

Une introduction à la théorie des jeux

Chloé Capon¹ James C. A. Main^{1,2}

¹UMONS – Université de Mons, Belgium

²F.R.S.-FNRS



Les doctorants prennent le pouvoir – 10 mars 2025

Le métier de doctorant

Quel est le travail d'un doctorant ?

- ▷ Le doctorant est un **chercheur**.
- ▷ Il travaille sur une **thématique spécifique**.
- ▷ Au terme de son doctorat, il doit rédiger une **thèse**.



Il existe plusieurs type de doctorants.

Assistants

- ▷ 6 ans pour leur thèse.
- ▷ Grosse charge d'enseignement.

Doctorants boursiers

- ▷ 4 ans pour leur thèse.
- ▷ Pas ou peu d'enseignement.

Sommaire

- 1 Théorie des jeux et ses applications
- 2 Les jeux sous forme stratégique
- 3 Jeux séquentiels
- 4 Nos thématiques de recherche

Sommaire

1 Théorie des jeux et ses applications

2 Les jeux sous forme stratégique

3 Jeux séquentiels

4 Nos thématiques de recherche

Théorie des jeux

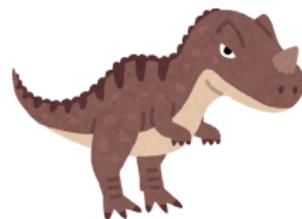
La **théorie des jeux** permet de modéliser mathématiquement des interactions stratégiques entre différentes entités sous forme de **jeux**.



Échecs



Économie



Évolution des espèces

En théorie des jeux, on suppose des joueurs qu'ils sont

- 1 **infiniment intelligents**,
- 2 **rationnels** et
- 3 **égoïstes**.

Théorie des jeux et informatique théorique

La théorie des jeux permet de modéliser des interactions continues entre des **systèmes informatiques** et leur **environnement incontrôlable**.



- ▶ Ces systèmes sont **difficiles à analyser** par des méthodes traditionnelles (e.g., tests unitaires).
- ▶ La théorie des jeux est utilisée pour développer des techniques de **conception automatique** de systèmes se comportant bien.

Voyons des **modèles de base** de la théorie des jeux.

Sommaire

1 Théorie des jeux et ses applications

2 Les jeux sous forme stratégique

3 Jeux séquentiels

4 Nos thématiques de recherche

Le dilemme du prisonnier

Deux personnes sont arrêtées et sont interrogées **séparément**.

- ▶ Si les **deux personnes se dénoncent mutuellement**, elles vont en prison 8 ans.
- ▶ Si **une seule personne dénonce**, la personne dénoncée va 10 ans en prison et l'autre est libérée.
- ▶ Si les **deux se taisent**, les deux vont 3 ans en prison.



| | T | D |
|---|---------|---------|
| T | (3, 3) | (10, 0) |
| D | (0, 10) | (8, 8) |



Comment jouer optimalement dans ce jeu ?

Analyse du dilemme du prisonnier

Si le deuxième joueur **se tait** :

| | T | D |
|---|---------|---------|
| T | (3, 3) | (10, 0) |
| D | (0, 10) | (8, 8) |

↪ D est le meilleur choix.

Si le deuxième joueur **dénonce** :

| | T | D |
|---|---------|---------|
| T | (3, 3) | (10, 0) |
| D | (0, 10) | (8, 8) |

↪ D est le meilleur choix.

Les deux joueurs, dans tous les cas, **vont dénoncer l'autre**.

- ▶ La stratégie D est **strictement dominante** dans ce jeu.
- ▶ Le profil de stratégie (D, D) est un **équilibre de Nash** : aucun des joueurs n'a d'intérêt à changer d'action s'il sait que l'autre jouera D.

Un autre exemple

- ▶ Deux amis **choisissent un sport** : l'escalade (E) ou la natation (N).
- ▶ Ils ont chacun une préférence pour **un sport spécifique**.
- ▶ Ils préfèrent **faire la même activité** qu'être séparés.



| | E | N |
|---|--------|--------|
| E | (3, 2) | (1, 1) |
| N | (0, 0) | (2, 3) |



- ▶ Il n'existe **pas de stratégie strictement dominante**.
- ▶ Ce jeu admet **plusieurs équilibres de Nash** : (E, E) et (N, N).

Le besoin d'aléatoire

Considérons maintenant **pierre-papier-ciseau**.

| | Pi | Pa | Ci |
|----|---------|---------|---------|
| Pi | (0, 0) | (-1, 1) | (1, -1) |
| Pa | (1, -1) | (0, 0) | (-1, 1) |
| Ci | (-1, 1) | (1, -1) | (0, 0) |



- ▶ À première vue, **pas d'équilibre de Nash** : il y a toujours quelqu'un qui peut changer son action et gagner.
- ▶ Un équilibre peut être obtenu en **jouant aléatoirement** : l'aléatoire permet de se rendre **imprévisible**.

Théorème. Dans tout jeu sous forme stratégique avec un nombre fini d'actions, il existe un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

Sommaire

- 1 Théorie des jeux et ses applications
- 2 Les jeux sous forme stratégique
- 3 Jeux séquentiels**
- 4 Nos thématiques de recherche

Jeux séquentiels

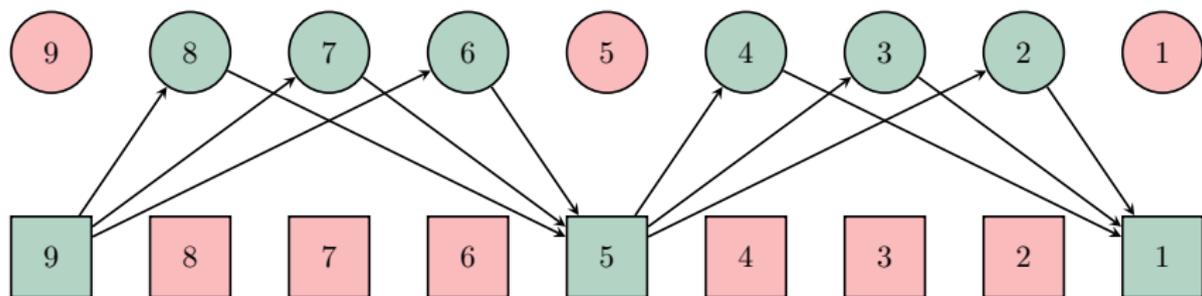
- ▶ Jusqu'ici, on a considéré des jeux avec **une seule manche**.
- ▶ Il existe aussi des modèles pour des **jeux séquentiels**.

Le **jeu de Nim** est un exemple de jeu séquentiel à deux joueurs.

- ▶ On commence avec 13 bâtonnets.
- ▶ À tour de rôle, chaque joueur enlève 1, 2 ou 3 bâtonnets.
- ▶ Celui qui retire le dernier bâtonnet a perdu.

Existe-t-il une stratégie qui gagne quoi que fasse l'autre ?

Comment trouver une bonne stratégie ?



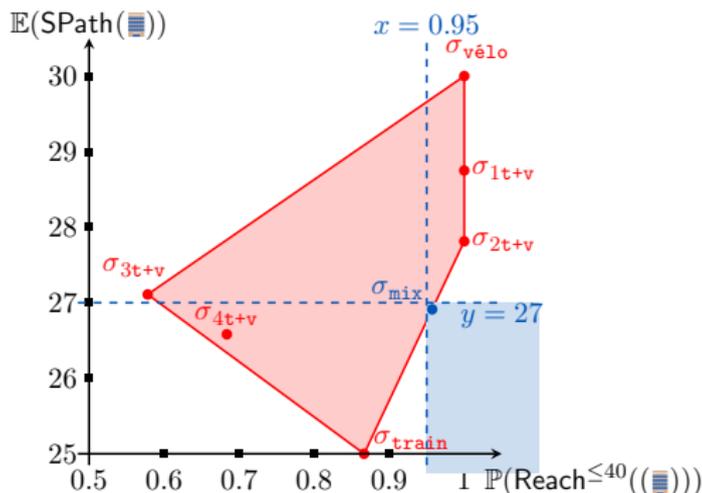
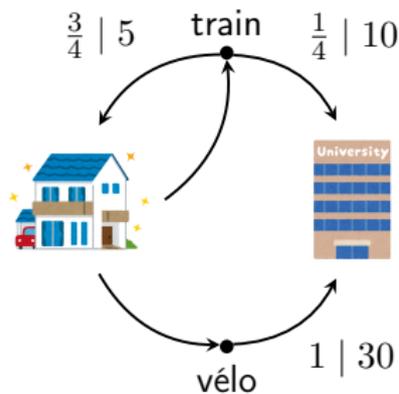
- ▶ On démarre des configurations **initialement gagnantes**.
- ▶ On raisonne **par induction** pour trouver toutes les configurations gagnantes.

La démarche utilisée ci-dessus est un cas particulier de **l'algorithme de l'attracteur** pour résoudre les jeux d'accessibilité sur graphe.

L'aléatoire dans la prise de décision séquentielle

À quoi peut servir **l'aléatoire** dans des modèles séquentiels ?

- ▶ Être **imprévisible**, comme dans pierre-papier-ciseaux.
- ▶ Pouvoir **équilibrer** plusieurs gains.



Sommaire

- 1 Théorie des jeux et ses applications
- 2 Les jeux sous forme stratégique
- 3 Jeux séquentiels
- 4 Nos thématiques de recherche

Nos thématiques de recherche

Problème central : la synthèse de contrôleurs pour des systèmes via la théorie des jeux.

Le groupe de recherche de **Mickaël Randour** s'intéresse à divers problèmes.

- ▶ Quelle est la **complexité des stratégies** nécessaire pour gagner dans certains jeux ?
- ▶ Comment peut-on s'en sortir s'il est **impossible de synthétiser un bon contrôleur** ?
- ▶ Comment construire des stratégies dans des **systèmes avec un nombre infini d'états** ?

Cours liés à notre recherche

Les bases de nos sujets de recherche sont présentés dans les cours :

- ▷ **Méthodes formelles pour la conception de systèmes** – Mickaël Randour ;
- ▷ **Mathématiques effectives** – Thomas Brihaye ;
- ▷ **Calculabilité et complexité** – Véronique Bruyère.

Merci pour votre attention !

References I

Toutes les images utilisées dans cet exposé proviennent de irasutoya.com.