

Calcul de la charge limite des plaques circulaires par la méthode statique de l'analyse limite

**M. BIDEQ^a, W. EL BAZI^b, A. EL-ABIDI^a, M. KRIRAA^a,
T. DESCAMPS^c, G. GUERLEMENT^c, L. BOUSSHINE^d**

- a. LMPEQ Laboratory, ENSA Safi, Cadi Ayyad University, Marrakech, Morocco.
Email m.bideq@uca.ma, m.kriraa@uca.ma, a.elabidi@uca.ma
- b. LIPOZY Laboratory, ENSA Khouribga, Sultan Moulay Slimane University, Béni Mellal, Morocco. Email : w.elbazi@usms.ma
- c. Department of Structural Mechanics - Timber Research Group, Faculté Polytechnique - Université de Mons, Belgium, Email : thierry.descamps@umons.ac.be
- d. LTCSE Laboratory, ENSEM Casablanca, Hassan II University, Casablanca, Morocco.
Email : l.bousshine@ensem.ac.ma

Résumé :

Le calcul de la charge limite des plaques circulaires revêt un intérêt capital dans la conception des structures en génie civil et dans d'autres applications industrielles. La détermination de la charge limite et des mécanismes de ruine des structures permet d'évaluer leur sécurité vis-à-vis de la rupture. Cette étude utilise la méthode statique de l'analyse limite, associée à la méthode des éléments finis et la programmation mathématique, pour calculer la borne inférieure de la charge limite des plaques circulaires minces. L'objectif est d'analyser les effets de la géométrie, du chargement et des appuis sur la charge limite et les mécanismes de ruine. Les plaques étudiées sont en matériau sandwich constitué d'un cœur léger et de faces extérieures métalliques. Les plaques ont une géométrie circulaire axisymétrique et sont soumises à un chargement statique uniforme. L'élément fini adopté est tronconique initialement utilisé pour l'étude des coques axisymétriques. L'application du théorème statique de l'analyse aboutit à la résolution d'un problème de programmation mathématique non linéaire. Les résultats obtenus sont comparés à une solution analytique qui existe dans le cas des plaques circulaires simplement appuyées.

Abstract:

Calculating the limit load of circular plates is of capital interest in the design of structures in civil engineering and other industrial applications. Determining the limit load and the collapse mechanisms of structures allows to assess their safety against failure. This study uses the static method of limit analysis, combined with the finite element method and mathematical programming, to calculate the lower bound of the limit load of thin circular plates. The aim is to analyze the effects of geometry, loading and supports on limit load and failure mechanisms. The plates studied are made of a sandwich material with a lightweight core and metallic outer faces. The plates have a circular axisymmetric geometry and are subjected to uniform static loading. The finite element adopted is the truncated cone originally used to study axisymmetric shells. Application of the static theorem of analysis leads to the resolution of a nonlinear mathematical programming problem. The results obtained are compared with an analytical solution that exists for simply supported circular plates.

Mots clefs : Plasticité, analyse limite, plaques circulaires, charge limite, mécanismes de ruines.

1. Introduction

L'analyse limite constitue un outil important pour l'évaluation de la capacité portante des structures telles que les plaques circulaires utilisées dans diverses applications en génie civil et en ingénierie industrielle. Cette méthode permet de calculer la valeur de la charge limite, définissant ainsi le seuil critiques au-delà duquel une structure peut s'effondrer par formation de mécanismes de ruine par écoulement plastique. Les récents développements en analyse limite, notamment avec l'intégration des méthodes de la programmation mathématique et des éléments finis, ont considérablement amélioré la précision et l'efficacité des calculs.

La méthode directe, objet de ce travail, repose sur la combinaison de la méthode des éléments finis avec des techniques de la programmation mathématique ([1], [2], [3], [4], [5], [6]). Elle permet d'accéder directement à une estimation de la charge de ruine sans passer par une incrémentation du chargement.

La formulation adoptée conduit à un problème d'optimisation, dans lequel le paramètre de charge P est maximisé sous la contrainte que le critère de plasticité soit respecté en tout point de la structure. Cette approche s'inscrit dans le cadre rigoureux du théorème statique de l'analyse limite et fournit une estimation de la charge ultime placée du côté de la sécurité.

L'intérêt croissant pour l'utilisation des plaques sandwich, constituées d'un cœur léger pris entre deux peaux métalliques (Figure 1), s'explique par le rapport optimal entre résistance et légèreté. Ces structures sont très utilisées dans le domaine du génie civil et les l'industries aéronautiques et navales. Pour cette raison, il est primordial d'évaluer leur sécurité par rapport à la ruine par formation de de mécanismes de ruine plastique et de calculer la charge limite qu'elles peuvent supporter. Pour atteindre cet objectif, deux approches complémentaires sont généralement utilisées :

- La méthode statique qui donne une borne inférieure de la charge limite en respectant les équations d'équilibre, la condition de plasticité et les conditions aux limites. La borne inférieure de la charge limite est ainsi placée du côté de la sécurité de structure.
- La méthode cinématique, basée sur l'analyse des mécanismes de ruine admissibles, permet l'obtention d'une borne supérieure de la charge limite.

L'application conjointe de ces deux approches permet d'encadrer de manière précise la charge limite tout en offrant une meilleure compréhension des modes et des mécanismes de ruine potentiels.

Cette étude s'intéresse à l'analyse limite par la méthode statique des plaques circulaires percées soumises à un chargement uniforme. Une formulation combinant la méthode des éléments finis et la programmation mathématique est établie en se basant sur le théorème statique de l'analyse limite. L'effet de la présence d'un perçage sur la charge limite et sur les mécanismes de ruine est examiné.

Les résultats obtenus mettent en évidence l'impact de la géométrie et des conditions aux limites sur la charge limite des plaques circulaires axisymétriques. En comparant les différentes configurations de chargement et d'appui, il est possible d'optimiser la conception de ces structures afin d'améliorer leur résistance tout en minimisant leur poids.

2. Hypothèses générales

Dans ce travail, l'objectif est d'étudier le comportement des plaques circulaires en déterminant leur charge limite. L'existence de solutions analytiques pour ce type de structure constitue un atout pour la validation des résultats numériques obtenus. L'approche numérique repose sur l'utilisation de la méthode des éléments finis combinée à la programmation mathématique. Un élément fini tronconique

a été spécialement choisi pour cette étude, car il permet d'analyser aussi bien les plaques pleines que les plaques percées en leur centre. En particulier, en imposant un angle d'inclinaison nul de cet élément par rapport à l'horizontale, il est possible de modéliser de manière rigoureuse le cas des plaques percées sans introduire d'hypothèses supplémentaires sur la discontinuité géométrique. Dans ce cas, il suffit de prendre un angle d'inclinaison de l'élément fini tronconique nul par rapport à l'horizontale ($\beta = 0$).

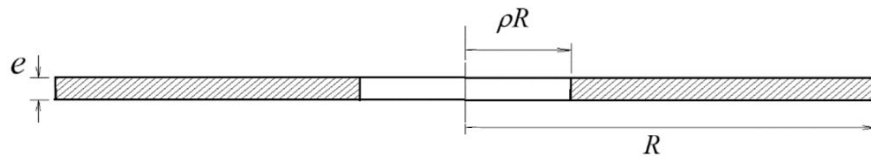


Figure 1 - Caractéristiques géométriques de la plaque

La plaque est circulaire de rayon R et d'épaisseur e . Elle contient un perçage de rayon $r = \rho R$, avec $0 < \rho < 1$.

Les hypothèses retenues sont issues des principes classiques de la mécanique des milieux continus et de la théorie des plaques et coques minces permettant de simplifier le problème tout en assurant une modélisation rigoureuse du comportement mécanique. Elles concernent principalement la géométrie, le chargement et le comportement du matériau.

Les hypothèses retenues dans le cadre de cette étude sont les suivantes :

- Le matériau constituant la plaque est considéré comme isotrope et doté d'un palier de plasticité suffisamment étendu pour être assimilé à un matériau parfaitement plastique ;
- La plaque est mince et obéit à l'hypothèse de Kirchhoff-Love, impliquant que les sections normales à la surface moyenne avant déformation restent normales après déformation et ne subissent aucune distorsion. L'étude est ainsi ramenée à l'analyse de la surface moyenne de la plaque ;
- Les déformations se produisent dans des conditions isothermes, excluant tout effet thermique sur le comportement mécanique du matériau ;
- Le chargement est appliqué de manière suffisamment lente pour que le régime d'analyse soit quasi-statique ; les effets dynamiques sont donc négligés ;
- Les déformations sont supposées petites, ce qui permet l'utilisation de l'expression infinitésimale des déformations. Tout effet d'instabilité géométrique est exclu du cadre de l'étude ;
- Le chargement est une pression uniformément répartie sur la surface supérieure de la plaque ; elle est donc proportionnelle.

Les hypothèses ci-dessus permettent de se placer dans le cadre général de la théorie de l'analyse limite.

3. Equations d'équilibre

Pour la discrétisation en éléments finis de la plaque mince axisymétrique nous avons opté pour l'utilisation d'un élément fini tronconique prévu initialement pour l'étude des coques de révolution axisymétriques ([7], [8]) (Figure 5) ; dans ce cas il suffit de se mettre dans le cas particulier où l'angle d'inclinaison β sera nul. La formulation de cet élément repose sur les équations d'équilibre propres aux coques minces axisymétriques issues de l'analyse de l'équilibre d'un élément infinitésimal de type tétraédrique dans les différentes directions (Figure 3).

L'hypothèse de conservation des normales aux sections planes des coques adoptée ce qui permet de décrire le mécanisme de ruine uniquement à partir des vitesses de déformation généralisées, les grandeurs des contraintes généralisées associées sont ensuite déterminées via le théorème des puissances virtuelles.

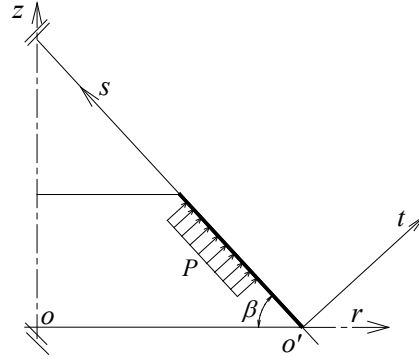


Figure 2 - Tronc de cône, repères local et global

Il est plus pratique d'exprimer les équations d'équilibre en fonction des variables généralisées adimensionnelles suivantes ([9], [10], [11]) :

$$\begin{aligned} n &= \frac{N_x}{N_p}, \quad n_\theta = \frac{N_\theta}{N_p}, \quad q = \frac{Q}{N_p}, \\ m &= \frac{M_x}{M_p}, \quad m_\theta = \frac{M_\theta}{M_p}, \quad P = \frac{P_0 L}{2N_p}, \\ h &= \frac{M_p}{N_p L} = \frac{e}{4L} \text{ et } r = \frac{R}{L}. \end{aligned} \quad (1)$$

N et N_θ sont les efforts normaux, Q l'effort tranchant et M et M_θ sont respectivement les moments de flexion longitudinal et circonférentiel.

M_p et N_p sont respectivement le moment et l'effort normal plastiques par unité de longueur :

$$\begin{aligned} M_p &= \frac{\sigma_0 e^2}{4}, \\ N_p &= \sigma_0 e. \end{aligned} \quad (2)$$

σ_0 est la limite élastique de traction du matériau.

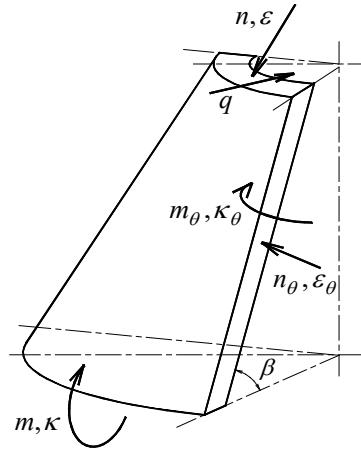


Figure 3 - Variables généralisées (contraintes et déformations)

Les équations d'équilibre de l'élément de coque conique, écrites en fonction des contraintes généralisées adimensionnelles dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , sont ([12], [13]) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(sn) - n_\theta &= 0, \\ \frac{d}{ds}(sq) + n_\theta \tan \beta + 2sP &= 0, \\ h \frac{d}{ds}(sm) - hm_\theta - sq &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Où m et m_θ sont les moments de flexion, n l'effort normal axial, n_θ l'effort normal circonférentiel et q l'effort tranchant adimensionnels. On précise que les efforts et les moments sont exprimés par unité de longueur, P est la pression interne adimensionnelle.

4. Critère de plasticité

Dans cette étude, nous adoptons le critère de plasticité de Von Mises valable pour les coques et les plaques de type « coques sandwich » proposé par Hodge ([9], [10], [14]). Plusieurs travaux, notamment ceux d'Ostwald [15], ont mis en évidence qu'à masse égale, une coque sandwich présente une capacité portante ultime nettement supérieure à celle d'une coque pleine en raison de sa configuration optimisée. Le concept fondamental repose sur le remplacement du matériau homogène constituant la coque par une structure composite dite « sandwich idéal » composée de deux fines peaux métalliques séparées par un noyau léger jouant principalement un rôle de distanceur (Figure 4). Cette architecture permet de maximiser le moment de flexion résistant tout en minimisant le poids, grâce à la séparation des peaux soumises respectivement à la traction et à la compression, le noyau assure la transmission des efforts transverses et stabilise la structure.

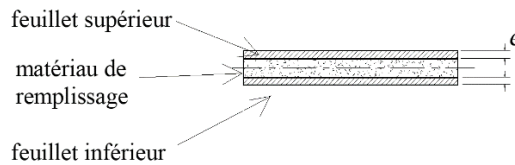


Figure 4 - Section de plaque sandwich

Ce critère est exprimé par les deux inéquations suivantes ([9], [10], [14]) :

$$\begin{aligned} - \text{pour le feuillet supérieur :} & \quad (n_\theta - m_\theta)^2 - (n_\theta - m_\theta)(n - m) + (n - m)^2 \leq 1, \\ - \text{pour le feuillet inférieur :} & \quad (n_\theta + m_\theta)^2 - (n_\theta + m_\theta)(n + m) + (n + m)^2 \leq 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Dans le cas des plaques et coques « Sandwich », il est préférable de remplacer les contraintes généralisées par les variables auxiliaires suivantes (Nguyen 85) :

$$\begin{aligned} - \text{pour le feuillet supérieur :} & \quad \sigma_s = (n - m) \text{ et } \sigma_{\theta s} = (n_\theta - m_\theta), \\ - \text{pour le feuillet inférieur :} & \quad \sigma_i = (n + m) \text{ et } \sigma_{\theta i} = (n_\theta + m_\theta). \end{aligned} \quad (5)$$

Où i et s indiquent respectivement les feuillets inférieur et supérieur.

L'utilisation de ces variables auxiliaires permet de simplifier de façon remarquable l'expression de la fonction de charge et de la puissance de dissipation plastique. La condition de plasticité peut s'écrire sous la forme matricielle suivante ([9], [10]) :

$$\begin{cases} \{\sigma\}^T [D_1] \{\sigma\} \leq 1, \\ \{\sigma\}^T [D_2] \{\sigma\} \leq 1, \end{cases} \quad (6)$$

où $\{\sigma\}$ est le vecteur des contraintes.

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} n_\theta \\ m_\theta \\ n \\ m \end{Bmatrix}, [D_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } [D_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

5. Formulation du problème discrétisé

La structure considérée est discrétisée à l'aide d'éléments finis tronconiques formulés selon le concept d'élément d'équilibre. Ce concept, introduit initialement par F. de Veubeke ([16], [17], [18], [19])

repose sur l'idée de construire des champs de contraintes vérifiant a priori les équations d'équilibre à l'intérieur de chaque élément.

Dans le cas des coques coniques, les équations d'équilibre sont intrinsèquement couplées, ce qui rend inapplicable l'approximation des champs de contraintes au moyen de fonctions de forme classiques. Pour surmonter cette difficulté, la discrétisation des contraintes est construite en deux parties : la première composante satisfait les équations d'équilibre homogène (c'est-à-dire en l'absence de chargement), tandis que la seconde est spécifiquement introduite pour équilibrer une pression uniforme appliquée le long de l'élément. Ainsi, on peut écrire le vecteur des contraintes sous la forme suivante :

$$\{\sigma\} = [M_1]\{a_1\} + [M_2]\{a_2\}, \quad (8)$$

$\{a_1\}$ et $\{a_2\}$ sont deux systèmes de paramètres arbitraires.

L'équation (8) peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$\{\sigma\} = [M]\{a\}, \quad (9)$$

où

$$[M] = [M_1 \quad M_2] \text{ et } \{a\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}.$$

Pour déterminer les éléments de la matrice $[M]$, on fait des hypothèses sur les composantes du vecteur $\{a\}$ et on pose [20] :

$$n_\theta = a_1 \text{ et } m_\theta = a_2. \quad (10)$$

Ces hypothèses permettent de découpler les équations d'équilibre. Le remplacement dans les équations (3) et l'intégration par rapport à s fournissent alors trois autres constantes a_3, a_4 et a_5 . La sixième composante du vecteur $\{a\}$ est la pression réduite P elle-même, qui devient ici une inconnue du problème (problème inverse). En effet, en analyse limite, l'objectif principal est la détermination de la charge limite p qui sera introduites ici comme sixième paramètre inconnu dans le vecteur $\{a\}$.

$$\begin{aligned} n &= a_1 + \frac{a_3}{s}, \\ q &= -tg\beta a_1 + \frac{a_4}{s} - sp, \\ m &= -\frac{tg\beta s}{2h} a_1 + a_2 + \frac{a_4}{h} + \frac{a_5}{s} - \frac{s^2}{3h} p. \end{aligned} \quad (11)$$

Nous aurons donc :

$$\{a\} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad p]^T \quad (12)$$

et

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{s} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{tg\beta s}{2h} & 1 & 0 & \frac{1}{h} & \frac{1}{s} & -\frac{s^2}{3h} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Un système de forces généralisées adéquat est fixé sur les facettes de l'élément (connecteurs) assurant la continuité des tractions de surface. Ce système est constitué par les éléments de réduction :

$$\{g\} = [n_1 \quad q_1 \quad m_1 \quad n_2 \quad q_2 \quad m_2]^T \quad (14)$$

Une matrice de connexion $[C]$ permet d'exprimer le vecteur des forces généralisées $\{g\}$ en fonction du vecteur des paramètres arbitraires $\{a\}$.

$$\{g\} = [C]\{a\} \quad (15)$$

avec

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{s_1} & 0 & 0 & 0 \\ -tg\beta & 0 & 0 & \frac{1}{s_1} & 0 & -s_1 \\ \frac{-tg\beta s_1}{2h} & 1 & 0 & \frac{1}{h} & \frac{1}{s_1} & \frac{-s_1^2}{3h} \\ 1 & 0 & \frac{1}{s_2} & 0 & 0 & 0 \\ -tg\beta & 0 & 0 & \frac{1}{s_2} & 0 & -s_2 \\ \frac{-tg\beta s_2}{2h} & 1 & 0 & \frac{1}{h} & \frac{1}{s_2} & \frac{-s_2^2}{3h} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Il convient de souligner, en examinant les matrices définies ci-dessus, que l'annulation de l'angle d'inclinaison β ne conduit à aucune indétermination dans la formulation. L'élément fini tronconique conserve ainsi toute sa validité, que ce soit pour la modélisation des coques coniques ou des plaques circulaires minces axisymétriques [21]. Cependant, une singularité apparaît lorsque l'un des nœuds de l'élément est positionné sur l'axe de révolution de la plaque, en raison des coordonnées cylindriques devenant non définies en ce point. Afin d'éviter cette difficulté numérique et garantir la régularité des champs interpolés, nous limitons notre étude aux cas de plaques circulaires percées, c'est-à-dire présentant un évidement central.

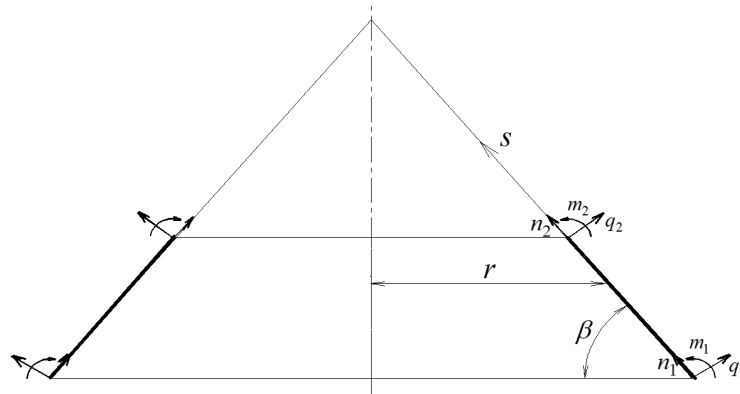


Figure 5 - Élément fini tronconique d'équilibre

L'élément fini tronconique d'équilibre est utilisé, sans difficultés numériques particulières, à l'étude des plaques sandwich. La plaque est discrétisée en plusieurs éléments. Toutefois, une singularité se pose au niveau du centre de la plaque. Ce cas ne se pose pas dans cette étude du fait que nous avons considéré seulement le cas des plaques percées.

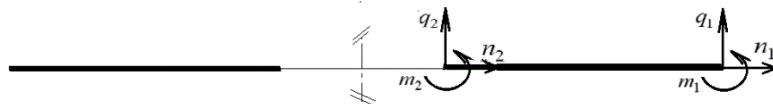


Figure 6 - Utilisation de l'élément tronconique dans le cas de la plaque circulaire

Le critère de plasticité que nous avons utilisé est non linéaire, il est constitué de deux inégalités :

$$\begin{aligned} \{\sigma\}^T [D_1] \{\sigma\} &\leq 1, \\ \{\sigma\}^T [D_2] \{\sigma\} &\leq 1, \end{aligned} \quad (17)$$

L'expression (9) permet d'écrire ce critère en fonction du vecteur $\{a\}$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \{a\}^T [K_1] \{a\} &\leq 1 \\ \{a\}^T [K_2] \{a\} &\leq 1 \end{aligned} \quad (18)$$

avec

$$\begin{aligned} [K_1] &= [M]^T [D_1] [M] \\ [K_2] &= [M]^T [D_2] [M] \end{aligned} \quad (19)$$

Après l'expression sous la forme discrétisée des équations d'équilibre (équation 15) et de la condition de plasticité (équation 18) nous pouvons maintenant formuler le problème de l'analyse limite.

Par application du théorème statique de l'analyse limite [22], le problème peut être écrit de manière naturelle sous la forme d'un programme mathématique. Il s'agit alors de déterminer la valeur maximale du paramètre de charge pour laquelle il existe un champ de contraintes vérifiant simultanément les équations d'équilibre statique et la condition de plasticité en tout point de la structure. Le problème se ramène ainsi à la maximisation de la charge appliquée P tout en respectant la stricte admissibilité statique et plastique du champ des contraintes. Il prend ainsi la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{Maximiser } P, \\ \text{sous les conditions suivantes :} \\ \quad - \{g\} - [C]\{a\} = 0, \\ \quad - \{a\}^T [K_1] \{a\} - 1 \leq 0, \\ \quad - \{a\}^T [K_2] \{a\} - 1 \leq 0. \end{cases} \quad (20)$$

A ces contraintes, s'ajoutent les conditions aux limites imposées aux bords de la plaque. Ce problème relève de la programmation mathématique non linéaire car les deux dernières contraintes représentant la condition de plasticité sont non linéaires. On vérifie aussi que c'est un problème convexe, sa résolution ne présente donc pas de difficulté particulière. Il a été résolu en utilisant la méthode du lagrangien augmenté implantée dans le programme MINOS ([23], [24]).

Les matrices $[C]$, $[K_1]$ et $[K_2]$ sont des matrices globales obtenues par assemblage des matrices élémentaires correspondantes sur tous les éléments. De même pour les vecteurs $\{a\}$ et $\{g\}$.

Le vecteur $\{g\}$ est exprimé dans un système d'axes local. Pour assembler ce vecteur, il est nécessaire de l'exprimer dans un système d'axe global en lui appliquant la transformation adéquate.

6. Résultats et discussion

Pour valider le programme, nous avons comparé les résultats obtenus par les résultats obtenus par ceux Chwala et al. [25] et N. D. Hung ([20], [26], [27]) dans le cas des coques de révolution axisymétriques soumises à une pression interne. La méthode d'optimisation adoptée par ces auteurs est la technique séquentielle de minimisation non-contrainte (SUMT) [28].

La coque est discrétisée en éléments finis tronconiques. Le tableau ci-dessous permet de comparer les résultats obtenus avec ceux qui se trouvent dans la littérature ([9], [26], [29]) :

Auteur	CHWALA et BIRON	N. D. HUNG	Présente étude
$\alpha = 12^\circ, h = 0.03$	0.2339	0.2316	0.2329
$\alpha = 38^\circ 50', h = 0.03189$	0.6388	0.6294	0.6421

6.1 Plaque simplement appuyée au contour extérieur

La plaque étudiée est simplement appuyée sur son contour extérieur et supporte une pression uniformément répartie sur sa face supérieure. Nous avons considéré ce cas car le problème d'analyse limite de ces plaques admet une solution analytique.

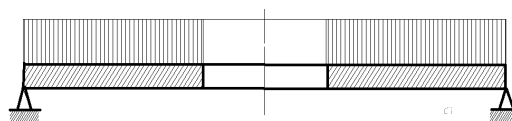


Figure 7 - Plaque circulaire simplement appuyée sur le contour extérieur

La borne inférieure de la charge limite adimensionnelle est donnée par Hodge [14] :

$$P^- = \frac{P_0^- R^2}{2M_p} = \frac{3}{1 + \rho - 2\rho^2} \quad (21)$$

La borne supérieure est :

$$P^+ = \frac{2}{\sqrt{3}} P^- \quad (22)$$

Pour pouvoir comparer cette solution avec les résultats numériques que nous avons obtenus, on sera amené à utiliser les mêmes grandeurs adimensionnelles pour la charge limite.

$$P_{num} = \frac{P_0 R}{2N_p} \quad (23)$$

et
$$P_{analy} = \frac{P_0 R^2}{2M_p} \quad (24)$$

où P_{num} est la pression adimensionnelle utilisée dans la solution numérique et P_{analy} celle utilisée dans la solution analytique. Le rapport entre ces deux dernières quantités est :

$$\frac{P_{num}}{P_{analy}} = \frac{e}{4R} = h \quad (25)$$

La figure ci-dessous permet de comparer les résultats numériques et analytiques représentant la borne supérieure de la charge limite.

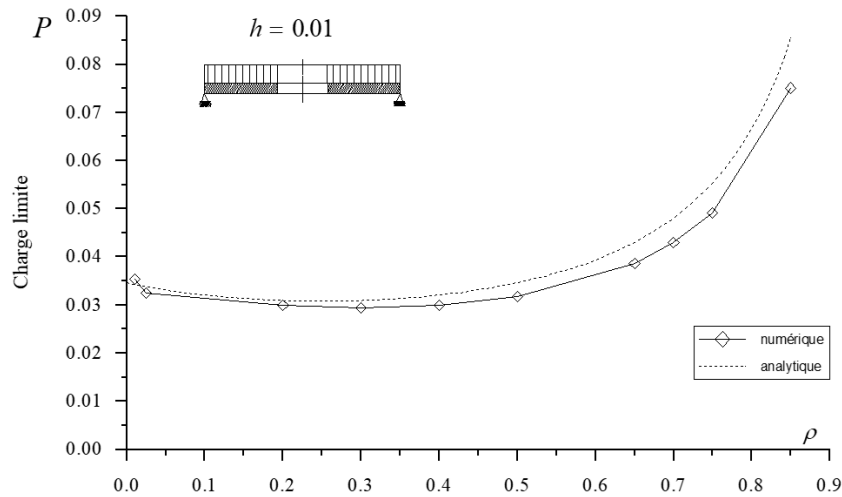


Figure 8 - Comparaison des solutions analytique et numérique (borne supérieure)

L'étude des plaques circulaires offre l'opportunité de valider notre programme. En effet, le problème des plaques circulaires admet une solution analytique dans certains cas ([12], [13], [30]). Nous avons étudié la plaque simplement appuyée au contour extérieur dont la solution analytique est donnée par Cinquini et Guerlement [30]. Dans cette étude, la plaque est discrétisée en éléments finis tronconiques d'équilibre avec un angle d'inclinaison $\beta = 0$. Les figures 9 et 10 illustrent la concordance entre la solution analytique et la solution numérique proposée.

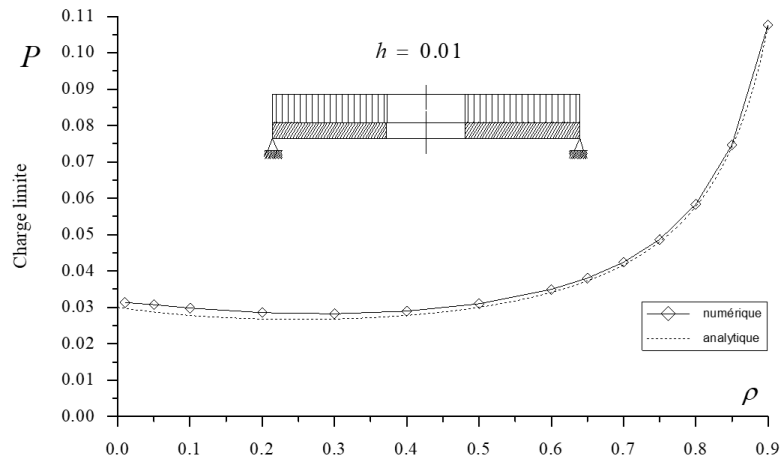


Figure 9 - Comparaison des solutions analytique et numérique (borne inférieure)

6.2 Plaque simplement appuyée au contour intérieur

La plaque circulaire simplement appuyée au contour intérieur admet aussi une solution analytique donnée par les expressions suivantes [14] :

Borne inférieure :

$$P^- = \frac{2 \log(\rho)}{1 + 2 \log(\rho) - \rho^2} \quad (26)$$

Borne supérieure :

$$P^+ = \frac{2}{\sqrt{3}} P^- \quad (27)$$

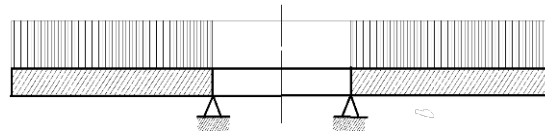


Figure 10 - Plaque circulaire simplement appuyée sur le contour intérieur

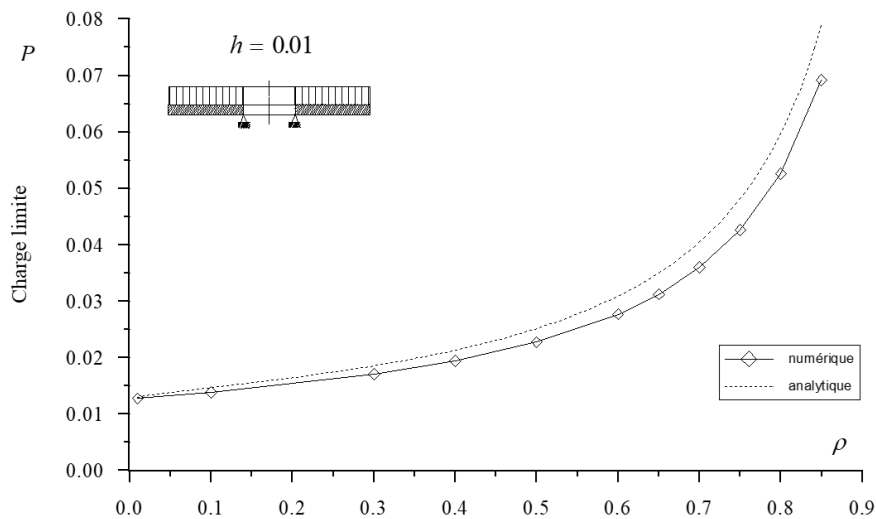


Figure 11 - Comparaison de la solution analytique et numérique (borne supérieure)

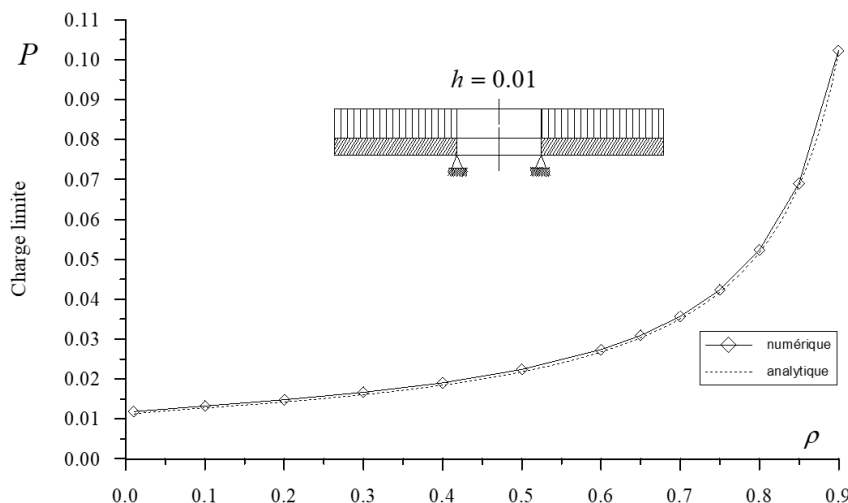


Figure 12 - Comparaison des solutions analytique et numérique de la charge limite (borne inférieure)

L'étude précédente montre, à travers les différents exemples que nous avons étudiés, que le module d'analyse limite que nous avons utilisé pour le dimensionnement des coques minces est fiable.

7. Conclusion

La méthode statique de l'analyse limite, fondée sur le théorème statique, permet d'évaluer rigoureusement une borne inférieure de la charge limite, garantissant une approche prudente et sécuritaire dans la conception des plaques circulaires. La formulation adoptée, combinant la méthode des éléments finis à une approche d'optimisation non linéaire, s'est révélée particulièrement adaptée pour résoudre le problème inverse et la détermination de la charge limite. L'utilisation d'un élément tronconique adapté les coques axisymétriques a permis de modéliser les plaques percées sans recourir à des modifications géométriques supplémentaires, assurant ainsi une continuité des champs de contraintes. Les résultats montrent une forte influence de la géométrie (rapport d'entaille ρ) et des conditions aux limites sur la charge limite, mettant en évidence la nécessité d'une analyse fine pour chaque configuration structurelle envisagée. Les résultats numériques obtenus ont été validés par confrontation avec des solutions analytiques existantes pour des cas particuliers, confirmant la robustesse et la précision de la méthode proposée. Cette méthodologie ouvre la voie à des analyses paramétriques poussées et à l'optimisation topologique de plaques circulaires dans diverses applications industrielles, notamment dans les structures légères à haute performance telles que les coques aéronautiques et navales.

8. Références

- [1] G. Guerlement, « Application of the Theory of Plastic Shakedown to Dimensioning of Reservoirs. », *Rev M Mec*, vol. 20, n° 1, p. 43-48, 1974.
- [2] G. Guerlement, D. O. Lamblin, et M. A. Save, « Limit analysis of cylindrical shell with reinforcing rings », *Eng. Struct.*, vol. 9, n° 3, p. 146-156, 1987, doi: 10.1016/0141-0296(87)90009-5.
- [3] M. Bideq, L. Bousshine, M. Kouam, et G. Guerlement, « Optimal dimensioning of thin shells by the static approach with limit analysis and genetic algorithms », *Rev. Eur. Elem.*, vol. 12, n° 5, p. 623-654, 2003, doi: 10.3166/reef.12.623-654.
- [4] M. Bideq, L. Bousshine, et G. Guerlement, « Contribution à l'optimisation des coques sphériques par l'analyse limite et les algorithmes génétiques », in *Congrès français de mécanique*, A. F. de Mécanique, Éd., Lille, France, août 2017.

- [5] M. Bideq, L. Boussshine, M. Kouam, et G. Guerlement, « Dimensionnement optimal des coques minces par l'approche statique de l'analyse limite et les algorithmes génétiques », *Rev. Eur. Éléments Finis*, vol. 12, n° 5, p. 623-654, janv. 2003, doi: 10.3166/reef.12.623-654.
- [6] L. C. Dell'Acqua et G. Maier, « A matrix theory of elastic-locking structures », *Meccanica*, vol. 4, n° 4, p. 298-313, déc. 1969, doi: 10.1007/BF02133096.
- [7] D. Chapelle et K.-J. Bathe, *The Finite Element Analysis of Shells - Fundamentals*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [8] J. Bleyer et P. De Buhan, « On the performance of non-conforming finite elements for the upper bound limit analysis of plates », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 94, n° 3, p. 308-330, avr. 2013, doi: 10.1002/nme.4460.
- [9] A. Biron et P. G. Hodge Jr., « Limit Analysis of Rotationally Symmetric Shells Under Central Boss Loadings by a Numerical Method », *J. Appl. Mech.*, vol. 34, n° 3, p. 644-650, sept. 1967, doi: 10.1115/1.3607756.
- [10] A. Biron et P. G. Hodge, « Non-linear programming method for limit analysis of rotationally symmetric shells* », *Int. J. Non-Linear Mech.*, vol. 3, n° 2, p. 201-213, juin 1968, doi: 10.1016/0020-7462(68)90015-2.
- [11] R. W. Kuech et S. L. Lee, « Limit analysis of simply supported conical shells subjected to uniform internal pressure », *J. Frankl. Inst.*, vol. 280, n° 1, p. 71-87, juill. 1965, doi: 10.1016/0016-0032(65)90029-3.
- [12] M. A. Save, C. E. Massonnet, et G. de Saxcé, *Plastic Limit Analysis of Plates, Shells and Disks*. Elsevier, 1997.
- [13] M. A. Save, « Theory of Optimal Plastic Design of Structures », in *Structural Optimization*, P. Brousse, Éd., Vienna: Springer, 1975, p. 151-210. doi: 10.1007/978-3-7091-2738-4_3.
- [14] P. G. Hodge, « Plastic Plate Theory », *Q. Appl. Math.*, vol. 22, n° 1, p. 74-77, 1964.
- [15] M. Ostwald, « Optimum weight design of sandwich cylindrical shells under combined loads », *Comput. Struct.*, vol. 37, n° 3, p. 247-257, janv. 1990, doi: 10.1016/0045-7949(90)90316-T.
- [16] B. M. F. De Veubeke et A. Millard, « Discretization of stress fields in the finite element method », *J. Frankl. Inst.*, vol. 302, n° 5-6, p. 389-412, 1976, doi: 10.1016/0016-0032(76)90032-6.
- [17] B. M. F. De Veubeke et A. Millard, « Discretization of stress fields in the finite element method », *J. Frankl. Inst.*, vol. 302, n° 5-6, p. 389-412, 1976, doi: 10.1016/0016-0032(76)90032-6.
- [18] B. F. De Veubeke et G. Sander, « An equilibrium model for plate bending », *Int. J. Solids Struct.*, vol. 4, n° 4, p. 447-468, 1968, doi: 10.1016/0020-7683(68)90049-8.
- [19] O. C. Zienkiewicz, « Displacement and equilibrium models in the finite element method by B. Fraeijs de Veubeke, Chapter 9, Pages 145–197 of Stress Analysis, Edited by O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister, Published by John Wiley & Sons, 1965 », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 52, n° 3, p. 287-342, 2001, doi: 10.1002/nme.339.
- [20] P. Morelle et N. D. Hung, « Numerical Study of Plastic Shakedown of Plates and Shells of Revolution Using Equilibrium Finite Elements. », *J. Mec. Theor. Appl.*, vol. 2, n° 4, p. 567-599, 1983.
- [21] I. S. Raju, G. V. Rao, B. P. Rao, et J. Venkataramana, « A conical shell finite element », *Comput. Struct.*, vol. 4, n° 4, p. 901-915, août 1974, doi: 10.1016/0045-7949(74)90052-2.
- [22] D. C. Drucker, W. Prager, et H. J. Greenberg, « Extended limit design theorems for continuous media », *Q. Appl. Math.*, vol. 9, n° 4, p. 381-389, janv. 1952, doi: 10.1090/qam/45573.
- [23] B. A. Murtagh et M. A. Saunders, « MINOS 5.0 User's Guide. », Defense Technical Information Center, Fort Belvoir, VA, déc. 1983. doi: 10.21236/ADA138522.
- [24] B. A. Murtagh et M. A. Saunders, « Large-scale linearly constrained optimization », *Math. Program.*, vol. 14, n° 1, p. 41-72, déc. 1978, doi: 10.1007/BF01588950.
- [25] R. F. Crawford et D. B. Schwartz, « General instability and optimum design of grid-stiffened spherical domes », *AIAAJ*, vol. 3, 1965.
- [26] D. H. Nguyen, « Direct limit analysis via rigid-plastic finite elements », *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 8, n° 1, p. 81-116, 1976, doi: 10.1016/0045-7825(76)90054-2.
- [27] C. V. Le, H. Nguyen-Xuan, et H. Nguyen-Dang, « Upper and lower bound limit analysis of plates using FEM and second-order cone programming », *Comput. Struct.*, vol. 88, n° 1-2, p. 65-73, 2010, doi: 10.1016/j.compstruc.2009.08.011.

- [28] A. V. Fiacco, « Penalty methods for mathematical programming in Enwith general constraint sets », *J. Optim. Theory Appl.*, vol. 6, n° 3, p. 252-268, sept. 1970, doi: 10.1007/BF00926603.
- [29] L. Bousshine, M. Bideq, M. Kouam, et G. Guerlement, « Limit analysis of cylindrical shells with several sections by kinematical and statical methods », *Rev. Eur. Elem.*, vol. 11, n° 1, p. 9-37, 2002, doi: 10.3166/reef.11.9-37.
- [30] C. Cinquini, D. Lamblin, et G. Guerlement, « Variational formulation of the optimal plastic design of circular plates », *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 11, n° 1, p. 19-30, 1977, doi: 10.1016/0045-7825(77)90065-2.