

Difficultés d'étudiants universitaires dans la conceptualisation des équations de plans dans l'espace

Stéphanie Bridoux et Céline Nihoul

Université de Mons
Département de Mathématique



Espace & abstraction:
Evaluer les compétences complexes de la maternelle à l'université
14 novembre 2014

Contexte institutionnel

- Cours : Mathématiques élémentaires (pendant les six premières semaines).
- Public : étudiants de BA 1.
- Filières : mathématique, informatique et physique.
- Sujet : droites dans le plan, droites et plans dans l'espace.
- Un chapitre qui suit l'étude des droites dans le plan.

Contexte institutionnel

- Cours : Mathématiques élémentaires (pendant les six premières semaines).
 - Public : étudiants de BA 1.
 - Filières : mathématique, informatique et physique.
 - Sujet : droites dans le plan, droites et plans dans l'espace.
 - Un chapitre qui suit l'étude des droites dans le plan.
- ⇒ au cœur de la transition secondaire-université.

Plan

- 1 Difficultés repérées chez des étudiants de BA 1
- 2 Séquence d'enseignement
- 3 Conceptualisation et difficultés persistantes
- 4 Conclusion

Plan

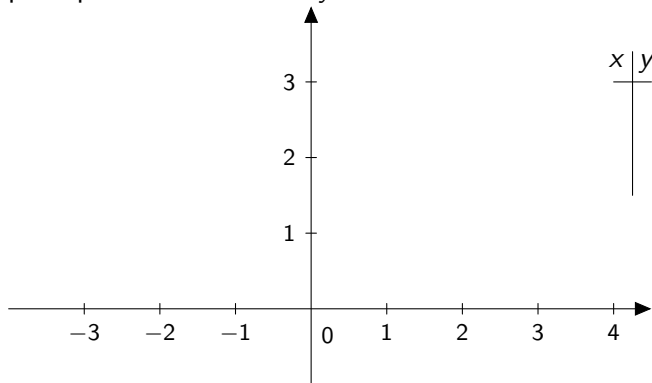
- 1 Difficultés repérées chez des étudiants de BA 1
- 2 Séquence d'enseignement
- 3 Conceptualisation et difficultés persistantes
- 4 Conclusion

Équation et ensemble de points (1/2)

La droite d'équation $2x + 3y = 6$ est l'**ensemble des couples** (x, y) du plan qui **satisfait** $2x + 3y = 6$.

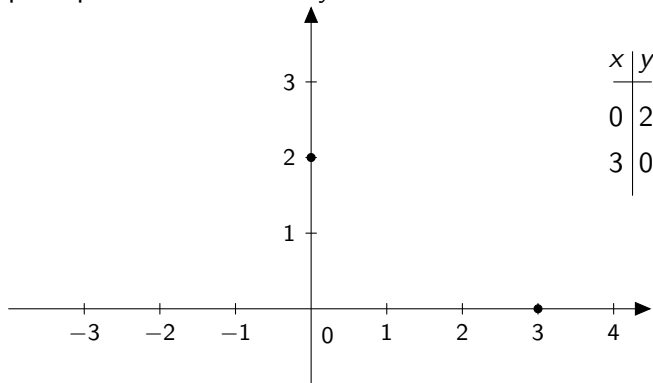
Équation et ensemble de points (1/2)

La droite d'équation $2x + 3y = 6$ est l'**ensemble des couples** (x, y) du plan qui **satisfait** $2x + 3y = 6$.



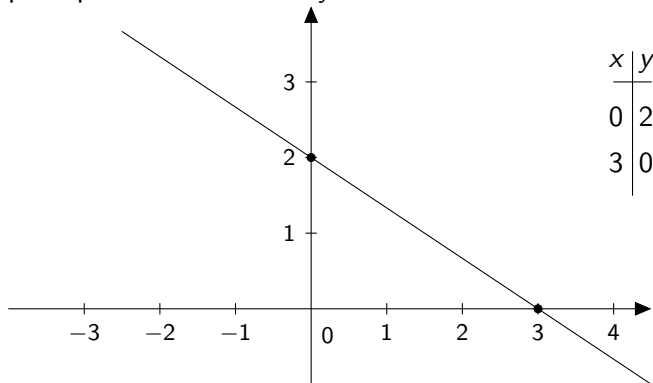
Équation et ensemble de points (1/2)

La droite d'équation $2x + 3y = 6$ est l'**ensemble des couples** (x, y) du plan qui **satisfait** $2x + 3y = 6$.



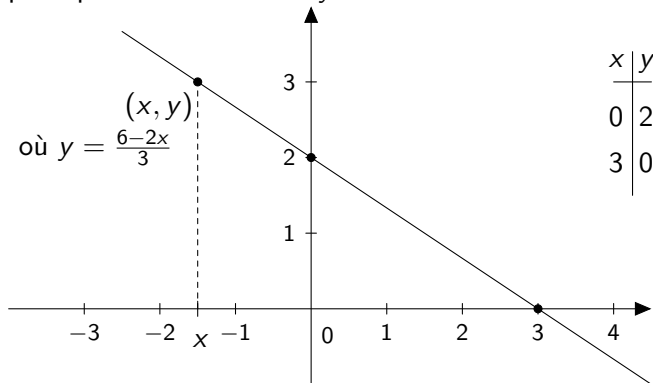
Équation et ensemble de points (1/2)

La droite d'équation $2x + 3y = 6$ est l'**ensemble des couples** (x, y) du plan qui **satisfont** $2x + 3y = 6$.



Équation et ensemble de points (1/2)

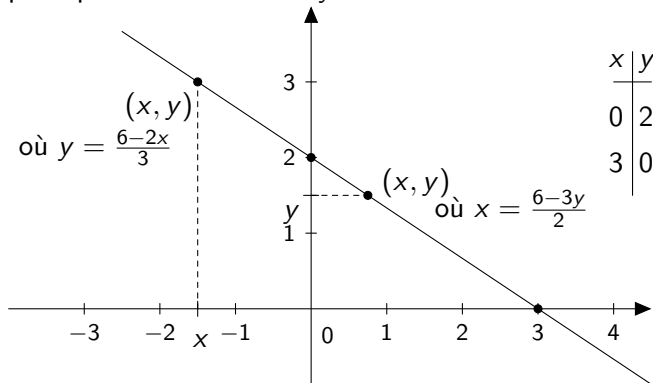
La droite d'équation $2x + 3y = 6$ est l'**ensemble des couples** (x, y) du plan qui **satisfont** $2x + 3y = 6$.



$$D = \left\{ \left(x, \frac{6-2x}{3} \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

Équation et ensemble de points (1/2)

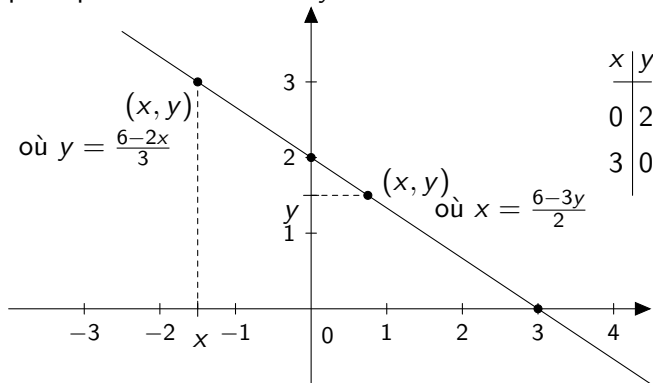
La droite d'équation $2x + 3y = 6$ est l'**ensemble des couples** (x, y) du plan qui **satisfont** $2x + 3y = 6$.



$$D = \left\{ \left(x, \frac{6-2x}{3} \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(\frac{6-3y}{2}, y \right) \mid y \in \mathbb{R} \right\}$$

Équation et ensemble de points (1/2)

La droite d'équation $2x + 3y = 6$ est l'**ensemble des couples** (x, y) du plan qui **satisfont** $2x + 3y = 6$.



$$D = \left\{ \left(x, \frac{6-2x}{3} \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(\frac{6-3y}{2}, y \right) \mid y \in \mathbb{R} \right\}$$

Difficulté : donner du sens à l'objet « équation » et à l'écriture ensembliste (capacité d'abstraction).

Équation et ensemble de points (2/2)

Dans l'espace, l'objet P décrit par l'équation $2x + 3y = 6$ est l'**ensemble des triplets** (x, y, z) qui **satisfont** $2x + 3y = 6$.

Équation et ensemble de points (2/2)

Dans l'espace, l'objet P décrit par l'équation $2x + 3y = 6$ est l'**ensemble des triplets** (x, y, z) qui **satisfont** $2x + 3y = 6$.

- Exemples : $(0, 2, 0)$, $(0, 2, 5)$ et $(3, 0, 7)$ satisfont l'équation.

Équation et ensemble de points (2/2)

Dans l'espace, l'objet P décrit par l'équation $2x + 3y = 6$ est l'**ensemble des triplets** (x, y, z) qui **satisfont** $2x + 3y = 6$.

- Exemples : $(0, 2, 0)$, $(0, 2, 5)$ et $(3, 0, 7)$ satisfont l'équation.
- $P = \{(x, \frac{6-2x}{3}, z) | x, z \in \mathbb{R}\}$ est un plan.

Équation et ensemble de points (2/2)

Dans l'espace, l'objet P décrit par l'équation $2x + 3y = 6$ est l'**ensemble des triplets** (x, y, z) qui **satisfont** $2x + 3y = 6$.

- Exemples : $(0, 2, 0)$, $(0, 2, 5)$ et $(3, 0, 7)$ satisfont l'équation.
- $P = \{(x, \frac{6-2x}{3}, z) | x, z \in \mathbb{R}\}$ est un plan.
- **Difficulté** : seuls les triplets de la forme $(x, y, 0)$ sont pris en compte.

Sens et visualisation

Passage du plan à l'espace

$$ax + by = c \quad \longrightarrow \quad ax + by + cz = d$$

où (a, b) est un vecteur normal où (a, b, c) est un vecteur normal

Sens et visualisation

Passage du plan à l'espace

$$ax + by = c$$

où (a, b) est
un vecteur normal



Droite



$$ax + by + cz = d$$

où (a, b, c) est
un vecteur normal



Plan

Sens et visualisation

Passage du plan à l'espace

$$ax + by = c$$

où (a, b) est
un vecteur normal



Droite

$$\longrightarrow ax + by + cz = d$$

où (a, b, c) est
un vecteur normal



Plan

Difficulté : visualisation des objets et capacité d'abstraction.

Sens et visualisation

Passage du plan à l'espace

$$ax + by = c$$

où (a, b) est
un vecteur normal



Droite



$$ax + by + cz = d$$

où (a, b, c) est
un vecteur normal

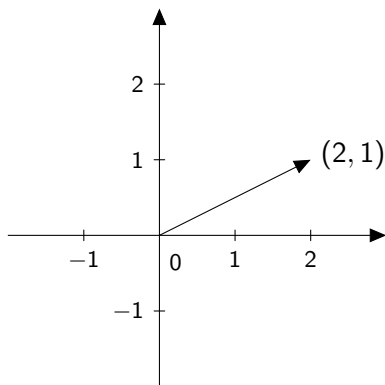


Plan

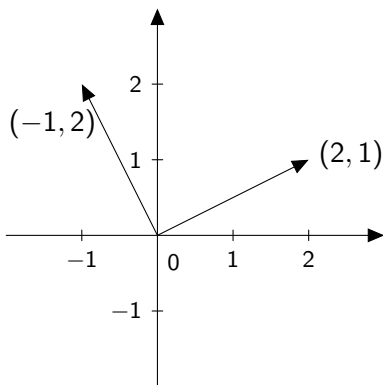
Difficulté : visualisation des objets et capacité d'abstraction.

Conception (erronée) très présente : l'équation $ax + by + cz = d$ décrit une droite.

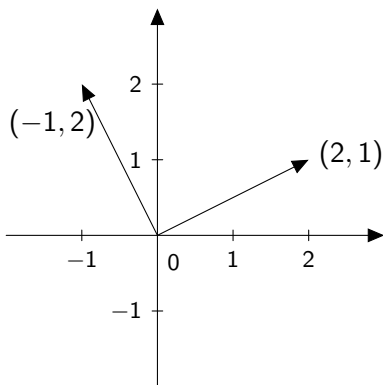
Orthogonalité dans le plan



Orthogonalité dans le plan



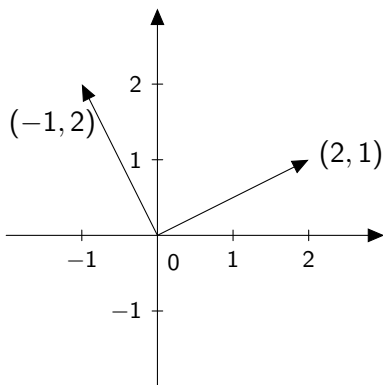
Orthogonalité dans le plan



Deux vecteurs sont perpendiculaires si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$$((a, b) | (-b, a)) = -ab + ba = 0$$

Orthogonalité dans le plan

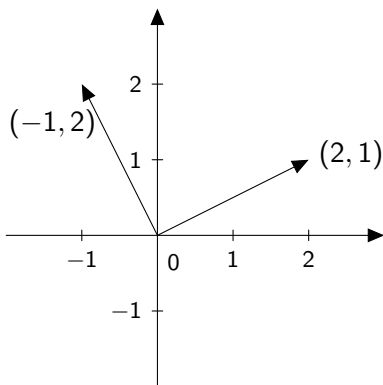


Deux vecteurs sont perpendiculaires si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$$((a, b) | (-b, a)) = -ab + ba = 0$$

$$((2, 1) | (-1, 2)) = 0$$

Orthogonalité dans le plan



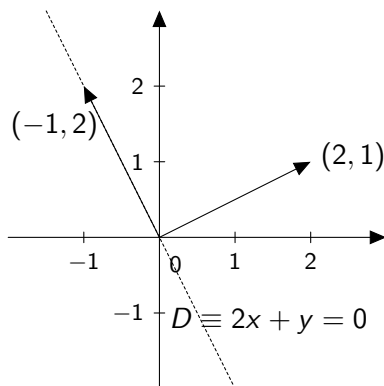
Deux vecteurs sont perpendiculaires si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$$((a, b) | (-b, a)) = -ab + ba = 0$$

$$((2, 1) | (-1, 2)) = 0$$

$$((2, 1) | (5, -10)) = 0$$

Orthogonalité dans le plan



Deux vecteurs sont perpendiculaires si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$$((a, b) | (-b, a)) = -ab + ba = 0$$

$$((2, 1) | (-1, 2)) = 0$$

$$((2, 1) | (5, -10)) = 0$$

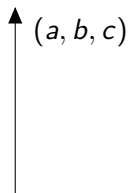
L'ensemble des vecteurs orthogonaux à $(2, 1)$ est la droite D d'équation $2x + y = 0$.

Orthogonalité dans l'espace

Soit le vecteur $(2, 1, 3)$. Les vecteurs $(0, 3, -1)$ et $(-1, 2, 0)$ sont orthogonaux au vecteur $(2, 1, 3)$ mais ils n'ont pas la même direction.

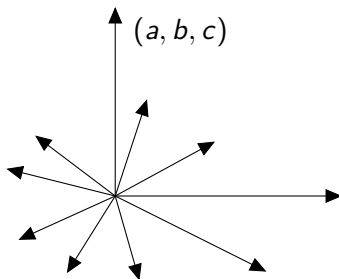
Orthogonalité dans l'espace

Soit le vecteur $(2, 1, 3)$. Les vecteurs $(0, 3, -1)$ et $(-1, 2, 0)$ sont orthogonaux au vecteur $(2, 1, 3)$ mais ils n'ont pas la même direction.



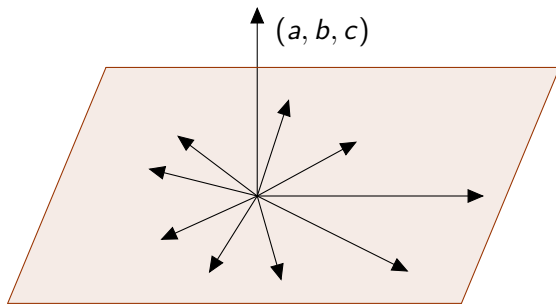
Orthogonalité dans l'espace

Soit le vecteur $(2, 1, 3)$. Les vecteurs $(0, 3, -1)$ et $(-1, 2, 0)$ sont orthogonaux au vecteur $(2, 1, 3)$ mais ils n'ont pas la même direction.



Orthogonalité dans l'espace

Soit le vecteur $(2, 1, 3)$. Les vecteurs $(0, 3, -1)$ et $(-1, 2, 0)$ sont orthogonaux au vecteur $(2, 1, 3)$ mais ils n'ont pas la même direction.



L'ensemble des vecteurs orthogonaux à (a, b, c) est le plan d'équation $ax + by + cz = 0$.

Plan

- 1 Difficultés repérées chez des étudiants de BA 1
- 2 Séquence d'enseignement
- 3 Conceptualisation et difficultés persistantes
- 4 Conclusion

Hypothèse didactique

Fil conducteur

Un travail d'interprétation des objets peut être producteur de sens chez les étudiants.

■ Leviers :

- 1 travailler des concepts issus de la logique et de la théorie des ensembles.
- 2 aller-retour entre différents registres (ensembliste, algébrique, dessin, langue naturelle).

- ### ■ Point de départ : les équations incomplètes de plans (Maurel, 2001 et Schneider, 2010).

Équations incomplètes de plans dans l'espace

Étude de l'équation $2x + 3y = 6$ dans l'espace :

- On cherche les triplets (x, y, z) qui satisfont l'équation $2x + 3y + 0z = 6$.
- L'objet décrit est $P = \{(x, \frac{6-2x}{3}, z) | x, z \in \mathbb{R}\}$.
- L'appui sur un dessin pourrait aider à donner du sens à l'écriture ensembliste et à développer la capacité d'abstraction.

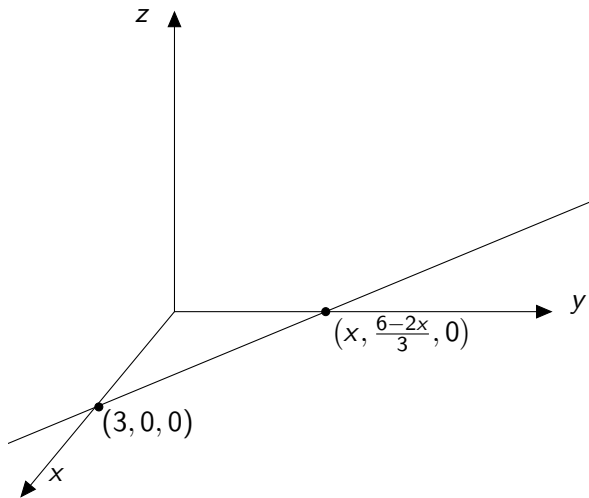
Équations incomplètes de plans dans l'espace

Étude de l'équation $2x + 3y = 6$ dans l'espace :

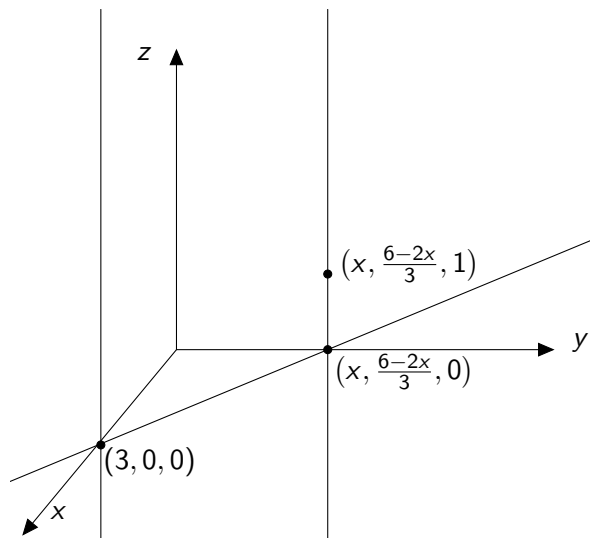
- On cherche les triplets (x, y, z) qui satisfont l'équation $2x + 3y + 0z = 6$.
- L'objet décrit est $P = \{(x, \frac{6-2x}{3}, z) | x, z \in \mathbb{R}\}$.
- L'appui sur un dessin pourrait aider à donner du sens à l'écriture ensembliste et à développer la capacité d'abstraction.

⇒ solliciter différents registres d'écritures pour donner du sens aux objets (Douady, 1987).

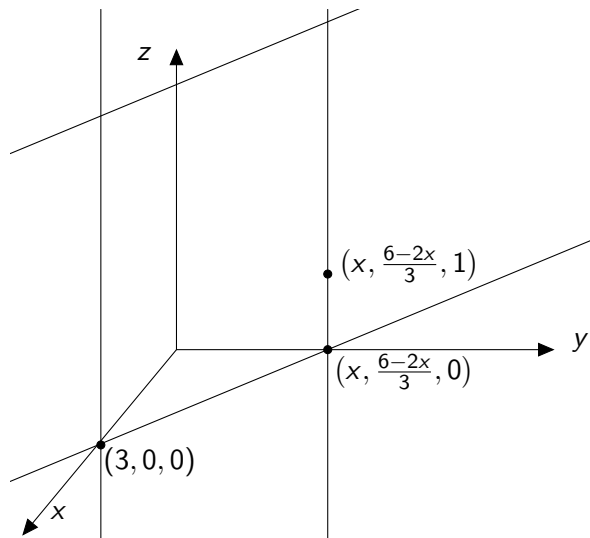
Équations incomplètes de plans dans l'espace



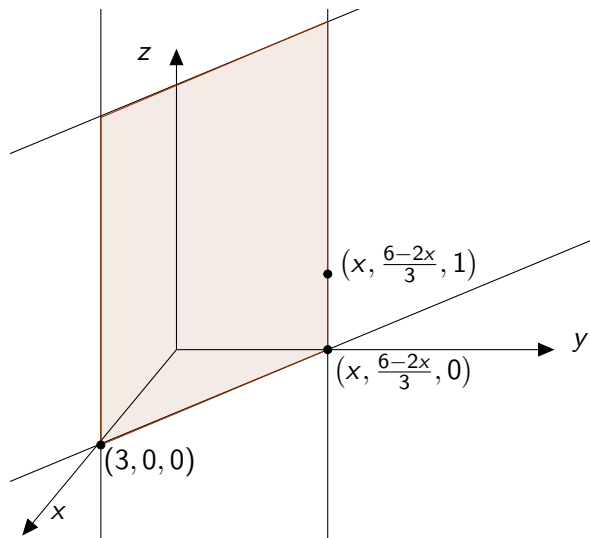
Équations incomplètes de plans dans l'espace



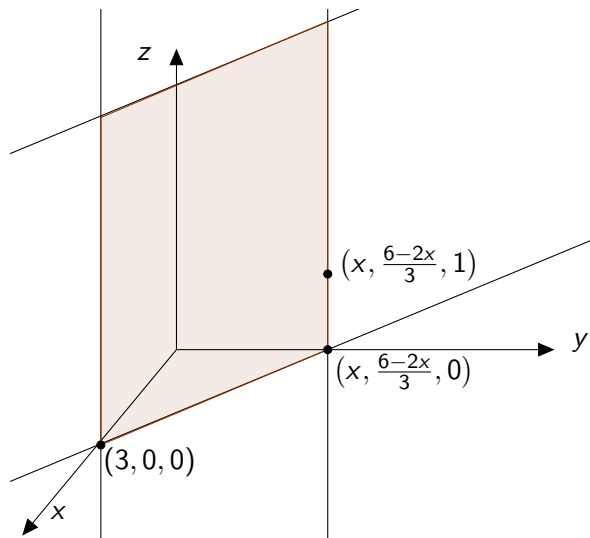
Équations incomplètes de plans dans l'espace



Équations incomplètes de plans dans l'espace



Équations incomplètes de plans dans l'espace



L'équation $2x + 3y = 6$ est l'équation d'un plan.

Exercices

Décrire des ensembles de points

Recherchez l'ensemble A des vecteurs $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux au vecteur $(1, -1, 2)$. Décrivez géométriquement l'ensemble A .

- Interprétation ensembliste : on peut écrire $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$.
- Description de l'objet : l'ensemble A est le plan d'équation $x - y + 2z = 0$. Il passe par $(0, 0, 0)$ et a pour vecteur normal $(1, -1, 2)$.

Exercices

Décrire des ensembles de points

Recherchez l'ensemble B des vecteurs $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ qui sont simultanément orthogonaux aux vecteurs $(1, -1, 2)$ et $(-2, 1, 4)$. Décrivez géométriquement l'ensemble B .

Les vecteurs recherchés sont solutions du système :

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

- Interprétation ensembliste : on a $B = \{(6\alpha_3, 8\alpha_3, \alpha_3) | \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$.
- Description de l'objet : B est la droite passant par $(0, 0, 0)$ et qui admet $(6, 8, 1)$ comme vecteur directeur.

Exercices

Décrire des ensembles de points

Recherchez l'ensemble B des vecteurs $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ qui sont simultanément orthogonaux aux vecteurs $(1, -1, 2)$ et $(-2, 1, 4)$. Décrivez géométriquement l'ensemble B .

Les vecteurs recherchés sont solutions du système :

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

- Interprétation ensembliste : on a $B = \{(6\alpha_3, 8\alpha_3, \alpha_3) | \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$.
- Description de l'objet : B est la droite passant par $(0, 0, 0)$ et qui admet $(6, 8, 1)$ comme vecteur directeur.

⇒ jeu entre les registres ensembliste, algébrique et de la langue naturelle.

Exercices

Rechercher une équation

Donnez une équation cartésienne du plan α passant par le point $(1, 1, 2)$ et contenant la droite D dont une équation paramétrique est $(x, y, z) = (4, 1, 1) + \lambda(3, 1, 1)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

On cherche une équation de la forme $ax + by + cz = d$ où (a, b, c) est un vecteur normal du plan. (a, b, c, d) est solution du système :

$$\begin{cases} a + b + 2c &= d \\ 4a + b + c &= d \\ 3a + b + c &= 0 \end{cases}$$

On a : $d = a$, $b = -6a$ et $c = 3a$ où $a \in \mathbb{R}$. Pour $a = 1$, on obtient le plan $\alpha \equiv x - 6y + 3z = 1$.

Exercices

Rechercher une équation

Donnez une équation cartésienne du plan α passant par le point $(1, 1, 2)$ et contenant la droite D dont une équation paramétrique est $(x, y, z) = (4, 1, 1) + \lambda(3, 1, 1)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

On cherche une équation de la forme $ax + by + cz = d$ où (a, b, c) est un vecteur normal du plan. (a, b, c, d) est solution du système :

$$\begin{cases} a + b + 2c = d \\ 4a + b + c = d \\ 3a + b + c = 0 \end{cases}$$

On a : $d = a$, $b = -6a$ et $c = 3a$ où $a \in \mathbb{R}$. Pour $a = 1$, on obtient le plan $\alpha \equiv x - 6y + 3z = 1$.

$\Rightarrow$ un travail sur le sens (interprétation des informations) et la technique (connaissances algébriques).

Plan

- 1 Difficultés repérées chez des étudiants de BA 1
- 2 Séquence d'enseignement
- 3 Conceptualisation et difficultés persistantes
- 4 Conclusion

Tests hebdomadaires

- Un test chaque lundi matin pour le cours de Mathématiques élémentaires.
- Matière cumulative.
- Public : section mathématique (24 étudiants).

Test 4

Question

Soit le système

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}$$

- 1 Réolvez ce système dans le plan $\mathbb{R}^2$. Interprétez géométriquement les résultats obtenus.
- 2 Réolvez ce système dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Interprétez géométriquement les résultats obtenus.

Résultats

- Dans le plan :
 - Résolution algébrique réussie par 92% des étudiants.
 - Procédures :
 - substitution (25%)
 - combinaison (12%)
 - Cramer (63%)
 - Interprétation géométrique correcte chez 83% des étudiants.

Résultats

■ Dans le plan :

- Résolution algébrique réussie par 92% des étudiants.
- Procédures :
 - substitution (25%)
 - combinaison (12%)
 - Cramer (63%)
- Interprétation géométrique correcte chez 83% des étudiants.

■ Dans l'espace :

- 21% des étudiants réussissent la question.
- Procédure : utilisation du point précédent (54%).
- Construction des solutions :
 - avec z quelconque (17%)
 - avec z nul (50%)
- Interprétation géométrique correcte chez 46% des étudiants.
- Difficulté persistante : passage du registre algébrique à l'interprétation.

Exemples

b) Dans $\mathbb{R}^3$ en $(\frac{14}{13})$

$$\begin{cases} x + 2y + 0z = 4 & (1) \\ 5x - 3y + 0z = 1 & (2) \end{cases}$$

(a) $x = \frac{14}{13}$ $y = \frac{19}{13}$ $(z = 0) ?$

la solution est $\left\{ \left(\frac{14}{13}, \frac{19}{13}, 0 \right) \right\}$

Écriture correcte du système correcte. Mais le système a une unique solution (prendre $z = 0$).

Exemples

Remplacement de x :

$$x + \frac{-13}{5} = 4$$

$$x = \frac{26}{5} + \frac{13}{5} = \frac{39}{5}$$

point en.

Toutefois, z , lui, peut prendre toutes les valeurs possibles $\in \mathbb{R}$.

ici, on a une solution du système.

un point

$S = \left\{ \frac{39}{5}, -\frac{13}{5}, z \right\}$ est une solution du système.

Cela signifie que l'intersection des 2 plans est une droite $\parallel$ à z .

$\Rightarrow$ un point n'est pas une droite.

2/8

Comme z varie dans $\mathbb{R}$, on peut lui attribuer une valeur particulière. Le système a une unique solution.

Exemples

remplacement $x = 1$ point en

$$x + \frac{-13}{5} = 4$$

$$x - \frac{26}{5} = 4$$

$$x = \frac{20}{5} + \frac{26}{5} = \frac{46}{5}$$

Ta solution z , lui, faut prendre toutes les valeurs possibles $\in \mathbb{R}$.

ici, après un point

$S = \left\{ \frac{46}{5}, -\frac{13}{5}, 42 \right\}$ est une solution du système.

Cela signifie que l'intersection des 2 plans est une droite $\parallel$ à z

$\hookrightarrow$ un point direct par la droite

2/8

Résolution algébrique incohérente avec l'interprétation géométrique qui est correcte.

Test 5

Question

Soit l'ensemble $A = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 | (\alpha, \beta, \gamma) \text{ est un vecteur orthogonal au vecteur } (4, -1, -1)\}$. Décrivez géométriquement l'ensemble A.

- 67% des étudiants réussissent la question.
- Procédures :
 - 1 développer le produit scalaire et identifier l'objet à partir d'une équation cartésienne (50%).
 - 2 considérer le vecteur $(4, -1, -1)$ comme un vecteur normal de l'objet (25%).
- Interprétation géométrique : 58% des étudiants reconnaissent qu'il s'agit d'un plan.

Exemples

Recevez géométriquement l'ensemble $\mathcal{A}$.

C'est un ensemble de plans // les uns aux autres et
orthogonaux à $(4, -1, -1)$
le plan passant par $(0, 90)$

Reconnaissance de l'objet « plan » mais pas de son unicité.

Exemples

On sait que $((\alpha, \beta, \gamma) | (4, -1, -1)) = 0$ puisque ces deux vecteurs sont orthogonaux. Donc

$$A = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid 4\alpha - \beta - \gamma = 0\} \text{ (déf. du prod. scalaire).}$$

A est un plan de vecteur normal $(4, -1, -1)$ passant par l'origine. 4/7

Résolution, justification et interprétation correcte.

Plan

- 1 Difficultés repérées chez des étudiants de BA 1
- 2 Séquence d'enseignement
- 3 Conceptualisation et difficultés persistantes
- 4 Conclusion

Bilan

- Objectif de la séquence : travailler sur l'interprétation des objets à partir de leurs équations ainsi que sur la description d'ensembles de points.
- Ce choix tente de prendre en compte les difficultés repérées chez les étudiants et de travailler des concepts de logique et de théorie des ensembles (très utilisés en BA 1).
- Point positif : passage du registre ensembliste à l'interprétation.
- Difficulté persistante : passage du registre algébrique à l'interprétation.
⇒ Quel type d'abstraction ? Quel type de visualisation ?
(Nihoul, thèse en cours).