

Application des nombres complexes à l'étude des circuits électriques à courants alternatifs

Exposé à destination du secondaire



Dr D. Wattiaux

Université de Mons – Faculté Polytechnique



16 00 2021



Dr. David Wattiaux

✉ david.wattiaux@umons.ac.be

☎ 065/37.40.99

- Licencié en Sciences Physiques
- Docteur en Sciences de l'Ingénieur

Assistant au sein de la cellule de Pédagogie Universitaire de la Faculté Polytechnique de Mons.

Principales matières enseignées :

- La Mécanique Rationnelle
- La Géométrie et l'Infographie

- Rappels de base sur les circuits ohmiques à courant continu
- Etude du circuit RC en tension alternative
- Etude du circuit RL en tension alternative
- Etude du circuit RLC en tension alternative
- Filtres analogiques passifs

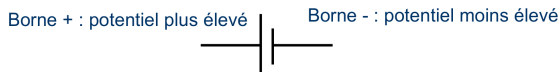


[Lien vers la plateforme Wooclap](#)

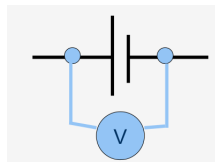
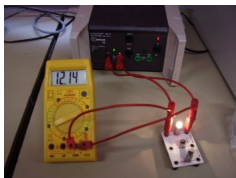
Générateur de tension

Un **générateur** de tension est un dispositif capable de produire de l'énergie **électrique** à partir d'une autre forme d'énergie : chimique, thermique, mécanique, ... Un **générateur** de tension permet de générer aux bornes d'un circuit électrique une différence de potentiel électrique (appelée couramment tension électrique) de manière **continue** ou **alternative**.

Dans un schéma électrique, un générateur est symbolisé par

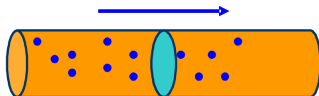


La différence de potentiel entre les bornes d'un générateur se mesure grâce à un **voltmètre**.



Courant électrique : définition

Une différence de potentiel génère un déplacement de charges : un courant électrique, dit **continu** si son sens ne change pas ou **alternatif** si le sens du courant change au cours du temps.



En pratique, le courant est majoritairement lié à un déplacement d'électrons dans un conducteur, même si d'autres formes peuvent exister (électrolytes).

L'intensité I d'un courant électrique est le rapport entre la variation de charge ΔQ qui passe à travers la section d'un conducteur et la durée Δt de ce passage.

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad \leftrightarrow$$

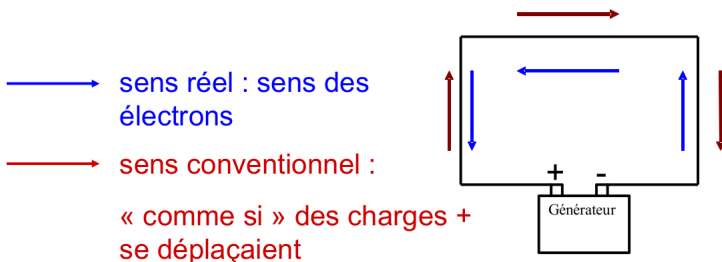
$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$$

Unité S.I : Ampère (A) $\rightarrow 1\text{A} = 1\text{C}/1\text{s}$

Sens conventionnel du courant

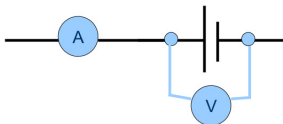
Dans les conducteurs solides, le courant électrique correspond au déplacement d'électrons.

Par **convention** (et pour des raisons historiques), on admet que le sens du courant électrique part du pôle positif (potentiel le plus élevé) du générateur et revient au pôle négatif (potentiel le moins élevé).



Mesure du courant

Une intensité de courant peut se mesurer grâce à un **ampèremètre**

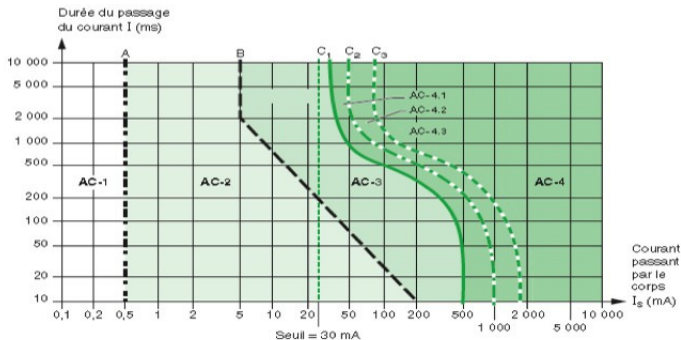


Exemples de courants :

- 10 A : bouilloire électrique de 2300 W en 230 V
- 500 A : batterie automobile



Effet du courant sur le corps humain



Zone AC-1 : Perception

Zone AC-2 : Contractions musculaires involontaires

Zone AC-3 : Difficultés de respiration

Zone AC-4 : Effets pathophysiologiques graves

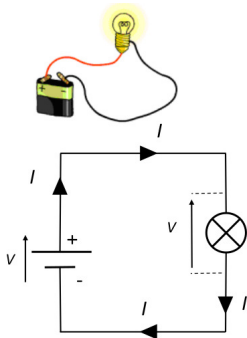
AC-4.1 : risque de fibrillation ventriculaire jusqu'à 5 %

AC-4.2 : risque de fibrillation ventriculaire jusqu'à 50 %

AC-4.3 : risque de fibrillation ventriculaire supérieur à 50 %

Circuit électrique élémentaire en tension continue

Le circuit électrique le plus simple est constitué d'un **générateur de tension** (une pile) et d'une **résistance** électrique (par exemple une ampoule).



Dans ce circuit élémentaire, le **générateur de tension** génère une tension V (exprimée en Volt [V]), et le circuit est parcouru par un courant électrique d'intensité I (exprimé en Ampère [A]).

- **loi des mailles**

$$V = V_R$$

où V_R représente la tension aux bornes de la résistance électrique.

- **loi d'Ohm**

$$V_R = RI$$

où R représente la valeur de la résistance électrique (exprimée en Ohm [Ω])

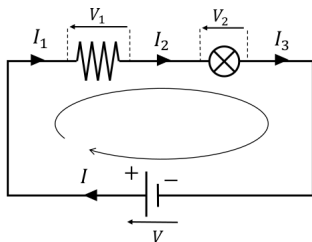
Application numérique

Si $R = 100 \, \Omega$ et $V = 5 \, \text{V}$, alors $I = 50 \, \text{mA}$

$\Rightarrow V = RI$

Lois de Kirchhoff

- 1 **Conservation de l'énergie** : la somme des différences de potentiel le long de tout chemin fermé est nulle.
- 2 **Conservation de la charge** : En tout point d'un circuit, le courant entrant doit être égal au courant sortant.



- 1 **Conservation de l'énergie**

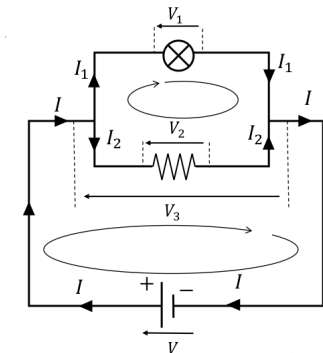
$$V - V_1 - V_2 = 0 \rightarrow V = V_1 + V_2$$

- 2 **Conservation de la charge**

$$I = I_1 = I_2 = I_3$$

Lois de Kirchhoff (suite)

- 1 **Conservation de l'énergie** : la somme des différences de potentiel le long de tout chemin fermé est nulle.
- 2 **Conservation de la charge** : En tout point d'un circuit, le courant entrant doit être égal au courant sortant.



- 1 **Conservation de l'énergie**

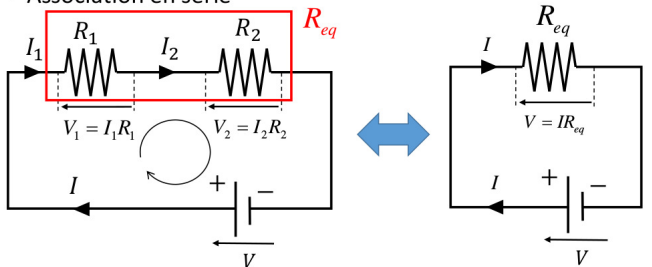
$$V = V_1 = V_2 = V_3$$

- 2 **Conservation de la charge**

$$I = I_1 + I_2$$

Association de résistances (en série)

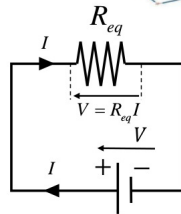
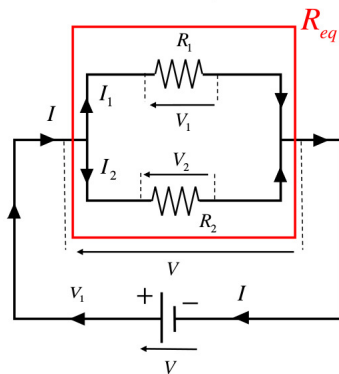
- Association en série



$$\left. \begin{array}{l} I = I_1 = I_2 \\ V = V_1 + V_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} V = I_1 R_1 + I_2 R_2 \\ = I R_1 + I R_2 \\ = I (R_1 + R_2) = I R_{eq} \end{array} \Rightarrow R_{eq} = R_1 + R_2$$

Association de résistances (en parallèle)

- Association en parallèle



$$\left. \begin{array}{l} I = I_1 + I_2 \\ V = V_1 = V_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} I = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} \\ = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = \frac{V}{R_{eq}} \end{array} \right\}$$



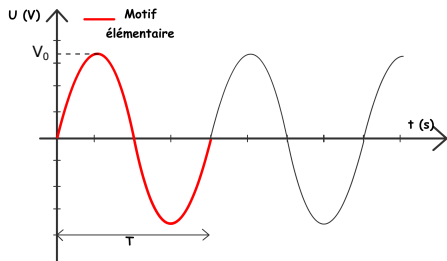
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



Tension alternative sinusoïdale

Une tension **alternative sinusoïdale** est une tension dont l'évolution au cours du temps est décrite par une fonction **sinusoïdale**.

$$V(t) = V_0 \sin(\omega t)$$



Cette tension **alternative** est caractérisée par :

- V_0 qui représente la tension maximale ;
- T qui représente la période et correspond à la durée d'un motif élémentaire ;
- ω qui représente la pulsation du phénomène périodique.

Lien entre la période, la pulsation et la fréquence

Le lien entre la période T et la pulsation ω est donné par :

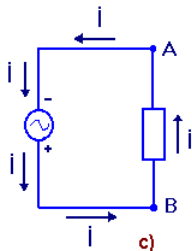
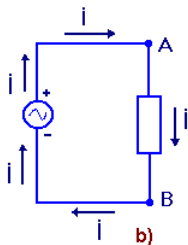
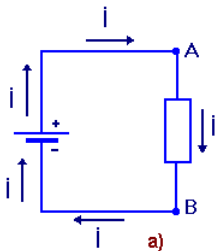
$$V(t + T) = V(t) \leftrightarrow V_0 \sin[\omega(t + T)] = V_0 \sin(\omega t) \leftrightarrow \omega T = 2\pi \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

On peut aussi définir la **fréquence** f du phénomène périodique qui représente le nombre d'oscillation qui se produit par unité de temps :

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

Grandeur	Unités
T	[s]
f	[Hz] S.I. : [s] ⁻¹
ω	[rad/s]

Circuit électrique élémentaire en tension alternative

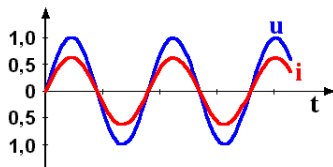


Loi d'Ohm : $V(t) = RI(t)$

Si $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$, alors :

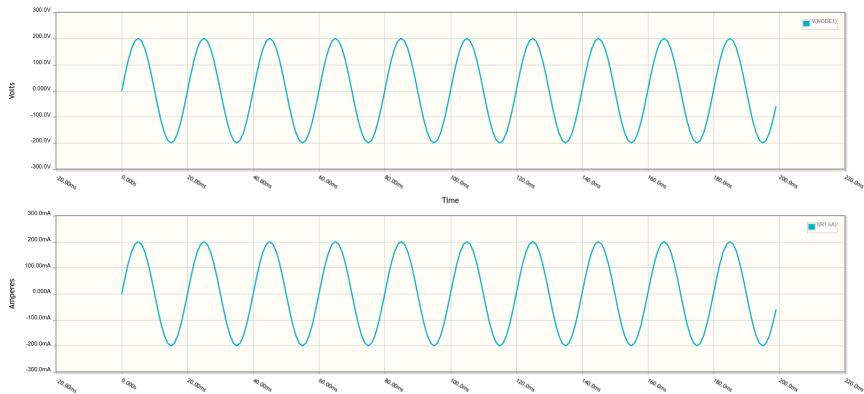
$$I(t) = \frac{V_0}{R} \sin(\omega t)$$

$$I_0 = \frac{V_0}{R}$$



Modèle numérique sur : [Circuit Lab](#)

Circuit R : Résultats de la simulation numérique



Le courant est en **phase** avec la tension !

Les Condensateurs



Le **condensateur** est un composant électronique élémentaire, constitué de deux plaques conductrices, appelées armatures, et séparées par un isolant électrique. Le rôle des condensateurs est de **stocker des charges électriques** opposées sur ses armatures. L'isolant empêche le courant de circuler entre les armatures. Les charges positives s'accumulent sur une armature, alors que les charges négatives s'accumulent sur l'autre.

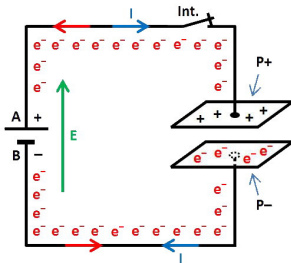
Conservation de la charge électrique :

$$|Q^+| = |Q^-| = Q$$

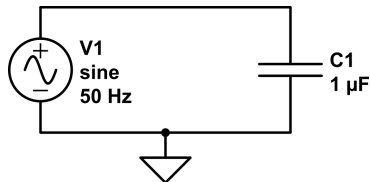
Loi des condensateurs :

$$Q = C V$$

où C représente la capacité du condensateur (exprimée en Farad [F]).



Circuit constitué uniquement d'un condensateur



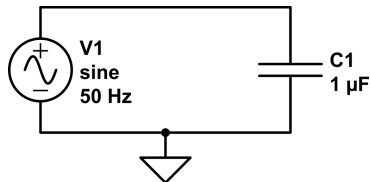
- Loi des mailles

$$V_C = V \leftrightarrow \frac{Q}{C} = V_O \sin(\omega t)$$

- Expression du courant $I(t)$

$$I(t) = I_O \sin(\omega + \phi)$$

Circuit constitué uniquement d'un condensateur



- Loi des mailles

$$V_C = V \leftrightarrow \frac{Q}{C} = V_O \sin(\omega t)$$

- Expression du courant $I(t)$

$$I(t) = I_O \sin(\omega + \phi)$$

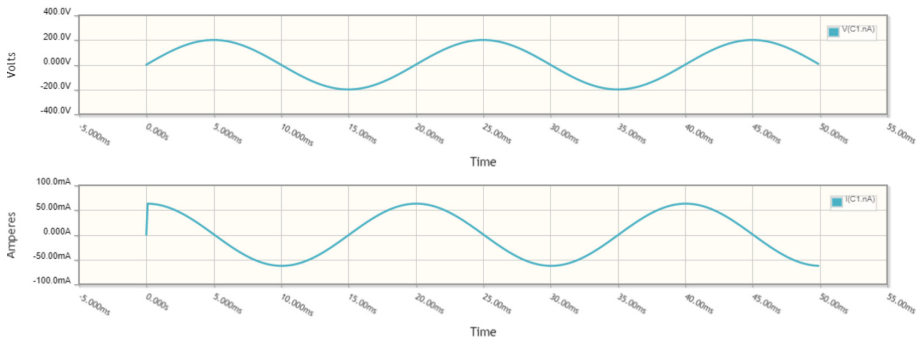
- Expression de la charge $Q(t)$

$$Q(t) = -\frac{I_O}{\omega} \cos(\omega + \phi)$$

$$\begin{cases} \frac{I_O}{c\omega} \sin \phi = V_0 \\ -\frac{I_O}{c\omega} \cos \phi = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} I_O = c\omega V_0 \\ \phi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

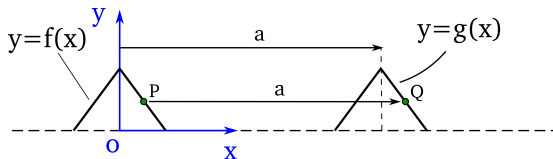
Circuit constitué uniquement d'un condensateur –

Résultats numériques



Manipulation de graphe – Translation

Soit les graphes de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$: le graphe de la fonction $g(x)$ est obtenu à partir de celui de $f(x)$ par une translation d'une quantité a selon l'axe x .



Soit le point P appartenant au graphe de la fonction $f(x)$ et le point Q appartenant au graphe de la fonction $g(x)$:

$$\begin{cases} y_P = f(x_P) \\ y_Q = g(x_Q) \end{cases} \quad \text{avec} \quad y_P = y_Q \quad \text{et} \quad x_Q = x_P + a$$

On peut écrire :

$$g(x_Q) = f(x_P) \rightarrow g(x_Q) = f(x_Q - a) \leftrightarrow \boxed{g(x) = f(x - a)}$$

Notion de déphasage

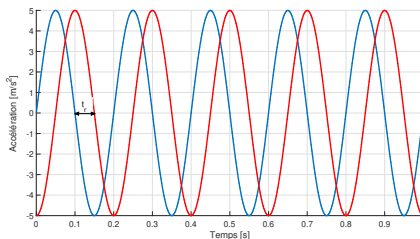
Considérons une vibration sinusoïdale $x_2(t)$ (courbe rouge) qui est décalée dans le temps d'une quantité t_r par rapport à une vibration de référence $x_1(t)$ (courbe bleue). L'expression mathématique de cette vibration sera de la forme :

$$x_2(t) = x_1(t - t_r) = A \sin [\omega (t - t_r)] = A \sin (\omega t - \omega t_r)$$

$$\rightarrow \boxed{x_2(t) = A \sin (\omega t - \Phi)}$$

où Φ représente le déphasage :

$$\boxed{\Phi = \omega t_r}$$



Nombres complexes : petit résumé

- Un nombre complexe est un nombre qui peut s'écrire sous la forme :

$$z = x + i y \text{ avec } x, y \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1$$

Le réel x représente la partie **réelle** de Z et le réel y représente sa partie **imaginaire**.

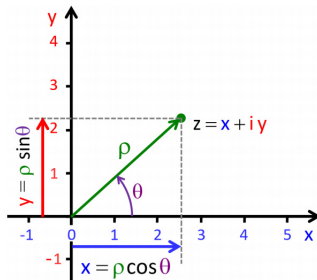
- Module du nombre complexe z

$$|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Argument du nombre complexe z

$$\arg z = \theta \Leftrightarrow \tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

Plan de Gauss



formulation polaire

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta \\ &= \rho (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= \rho \operatorname{cis}(\theta) \end{aligned}$$

Méthode des substituts complexes

- Substituts complexes

$$\begin{cases} V(t) = V_O \sin(\omega t + 0) & \leftrightarrow \underline{V} = V_O \text{cis}(0) = V_O \\ I(t) = I_O \sin(\omega t + \phi) & \leftrightarrow \underline{I} = I_O \text{cis}(\phi) \end{cases}$$

- Loi d'Ohm Complexe – notion d'impédance

$$\underline{V} = \underline{Z} \underline{I}$$

où $\underline{Z}$ représente l'impédance du circuit électrique.

Circuit R

loi des mailles : $R I(t) = V(t)$

$$\begin{cases} \underline{V} = V_O \text{cis}(0) = V_O \\ \underline{I} = I_O \text{cis}(0) = I_O \\ I_O = \frac{V_O}{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{Z}_R = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} = R$$

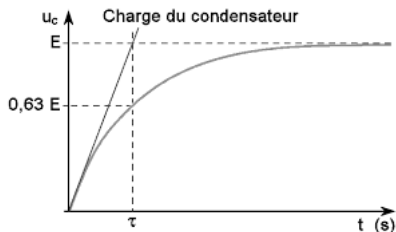
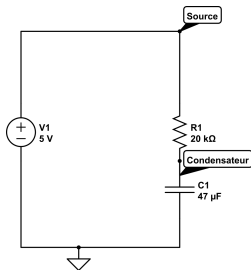
Circuit C

loi des mailles : $\frac{Q}{C} = V(t)$

$$\begin{cases} \underline{V} = V_O \text{cis}(0) = V_O \\ \underline{I} = I_O \text{cis}(\pi/2) = i I_O \\ I_O = c\omega V_O \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{Z}_C = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} = \frac{1}{ic\omega} = -\frac{i}{c\omega}$$

Circuit RC – Charge d'un condensateur



- Loi des mailles

$$V = RI(t) + \frac{Q(t)}{C} \leftrightarrow V = R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C}$$

- Solution de la forme

$$I(t) = I_0 e^{-\lambda t}$$

$$Q(t) = A - \frac{I_0}{\lambda} e^{-\lambda t} \text{ car } I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$$

- Solution mathématique

$$V_c(t) = \frac{Q(t)}{C} = V \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

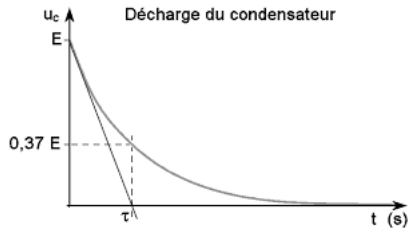
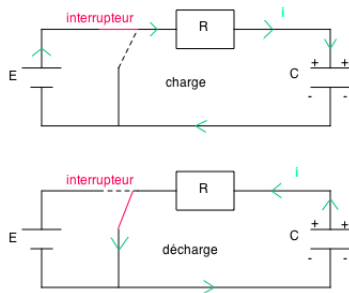
$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec τ la constante de temps :

$$\tau = RC$$

Modèle numérique sur : [Circuit Lab](#)

Circuit RC – Décharge d'un condensateur



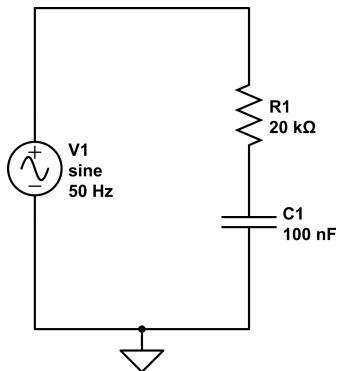
$$V_c(t) = \frac{Q_0}{C} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$I(t) = -\frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec τ la constante de temps :

$$\tau = RC$$

Circuit RC à courant alternatif



- loi des mailles

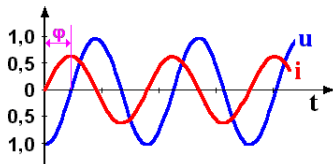
$$\begin{aligned} V &= RI(t) + \frac{Q(t)}{C} \\ &= R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} \end{aligned}$$

- Expression de la tension

$$V(t) = V_O \sin(\omega t)$$

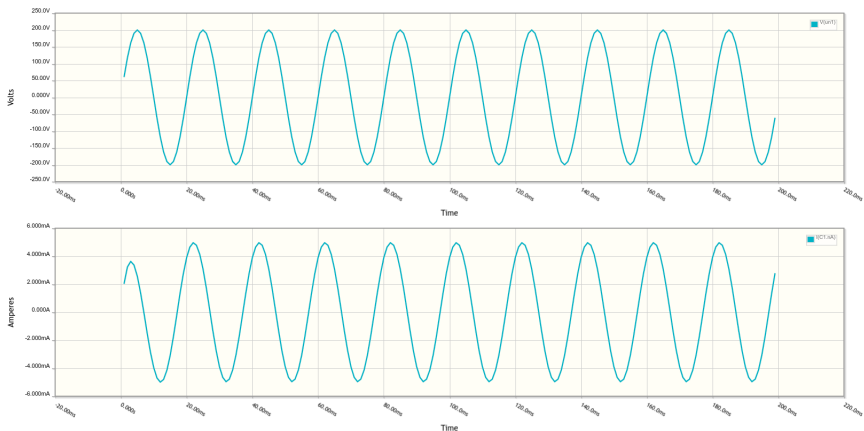
- Expression du courant

$$I(t) = I_O \sin(\omega t + \phi)$$



Modèle numérique sur : [Circuit Lab](#)

Circuit RC à courant alternatif : résultats de la simulation numérique



$\Delta t = 84.97 - 81.72 = 3.25 \text{ ms} \Rightarrow \phi = \omega \Delta t \approx 58^\circ \rightarrow$ Le courant est en **avance** sur la tension !
 $V_O = 200 \text{ Volts}$ et $I_O = 5.316 \text{ mA}$

Circuit RC : développements mathématiques

- Expressions générales de $I(t)$ et $Q(t)$

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \phi)$$

$$Q(t) = -\frac{I_0}{\omega} \cos(\omega t + \phi) \quad \text{car} \quad I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$$

- loi des mailles

$$RI(t) + \frac{Q(t)}{C} = V_0 \sin(\omega t) \leftrightarrow RI_0 \sin(\omega t + \phi) - \frac{I_0}{C\omega} \cos(\omega t + \phi) = V_0 \sin(\omega t)$$

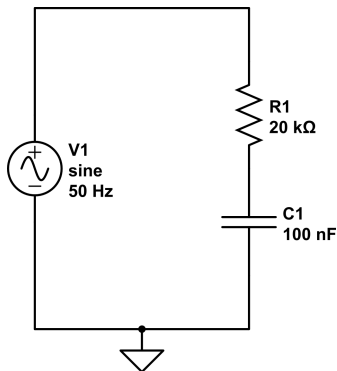
$$\begin{cases} RI_0 \cos \phi + \frac{I_0}{C\omega} \sin \phi = V_0 \\ R \sin \phi - \frac{1}{C\omega} \cos \phi = 0 \end{cases} \quad \text{Formules d'addition (trigonométrie)}$$

$$\tan \phi = \frac{1}{RC\omega}$$

et

$$V_0 = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} I_0$$

Impédance d'un circuit RC en série



$$|I| = I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{c\omega}\right)^2}}$$

- Impédance du circuit électrique

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \underline{Z}_R + \underline{Z}_C \\ &= R - \frac{j}{c\omega}\end{aligned}$$

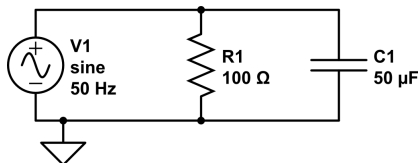
- Calcul de $\underline{I}$

$$\begin{aligned}\underline{I} &= \frac{\underline{V}}{\underline{Z}} \\ &= \frac{V_0}{R - \frac{j}{c\omega}} \\ &= V_0 \frac{R + \frac{j}{c\omega}}{R^2 + \left(\frac{1}{c\omega}\right)^2}\end{aligned}$$

et

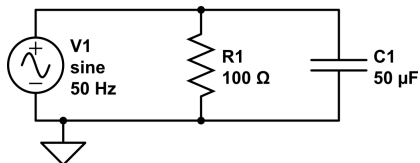
$$\tan \phi = \frac{1}{RC\omega}$$

Impédance d'un circuit RC en parallèle



Que vaut l'amplitude I_0 du courant circulant dans le circuit électrique (si $V_0 = 200$ V) ?

Impédance d'un circuit RC en parallèle



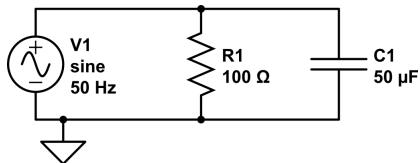
Que vaut l'amplitude I_0 du courant circulant dans le circuit électrique (si $V_0 = 200$ V) ?

$$\begin{aligned}\frac{1}{\underline{Z}} &= \frac{1}{R} + iC\omega \\ &= \frac{1 + iRC\omega}{R}\end{aligned}$$

$$\rightarrow \underline{Z} = \frac{R}{1 + iRC\omega} = \frac{R(1 - iRC\omega)}{1 + (RC\omega)^2}$$

$$|\underline{Z}| = \frac{R}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \text{ et } \tan \phi = -RC\omega \rightarrow |\underline{Z}| \approx 54 \, \Omega \text{ et } I_0 \approx 3.72 \, \text{A} \text{ et } \phi \approx 57^\circ$$

Impédance d'un circuit RC en parallèle



Que vaut l'intensité du courant qui traverse la résistance R et le condensateur C ?

- Résistance

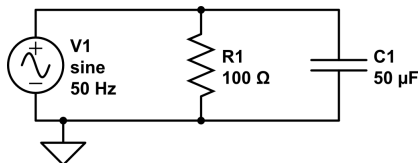
$$I_R = \frac{200 \text{ V}}{100 \Omega} = 2 \text{ A}$$

- Condensateur

$$I_C = 200 \text{ V} \times (50 \mu\text{F} \times 314.16 \text{ rad/s}) = 3.14 \text{ A}$$

Remarque : $I_0 \neq I_R + I_C$

Impédance d'un circuit RC en parallèle



Loi des mailles

$$V_R(t) = V(t) \leftrightarrow \underline{V}_R = \underline{V}$$

$$V_C(t) = V(t) \leftrightarrow \underline{V}_C = \underline{V}$$

Loi d'Ohm

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}_R} = \frac{V_0}{R}$$

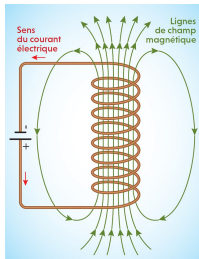
$$\underline{I}_C = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}_C} = iC\omega V_0$$

Loi des noeuds

$$\underline{I}(t) = \underline{I}_R(t) + \underline{I}_C(t) \leftrightarrow \underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_C$$

$$\Rightarrow \underline{I} = \frac{V_0}{R} + iC\omega V_0 \rightarrow \boxed{|\underline{I}| = V_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + (C\omega)^2}}$$

Les bobines – notion d'inductance



Le champ d'induction magnétique B à l'intérieur de la bobine est égal à

$$B = \frac{\mu N I}{l}$$

où N représente le nombre de spires, l la longueur de la bobine, I le courant circulant dans la bobine et μ représente la perméabilité magnétique du noyau ferromagnétique (dans l'air $\mu = 4\pi 10^{-7} \text{ Tm/A}$).

Une **bobine** ou **solénoïde** est un composant électronique élémentaire constitué d'un enroulement de fil conducteur autour d'un noyau en matériau ferromagnétique.

Le flux d'induction magnétique, noté Φ est une grandeur physique qui caractérise l'intensité et la répartition spatiale du champ magnétique B . Pour une bobine, le flux magnétique Φ est égal à

$$\Phi = NBS$$

où S désigne la section d'une spire.

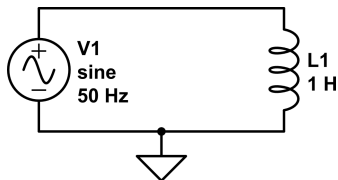
L'**inductance** L de la bobine (exprimée en Henry [H]) est définie comme le rapport entre le flux Φ et le courant I et est exprimée :

$$\Phi = LI$$

Loi de Lenz-Faraday :

$$V_L = \frac{d\Phi(t)}{dt} \leftrightarrow V_L = L \frac{dI(t)}{dt}$$

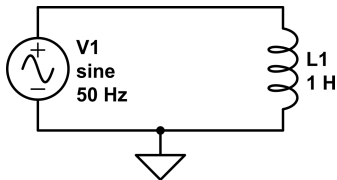
Impédance d'un circuit constitué uniquement d'une inductance



- Loi des mailles

$$V_L = V \leftrightarrow L \frac{dI}{dt} = V_O \sin(\omega t)$$

Impédance d'un circuit constitué uniquement d'une inductance



- Loi des mailles

$$V_L = V \leftrightarrow L \frac{dI}{dt} = V_O \sin(\omega t)$$

- Expression du courant $I(t)$

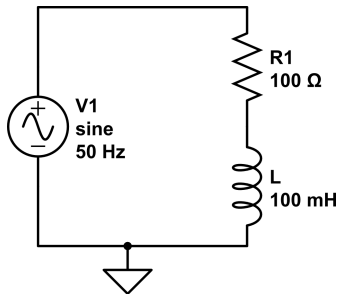
$$I(t) = I_O \sin(\omega + \phi)$$

$$\begin{cases} -LI_O\omega \sin \phi = V_O \\ LI_O\omega \cos \phi = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} I_O = \frac{V_O}{L\omega} \\ \phi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Substituts complexes

$$\begin{cases} \underline{V}_0 = V_0 \\ \underline{I}_0 = -iI_0 \end{cases} \Rightarrow \underline{V}_0 = Z_L \underline{I}_0 \leftrightarrow \boxed{Z_L = iL\omega}$$

Circuit RL à courant alternatif

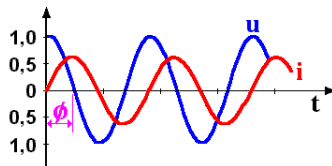


- Expression de la tension

$$V(t) = V_O \sin(\omega t)$$

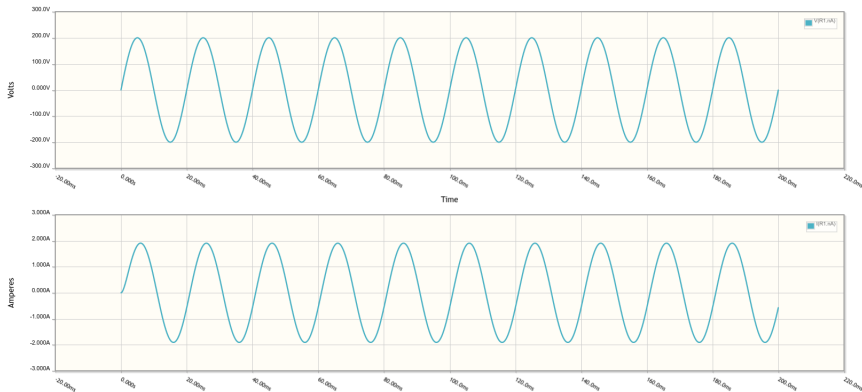
- Expression du courant

$$I(t) = I_O \sin(\omega t + \phi)$$



Modèle numérique sur : [Circuit Lab](#)

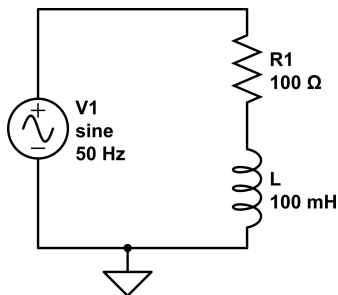
Circuit RL à courant alternatif : résultats de la simulation numérique



$\Delta t = 6.00 - 5.020 = 0.98 \text{ ms} \Rightarrow \phi = \omega \Delta t \approx 17^\circ \rightarrow$ Le courant est en **retard** par rapport à la tension !

$V_0 = 200 \text{ Volts}$ et $I_0 = 1.9 \text{ A}$

Impédance d'un circuit RL en série



- Impédance du circuit électrique

$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L \\ = R + i L \omega$$

- Calcul de $\underline{I}$

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}} \\ = \frac{V_0}{R + i L \omega} \\ = V_0 \frac{R - i L \omega}{R^2 + (L \omega)^2}$$

$$|\underline{I}| = I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (L \omega)^2}}$$

et

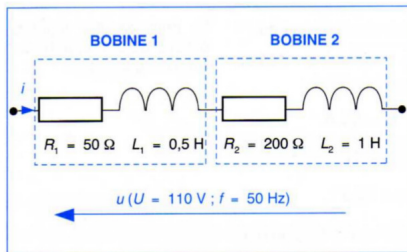
$$\tan \phi = -\frac{L \omega}{R}$$

Un peu de pratique. . .

Dans le montage de la figure ci-dessous, deux bobines sont placées en série.

On demande de déterminer, pour une fréquence de 50 Hz :

- 1 l'impédance de chaque bobine ;
- 2 l'impédance totale du circuit ;
- 3 le courant circulant dans les bobines lorsqu'on applique au groupement une tension alternative de 110 V

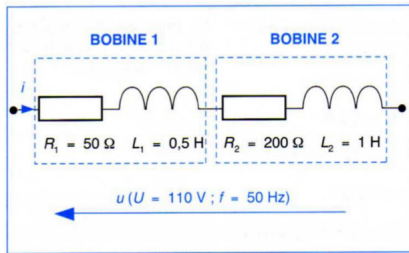


Un peu de pratique. . .

Dans le montage de la figure ci-dessous, deux bobines sont placées en série.

On demande de déterminer, pour une fréquence de 50 Hz :

- 1 l'impédance de chaque bobine ;
- 2 l'impédance totale du circuit ;
- 3 le courant circulant dans les bobines lorsqu'on applique au groupement une tension alternative de 110 V



Réponses finales

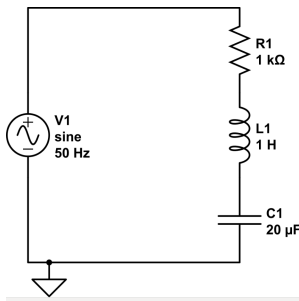
$$|Z_1| = 164.8 \Omega$$

$$|Z_2| = 372.4 \Omega$$

$$|Z_{total}| = 533.4 \Omega$$

$$|I_0| = 0.2 \text{ A}$$

Impédance d'un circuit RLC en série



Modèle numérique sur : [Circuit Lab](#)

- Impédance du circuit électrique

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C \\ &= R + i \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \\ &= R + i (X_L - X_C)\end{aligned}$$

- Notion de réactance

Réactance = partie imaginaire de l'impédance :

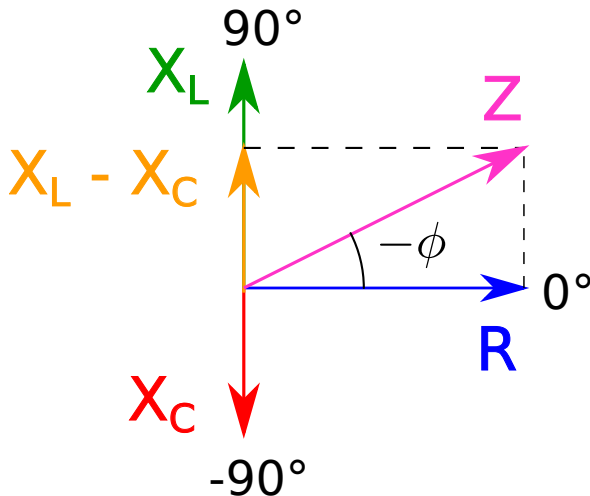
- Réactance inductive X_L : $X_L = L\omega$
- Réactance capacitive X_C : $X_C = \frac{1}{C\omega}$

$$|I| = I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

et

$$\tan \phi = -\frac{(X_L - X_C)}{R}$$

Impédance – Représentation de Fresnel



Un peu de pratique. . .

Une bobine d'inductance $0,1 \text{ H}$ et de résistance 20Ω est utilisée sous une tension V_0 de fréquence 50 Hz . Un condensateur est placé en série avec cette bobine.

On demande de déterminer la capacité C pour que le courant dans le groupement soit en phase avec la tension.

Un peu de pratique. . .

Une bobine d'inductance $0,1 \text{ H}$ et de résistance 20Ω est utilisée sous une tension V_0 de fréquence 50 Hz . Un condensateur est placé en série avec cette bobine.

On demande de déterminer la capacité C pour que le courant dans le groupement soit en phase avec la tension.

Réponse finale

$$C \approx 100 \mu\text{F}$$

Un peu de pratique. . .

Une résistance $R = 1\text{ k}\Omega$, une inductance pure $L = 0,5\text{ H}$ et un condensateur de capacité C sont branchés en **parallèle**. L'ensemble est alimenté par une tension alternative de 230 V et de fréquence 50 Hz .

On demande de déterminer la valeur de C pour que le courant traversant le circuit soit en phase avec la tension a ses bornes.

Un peu de pratique. . .

Une résistance $R = 1\text{ k}\Omega$, une inductance pure $L = 0,5\text{ H}$ et un condensateur de capacité C sont branchés en **parallèle**. L'ensemble est alimenté par une tension alternative de 230 V et de fréquence 50 Hz .

On demande de déterminer la valeur de C pour que le courant traversant le circuit soit en phase avec la tension a ses bornes.

Réponse finale

$$C = 20\text{ }\mu\text{F}$$

- 1 Déterminer la valeur de C pour que le courant traversant le circuit soit en phase avec la tension a ses bornes ;
- 2 Calculer dans ces conditions les valeurs efficaces des courants dans chaque composant et du courant total.

Réponses finales

$$C = 20\text{ }\mu\text{F}$$

$$I_C = I_L = 1.46\text{ A}$$

$$I_R = 0.23\text{ A}$$

Filtres analogiques passifs

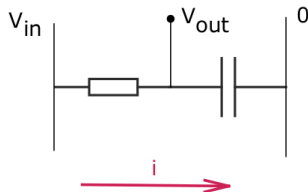
Un **filtre analogique** est un circuit électronique qui réalise une opération de traitement du signal ; il atténue certaines composantes d'un signal et en laisse passer d'autres.

Les filtres **passifs** caractérisent par l'usage exclusif de composants passifs (résistances, condensateurs, bobines). Les filtres analogiques passifs les plus simples sont basées sur des circuits RC, RL, LC ou Circuits RLC. Le gain G (rapport de puissance entre la sortie et l'entrée) des filtres passifs ne peut excéder 1 (contrairement aux filtres actifs qui utilisent des amplificateurs).

Il existe 4 grand différents types de filtres :

- Filtre **passe-haut** : Il ne laisse passer que les fréquences au-dessus d'une fréquence déterminée, appelée "*fréquence de coupure*". Il atténue les autres (les basses fréquences). Autrement dit, il «laisse passer ce qui est haut». C'est un atténuateur de graves pour un signal audio.
- Filtre **passe-bas** : Il ne laisse passer que les fréquences au-dessous de sa fréquence de coupure. C'est un atténuateur d'aiguës pour un signal audio.
- Filtre **passe-bande** : Il ne laisse passer qu'une certain bande de fréquences (et atténue tout ce qui est au-dessus ou en-dessous). Il est très utilisé dans les récepteurs radio, tv, pour isoler le signal que l'on désire capter.
- Filtre **réjecteur de bande** : Il est le complémentaire du passe-bande. Il atténue une plage de fréquences. Cela peut être utile pour diminuer certains parasites par exemple.

Filtre passe-bas du premier ordre



- Impédance du circuit électrique

$$\underline{Z} = R - \frac{i}{C\omega}$$

- Courant dans le circuit

$$\underline{I} = \frac{V_{in}}{\underline{Z}} = \frac{V_{in}}{R - \frac{i}{C\omega}}$$

- Tension de sortie $\underline{V}_{out}$

$$\underline{V}_{out} = \underline{Z}_C \underline{I} = V_{in} \frac{-\frac{i}{C\omega}}{R - \frac{i}{C\omega}}$$

Expression de la fonction de transfert

$$\underline{T}(\omega) = \frac{\underline{V}_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{1 + iRC\omega}$$

La fréquence de coupure d'un circuit RC est égale à

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

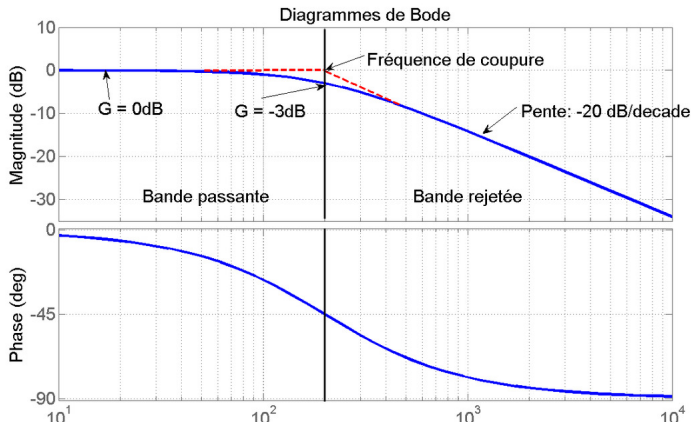
Filtre passe-bas : Courbes de Bode

Courbe de Gain

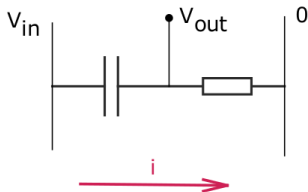
$$|\underline{I}(\omega)| \equiv G = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \leftrightarrow G_{dB} = 20 \log |\underline{I}(\omega)|$$

Courbe de déphasage

$$\text{Arg}(\underline{I}(\omega)) \equiv \phi = -\arctan(RC\omega)$$



Filtre passe-haut du premier ordre



- Impédance du circuit électrique

$$\underline{Z} = R - \frac{i}{C\omega}$$

- Courant dans le circuit

$$\underline{I} = \frac{V_{in}}{\underline{Z}} = \frac{V_{in}}{R - \frac{i}{C\omega}}$$

- Tension de sortie $\underline{V}_{out}$

$$\underline{V}_{out} = \underline{Z}_R \underline{I} = V_{in} \frac{R}{R - \frac{i}{C\omega}}$$

Expression de la fonction de transfert

$$\underline{T}(\omega) = \frac{\underline{V}_{out}}{V_{in}} = \frac{iRC\omega}{1 + iRC\omega}$$

La **fréquence de coupure** d'un circuit RC est égale à

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

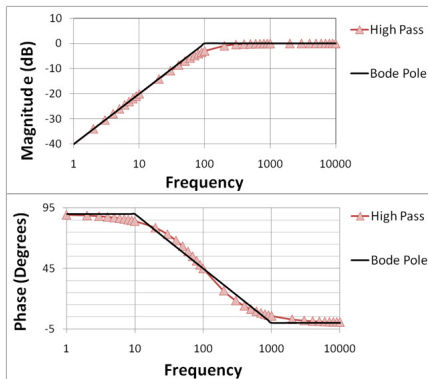
Filtre passe-haut : Courbes de Bode

Courbe de Gain

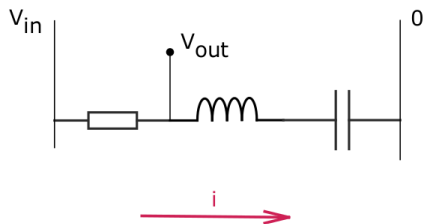
$$|\underline{T}(\omega)| \equiv G = \frac{RC\omega}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \leftrightarrow G_{dB} = 20 \log |\underline{T}(\omega)|$$

Courbe de déphasage

$$\text{Arg}(\underline{T}(\omega)) \equiv \phi = \frac{\pi}{2} - \arctan(RC\omega)$$



Filtre passe-bande



- Impédance du circuit électrique

$$\underline{Z} = R + i \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$

- Courant dans le circuit

$$\underline{I} = \frac{V_{in}}{\underline{Z}} = \frac{V_{in}}{R + i \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}$$

- Tension de sortie $\underline{V}_{out}$

$$\underline{V}_{out} = \underline{Z}_R \underline{I} = V_{in} \frac{R}{R + i \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}$$

La **fréquence de coupure** de résonance d'un circuit RLC est égale à

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \leftrightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Expression de la fonction de transfert

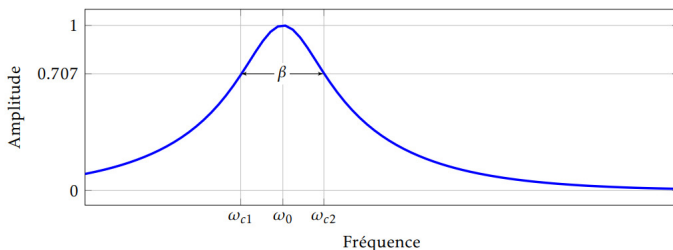
$$\underline{T}(\omega) = \frac{\underline{V}_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{1 + i \left(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega} \right)} \leftrightarrow \boxed{\underline{T}(\omega) = \frac{2i\xi\Omega}{2i\xi\Omega + (1 - \Omega^2)}}$$

avec : $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $2\xi\omega_0 = \frac{R}{L}$

Filtre passe-bande : Courbes de Bode

Courbe de Gain

$$|\underline{T}(\omega)| \equiv G = \frac{2\xi\Omega}{\sqrt{(2\xi\Omega)^2 + (1 - \Omega^2)^2}} \leftrightarrow G_{dB} = 20 \log |\underline{T}(\omega)|$$



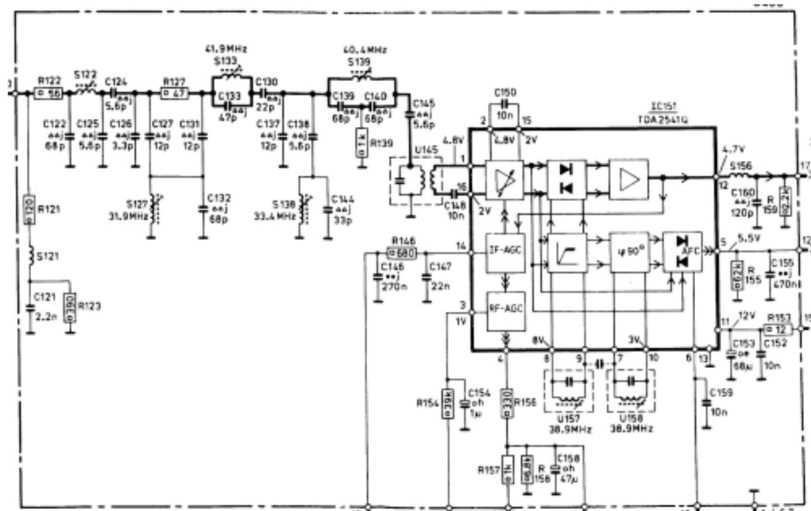
Le paramètre β représente la largeur de bande (à mi-puissance) et est égal à

$$\beta = 2\xi\omega_0$$

La bande passante du filtre est la gamme fréquentielle comprises entre les pulsations ω_{c1} et ω_{c2}

Filtre un peu plus complexe

Exemple de montage utilisé dans un téléviseur afin de sélectionner les canaux :



Série de Fourier

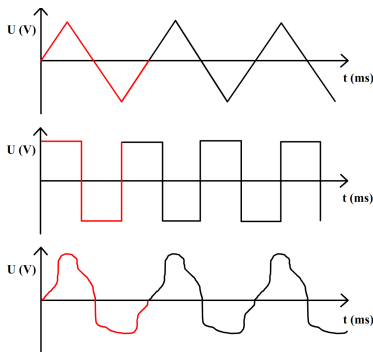
Définition d'une fonction périodique

Une fonction $f(x)$ est **périodique** s'il existe un nombre réel positif, noté T , tel que pour tout x et $x + T$ appartenant au domaine de définition de la fonction $f(x)$ on peut écrire la relation suivante :

$$f(x + T) = f(x)$$

où le nombre T est appelé la **période** fondamentale.

Exemple de fonctions périodiques

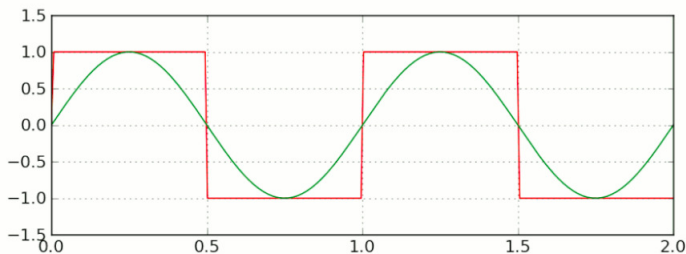


Série de Fourier

Principe

Le signal carré $x(t)$ peut-être approximé par une fonction sinusoïdale :

$$x(t) \approx A \sin(2\pi f t)$$

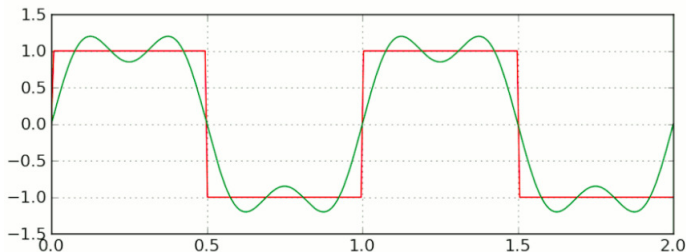


Série de Fourier

Principe

Le signal carré $x(t)$ peut-être approximé par une somme de deux fonctions sinusoïdales :

$$x(t) \approx A \sin(2\pi f t) + \frac{A}{3} \sin(6\pi f t)$$

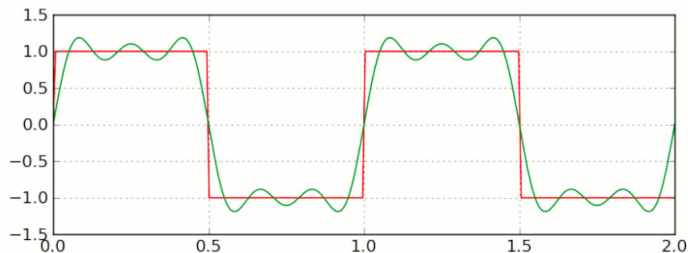


Série de Fourier

Principe

Le signal carré $x(t)$ peut-être approximé par une somme de trois fonctions sinusoïdales :

$$x(t) \approx A \sin(2\pi f t) + \frac{A}{3} \sin(6\pi f t) + \frac{A}{5} \sin(10\pi f t)$$

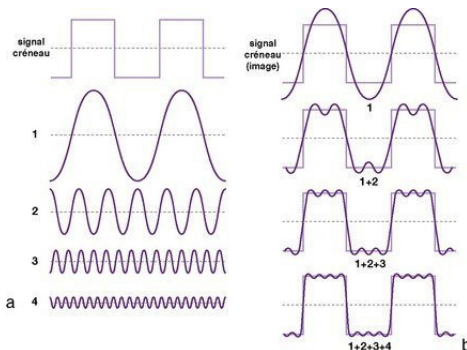


Série de Fourier

Principe

Le signal carré $x(t)$ peut-être approximé par une somme infinie de fonctions sinusoïdales :

$$x(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin [2\pi (2k + 1) f t]}{(2k + 1)}$$



Série de Fourier

Principe

Le **théorème de Fourier** stipule que toute fonction **périodique** peut se décomposer comme une somme infinie de fonctions trigonométriques :

$$f(t) = m + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(2\pi f_n t + \Phi_n)$$

ou

$$f(t) = m + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(2\pi f_n t) + b_n \cos(2\pi f_n t)$$

où m représente la valeur moyenne du signal et f_n représente la fréquence de l'harmonique n et est égale à $f = \frac{n}{T}$.

Le lien entre les paramètres A_n , Φ_n et les paramètres a_n et b_n est exprimé par les relations suivantes :

$$\begin{cases} a_n = A_n \cos \Phi_n \\ b_n = A_n \sin \Phi_n \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \tan(\Phi_n) = \frac{b_n}{a_n} \end{cases}$$

Série de Fourier

Principe

Le **théorème de Fourier** stipule que toute fonction **périodique** peut se décomposer comme une somme infinie de fonctions trigonométriques :

$$f(t) = m + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(2\pi f_n t) + b_n \cos(2\pi f_n t)$$

Les coefficients de Fourier m , a_n et b_n sont calculés de la manière suivante :

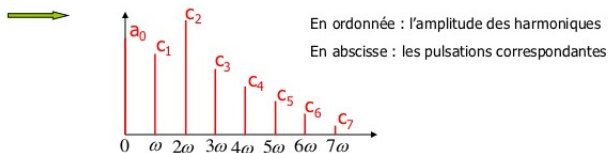
$$m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(2\pi f_n t) dt$$

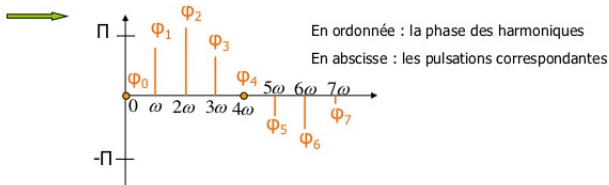
$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(2\pi f_n t) dt$$

Spectres de fréquences

□ *spectre d'amplitude*



□ *spectre de phase*



Réponse en régime d'un circuit RLC

- Loi des mailles

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} Q = V_0 \sin(\omega t) \leftrightarrow \boxed{L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q = V_0 \sin(\omega t)}$$

- Substitut complexe

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} \leftrightarrow \underline{Q} = \frac{I}{i\omega}$$

- Fonction de transfert du circuit RLC

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{Q}}{V_0} = \frac{1}{i\omega} \frac{1}{R + i \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)} \leftrightarrow \boxed{\underline{H}(\omega) = \frac{C}{2i\xi\Omega + (1 - \Omega^2)}}$$

La fréquence de résonance du circuit RLC est égale à :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \leftrightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

On définit :

$$\boxed{\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{2\xi\omega_0 = \frac{R}{L}}$$

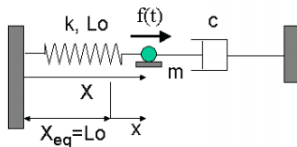
Analogie avec la mécanique

- Equation du mouvement

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + c \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = F_0 \sin(\omega t)$$

- Correspondance

$x(t)$	$\leftrightarrow$	$Q(t)$
m	$\leftrightarrow$	L
c	$\leftrightarrow$	R
k	$\leftrightarrow$	$1/C$



- Fréquence de résonance f_0 du système mécanique et degré d'amortissement ξ

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad 2\xi\omega_0 = \frac{c}{m}$$

- Fonction de transfert

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1/k}{2i\xi\Omega + (1 - \Omega^2)}$$

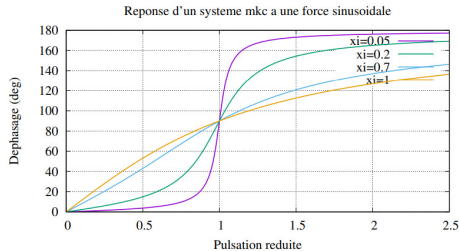
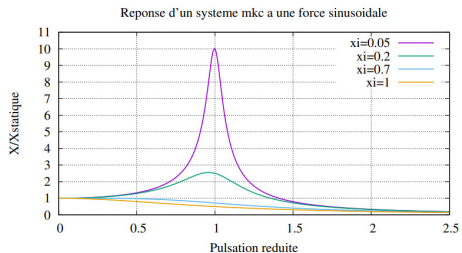
Fonction de transfert – Courbes de Bode

Courbe de Gain

$$|\underline{H}(\omega)| \equiv G = \frac{1/k}{\sqrt{(2\xi\Omega)^2 + (1 - \Omega^2)^2}} \leftrightarrow G_{dB} = 20 \log |\underline{H}(\omega)|$$

Courbe de déphasage

$$\text{Arg}(\underline{H}(\omega)) \equiv \phi = \arctan\left(\frac{2\xi\Omega}{1 - \Omega^2}\right)$$



Merci pour votre attention

