\end{array}\right]\right\} \tag{3.110}$$

où le terme souligné est nul (cfr(3.74)). Donc

$$\exp\left[\frac{1}{2}Tr\left(\ln g\right)\right]=\sqrt{\det g_{(0)}}\left\{\begin{array}{c}1+\frac{1}{2}\rho Tr\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right)+\frac{1}{2}\rho^2\left(-\frac{1}{4}\right)Tr\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right)\\+\frac{1}{8}\rho^2\left[Tr\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right)\right]^2+O(\rho^3)\end{array}\right\} \tag{3.111}$$

où nous avons utilisé (3.75). Nous obtenons finalement

$$\sqrt{\det g}=\sqrt{\det g_{(0)}}\left[\begin{array}{c}1+\frac{\rho}{2}Tr\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right)\\+\frac{1}{8}\rho^2\left(\left[Tr\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right)\right]^2-Tr\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right)^2\right)\end{array}\right]+O(\rho^3). \tag{3.112}$$

De manière générale, pour n pair,

$$\sqrt{\det g}=\sqrt{\det g_{(0)}}\left[1+b_{(2)}\rho+b_{(4)}\rho^2+\ldots+b_{(n)}\rho^{n/2}\right]+O(\rho^{n/2+1}) \tag{3.113}$$

où les $b_{(2i)}$ sont des expressions covariantes ne contenant que des termes de la forme (3.77).

Maintenant.

$$\begin{aligned}\frac{n}{l}\int_{\varepsilon}d\rho\rho^{-\frac{n}{2}-1}\sqrt{\det g} &= \frac{n}{l}\int_{\varepsilon}d\rho\sqrt{\det g_{(0)}}\rho^{-\frac{n}{2}-1}\left[1+b_{(2)}\rho+b_{(4)}\rho^2+\ldots+b_{(n)}\rho^{n/2}\right]\\ &= \frac{n}{l}\int_{\varepsilon}d\rho\sqrt{\det g_{(0)}}\left[\rho^{-\frac{n}{2}-1}+b_{(2)}\rho^{-\frac{n}{2}}+b_{(4)}\rho^{-\frac{n}{2}+1}+\ldots+b_{(n)}\rho^{-1}\right]\\ &= \frac{n}{l}\sqrt{\det g_{(0)}}\left[\begin{array}{c}\frac{\rho^{-\frac{n}{2}}}{(-n/2)}+b_{(2)}\frac{\rho^{-\frac{n}{2}+1}}{(-\frac{n}{2}+1)}+\frac{\rho^{-\frac{n}{2}+2}}{(-\frac{n}{2}+2)}b_{(4)}\\+\ldots+b_{(n)}\ln\rho\end{array}\right]_{\rho=\varepsilon}\\ &= \frac{n}{l}\sqrt{\det g_{(0)}}\left[\begin{array}{c}\frac{\varepsilon^{-\frac{n}{2}}}{(-n/2)}+b_{(2)}\frac{\varepsilon^{-\frac{n}{2}+1}}{(-\frac{n}{2}+1)}+\frac{\varepsilon^{-\frac{n}{2}+2}}{(-\frac{n}{2}+2)}b_{(4)}\\+\ldots+b_{(n)}\ln\varepsilon\end{array}\right]\end{aligned} \tag{3.114}$$

et le Lagrangien devient donc, en y incorporant les coefficients venant de l'intégrale sur M_n :

$$\pounds = \frac{n}{l}\sqrt{\det g_{(0)}}\left[a_{(0)}\varepsilon^{-\frac{n}{2}} + a_{(2)}\varepsilon^{-\frac{n}{2}+1} + \varepsilon^{-\frac{n}{2}+2}a_{(4)} + \ldots + \varepsilon^{-1}a_{(n-2)} + b_{(n)}\ln\varepsilon\right] + \pounds_{fini}, \tag{3.115}$$

où les $a_{(2k)}$ ne contiennent que des termes de la forme (3.77) et où $\pounds_{fini}$ est fini lorsque ε tend vers zéro.

Tous les coefficients $a_{(2k)}$ sont covariants, de même que $b_{(n)}$, et peuvent être éliminés en ajoutant des contre-termes au Lagrangien initial. Le seul terme logarithmique provient de l'intégrale sur X_{n+1}. Si n était impair, nous n'aurions pas de terme logarithmique et le Lagrangien s'écrirait

$$\pounds = \sqrt{\det g_{(0)}}\left[a_{(0)}\varepsilon^{-\frac{n}{2}} + a_{(2)}\varepsilon^{-\frac{n}{2}+1} + \ldots + \varepsilon^{-\frac{3}{2}}a_{(n-3)} + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}a_{(n-1)}\right] + \pounds_{fini}. \tag{3.116}$$

Pour revenir au cas $n = 4$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{n}{l}\int_{\varepsilon} d\rho\rho^{-\frac{4}{2}-1}\sqrt{\det g} &= \frac{n}{l}\int_{\varepsilon} d\rho\sqrt{\det g_{(0)}}\left[\begin{array}{c} \rho^{-3} + \frac{\rho^{-2}}{2}Tr\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right) \\ +\frac{1}{8}\rho^{-1}\left(\begin{array}{c}\left[Tr\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right)\right]^2 \\ -Tr\left(\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right)^2\right)\end{array}\right)\end{array}\right] \\
&= \frac{n}{l}\sqrt{\det g_{(0)}}\left[\begin{array}{c} \frac{\rho^{-2}}{-2} + \frac{\rho^{-1}}{-1}\frac{1}{2}Tr\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right) \\ +\frac{1}{8}\ln\rho\left(\begin{array}{c}\left[Tr\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right)\right]^2 \\ -Tr\left(\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right)^2\right)\end{array}\right)\end{array}\right]_{\rho=\varepsilon} \\
&= \frac{n}{l}\sqrt{\det g_{(0)}}\left[\begin{array}{c} \frac{\varepsilon^{-2}}{-2} + \frac{\varepsilon^{-1}}{-1}\frac{1}{2}Tr\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right) \\ +\frac{1}{8}\ln\varepsilon\left(\begin{array}{c}\left[Tr\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right)\right]^2 \\ -Tr\left(\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right)^2\right)\end{array}\right)\end{array}\right]
\end{aligned} \tag{3.117}$$

et le Lagrangien renormalisé est

$$\pounds = \frac{n}{l}\sqrt{\det g_{(0)}}\left\{\begin{array}{c} a_{(0)}\varepsilon^{-2} + a_{(2)}\varepsilon^{-1} \\ +\frac{1}{8}\ln\varepsilon\left[\left(\left[Tr(g_{(0)}^{-1}g_{(2)})\right]^2\right) - Tr\left[\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right)^2\right]\right]\end{array}\right\} + \pounds_{fini}. \tag{3.118}$$

A présent que nous avons une expression finie pour le Lagrangien, à savoir $\pounds_{fini}$, nous nous retrouvons avec une action renormalisée

$$S_{adS_{n+1}} = \left(16\pi G_N^{(n+1)}\right)^{-1} \int d^n x \pounds_{fini} \tag{3.119}$$

et par la conjecture de correspondance,

$$\begin{aligned} W_{CFT}^{ren.}\left[g_{(0)}\right] &= -\ln Z_{CFT}^{ren.}\left[g_{(0)}\right] = -\ln\left[\exp\left(-S_{AdS}^{ren.}\left[\phi^{cl}\left(\phi^{(0)}\right)\right]\right)\right] \\ &= \left(16\pi G_N^{(n+1)}\right)^{-1} \int d^n x \pounds_{fini}. \end{aligned} \tag{3.120}$$

A présent changeons le représentant de la classe conforme et regardons comment notre fonctionnelle génératrice des fonctions de Green connexes se transforme par cette opération. Rappelons que si la théorie était réellement invariante conforme, $W_{CFT}^{ren.}$ ne dépendrait pas du choix du représentant $g_{(0)}$ dans la classe conforme et $\frac{\delta W_{CFT}^{ren.}}{\delta\sigma}$ serait nul.

Calculons pour cela la variation du Lagrangien sous le simple changement d'échelle de paramètre $\delta\sigma$ infinitésimal et constant:

$$\begin{aligned} \delta g_{(0)} &= 2\delta\sigma g_{(0)}, \\ \delta\varepsilon &= 2\delta\sigma\varepsilon. \end{aligned} \tag{3.121}$$

Les trois facteurs d'un terme de la forme $\sqrt{\det g_{(0)}}\varepsilon^{-\frac{n}{2}+k}a_{(2k)}$ se transforment respectivement comme

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{\det g_{(0)}} &= \frac{1}{2}\sqrt{\det g_{(0)}}Tr\left(g_{(0)}^{-1}2\delta\sigma g_{(0)}\right) \\ &= \sqrt{\det g_{(0)}}\delta\sigma n, \end{aligned} \tag{3.122}$$

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon^{-\frac{n}{2}+k} &= \left(-\frac{n}{2}+k\right)\varepsilon^{-\frac{n}{2}+k-1}2\delta\sigma\varepsilon \\ &= 2\left(-\frac{n}{2}+k\right)\varepsilon^{-\frac{n}{2}+k}\delta\sigma, \end{aligned} \tag{3.123}$$

$$\delta a_{(2k)} = -(2k)\delta\sigma a_{(2k)}, \tag{3.124}$$

où nous avons utilisé le fait que la transformation

$$g_{(0)} \rightarrow e^{2\delta\sigma} g_{(0)} \tag{3.125}$$

modifie le carré de l'élément de longueur

$$ds^2 \to e^{2\delta\sigma} g_{(0)} dx dx$$

et peut donc être vue comme ne modifiant pas la métrique mais comme une transformation sur les coordonnées

$$x \to e^{\delta\sigma} x$$

et donc, avec $\delta\sigma$ infinitésimal,

$$\delta x = \delta\sigma x. \tag{3.126}$$

De la sorte, des termes en dérivées 2k-ième de la métrique, où de manière générale de la forme (3.77), sont vus comme possédant $2k$ puissances de x au dénominateur, et donc leur variation sous la transformation (3.125) est donnée par (3.124) car

$$\begin{aligned} \delta x^{-2k} &= (-2k) x^{-2k-1} \delta x \\ &= (-2k) x^{-2k-1} x \delta\sigma \\ &= (-2k) x^{-2k}. \end{aligned} \tag{3.127}$$

Donc les termes en puissances négatives de ε se transforment sous (3.121) comme

$$\delta \left(\sqrt{\det g_{(0)}} \varepsilon^{-\frac{n}{2}+k} a_{(2k)} \right) = \delta\sigma \sqrt{\det g_{(0)}} \varepsilon^{-\frac{n}{2}+k} a_{(2k)} \left[n - n + 2k - 2k \right] = 0. \tag{3.128}$$

En remarquant que

$$\delta \left(\sqrt{\det g_{(0)}} b_{(n)} \right) = \delta\sigma \sqrt{\det g_{(0)}} b_{(n)} \left[n - n \right] = 0 \tag{3.129}$$

et que

$$\delta \ln \varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \delta\varepsilon = 2\delta\sigma \tag{3.130}$$

nous avons

$$\delta \left(\sqrt{\det g_{(0)}} \ln \varepsilon b_{(n)} \right) = 2\delta\sigma \sqrt{\det g_{(0)}} b_{(n)}. \tag{3.131}$$

Comme W_{CFT} non-renormalisé est invariant conforme par construction, le Lagrangien non renormalisé l'est aussi en vertu de la correspondance, donc la variation du Lagrangien fini $\pounds_{fini}$, c'est-à-dire la variation de $W^{ren.}_{CFT}$, doit compenser (3.131):

$$\begin{aligned}
\int_{M_n} d^n x \delta \pounds_{fini} &= -\int_{M_n} d^n x 2\frac{n}{l}\delta\sigma\sqrt{\det g_{(0)}}b_{(n)} \\
&\text{donc} \\
\left(16\pi G_N^{(n+1)}\right)^{-1}\int_{M_n} d^n x \delta \pounds_{fini} &= \delta W^{ren.}_{CFT} \quad \text{avec} \qquad (3.132)\\
\delta W^{ren.}_{CFT} &= (-)\int d^n x\sqrt{\det g_{(0)}}\delta\sigma A \qquad (3.133)
\end{aligned}$$

et donc l'anomalie conforme en dimension n paire, arbitraire, est donnée par

$$A = \left(16\pi G_N^{(d+1)}\right)^{-1} 2\frac{n}{l}b_{(n)} \tag{3.134}$$

où nous avons utilisé

$$A = \langle T_\rho{}^\rho\rangle^{ren.}[g_{\mu\nu}(x)] = -\frac{1}{\sqrt{g(x)}}\left|\frac{\delta W^{ren.}[\bar{g}_{\mu\nu}]}{\delta\sigma(x)}\right|_{\sigma=0}. \tag{3.135}$$

Si on écrit, comme dans [25]

$$A = (-2)\left(16\pi G_N^{(d+1)}\right)^{-1} a_{(n)} \tag{3.136}$$

alors

$$a_{(n)} = -\frac{n}{l}b_{(n)}. \tag{3.137}$$

Sur base d'arguments généraux cohomologiques ([27] et [28]), le coefficient $a_{(n)}$ qui apparaît dans l'anomalie doit être de la forme

$$a_{(n)} = nl^{n-1}(E_{(n)} + I_{(n)} + \nabla_i J^i_{(n-1)}), \tag{3.138}$$

où $E_{(n)}$ est proportionnel à la densité d'Euler en dimension n et $I_{(n)}$ est un invariant conforme. Les termes $\nabla_i J^i_{(n-1)}$, (où ∇_i est construit à partir de la métrique $g_{(0)}$) ne sont pas significatifs.

Dans le cas $n = 4$, nous avons

$$b_{(4)} = \frac{1}{8}\left(\left[Tr\left(g^{-1}_{(0)}g_{(2)}\right)\right]^2 - Tr\left(\left(g^{-1}_{(0)}g_{(2)}\right)^2\right)\right), \tag{3.139}$$

$$a_{(4)} = -\frac{4}{l}b_{(4)} = -\frac{1}{2l}\left(\left[Tr\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right)\right]^2 - Tr\left(\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right)^2\right)\right), \tag{3.140}$$

et donc

$$A = \frac{1}{l}\left(16\pi G_N^{(5)}\right)^{-1}\left(\left[Tr\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right)\right]^2 - Tr\left[\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right)^2\right]\right). \tag{3.141}$$

Dans le cas $n = 2$, nous avons, avec (3.83) :

$$b_{(2)} = \frac{1}{2}Tr\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right), \tag{3.142}$$

$$a_{(2)} = -\frac{2}{l}b_{(2)} = -\frac{1}{l}Tr\left(g_{(0)}^{-1}g_{(2)}\right) = \frac{l}{2}R, \tag{3.143}$$

et ici

$$E_{(2)} = \frac{R}{4}, \qquad I_{(2)} = 0, \qquad J_{(1)}^i = 0. \tag{3.144}$$

L'anomalie en dimension 2 est alors

$$A = -\left(16\pi G_N^{(3)}\right)^{-1} lR\left(g_{(0)}\right). \tag{3.145}$$

En dimension quatre, les relations (3.64) et (3.81) nous permettent d'évaluer l'expression de $a_{(4)}$ (3.140) :

$$a_{(4)} = -l^3\left(-\frac{1}{8}R^{ij}R_{ij} + \frac{1}{24}R^2\right) \tag{3.146}$$

et

$$\begin{aligned} E_{(4)} &= -\frac{1}{64}(R^{ijkl}R_{ijkl} - 4R^{ij}R_{ij} + R^2), \\ I_{(4)} &= \frac{1}{64}(R^{ijkl}R_{ijkl} - 2R^{ij}R_{ij} + \frac{1}{3}R^2), \qquad J_{(3)}^i = 0. \end{aligned} \tag{3.147}$$

Le fait de pouvoir effectivement décomposer $a_{(n)}$ comme en (3.138) confirme la validité des résultats obtenus.

Des arguments directs que nous ne pouvons donner dans le cadre de ce travail montrent que l'anomalie calculée ici donne bien l'anomalie d'une théorie conforme avec n_s champs scalaires, n_f champs fermioniques et n_v champs vectoriels (voir [25]).

Chapitre 4

Conclusions

Nous avons calculé l'anomalie conforme du champ scalaire réel en dimensions $n = 2$ et 4 par la méthode "traditionnelle" de DeWitt-Schwinger et via la correspondance AdS/CFT qui a été proposée récemment par Maldacena. Cette dernière méthode se révèle très puissante car des résultats exacts et généraux sont dérivés plus simplement. Cette méthode donne un algorithme simple pour calculer l'anomalie conforme dans une dimension paire arbitraire. L'anomalie en dimension $n = 6$ a d'ailleurs été dérivée dans [25]. La conjecture de Maldacena nous rend donc capables de calculer l'anomalie en dimension $n = 10$, par exemple, résultat qui serait utile en théorie de cordes. Nous avions parlé au chapitre 2 de l'utilisation du calcul symbolique par ordinateur pour le calcul des coefficients $a_{(n)}$ à partir de $n = 4$, déjà (voir section 2.3). Ici, le besoin du calcul symbolique se fait ressentir seulement à partir de la dimension 6, pour décomposer $a_{(n)}$ comme en (3.138). Cette correspondance AdS/CFT est encore très spéculative mais tout porte à croire qu'elle cache quelque chose de plus profond qu'une conjecture et qu'une meilleure compréhension permettrait de résoudre des problèmes encore mal définis, pas seulement en théorie de cordes.

Bibliographie

[1] S. M. Christensen and S. A. Fulling, *Trace anomalies and the Hawking Effect*, Phys. Rev. **D15** (1977) 2088.

[2] C. M. Massacand and C. Schmidt, *Particle Production by Tidal Forces and the Trace Anomaly*, ETH-TH (1992-1993).

[3] B. S. DeWitt, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime*, Phys. Rep., **19C** (1975) 297.

[4] Schwinger, J. (1951), Phys. Rev., **82**, 664.

[5] Cours donnés aux Houches pendant la session de 1963 de l'école d'été de physique théorique à l'université de Grenoble. *Relativity, Groups and Topology*, Edited by DeWitt and DeWitt, Gordon and Breach Science Publishers.

[6] N.D. Birrel, P.C.W. Davis, *Quantum fields in curved space*, Cambridge University Press, 1982.

[7] Chern, S. S. (1962) *J. Soc. Indust. Appl. Math.*. **10**, 751.

[8] M. J. Duff, *Twenty years of the Weyl anomaly*. Class. Quant. Grav. **11** (1994) 1387, hep-th/9308075.

[9] J. S. Dowker and R. Critchley, *The Stress-tensor Conformal Anomaly for Scalar and Spinor Fields*, Phys. Rev. **D16** (1977) 3390.

[10] Christensen, S.M. & Duff, M.J., *Quantum Gravity in* $2+\varepsilon$ *Dimensions*, Phys. Lett. **B79** (1978) 213.

[11] L. S. Brown and J. P. Cassidy, *Stress Tensor Trace Anomaly in a Gravitational Metric: General Theory, Maxwell Field*, Phys. Rev. **D15** (1977) 2810.

[12] Christensen, S.M. & Duff, M.J.(1978) Phys. Lett., **76B**, 571.

[13] L. Bonora, P. Cotta-Ramusino and C. Reina, *Conformal Anomaly and Cohomology*, Phys. Lett. **B126** (1983) 305.

[14] Duff, M.J. (1977), Nucl. Phys., **B125**, 334.

[15] *Quantum Field Théory and Quantum Statistics, Essays in honour of the sixtieth birthday of E.S. Fradkin*, tome II, p 165, Adam Hilger, 1987.

[16] J.M. Maldacena, *The large N limit of super conformal Field Theories and Super-gravity*, hep-th/9711200.

[17] E. Witten, *Anti-de Sitter space and holography*, hep-th/9802150.

[18] S.S. Gubser, I. R. Klebakov and A. M. Poliakov, *Gauge Theory Correlators from Non-Critical String Theory*, hep-th/9802109.

[19] R. Penrose and W. Rindler, Spinors and Spacetime, vol. 2, chap. 9, Cambridge University Press, 1986.

[20] C.R. Graham and J.M. Lee, *Einstein Metrics with Prescibed Conformal infinity on the Ball*, Adv. Math. 87 (1991) 186.

[21] G.W. Gibbons and S.W. Hawking, *Action integrals and partition fonctions in quantum gravity*, Phys. Rev. **D15** (1977) 2752.

[22] H. Liu and A.A. Tseytlin, *D=4 Super Yang-Mills, D=5 gauged supergravity, and D=4 conformal supergravity*, hep-th/9804083.

[23] E. Witten, *Conformal anomaly of submanifold observables in* AdS/CFT *correspondence*, hep-th/9901021.

[24] C. Fefferman and C.R. Graham, *Conformal Invariants*, Elie Cartan et les Mathématiques d'Aujourd'hui, (Astérisque, 1985) 95.

[25] M. Henningson and K. Skenderis, *The Holographic Weyl Anomaly*, hep-th/9806087.

[26] Misner, C. W., Thorne, K. S. and Wheeler, J. A. (1973), *Gravitation*, Freeman, San Fransisco.

[27] S Deser and A. Schwimmer. *Geometric Classification of conformal Anomalies in Arbitrary Dimensions*, Phys. Lett. **B309** (1993) 279, hep-th/9302047.

[28] L. Bonora, P. Pasti and M. Bregola, *Weyl Cocycles*, Class. Quant. Grav. **3** (1986) 635.

[29] Eisenhart, L. P. (1926), *Riemannian geometry*, Princeton University Press.